بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش‌وبرنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات‌وتکنولوژی آموزشی

رشد آموزش ریاضی

۱۱۵

دورهٔ سی و یکم، شمارهٔ ۳، بهار ۱۳۹۳

فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی

مجلهٔ رشـد آموزش ریاضی، نوشـته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشـگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به‌ویژه معلمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

● نشانی دفتر مجله: تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶. صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ ● تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴) ● نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ ● وبگاه: www.roshdmag.ir ● پیام‌نگار: riyazi@roshdmag.ir ● تلفن پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ ● کد مدیرمسئول: ۱۰۲ ● کد دفتر مجله: ۱۱۳ ● کد امور مشترکین: ۱۱۴ ● نشانی امور مشترکین: تهران، صندوق پستی: ۱۶۵۹۵/۱۱۱ ● تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ – ۷۷۳۳۶۶۵۵ ● چاپ: شرکت افست (سهامی عام) ● شمارگان: ۷۰۰۰

● مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود. ● شکل قرار گرفتن جدول‌ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.
● نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود. ● برای ترجمهٔ مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمهٔ یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمهٔ ارائه شده، سفارش ترجمه به فرستندهٔ مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می‌تواند سفارش ترجمهٔ مقاله را به مترجم دیگری بدهد. ● در متن‌های ارسالی تا حد امکان از معادل‌های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود. ● پی‌نوشت‌ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد. ● چکیده‌ای از اثر و مقالهٔ ارسال‌شده در حداکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.
● در مقاله‌های تحقیقی یا توصیفی، واژه‌های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود. همچنین: ● مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است. ● مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبین نظر دفتر انتشارات کمک‌آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ‌گویی به پرسش‌های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است. ● مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

سخن سردبیر

یار درخانه و ما گِرد جهان می‌گردیم!

شورای ملی معلمان ریاضی[1] در ایالات متحده و کانادا (NCTM)، از زمان تأسیس در سال ۱۹۲۰ تا به حال، نقش بی‌بدیلی در تغییرات برنامه‌های درسی ریاضی داشته و پیوسته بر سیاست‌گذاری‌های مربوط به برنامه‌های درسی، آموزش معلمان و ارزشیابی ریاضی تأثیرگذار بوده است. این در حالی است که نظام آموزشی در ایالات متحده غیرمتمرکز است و آموزش جزو مسئولیت‌های دولت فدرال/ مرکزی نبوده و از وظایف ایالت‌هاست. این شورا، به‌دلیل بهره‌مند بودن از توانایی‌های خبره‌ترین افراد متخصص در ریاضیات و آموزش ریاضی و استفاده از خرد جمعی، هدایت پروژه‌های تحقیقی آموزش ریاضی، توصیه‌های قابل اجرا برای تولید برنامه‌های درسی ریاضی و تهیهٔ اسنادی را در کارنامه خود دارد و توانسته است به اندازهٔ یک نهاد سیاست‌گذار آموزشی در یک نظام آموزشی غیرمتمرکز، ارتقا پیدا کند؛ از این‌رو اسناد تولید شده در این شورا، شأنیت اسناد بالادستی آموزش ریاضی را در آمریکا داراست.

در سال ۱۹۸۰ میلادی، شورای مذکور، بیانیه‌ای با عنوان «دستور کار برای عمل[2]» منتشر کرد و در آن، بر لزوم دوباره‌نگری در برنامه‌های درسی ریاضیِ مدرسه‌ای در ایالات متحده تأکید نمود و «حل مسئله» را «قلب تپندهٔ» آن نامید.

آن بیانیه، بازتاب نیازی بود که نسبت به ضرورت ایجاد تغییر در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای، در دنیای به‌شدت در حال دگرگونی، ابراز شده بود و به «سواد ریاضی[3]» و «مهارت تکنولوژیکی[4]» به مثابه مهم‌ترین آن‌ها، ارجاع داده شده بود (مرکز مطالعه برنامه درسی ریاضی[5]، ۲۰۰۴). هم‌چنین، برای اطمینان از کیفیت تحقیقات انجام شده در حوزه برنامه درسی ریاضی، بیان اهداف و ارائه جهت تغییرات و متعاقب آن، ایجاد امکان برای انجام اصلاحات و ارزشیابی از برنامه تولید شده در مقیاس کلان، این شورا، تدوین یک مجموعه را در دستور کار خود قرار داد که محصول نهایی آن، تحت عنوان «استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی برای ریاضیات مدرسه‌ای[6]»، در سال ۱۹۸۹ منتشر شد و از آن زمان تا به حال، این سند منشأ یا بهانه‌ای برای توجیه بسیاری از تحولات «مناسب» و «نامناسب» برنامه‌های درسی ریاضی در جهان شده است. در این سند آمده است که هدف از تبیین استانداردها، تبیین ضوابطی برای ایجاد تغییرات تعالی‌بخش در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای است که این ضابطه‌ها، به‌صورت گزاره‌هایی صورت‌بندی شده‌اند (ص ۲، نقل شده در بالا).

تاریخ تکوین ایدهٔ تبیین «استاندارد» برای برنامهٔ درسی، آن هم در نظام‌های آموزشی غیرمتمرکز، از زمان بیانیه ۱۹۸۰ شکل گرفت و در سال ۱۹۸۶، شورا، «کمیسیون استانداردها برای ریاضیات مدرسه‌ای[7]» را به ریاست توماس رامبرگ، برپا نمود تا این ایده، عملیاتی شده و به محصول برسد. علاوه بر ریاست این کمیسیون، ۱۲ عضو آن نیز از خردمندترین افراد با تخصصِ مرتبط و با پیشینهٔ تحقیقی- عملی قابل شناسایی و قابل قدرشناسی از طرف جامعه علمی، انتخاب شدند. حضور این افراد باعث تولید سندی شد که در تاریخ مطالعات برنامه درسی، از آن به‌عنوان یک نقطه عطف یاد می‌شود. برای این کمیسیون، چهار گروه کاری به ترتیب زیر تعریف شد:

- پایه‌های تحصیلی پیش‌دبستانی تا ۴ به سرپرستی پال ترافتون[8]
- پایه‌های تحصیلی۵ تا ۸ به سرپرستی گلندا لَپَن[9]
- پایه‌های تحصیلی۹ تا ۱۲ به سرپرستی کریستِیَن هِرش[10]
- ارزشیابی به سرپرستی نورمَن وب[11]

این کمیسیون، چهار هدف عمده برای جامعه خود در نظر گرفت (مرکز مطالعه برنامه درسی ریاضی، ۲۰۰۴، ص ۲) که عبارت بودند از:

- کارگران با سواد ریاضی
- یادگیری در طول عمر
- [ایجاد] فرصت یادگیری برای همه
- رأی‌دهندگان آگاه.

هم‌چنین این کمیسیون، پنج هدف زیر را برای دانش‌آموزان تبیین نمود.

- یاد بگیرند که برای ریاضی ارزش قایل شوند؛
- نسبت به توانایی خود در انجام ریاضی، اعتمادبه‌نفس پیدا کنند؛
- مسئله حل‌کن‌های ریاضی شوند؛
- یاد بگیرند که ریاضی‌وار ارتباط برقرار کنند؛
- یاد بگیرند که ریاضی‌وار استدلال کنند (ص ۵، به نقل از مرکز مطالعه برنامه درسی ریاضی، ۲۰۰۴).

تا اینجا، تاریخ مکتوب وجود دارد که مطالعهٔ آن برای شروع هر کار جدیدی، در رابطه با ایجاد تغییرات در برنامه و کتاب‌های درسی ریاضی، یک ضرورت است. اما آنجا که مربوط به اتفاقات بومی، یعنی برنامه‌های درسی ریاضیات در ایران، می‌شود، این تاریخ بیشتر شفاهی است و ثبت و ضبط نظام‌وار نشده است. بدین سبب لازم است که برای شروع فعالیت‌های جدید یا اصلاحی در این حوزه، هم فراتحلیلی از پژوهش‌های انجام شده در ایران انجام شود و هم مطالعه‌ای تاریخی و اسنادی صورت گیرد تا با استناد به آن چه که وجود دارد، مجبور به اختراع مجدد چرخ نشویم.

در تابستان ۱۹۸۷ و ۱۹۸۸، پیش‌نویس‌های این سند، برای نقد و اعتباربخشی، در اختیار ۸۰۰۰۰ عضو رسمی و بیش از ۲۰۰ سازمان وابسته به این شورا در آمریکا و کانادا قرار گرفت. من در سال ۱۹۸۷ که دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی بودم و به قول قدیمی‌ها، ستاره‌ام با سعد قرین بود که در یکی از درس‌ها، به نقد و بررسی این پیش‌نویس پرداختیم. در این بررسی‌ها، تحولات عمدهٔ درون ریاضی، عوامل تأثیرگذار اجتماعی، سیاسی، اقتصادی، فرهنگی و به‌خصوص عوامل جمعیت‌شناختی و دگرگونی‌های بازار کار مورد توجه قرار می‌گرفت و با در نظر گرفتن آن‌ها، «استانداردها»ی پیشنهادی، بررسی شدند.

انتشار این استانداردها در سال ۱۹۸۹ میلادی/ ۷۱-۱۳۷۰ خورشیدی، موج بزرگی در جهان ایجاد کرد. به دلیل اهمیت این سند و موج جدیدی که برای برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای به وجود آمد، از توماس شرودر[12] که یکی از اعضای کمیسیون تدوین دومین سند معروف این شورا یعنی «استانداردهای تدریس برای ریاضیات مدرسه‌ای» (۱۹۹۱) بود، به عنوان سخنران مدعو در بخش آموزش ریاضی «بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران» که در دانشگاه صنعتی شریف برگزار شد، دعوت به عمل آمد. شرودر در این سخنرانی، به چگونگی شکل‌گیری ایده‌ای به نام استاندارد برای برنامه درسی پرداخت و کلیات این دو سند را معرفی کرد. وی هم‌چنین، با خود کتاب‌ها و اسناد بسیاری سوغات آورد که از آن جمله، می‌توان به مجموعه‌ای با عنوان «ضمیمه[13]» برای به‌کارگیری مناسب استانداردها اشاره نمود (این مجموعه بیش از ۳۰ جلدی، بعدها در سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی ترجمه شد). پس از آن، در کنفرانس‌های آموزش ریاضی که از سال ۱۳۷۵ آغاز شد، به طور منظم، معرفی تحولات برنامه‌های درسی ریاضی در جهان و نقد و بررسی اسناد تولید شده در دستور کار قرار گرفت. علاوه بر این‌ها، به مناسبت سال جهانی ریاضی ۲۰۰۰، از توماس رامبرگ -رئیس کمیسیون تدوین استانداردهای ۱۹۸۹- دعوت شد تا در چهارمین کنفرانس آموزش ریاضی که در زمستان ۱۳۷۹ (۲۰۰۰ میلادی) در تهران برگزار شد، به توصیف «ریشه‌های اندیشمندانه استانداردها» پرداخت که ترجمهٔ خلاصه‌ای از سخنرانی او در همین مجله چاپ شد.

بالاخره، اگر با کلیدواژه‌های استانداردها و برنامه‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای در شماره‌های مختلف این مجله جست‌وجو شود، ده‌ها و ده‌ها مقاله تألیفی و ترجمه‌ای یافت می‌شود که در هر یک، به بخشی از این فراز و فرود جهانی و بومی توجه شده است.

خلاصه کلام این که؛ اگرچه ما در مواقعی با تحولات جهانی، اختلاف زمانی جدی داشته‌ایم، اما خوشبختانه به دلایل گوناگون، با تحولاتی که ایدهٔ استانداردها در تدوین برنامه‌های درسی ریاضی ایجاد کرد، همسو بوده‌ایم. در حقیقت، ضروری است که برای هر اقدام تازه‌ای، وضعیت موجود و راه طی شده تا به حال، ثبت و ضبط و تحلیل شود. در ایران، فعالیت‌های متعددی در رابطه با تدوین استانداردهای بومی برای برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای انجام شده است. حق مطلب این است که از این سرمایه ملی استفاده کنیم؛ چرا که وقتی «یار در خانه است»، ضرورتی ندارد که «گِرد جهان بگردیم!»

زهرا گویا

پی‌نوشت‌ها

1. National Council of Teachers of Mathematics
2. Agenda for Action
3. Mathematical Literacy
4. Technological Agility
5. Center for Study in Mathematics Curriculum
6. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics
7. Commission on Standards for School Mathematics
8. Paul R. Trafton
9. Glenda Lappan
10. Christian R. Hirsch
11. Norman Webb
12. Thomas Schroeder
13. Adenda

منابع

1. Center for the Study of Mathematics Curriculum. (2004). **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics: National Council of Teachers of Mathematics- Commission of Standards for School Mathematics 1989.** The Author*.

اجازه استفاده آموزشی از این سند، توسط این مرکز، داده شده است (پانویس)

2. National Council of Teachers of Mathematics. (1980). An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s. Reston, VA: The Author.
3. National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reson, VA: The Author.

مقاله

اعداد اعشاری و ریاضی مدرسه‌ای در ایران

رضا معطی، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی اراک
سهیلا غلام آزاد، پژوهشگاه مطالعات آموزش‌وپرورش

چکیده

اعداد اعشاری یکی از مباحث پایه‌ای در ریاضیات مدرسه‌ای است. این اعداد طی چندپایهٔ کلاسی، که شروع آن دورهٔ ابتدایی است، معرفی می‌شوند و بعد از آن، به‌عنوان یکی از مفهوم‌ها و ابزارهای مفید و قابل توسعه، در سراسر برنامه مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مقاله، ضمن مرور کوتاهی بر پیشینهٔ اعداد اعشاری، به عملکرد دانش‌آموزان ایرانی در بخش اعداد اعشاری در «مطالعهٔ تیمز»، و نیز نقش و جایگاه اعداد اعشاری در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای در ایران می‌پردازیم. در پایان، پژوهشی را که اخیراً در مورد بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان پایهٔ سوم راهنمایی در رابطه با اعداد اعشاری انجام شده است، معرفی می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها: عدد اعشاری، برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای، تیمز

امروزه، آموزش ریاضی در بســیاری از کشورها از اهمیت خاصی برخوردار است. آن‌چه که جوامع از آموزش ریاضی انتظار دارند، از یک طرف فراهم آوردن یک سطح قابل قبول از سواد ریاضی برای تمام دانش‌آموزان است، به‌طوری که آن‌ها را قادر سازد در زمان مقتضی، به دانش ریاضی و در صورت نیاز، به تفکر در دنیای واقعی مجهز شوند و از طرف دیگر، این سواد ریاضی، نیروی کار مورد نیاز و از لحاظ ریاضی واجد شرایط را برای جامعه فراهم آورد (آرتیگ، ۱۳۸۹).

در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای، محتوا نقش بسیار اساسی دارد و یکی از موضوعات ریاضی که همواره در محتوای برنامه درسی ریاضی مطرح شده و در دوره‌های مختلف آموزشی در سطح و عمق متفاوت تدریس می‌شود، اعداد اعشاری است. اعداد اعشاری از مفاهیم پایه، در مباحث و موضوعات مختلف ریاضی است و کاربردهای فراوانی نیز در زندگی روزمره دارد. به‌عنوان نمونه، یکی از کاربردهای عمدهٔ این اعداد در پزشکی و تزریق داروست. در این راستا، می‌توان به گزارشی اشــاره کرد که در رابطه با خطاهای پرســتاران، در یکی از شبکه‌های رادیویی استرالیا[1] منتشر شــده است. براساس این گزارش، در یک دورهٔ ۵ ساله، در اثرخطاهای پرستاران، حدود ۲۰۰۰ نفر به‌طور تصادفی کشته شده و ۱۰۰۰۰ نفر آسیب دیده‌اند که دلیل کشته شدن ۴۰۰ نفر از آن‌ها، اشتباه در برنامهٔ تزریق دارو بوده است. این یک خطای محاسباتی مرسوم است که به گفتهٔ استینل (۲۰۰۴)، پرستاران آن را «مرگ با اعشار» نامیده‌اند.

اعداد اعشاری، نقش برجسته‌ای در ایجاد ارتباط و اتصال بین مفاهیم ریاضی دارند و همواره، یکی از موضوعات پرکاربرد در درون ریاضی بوده‌اند. برای مثال، ابداع لگاریتم بیش از همه مرهون کاربرد کسرهای اعشاری بوده است (اسمیت، ۱۹۲۵). همچنین، درک مفهوم نماد علمی، با فهم اعداد اعشاری ارتباط مستقیم دارد. به‌عنوان نمونه‌ای دیگر از کاربردهای اعداد اعشاری در تدریس مفاهیم ریاضی، می‌توان به یکی از فعالیت‌های طراحی شده توسط میسون (۱۳۸۷) اشاره کرد که در آن، با استفاده از دانش رایج یادگیرندگان در رابطه با اعداد اعشاری متناهی و نامتناهی، به مفهوم حد می‌رسد. او تأکید می‌کند که یک جنبهٔ مهم این فعالیت آن است که یادگیرندگان، با اشیای آشنا (ارقام) دست‌ورزی می‌کنند تا اعداد را بسازند و از این طریق، درکی از ساختار اعداد به‌دست آورند. مثلاً اگر در یک بحث کلاسی، یادگیرندگان بتوانند دربارهٔ ماهیت دنباله ... و ۲/۴۹۹۹۷ و ۲/۴۹۹۷ و ۲/۴۹۷ و ۲/۴۷ با استدلال بحث کنند و معنای حد این دنباله را درک نمایند، آن‌گاه دامنهٔ اعداد اعشاریِ آشنای خود را بسط داده‌اند و می‌توانند درکی از اعداد اعشاریِ به اندازهٔ کافی بلند و نامتناهی به‌دست آورند.

مرور ادبیات حوزهٔ آموزش ریاضی نشان می‌دهد که با وجود اهمیتی که اعداد اعشاری دارند، یادگیری آن‌ها یکی از چالش‌های عمدهٔ دانش‌آموزان در کشورهای مختلف است. بدین سبب، مطالعات بسیاری در این زمینه انجام گرفته است که از آن جمله، می‌توان به تحقیقات انجام شده در حوزهٔ بدفهمی‌های اعداد اعشاری (استینل و استیسی[۲]، ۲۰۰۴)، اشتباهات بین اعداد اعشاری و کسری و منفی (استیسی و هلم[۳] و استینل، ۲۰۰۱) و بدفهمی‌های اعداد (سادی[۴]، ۲۰۰۷)، اشاره کرد.

مرور ادبیات حوزهٔ آموزش ریاضی نشان می‌دهد که با وجود اهمیتی که اعداد اعشاری دارند، یادگیری آن‌ها یکی از چالش‌های عمدهٔ دانش‌آموزان در کشورهای مختلف است

بررسی برنامهٔ درسی سومین مطالعهٔ بین‌المللی ریاضیات و علوم- تیمز[۵]- نیز نشان می‌دهد که اعداد اعشاری، یکی از موضوعات مهم در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای در تمام کشورهای شرکت‌کننده در این مطالعه است. به‌دلیل چنین جایگاهی، در سال‌های ۱۹۹۹، ۲۰۰۳ و ۲۰۱۱ که این مطالعه انجام شد در هر سال، نه سؤال، و در سال ۲۰۰۷ سه سؤال، به اعداد اعشاری اختصاص داده شده بود. نتایج سؤالات مرتبط با اعداد اعشاری این آزمون در سال ۲۰۱۱، نشان می‌دهد که نمرهٔ دانش‌آموزان ایرانی در تمام آن‌ها، کمتر از میانگین کل کشورهای شرکت‌کننده در این آزمون بوده است (تیمز ۲۰۱۱). همچنین، نتایج بررسی سؤالات تیمز ۲۰۰۳ نشان می‌دهد که میانگین عملکرد دانش‌آموزان در حوزه اعداد اعشاری برای دانش‌آموزان پایه هشتم (سوم راهنمایی)، کمتر از میانگین بین‌المللی بوده است (محمد اسماعیل ۱۳۸۴، نقل شده در غلام‌آزاد، ۱۳۹۱). جدول ۱، عملکرد دانش‌آموزان ایرانی شرکت کننده در تیمز ۲۰۱۱ را به تفکیک هر سؤال مربوط به اعداد اعشاری، نشان می‌دهد.

علاوه بر این، نتایج ارزشیابی پایانی برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ راهنمایی در ایران نشان می‌دهد که اهداف پیش‌بینی شده در برنامهٔ درسی، در مبحث یادآوری اعشاری در پایهٔ اول راهنمایی، در حد ملاک تحقق پیدا نکرده است و عملکرد معلمان در رفع بدفهمی‌های دانش‌آموزان در این مباحث، کمتر از حد ملاک بوده است (غلام‌آزاد، ۱۳۹۱). به‌عنوان نمونه، نتایج این ارزشیابی نشان می‌دهد که تنها ۴۴ درصد دانش‌آموزان پایهٔ اول راهنمایی، حاصل‌ضرب ۱۰۰۰×۰/۶۸ را به درستی پاسخ داده‌اند و فقط ۴۱ درصد آن‌ها، توانایی مرتب‌کردن چهار عدد ۰/۹۹۹، ۰/۹، ۰/۹۹، ۰/۹۹۹۹ را با ترتیب از بزرگ به کوچک دارند.

با توجه به اهمیت اعداد اعشاری در حوزهٔ ریاضی و کاربرد آن در زندگی روزمره، هدف این مقاله، مروری اجمالی بر تاریخچهٔ اعداد اعشاری، و بررسی جایگاه این اعداد در برنامهٔ درسی ریاضیات مدرسه‌ای ایران است.

پیشینهٔ تاریخی

از اینکه اولین‌بار، چه کسی کسرهای اعشاری را با نماد ممیز به‌کار برده است، اطلاع موثقی در دست نیست، اما شواهد تاریخی نشان می‌دهد که کسرهای اعشاری از ابداعات دانشمندان

ایرانی-اسلامی بوده است و آن‌ها در این مورد، مانند هر ابداع مهمی، پیش از آنکه به شکل دقیقی نمایان شـــود، نسبت به مفهوم اعداد اعشاری، شهودی قوی داشتند. اما اسمیت (۱۹۲۵) معتقد است که جالب‌ترین فعالیت‌هایی که به این ابداع منجر شد، یکی پیدا کردن قاعده‌ای برای به‌دست آوردن $\sqrt[ک]{ع}$ بوده که به روش امروزی، عمل استخراج ریشهٔ آن، شبیه هر کسر اعشاری به شکل $\frac{\sqrt[ک]{ع\times ۱۰^{ق}}}{۱۰^{ق}}$ است و دیگری، ناشی از قاعدهٔ تقسیم به عددهایی مانند $a\times ۱۰^{n}$ بوده است.

اســمیت (۱۹۲۵)، شـــناخت اصول کسر اعشـــاری را به غیاث‌الدین جمشید کاشانی نسبت می‌دهد، اما اظهار می‌کند که استیون، نخستین کسی بود که اهمیت کسر اعشاری را دریافت و تا جایی پیش رفت که اعلام کرد دولت باید استفاده از روش اعشاری را قبول و آن را تقویت کند. اسمیت این تأکید را نخستین گام در راه پیدایش «دستگاه متری» دانسته و استیون را نخستین کسی می‌داند که قاعده‌های مشـــخصی برای «عمل‌های اعشاری» عرضه کرده است. بالاخره، با توجه به نقش مهمی که نماد اعشار دارد، استینل (۲۰۰۶) برخی از نمادهای استفاده شده برای اعداد اعشاری را در دوره‌های مختلف زمانی، به‌صورت جدول ۲ ارائه کرده است.

اعداد اعشاری در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای در ایران

اعداد اعشـــاری در برنامهٔ درسی ریاضی مدرســـه‌ایِ ایران، از اهمیت خاصی برخوردار است. به‌طوری که در حال حاضر، در سه دورهٔ آموزشی ابتدایی، راهنمایی (از این پس دورهٔ اول متوسطه) و دبیرســـتان (از این پس دورهٔ دوم متوســـطه)، مطرح شده و کاربردهای آن مورد تأکید است. از طرفی، با مروری بر برنامه‌های درســـی ریاضی مدرســـه‌ای در ایران، ملاحظه می‌شـــود که اعداد

جدول ۱. عملکرد دانش‌آموزان ایرانی شرکت کننده در تیمز ۲۰۱۱ به تفکیک هر سؤال مربوط به اعداد اعشاری

شماره سؤال	درصد درست	نمونه سؤال	موضوع	درصد میانگین بین‌المللی
M01_01(M032166)	۳۹	$\frac{(۲۱/۷\times ۳/۸۶)}{۱۰/۰۹}$	تخمین	۵۷
M02_01(M052216)	۳۸	$\frac{۳}{۵}$	تبدیل کسر به اعشار	۶۸
M02_02(M052231)	۴۲	۴۲/۶۵+۵/۷۴۸	عملیات (جمع)	۷۲
M03_01(M042032)	۵۸	۰/۱۲۵	تبدیل اعشار به کسر	۷۰
M05_01(M032094)	۵۰	$\frac{۴}{۱۰۰}+\frac{۳}{۱۰۰۰}$	تبدیل کسر به اعشار و جمع	۶۲
M05_02(M032662)	۲۳	به پیوست الف-۱ مراجعه شود	نمایش عدد روی محور (تخمین عدد)	۱۶
M05_07(M032324)	۳۰	به پیوست الف-۲ مراجعه شود	فاصلهٔ بین دو نقطه و حل مسئله	۳۹
M06_02(M042024)	۲۲	به پیوست الف-۳ مراجعه شود	نمایش اعداد روی محور	۵۴
M07_02(M032725)	۵	$۳\frac{۵}{۶}$	تبدیل کسر به اعشار	۲۵

اعشاری از جمله موضوعاتی هستند که همیشه در آموزش حساب مدرسه‌ای، حضور داشته‌اند. در برنامهٔ درسی ایران، آموزش اعداد اعشاری، همواره از سال‌های آخر دوره ابتدایی شروع می‌شود و در سال‌های اول متوسطه به پایان می‌رسد. اما مهارت کار با اعداد اعشاری، نه‌تنها در دوران تحصیل بلکه در زندگی روزانهٔ هر شهروند، از جمله مهارت‌های ضروری به حساب می‌آید.

با توجه به اینکه کتاب درسی در ایران نقش‌محوری دارد و به‌نوعی کتاب درسی مظهر برنامه درسی است، این باور قوی وجود دارد که برای بررسی برنامه، می‌توان کتاب‌های درسی را مطالعه کرد و همهٔ مشکلات ریاضیات مدرسه‌ای، می‌تواند توسط یک کتاب درسی خوب اصلاح شود. در همین راستا و برای بررسی برنامه درسی ریاضی در ایران، عصارزادگان (۱۳۹۰) در پژوهش خود، به بررسی سیر تحول کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای در دورهٔ آموزش عمومی پرداخته است. نتایج به‌دست آمده از این پژوهش، گواه حضور دائم اعداد اعشاری در برنامه‌های آموزشی ریاضی مدرسه‌ای در ایران و شروع آموزش آن‌ها از سال‌های آخر دورهٔ ابتدایی است. در جدول ۳، مباحث مرتبط با اعداد اعشاری که در کتاب‌های درسی موجود از سال ۱۳۰۲ وجود داشته، به‌طور خلاصه دسته بندی شده است.

با توجه به اینکه کتاب درسی در ایران نقش‌محوری دارد و به‌نوعی کتاب درسی مظهر برنامه درسی است، این باور قوی وجود دارد که برای بررسی برنامه، می‌توان کتاب‌های درسی را مطالعه کرد و همهٔ مشکلات ریاضیات مدرسه‌ای، می‌تواند توسط یک کتاب درسی خوب اصلاح شود

برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای جاری در ایران

در حال حاضر، در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای، مبحث اعداد اعشاری در کتاب‌های درسیِ دوره‌های مختلف ابتدایی، راهنمایی (پایه‌های ششم، هفتم و سوم راهنمایی) و متوسطه، به قرار زیر مطرح شده است.

کتاب ریاضی پایهٔ پنجم ابتدایی: اعداد اعشاری در کتاب پایهٔ پنجم ابتدایی، با عنوان کسر اعشاری به‌طور رسمی وارد برنامه درسی می‌شود. در ابتدا، برای آشناییِ دانش‌آموزان با اعداد اعشاری، از بلوک‌های رنگ آمیزی شده استفاده شده و کسرها در جدول‌های ارزش مکانی با ارزش اعشاری دهم و صدم وارد شده است. بعد از آموزش جدولِ ارزش مکانی اعداد، نمایش اعشاری این اعداد به همراه «نماد ممیّز»، با عنوان «عدد اعشاری» معرفی می‌شود. سپس دانش‌آموزان، خواندن و نوشتن اعداد اعشاری، مقایسه اعداد اعشاری و جمع و تفریق با اعداد اعشاری را یاد می‌گیرند. در ادامه، دانش‌آموزان با نمایش اعداد اعشاری بیشتر از ۱، به‌صورت کسری و تبدیل کسر متعارفی به کسر اعشاری (فقط با مخرج‌های ضرایب ۱۰) و برعکس، آشنا می‌شوند. بعد از این، ابتدا ضرب عدد صحیح (حسابی) در عدد اعشاری و عدد اعشاری در عدد صحیح و پس از آن، ضرب دو عدد اعشاری در یکدیگر آموزش داده می‌شود. در قسمت‌های دیگر کتاب ریاضی پایهٔ پنجم نیز، به کاربردهای اعداد اعشاری از جمله تبدیلات طولی (متر و سانتی‌متر و میلی‌متر) و وزن (کیلوگرم و گرم)، اشاره شده است.

کتاب ریاضی پایهٔ ششم ابتدایی: در کتاب ششم ابتدایی، نخست اعداد اعشاری با استفاده از بلوک‌ها و محور نمایش داده شده است. سپس با عنوان «فعالیت» از دانش‌آموزان خواسته شده جمع و تفریق اعداد اعشاری را به دو صورت بلوک و محور انجام دهند و در ادامه، به چهار روش جمع اعداد اعشاری آمده است.

جدول ۲. برخی نمادهای استفاده شده برای اعداد اعشاری در دوره‌های مختلف زمانی

نماد	تاریخ	نویسنده
۳۷ $\frac{۲۴۵}{۱۰۰۰}$		قبل از سیمون استیون[۶]
۳۷ ۲(۱) ۴(۲) ۵(۳)	۱۵۸۵	سیمون استیون
۳۷,۲۴۵ ۳۷, $\frac{۲۴۵}{۱۰۰۰}$ ۳۷|۲۴۵	۱۶۰۰	فرانسسکیوز وی اِت[۷]
۳۷(۲۴۵)	۱۶۱۶	جان کپلر[۸]
۳۷ :۲ا ۴اا ۵ااا	۱۶۱۷	جان نپر[۹]
۳۷^{۲۴۵}	۱۶۲۴	هنری بریگز[۱۰]
۳۷ |$\underline{۲۴۵}$	۱۶۳۱	ویلیام اوقارد[۱۱]
۳۷ : ۲۴۵	۱۶۵۳	بالام[۱۲]
۳۷ . ۲ ۴ ۵ (۱) (۲) (۳)	۱۶۹۱	ازانام[۱۳]
۳۷/۲۴۵		مدرن یا امروزی

جدول ۳. مباحث مرتبط با اعداد اعشاری در کتاب‌های درسی ریاضی ایران از سال ۱۳۰۲ تا سال ۱۳۵۹

پایه	دوره	سال شمسی	عنوان ماده (مواد) درسی مرتبط با ریاضی	برنامهٔ تفصیلی اعداد اعشاری
چهارم	ابتدایی	۱۳۰۲	حساب، هندسه، سیاق، رسم	چهار عمل اعشار
چهارم	ابتدایی	۱۳۰۳	حساب، هندسه، سیاق، رسم	چهار عمل اعشار
پنجم	ابتدایی	۱۳۰۳	حساب، هندسه، سیاق، رسم	تحویل کسر متعارفی به اعشاری بدون ذکر تناوب و اقسام آن
چهارم	ابتدایی نسوان	۱۳۰۳	حساب، رسم، سیاق	چهار عمل اعشار
پنجم	ابتدایی نسوان	۱۳۰۳	حساب، هندسه، سیاق، رسم	مراجعهٔ چهار عمل اصلی در اعداد صحیح و اعشار، تحویل کسر متعارفی به اعشاری بدون ذکر تناوب و اقسام آن
چهارم	ابتدایی	۱۳۱۶	(ریاضیات) حساب و هندسه	چهار عمل اصلی در اعشار
پنجم	ابتدایی	۱۳۱۶	(ریاضیات) حساب و هندسه	اجرای چهار عمل اصلی در تحویل کسر متعارفی به اعشاری بدون ذکر تناوب و اقسام آن
چهارم	ابتدایی	۱۳۱۹	ریاضیات	تعریف برخهٔ (کسر) دهدهی و اجرای چهار عمل اصلی در برخه‌های دهدهی
پنجم	ابتدایی	۱۳۱۹	ریاضیات	برخهٔ دهدهی بدون ذکر تناوب و اقسام آن
چهارم	دبستان	۱۳۲۸	حساب و هندسه	کسر اعشار و چهار عمل اصلی در اعشار
پنجم	دبستان	۱۳۲۸	حساب و هندسه	تحویل کسر متعارفی به اعشاری بدون ذکر تناوب و اقسام آن
سوم	ابتدایی	۱۳۴۲	حساب و هندسه	نوشتن نیم به‌صورت ۰/۵ و خواندن آن. کسر اعشار تا مرتبه دهم (یک رقم بعد از ممیز) ضرب عدد صحیح دو عدد اعشاری که فقط یک رقم بعد از ممیز داشته باشد. طرز نوشتن دهشاهی به‌صورت ریال؛ مثلاً نوشتن ۲ ریال و ۱۰ شاهی به‌صورت ـ ۲/۵ ریال
چهارم	ابتدایی	۱۳۴۲	حساب و هندسه	معرفی کسر اعشار تا سه رقم بعد از ممیز، چهار عمل اصلی دربارهٔ اعداد اعشاری
پنجم	ابتدایی	۱۳۴۲	حساب و هندسه	تکرار قانون‌های دستگاه شمار دهدهی (ده‌تایی، دسته‌بندی کردن و ارزش مکانی) ضرب اعداد اعشاری در هم، تقسیم اعداد اعشاری بر هم
چهارم	ابتدایی	۱۳۵۹	حساب و هندسه	معرفی کسر اعشار تا دو رقم بعد از ممیز، جمع و تفریق کسرهای اعشاری، ضرب عدد اعشاری در یک عدد صحیح، تقسیم اعداد اعشاری بر عدد صحیح
چهارم	ابتدایی	۱۳۶۴	ریاضی	کسر اعشاری و چهار عمل اصلی در کسرهای اعشاری
پنجم	ابتدایی	۱۳۶۴	ریاضی	کسر اعشاری و ادامه و تکمیل چهار عمل اصلی در کسرهای اعشاری
اول	راهنمایی	۱۳۴۶	ریاضی	تبدیل عدد مرکب به عدد کسری اعشاری و برعکس. مراجعهٔ مختصر به چهار عمل اصلی درباره اعداد اعشاری
سوم	راهنمایی	۱۳۵۹	ریاضی	کسر اعشاری متناوب و تبدیل آن‌ها به کسر متعارفی

بعد از آن، به ضرب اعداد اعشــاری به کمک بلوک‌ها پرداخته شــده اســت. بعداً، درس تقسیم اعشاری، در دو قسمت، مطرح شده و تقسیم عدد اعشاری بر عدد طبیعی، با استفاده از بلوک‌ها، و تقســیم عدد طبیعی بر عدد اعشار، با استفاده از محور، معرفی گردیده است. در قسمت‌های دیگر این کتاب، به‌عنوان کاربردهای اعداد اعشــاری، به تبدیل‌های طولی (متر و ســانتی‌متر و غیره)، و تقریب‌های اعداد اعشاری «گرد کردن» و «قطع کردن» با اندازه‌های ۰/۱ و ۰/۰۱ پرداخته شده است. همچنین، تقریب اعداد اعشاری و نمایش آن‌ها روی محور، در بخشی از کتاب آمده است.

کتاب ریاضی پایهٔ هفتم (پایهٔ اول متوسطه): در این پایه، بخشی تحت عنوان «نمایش اعشــاری و اعداد اعشــاری» آمده است و در آن، نمایش اعداد اعشاری با استفاده از ارزش مکانی و نماد ممیز، ارائه شــده اســت. بعد از آن، جمع و ضرب اعداد اعشاری آمده ولی به‌عمل تفریق و تقسیم این اعداد اشاره‌ای نشده است. تنها در چند تمرین، انجام عمل تفریق و تقسیم اعشاری و تخمین مقدار آن‌ها بدون انجام عملیات، از دانش‌آموزان خواسته شده است.

امروزه، آموزش ریاضی در بسیاری از کشورها از اهمیت خاصی برخوردار است. آن‌چه که جوامع از آموزش ریاضی انتظار دارند، از یک طرف فراهم آوردن یک سطح قابل قبول از سواد ریاضی برای تمام دانش‌آموزان است، به‌طوری که آن‌ها را قادر سازد در زمان مقتضی، به دانش ریاضی و در صورت نیاز، به تفکر در دنیای واقعی مجهز شوند و از طرف دیگر، این سواد ریاضی، نیروی کار مورد نیاز و از لحاظ ریاضی واجد شرایط را برای جامعه فراهم آورد

جمع‌بندی

در این مقاله، ابتدا به بیان نقش تاریخی اعداد اعشاری و بعد جایگاه آن در کتاب‌های درسی ریاضی در آموزش عمومی و بالاخره چگونگی حضور اعداد اعشــاری در پایه‌های پنجم، ششم و هفتم در کتاب‌های ریاضی فعلی در ایران پرداخته شد. در همین زمینه، پژوهشی توسط معطی (۱۳۹۲) انجام شــده اســت که در آن، مشکلات دانش‌آموزان پایهٔ ســوم راهنمایی در ارتباط با اعداد اعشــاری مورد بررسی قرار گرفته است. در این پژوهش، مشکلات دانش‌آموزان در ارتباط با اعداد اعشــاری در پایه‌های مختلف تحصیلی، در هشت زمینه به شرح زیر مقوله‌بندی شده و بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان در هر یک از آن زمینه‌ها، شناسایی شده است:

- مقایسهٔ اعداد
- عملیات
- چگال بودن اعداد اعشاری
- جایگاه صفر
- ارزش مکانی
- نماد اعشاری و خواندن و نوشتن
- تبدیل اعشار به کسر و برعکس
- کاربرد اعداد اعشاری (تقریب، تبدیل واحد، اندازه‌گیری و حل مسئله.)

یافته‌های این تحقیق، برای برنامه‌ریزان درسی و معلمان، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و انتظار می‌رود که در مقالهٔ مستقلی، به آن‌ها پرداخته شود.

پی‌نوشت‌ها

1. Australian Broadcasting Corporation [Radio National, July 8th, 2001, conducted by Chris Bullock]
2. Stacey
3. Helme
4. Sadi
5. Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)

ایران نخستین‌بار در سال ۱۹۹۵ در این آزمون و سپس در سال‌های ۲۰۰۳ و ۲۰۰۷ در تکرارهای آن شرکت کرده است. لازم به ذکر است که اکنون (TIMSS) به‌عنوان مخفف عبارت زیر به‌کار می‌رود.

Trends in International Mathematics and Science Study

6. Simon Stevin
7. Franciscus Viete
8. John Kepler
9. John Napier
10. Henry Briggs
11. William Oughtred
12. Balam
13. Ozanam

منابع

۱. آرتیک، میشـل وکیل پاتریک، جرمی. (۲۰۰۸). **چه می‌دانیم وچگونه می‌دانیم**. مجلهٔ رشـد *آموزش ریاضی*، ترجمهٔ فاطمه اصل‌مرز (۱۳۸۹). شماره ۱۰۰، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۲. اسمیت، دیوید. (۱۹۲۵). **تاریخ ریاضیات**، ترجمه غلامحسین صدری افشاری (۱۳۷۳). چاپ علامه طباطبایی. جلد دوم، چاپ اول.

۳. بابلیان، اسمعیل و دیبائی، محمد تقی. (۱۳۸۷). **ریاضی پنجم دبستان**. ادارهٔ کل چاپ و توزیع کتاب‌های درسی.

۴. بخشـعلی‌زاده، شهرناز و همکاران. (۱۳۹۱). **ریاضیات سال اول دبیرسـتان**. اداره کل چاپ و توزیع کتاب‌های درسی.

۵. برگن، جی. ال. (۲۰۰۴). **گوشـه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسـلامی**. ترجمه محمدقاسـم وحیدی‌اصل و علیرضا جمالی (۱۳۷۴). انتشارات فاطمی. چاپ دوم.

۶. داودی، خسرو؛ رستگار، آرش؛ شاهورانی، احمد و عالمیان، وحید. (۱۳۹۱). **ریاضی ششم دبستان**. ادارهٔ کل چاپ و توزیع کتاب‌های درسی.

۷. عصارزادگان، نرگس. (۱۳۹۰). **مطالعهٔ سیر تحول کتاب‌های ریاضی مدرسه‌ای ایران** *(دورهٔ ابتدایی و راهنمایی) از آغاز آموزش رسـمی تاکنون و شناسایی عوامل مؤثر بر تحول. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.* پژوهشکدهٔ برنامه‌ریزی درسی و نوآوری گروه ریاضی. وزارت آموزش‌وپرورش.

۸. غلام آزاد، سـهیلا. (۱۳۹۱). **ارزشـیابی پایانی از برنامه درسـی ریاضی دورهٔ راهنمایی تحصیلی**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

۹. معطی، رضا. (۱۳۹۲). **شناسایی بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان دورهٔ راهنمایی تحصیلی در زمینهٔ اعداد اعشاری**. پایان‌نامهٔ منتشر نشدهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی. دانشکدهٔ علوم ریاضی. دانشگاه شهید بهشتی.

۱۰. میسـون، جان. (۱۳۸۶). **اسـتفاده از سـاخت‌های نظری برای تدریس آگاهانه**. ترجمه: سـپیده چمن آرا (۱۳۸۷). مجله رشد آموزش ریاضی. شماره ۹۳. دفتر انتشارات کمک آموزشی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش‌وپرورش.

11. Foy, p. Arora, A. &. Stanco, G. M.(2013). TIMSS 2011 User Guide for the International Database. International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston Collegeand International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/international-released-items.html

12. Foy, p. & Olsan, J. F. (2009). TIMSS 2007 User Guide for the International Database. International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston Collegeand International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). http://timss.bc.edu/TIMSS2007/items.html

13. Sadi, Amar. (2007). Misconceptions in numbers. *UGRU Journal:* vol. 5, Fall 2007.

14. Stacey, K., Helme, S., & Steinle, V. (2001). Confusions between decimals, fractions and negative numbers: A consequence of the mirror as a conceptual metaphor in three different ways. In M. V. D. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 217-224). Utrecht: PME.

15. Steinle, V. & Stacey, K. (2004). Persistence of decimal misconceptions and readiness to move to Expertise.*Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (PME28), Bergen, Norway. vol 4, pp 225-232.

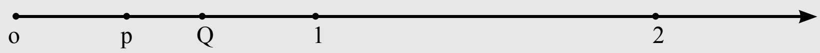
16. Steinle, V. (2004). Changes with age in students' misconceptions of decimal numbers. Unpublished PhD dissertation. University of Melbourne, Melbourne.

17. Steinle, V. (2006). http://extranet.education.unimelb.edu.au/DSME/decimals/slimversion/backinfo/metric.html.

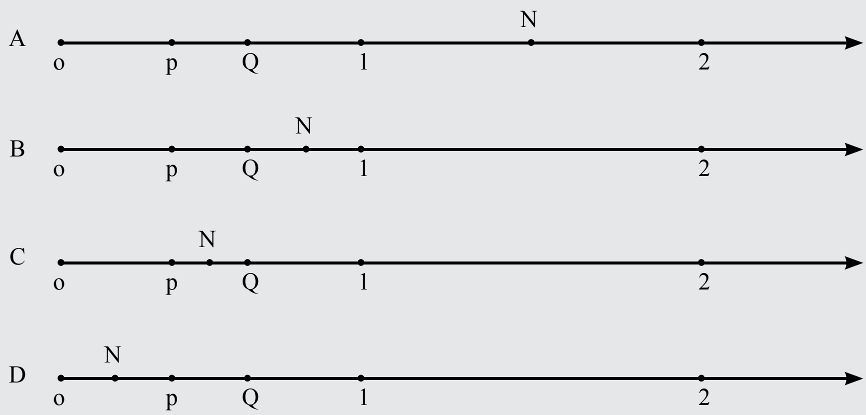
18. Third International Mathematics and Science Study at the Eighth Grade. Retrieved, 2013, from the World Wide Web: http://timss.bc.edu/timss2003i/released.html

19. TIMSS-R. IEA's Repeat of the Third International Mathematics and Science Study at the Eighth Grade. Retrieved, 2013, from the World Wide Web: http://timss.bc.edu/timss1999i/pdf/t99math_items.pdf

پیوست الف ـ ۱



نقاط P ،Q نشان‌دهنده دو کسر روی محور هستند که P× Q=N. کدامیک از گزینه‌های زیر نمایش مکان N در محور اعداد می‌باشد؟



پیوست الف ـ ۲

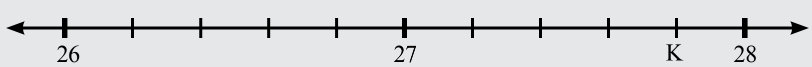
نقــاط A ،B ،C روی یــک خط قرار دارند و B بین A ،C قرار دارد. اگر AB=۱۰cm و BC= ۵/۲cm باشند فاصله میانه BC ،AB چند سانتی‌متر است.

الف) ۲/۴ ب) ۲/۶

ج) ۵/۰ د) ۷/۶

پیوست الف ـ ۳

نقطه K چه عددی را نشان می‌دهد؟



الف) ۲۷/۴ ب) ۲۷/۸

ج) ۲۷/۹ د) ۲۸/۲

مقاله

ردپای مبهم اعداد گنگ در ذهن دانش‌آموزان

بهناز ساویزی، دکترای ریاضی و دبیر ریاضی تهران
احمد شاهورانی‌سمنانی، دکترای آموزش ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

کلیدواژه‌ها: اعداد گنگ، مجموعهٔ اعداد حقیقی، بازنمایی اعداد گنگ، محور اعداد، برنامهٔ درسی متوسطه

برنامهٔ درسی ریاضیات در کشور ما، عمدتاً مبتنی بر توسعهٔ مفاهیم و روابط مرتبط با مجموعهٔ اعداد حقیقی شکل گرفته است. مفاهیم مربوط به مجموعهٔ اعداد حقیقی، با معرفی اعداد حسابی و طبیعی و روابط بین آن‌ها در این برنامه، از دبستان آغاز می‌شود و با ورود تدریجی اعداد گویا، صحیح و گنگ تا دوره‌های راهنمایی و دبیرستان گسترش می‌یابد. شواهد گوناگون نشان می‌دهد که برای دانش‌آموزان دشواری‌ها، ابهامات و بدفهمی‌هایی برای طی آخرین پله، یعنی وارد شدن به اعداد گنگ و عبور از مفهوم عدد گویا به عدد حقیقی، وجود دارد. هدف این نوشتار بررسی این دشواری‌ها و بدفهمی‌هاست. ما به‌عنوان معلم و محقق، بارها شاهد بوده‌ایم که در انتهای حل یک مسئله که پاسخ آن یک عدد گنگ بوده است، دانش‌آموزان پرسیده‌اند: «آیا باید جای π عدد بگذاریم؟» یا «آیا باید مقدار $\sqrt{2}+3$ را حساب کنیم؟». چنین مشاهداتی این پرسش را به ذهن متبادر می‌سازد که آیا دانش‌آموزان اساساً کمیت‌های گنگ را، همچون دیگر انواع اعداد، درک می‌کنند و به رسمیت می‌شناسند؟ آیا این‌گونه کمیت‌ها از نظر آن‌ها واقعاً عدد است؟ اگر هست، چرا به دنبال جایگزینی مقدار دیگری به‌جای اعداد گنگ هستند و اگر نیست دلیل آن چیست؟ جهت روشن شدن این موضوع بود که تحقیق حاضر در سال تحصیلی ۹۰-۹۱ انجام گرفت (ساویزی، ۱۳۹۱). گروه مورد مطالعه، دانش‌آموزان دختر پایهٔ دوم نظری در یکی از مدارس دخترانه یکی از ناحیه‌های آموزشی تهران بودند. در اینجا بدون پرداختن به جزئیات تحقیق تنها نتایج بیان می‌شوند. به‌طور کلی می‌توان علل برخی از بدفهمی دانش‌آموزان از اعداد گنگ را به‌شرح زیر خلاصه نمود:

۱. روش بازنمایی اعداد گنگ، جایگزینی تقریب‌های اعشاری؛

۲. رویکرد نامنسجم و گاه مبهم کتب درسی در معرفی اعداد گنگ؛

۳. شکل گستردهٔ بازنمایی اعداد گنگ مربعی؛

۴. غلبهٔ جنبهٔ فرایندی و عملیاتی بر جنبهٔ ساختاری[1] و شیءگونی[2] (عینی) اعداد گنگ در ذهن دانش‌آموزان؛

۵. عدم درک و برداشت مناسب از کارکرد محور اعداد به‌عنوان مدلی که اعداد را از فضای مجموعه‌ها و حساب به فضای اندازه‌ها و هندسه منتقل و مرتبط می‌سازد.

البته برخی موارد فوق از ارتباط علت و معلولی برخوردار بوده و برخی نیز با یکدیگر هم‌پوشانی دارند. در ادامه به شرح هر یک پرداخته خواهد شد.

در بخشی از تحقیق صورت گرفته، دو پرسش از دانش‌آموزان، به قرار زیر مطرح شد:

۱. برداشت شما از عدد گنگ چیست؟

۲. هر یک از اعداد $1+\sqrt{2}$، $3\sqrt{2}$، $2+\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ را روی محور اعداد نشان دهید.

در پاسخ به پرسش اول، دانش‌آموزان تعریف‌های خودساخته‌شان را از اعداد گنگ بیان نموده بودند. در

واقع، با گذشت بیش از یک سال از آشنایی آن‌ها با اعداد گنگ، تعریف‌های رسمی و دانش الگوریتمی آن‌ها در رابطه با اعداد گنگ فراموش شده بود و آنچه بیان کرده بودند، نمایان‌گر برداشت و ادراک شخصی ایشان از موضوع بود که در ذهنشان ته‌نشین شده و باقی مانده بود. پاسخ‌ها به پرسش اول با نرم‌افزار تحلیل متن Maxqda10 تحلیل و کدگزاری شد. سه کد استخراج شده شامل «عملیات»، «بازنمایی» و «تعلق» بود.

برخی دانش‌آموزان عدد گنگ را **عددی با بخش اعشاری نامتناهی** و برخی نیز آن را عددی تعریف کرده بودند که **بازنمایی به‌صورت کسر متعارفی** ندارد. برچسب یا کد «**بازنمایی**» به این‌گونه تعریف‌های خودساختهٔ دانش‌آموزان تعلق گرفت. برخی دانش‌آموزان بیان کرده بودند که اعداد گنگ، اعدادی هستند که **جذر کامل ندارند** یا اعدادی هستند که **بین آن‌ها عملیات حسابی، مثل جمع یا تفریق، انجام نمی‌شود** (مثل $\sqrt{ک}+\sqrt{ک}$). تأکید بر عمل جذرگیری یا جمع و تفریق معیاری بود تا این تعریف‌ها با کد «**عملیات**» مشخص شوند؛ و بالاخره تعریف‌هایی از قبیل اینکه اعداد گنگ «اعداد مشخص و کاملی نیستند»، «اعدادی نامفهوم و نادقیق‌اند»، «عدد حقیقی‌اند» و «عدد حقیقی نیستند» در کد «**تعلق**» جای گرفتند. منظور از این کد، تعلق داشتن یا نداشتن عدد گنگ به یک مجموعهٔ مشخص در ذهن دانش‌آموزان بود. بیشترین اظهارات دانش‌آموزان در کد «**عملیات**» جای گرفت که خود نشان از دیدگاه فرآیندی و عملیاتی ایشان دارد.

روش بازنمایی اعداد گنگ: جایگزینی تقریب‌های اعشاری

یکی از دلایل بدفهمی دانش‌آموزان، جایگزینی غیرضروری تقریب‌های اعشاریِ اعداد گنگ تشخیص داده شد. نتیجهٔ بررسی‌ها نشان داد که بسیاری از دانش‌آموزان، عبارت‌های $۱+\sqrt{۲}$ ، $۳\sqrt{۲}+\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۵}+\sqrt{۲}$ را با بازنمایی اعشاری روی محور اعداد نمایش داده بودند. البته تعداد افرادی که عبارت $۱+\sqrt{۲}$ را با روش هندسی روی محور نشان داده بودند، بیشتر از دیگر موارد بود و این شاید به‌دلیل بیشتر بودن تعداد تمرین‌های کتاب آن‌ها برای نمایش اعدادی به‌شکل $\sqrt{ک+ک}$ باشد. تعداد زیادی از دانش‌آموزانی که اعداد گنگ را با بازنمایی اعشاری تعریف کرده بودند، برای یافتن مکان عبارت روی محور اعداد، از بازنمایی اعشاری استفاده نموده بودند. این دسته از دانش‌آموزان اعداد گنگ را اعدادی مبهم، نامعلوم، نادقیق و ناکامل دانسته و مکان آن‌ها را روی محور اعداد، تقریبی معرفی کرده بودند. به‌نظر می‌رسد بین بازنمایی اعشاری اعداد گنگ و بدفهمی ذکر شده ارتباط مستقیمی وجود دارد. یعنی جایگزینی تقریب‌های اعشاری توسط دانش‌آموزان، اغلب اوقات حس ناکامل بودن، نادقیق بودن و نامعلوم بودن اعداد گنگ را به ذهن ایشان متبادر می‌سازد. در اینجا به‌نظر می‌رسد دانش‌آموزان انعطاف لازم را در ایجاد ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف عدد ندارند و ساخت هندسی «اعداد گنگ مربعی» به کمک رابطهٔ فیثاغورس، که در سال اول دبیرستان آموخته‌اند، بیشتر دانشی است الگوریتمی، معمولی و غیرمرتبط با یافتن نقاط متناظر با اعداد گنگ روی محور اعداد.

شواهد گوناگون نشان می‌دهد که برای دانش‌آموزان دشواری‌ها، ابهامات و بدفهمی‌هایی برای طی آخرین پله، یعنی وارد شدن به اعداد گنگ و عبور از مفهوم عدد گویا به عدد حقیقی، وجود دارد

رویکرد کتاب درسی

کتاب‌های درسی نیز در ایجاد بدفهمی‌های مرتبط با اعداد گنگ بی‌تأثیر نیستند. اینکه دانش‌آموز مفهوم عــدد گنگ را به مفهوم عدد گویا تقلیــل داده و از آن به‌عنــوان یک عدد گویای نادقیق و تقریبی یاد می‌کند بی‌ارتباط با نحوهٔ آموزش کتاب درســی او نیســت. در کتاب ریاضیات (۱) دبیرستان، اعداد گنگ در بخشی با عنوان اعداد حقیقی مطرح شــده‌اند. در آنجا بیان شده است که روی محور اعداد حقیقی، نقاطی وجود دارند که متعلق به هیچ یک از اعداد گویا نیستند، بلکه این نقاط مربوط به اعداد گنگ هســتند. در ادامه هم بیان شده است: «با اســتفاده از نماد $\sqrt{}$ که به‌معنای جذرگیری است، اعداد گنگ بسیاری را می‌توان معرفی نمود.» در هیچ کجای کتاب بیان نشده (و مثالی نیز آورده نشده) که عدد گنگ، عددی اســت که نتــوان آن را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح[۳] (با مخرج غیر صفر) یا یک کسر تحویل‌ناپذیر نوشت. در ضمن، توضیح در مورد کاربرد جذرگیری رادیکال، تفکر فرایندی و عملیاتی را تقویت می‌کند. وجود این نگاه در مؤلفان کتاب ریاضیات (۱) در رابطه با اعداد گنگ مربعی و نماد رادیکال، می‌تواند نشــان از نگاه و تفکر فرایندی این مؤلفان داشته باشد و این‌گونه توضیحات، کمکی در جهت ایجاد یک شئ مستقل ذهنی از اعداد گنگ نمی‌نماید.

در بخــش تقریب‌های اعشــاری صفحــهٔ ۱۸ کتاب ریاضیات (۱)، چهار عدد و تقریب‌های اعشاری آن‌ها مورد بررســی قرار گرفته اســت. احتمالاً منظور مؤلفان از این قسمت بیان این مطلب بوده که «همواره دنباله‌ای از اعداد گویا وجود دارد که به یک عدد گویا یا گنگ همگراست و بالطبع، معرف آن عدد می باشد». ولی نحوهٔ بیان مطلب بســیار ابهام برانگیز است، به‌گونه‌ای که به نظر نمی‌رسد خوانندهٔ متن بتواند تمایزی بین اعداد گنگ و گویا قائل شود. در ابتدا بیان شده «۱/۴ به $\sqrt{۲}$ نزدیک است، ۱/۴۱ نزدیک‌تر و ۱/۴۱۴ به $\sqrt{۲}$ بیشتر نزدیک است. این اعداد اعشاری را تقریب‌های اعشاری $\sqrt{۲}$ می‌نامند. برای هر عدد حقیقی می‌توان از این تقریب‌های اعشاری یافت و هرچه عدد اعشاری به عدد حقیقی نزدیک‌تر باشد، دقت تقریب بالاتر اســت». در ادامهٔ مطلــب آمده «$\frac{۱}{۳}$ برابر هیچ عدد اعشاری نیست ولی می‌توانیم تقریب‌های اعشاری آن را به‌دست آوریم. $\frac{۱}{۳}$ با دقت یک رقم اعشاری برابر است با ۰/۳ و با دقت دو رقم اعشار برابر است با ۰/۳۳ و با دقت سه رقم اعشار برابر است با ۰/۳۳۳. دقت این تقریب‌ها را هر چقدر بخواهیم، می‌توانیم بالا ببریم».

بیان مطالب فوق به‌گونه‌ای اســت که هیچ تمایزی بین عدد گنگ و عدد گویا ایجاد نمی‌کند. به‌نظر می‌رسد مؤلف یا مؤلفان این بخش، به ساختار یک دنبالهٔ نامتناهی همگرا به یک عدد حقیقی و نیز مفهوم حد در بی‌نهایت توجهــی ننموده‌اند. اینکه $\sqrt{۲}$ را با یــک نگاه کل‌نگرانه، حــد یا جمع‌بندی نهایی یک دنبالــهٔ نامتناهی از اعداد گویا تلقی کنیم که بازنمایی اعشاری مختوم یا متناوب ندارد، با دیدگاهی که دنبالهٔ مذکور هر بار به‌طور مقطعی و جزئی مورد توجه قرار گیرد، تفاوت دارد. با دیدگاه دوم، عدد گنگ (و حتی اعداد گویا به‌ویژه با بازنمایی اعشاری متناوب) همــواره نادقیق و ناکامل به‌نظر می‌رســند (و بیشتر فرایند هستند تا شئ مستقل).

در توضیحات ارائه شــده در مورد $\frac{۱}{۳}$ نیز ابهاماتی در کتــاب درســی وجــود دارد. در کتاب بیان شــده اســت کــه «$\frac{۱}{۳}$ برابر هیچ عدد اعشــاری نیســت». با ایــن وصف عددی با بازنمایی اعشــاری ...۰/۳۳۳ باید عددی گنگ باشــد زیرا با هیچ کسر متعارفی مساوی نیست[۴]، در حالی‌که می‌توان نشان داد: «هر کسر گویای $\frac{ع}{ع}$ به‌صورت یک عدد اعشــاری پایــان‌دار یا یک عدد اعشــاری دوره‌ای نامتناهی قابل بیان اســت؛ به عکس هر بسط اعشاری پایان‌دار یا دوره‌ای نامتناهی، مساوی عدد گویایی اســت» (نیــون، ۱۳۶۷). به‌دنبال آن، در مســئله هفتم از مســائل صفحهٔ ۲۰ کتاب، چهار کسر گویا مطرح و پرسیده شده است: «در بین اعداد گویای زیر، عددهایی را که اعشــاری هســتند مشخص کنید و ...». منظور این پرســش، احتمالاً مشــخص نمودن کسرها با بازنمایی اعشاری مختوم (پایان‌دار) می‌باشد. ولی صورت ســؤال این ابهام را برمی‌انگیزد که همواره کسرهای گویایی وجود دارند که هیچ بازنمایی اعشاری ندارند و این‌گونه کســرها تنها تقریباً (نه دقیقاً) با یک عدد اعشاری برابرند. رویکرد آموزشی کتاب به‌گونه‌ای

است که به‌جای توسعهٔ مجموعهٔ اعداد گویا به مجموعهٔ اعداد حقیقی، به‌لحاظ مفهومی، مجموعهٔ اعداد حقیقی را بــه مجموعهٔ اعداد گویا تحدید نموده و این از طریق تأکید بر تقریبات اعشاری، صورت پذیرفته است.

تأثیر ایــن دیدگاه را بــر بدفهمــی دانش‌آموزان، می‌توان در مثال ۱ دید.

در مورد فوق، دانش الگوریتمیِ ساختِ هندسیِ اعداد گنــگِ مربعی به‌کار دانش‌آموز نیامــده و در عوض تأکید بــر عملیــات و فرایند جذرگیری موجــب تناقض و ابهام دانش‌آموز شــده اســت. با رویکرد آموزشی کتاب درسی، انتظار چنین تصوری از جانب دانش‌آموز بعید نیست، زیرا

لازم اســت در مورد اصطلاح «پذیرش عدم بسته بودن بازنمایی» توسط دانش‌آموزان توضیحاتی داده شود. این اصطلاح، اولین بار توسط کولیس[۵] به‌کار برده شد.

کولیس، بســتگی[۶] در بازنمایــی را در چهار مرحله تقسیم‌بندی می‌نماید. در مرحلهٔ اول دانش‌آموز تنها با جایگزین کردن یک عبارت گسترده، مانند جمع دو عدد، با حاصل جمع که یک عدد اســت آشناست. در عبارت x=۶+۳ حالت عملیاتی با جایگزین کردن عدد ۹ به حالت شیء‌گونی یا محصولی تبدیل می‌شود. در این مرحله، دانش‌آموز به‌طور همزمان، مفهوم عبارت گستردهٔ عدد را بــه دو گونه محصول و فرایند شناســایی نمی‌کند.

مثال ۱

آیا می‌توان $۱+\sqrt{۲}$ را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟

بله ولی وقتی جذر می‌گیریم $\sqrt{۲}$ جذر کامل ندارد پس وقتی جذر کامل ندارد و اعشارهایش معلوم نیست تا کجا ادامه دارد پس چطور می‌توان به طور دقیق محاسبه کرد که کجا وجود دارد ؟!!

توجه او هم به‌جای جمع‌بندی و محصول نهایی به‌عنوان یک عدد گنگ، به فرایند پایان‌ناپذیر بسط اعشاری معطوف گشته و بنابراین، دانشِ الگوریتمیِ ساختِ هندسیِ عدد در عمل فایده و کارآیی اصلی خود را، که همان مکان‌یابی روی محور اعداد است، از دست داده است.

شکل گستردهٔ اعداد گنگ مربعی

در مطالعــهٔ صورت گرفتــه ، بازنمایی اعشــاری و جایگزینی آن با تعریف اولیهٔ اعداد گنگ، یکی از دلایل بدفهمی دانش‌آموزان شناخته شد که با نتایج تحقیقات بین‌المللی نیــز مطابقت دارد (زازکیس و ســیروتیک، ۲۰۰۴؛ ســیروتیک و زازکیــس، ۲۰۰۷؛ زازکیــس و سیروتیک، ۲۰۱۰؛ پِلِد و هرشکوویتز، ۱۹۹۹ و فوسکوگلو و کسیواس، ۲۰۱۱.) و در عین حال، بررسی حل تکالیف دانش‌آموزان نشان داد جایگزینی اعداد گنگ مربعی با تقریبات اعشاری، یک عادت همیشگی در دانش‌آموزان نیســت، بلکه به نوع اعداد نیز وابســته است. در اینجا

برای مثال، دانش‌آموز در این مرحله، جای خالی را در عبارت $۲+\square=۶+۳$ با عدد ۹ پر می‌کند. کولیس سه مرحله دیگر را نیز در رابطه با بازنمایی عدد بیان کرده است. در مرحلهٔ دوم فرد قادر است با عناصر ترکیبی کار کند، بی‌آنکه لازم باشد جواب یا عددی یکتا جایگزین آن‌ها کند. مثلاً بدون محاســبهٔ جواب، درستی عبارت $۲+۳<۸+۵$ را می‌فهمد. در این مرحله قادر است بیش از یک عملگر را به‌کار بَرَد، مثل: ۳-۴+۱. دانش‌آموزان در مقاطع پایین‌تر، در «پذیرش عدم بسته بودن» بازنمایی یا ALC[۷]، مشکل دارند (کولیس، ۱۹۷۵). این مشکل در توسعهٔ درک جبری دانش‌آموزان دیده می‌شود، مثلاً دانش‌آموزی که مشکل در ALC دارد، مایل است معادلهٔ $۳+۷x=?$ را با $۱۰x$ جایگزین نماید.

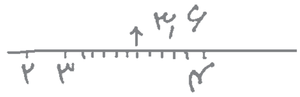
در مثال ۲، دانش‌آموز برای نمایش $\sqrt{۵}+\sqrt{۲}$ روی محور اعداد، تقریبات اعشــاری را جایگزین کرده است تا به عددی با بازنمایی بســتهٔ ۳/۶ برسد. وی در مورد $۱+\sqrt{۲}$، رابطهٔ فیثاغورس را به‌کار برده است.

رویکرد آموزشی کتاب ریاضیات ۱ به‌گونه‌ای است که به‌جای توسعهٔ مجموعهٔ اعداد گویا به مجموعهٔ اعداد حقیقی، به‌لحاظ مفهومی، مجموعهٔ اعداد حقیقی را به مجموعهٔ اعداد گویا تحدید نموده و این از طریق تأکید بر تقریبات اعشاری، صورت پذیرفته است

مثال ۲

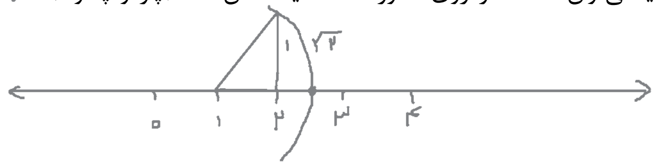
آیا می‌توان $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟

$\sqrt{2}+\sqrt{5}=1{,}4+2{,}3=3{,}6$



آیا می‌توان $\sqrt{2}+1$ را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟ بله

$1+\sqrt{2}=1^2+1^2$

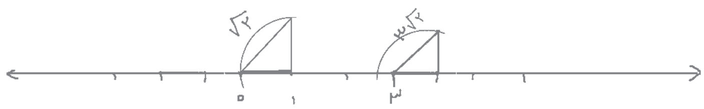


مثال ۳

آیا می‌توان $\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ را دقیقاً روی محور اعداد نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟

احتمالاً بتوانیم آن را روی محور نشان دهیم ولی به صورت جداگانه می‌شود نشان داد تا شاید اعداد را از فرم رادیکال بتوانیم درآوریم و با هم جمع کنیم

$\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2}$



مثال ۴

آیا می‌توان $\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ را دقیقاً روی محور اعداد نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟

$\sqrt{2}$ را بله ولی $3\sqrt{2}$ را می‌توان نشان داد

آیا می‌توان $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟ به تنهایی بله ولی با هم نه

آیا می‌توان $\sqrt{2}+1$ را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟ بله

همان‌گونه که گفته شد، تغییر رویکرد دانش‌آموز در مورد سؤال دوم، شاید مربوط به نوع تمرین‌های کتاب باشد.

در مورد مثال ۳، دانش‌آموز توضیح داده است که عدد به‌شکل داده شده را تنها به صورت جداگانه می‌توان روی محور نمایش داد. به‌عبارتی، وی کل عبارت را به شکل دو بخش یا دو عدد جداگانه فرض کرده و نمایش یک‌جای عدد را منوط به جایگزینی تقریب اعشاری، جمع دو بخش و رسیدن به یک عدد نهایی (با بازنمایی بسته) دانسته است. در مورد مثال ۴ نیز، شکل گستردهٔ بازنمایی اعداد، سبب شده تا دانش‌آموز، نمایش یک‌جای عدد را روی محور، امکان‌ناپذیر بداند.

غلبهٔ جنبهٔ فرایندی و عملیاتی بر جنبهٔ ساختاری و محصولی

همان‌گونه که پیش‌تر بیان شد، مشکلات ذکر شده در رابطه با اعداد گنگ مربعی گاهی هم‌پوشانی داشته و گاه رابطهٔ علت و معلولی دارند. به‌نظر می‌رسد بین عدم پذیرش شکل گستردهٔ عدد گنگ و غلبهٔ جنبهٔ فرایندی و عملیاتـی در ذهن دانش‌آموزان، ارتباطی وجود دارد. برای حصول اطمینان از این ارتباط، سؤال زیر مطرح و پاسخ‌ها بررسی شد.

« $\sqrt{7}+2$ » چیست؟

در اینجا نیز لازم است به‌طور کوتاه، توضیحاتی در رابطه با اصطلاحات **فرهوم**، **فرایند** و **شـیء ذهنی** آورده شـود. البته در شماره‌های پیشین این مجله، به بحث مذکور پرداخته شده است و توضیحات آتی، جنبهٔ یادآوری دارد (پگ و تال، ۲۰۰۵).

نظریات شئ- فرایندی در آموزش ریاضیات عنوان کلی، نظراتی همچون APOS[8] ، شئ انگاری[9] اسفارد[10] و فرهوم[11] تال[12] و گری[13] می‌باشد. این‌گونه نظریه‌ها، نحوهٔ شکل‌گیری یک مفهوم ریاضی را در ذهن دانش‌آموز شرح می‌دهند و از نـوع نظریه‌های موضعی آموزش ریاضیات می‌باشـند. افراد مختلف، نظرات (موضعی) گوناگونی را در رابطه با شـکل‌گیری مفهوم ارائـه داده‌اند (انگلیش و سِـریرامن، ۲۰۱۰). پیاژه بین تجرید تجربی[14] (از اشیاء درک و مشـاهده شـده) و تجرید نیمـه تجربی[15](از فعالیت‌های صورت گرفته روی اشیاء درک شده) تمایز قائل می‌شود (تال، ۱۹۹۹). تجرید تجربی از مشاهده و حس کردن پدیده‌ها در جهان واقعی حاصل می‌شود و در تجرید نیمه‌تجربی، استخراج دانش از طریق تجرید فراینـد عملیات و انجـام فعالیت روی اشـیاء صورت می‌پذیـرد. تال و گـری (۱۹۹۹) تمایزی بین اشـیاء **درک‌شده**[16] و اشیای **حس‌شده**[17] قائل می‌شوند. اشیای حس‌شده، تجریدی از اشیاء در جهان واقعی هستند؛ مثل اشکال هندسی. دایره تجریدی از **اشیاء به‌ظاهر گرد** و خط تجریدی از **یک امتداد راسـت** در جهان واقعی و فیزیکی است. نوع دیگر یعنی اشیای ذهنی درک شده، بر اثر تأمل روی فعالیت‌ها و تأکید بر روند فرایندها حاصل می‌شوند. مثلاً تجریدی از شمارش تعداد اشیای واقعی، منجر به ساخت مفهوم عدد می‌شود. تال و گری (۱۹۹۹)، بین «رویه[18]» و «فرایند[19]» تمایزی قائل می‌شوند. رویه یـک الگوریتم یا روش گام‌به‌گام اسـت که در آن، هر گام پس از تکمیل گام قبلی برداشـته می‌شود. فرایند ترکیبی از چندین رویه (همسـو و هم‌اثر) است، بدون آنکه به جزئیات گام‌ها توجهی شـود. اینکه یک مفهوم همزمان، هم فرایند و هم شـیء ذهنی محسـوب شود، کمی مبهم و پیچیده به‌نظر می‌رسـد. ساده‌ترین وسیله این اسـت که یک نقطه‌نظر مشترک و یکسان از مفهوم شـیء و فرایند ارائه دهیم. در سرتاسـر ریاضیات، از این ترکیب‌ها، فراوان می‌توان یافت:

فرایند شـمارش و مفهوم عدد؛ می‌توان ۷ شیء را شمارش کرد و یا ۷ را یک عدد مستقل پنداشت.

فرایند شـمارش چنـد چیز و مفهـوم جمع (حاصل جمع)؛ ۴+۵ یک فرایند شمارش برای دو چیز است در عین حال یک حاصل جمع و عدد ۹ می‌باشد؛ فرایند تقسیم دو عدد طبیعی و یا یک کسر به‌عنوان یک شیء (۴/۳).

تال و گری (۱۹۹۹) ادعا می‌کنند که نمادهای ریاضی، اغلب حاوی دو جنبهٔ فرایندی و مفهومی هسـتند. آن‌ها واژهٔ ترکیبی و جدید «فرهوم» مرکب از فرایند و مفهوم را بـرای این مورد ابداع کرده‌اند. فرهوم نمادگزاری یا نمادی است که هر دو جنبهٔ فرایندی و مفهومی را دربردارد.

برای مثال، ۳+۴ یک فرهوم است. «شمارش همه[20]» و «شمارش یکجا[21]» را می‌توان دو رویه یا تکنیک جمع دانست. «شـمارش همه» برای ۳ و ۴، حالت «فرایند، فراینـد» را به‌وجود می‌آورد. شـمارش یکجای ۳ (۴) و شـمارش همـه ۴ (۳) حالت «فرهـوم - فرایند[22]» را ایجـاد می‌کنـد. جمع یکجـا برای دو عـدد، حالت «فرهوم - فرهوم[23]» را ایجاد می‌کند. شـکل‌های ۱و۲، موضوع را روشن‌تر می‌کند:

در پاسـخ بـه پرسـش اخیـر، تنهـا ۵ درصد از دانش‌آمـوزان، عبـارت مورد پرسـش را به‌عنوان یک حقیقت شناخته شده[24] یا یک عدد گنگ معرفی کرده بودنـد. به‌عبارتی جنبهٔ فرهوم- فرهـوم را درک کرده بودند. مثال ۵، پاسـخ دانش‌آموزی است که از عبارت داده شـده، درک فرهوم- فرایندی دارد یعنی $\sqrt{7}$ را

یک عدد گنگ دانسته، در حالی‌که علامت جمع را بخشی از بازنمایی عدد گنگ محسوب نکرده و کل عبارت را یک فرایند جمع ارزیابی نموده است. در حالت فرایندی- فرایندی[۲۵]، دانش‌آموزان چنین پاسخ داده بودند که جذر یک عدد، با ۲ جمع شده است.

عدم درک کارکرد محور اعداد

محور اعداد، مدلی کارآمد جهت شناخت بهتر اعداد و بسیاری از مفاهیم ریاضیات است. فرودنتال[۲۶] (۱۹۷۳)، سه کاربرد را برای محور اعداد نام می‌برد. اول، به‌عنوان یک خط‌کش که نقاط روی آن، مکان ثابتی دارند. دوم، خطی که دارای مبدأ و مقیاس توافقی و قراردادی است و با آن، می‌توان نقاط روی محور و اعداد را به هم نسبت داد. سوم، یک بنیان دقیق که اعداد، عملگرها و انتقالات روی آن، بازنمایی می‌شوند. در سنت رایج آموزشی، اعداد گویا از دل اعداد صحیح با عملیات تقسیم و اعداد صحیح از دل اعداد طبیعی با عمل تفریق توسعه می‌یابند. در حالی‌که این موضوع روی محور اعداد، بدین شکل اتفاق نمی‌افتد. محور اعداد، به‌تدریج و با توسعهٔ مجموعهٔ اعداد، نقاط بیشتری را که از پیش موجود بوده‌اند، به نمایش می‌گذارد (فرودنتال، ۱۹۷۳). از لحاظ شهودی، توسعهٔ اعداد از مجموعهٔ اعداد طبیعی تا گویا، معمولاً با مشکلی مواجه نیست. تقسیم کردن بین دو واحد یا عدد صحیح مانند تقسیم کردن یک سیب یا یک تکه نان، ملموس و مطابق با شهود است. رابطهٔ بین مجموعه‌ها به‌شکل ذ⊂ش⊂س، ⊂ ح برقرار است و این رابطه به لحاظ شهودی، در راستای توسعهٔ اعداد روی محور اعداد است. در حالی‌که مجموعهٔ اعداد گنگ، تابع این سنت توسعه و ساخت شهودی اعداد نیست. با اینکه اعداد گنگ نیز به کمک اعداد گویا ساخته و حتی تعریف می‌شوند (عددی که برابر نسبت دو عدد گویا نیست)، ولی این بار مجموعه‌ای جدا از مجموعه‌های پیشین حاصل می‌شود. هر عدد طبیعی، در عین حال عددی صحیح و گویا نیز هست. ولی عدد گنگ، موجودی جدا و مستقل از اعداد پیشین است. علاوه بر این، حس نیاز به پیدایش اعداد گنگ

مثال ۱-۵

$\sqrt{۷}+۲$ چیست؟ یک عدد گنگ به علاوه یک عدد طبیعی و چون $\sqrt{۷}$ جوابی دقیق (جذر کامل) ندارد نمی‌توانیم حاصل جمع را بدست آوریم.

مثال ۲-۵

$\sqrt{۷}+۲$ چیست؟ مجموع عددی گنگ و عددی گویا که روی محور می‌توان آن را نمایش داد

مثال ۶

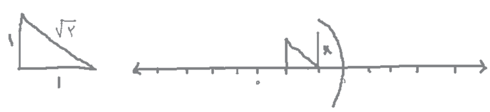
آیا می‌توان $\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}$ را دقیقاً روی محور اعداد نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟

خیر زیرا گنگ است. $۴\sqrt{۲}$

آیا می‌توان $\sqrt{۲}+\sqrt{۵}$ را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟

نه چون دو رادیکال را نمی‌توان با هم جمع کرد.

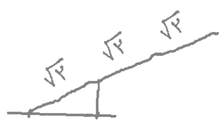
آیا می‌توان $\sqrt{۲}+۱$ را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟



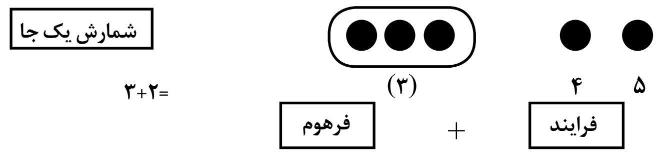
مثال ۷

آیا می‌توان $\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}$ را دقیقاً روی محور اعداد نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟

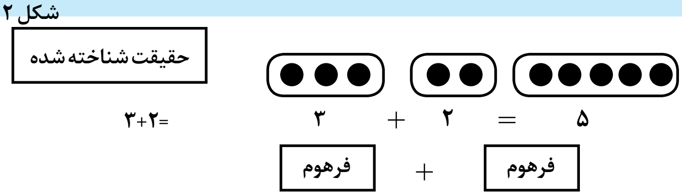
بله به کمک اندازه گیری $۳\sqrt{۲}$ را به $\sqrt{۲}$ اضافه می‌کنیم



شکل ۱



شکل ۲



در برنامه درسی ایجاد نمی‌شــود، لذا دانش‌آموز عدد گنگ را عددی اعشــاری یا گویا فرض می‌کند، با این تفــاوت که مقــدار دقیق و مکان معینــی روی محور ندارد. نتیجه این اســت که به‌جای توســعهٔ مفهومی مجموعهٔ اعداد گویا به اعداد حقیقی، با جایگزین کردن تقریب‌های اعشاری برای اعداد گنگ، اعداد حقیقی به مجموعهٔ اعداد گویا تحدید می‌شود. در مطالعهٔ صورت گرفته، چه در قالب پاســخ به پرسش‌ها و چه در قالب مصاحبه‌ها، بیشتر دانش‌آموزان روش ساخت هندسی اعداد گنگ مربعی را می‌دانستند، ولی این نوع ساختن، دانشــی الگوریتمی و رویه‌ای بود که بین عدد گنگ و اندازه ارتباط معناداری ایجاد نمی‌کرد.

بــرای مثــال، در مصاحبه‌ها از دانش‌آموزان ســؤال شــد «چگونه می‌توان تکه چوبی را بــه اندازهٔ $\sqrt{2}$ برش زد». بســیاری به‌دلیل نامتناهی بودن بخش اعشاری در بازنمایی اعشاری، این کار را ناممکن دانستند، در حالی‌که با روش هندسی این عدد را روی محور اعداد می‌ساختند. در عین حال، در ادامهٔ مصاحبه بیان می‌کردند که «اعداد گنــگ را نمی‌تــوان روی محور اعداد نمایــش داد، زیرا دقیق نیســتند». این تناقض‌گویی‌ها حاکی از آن است کــه دانش‌آمــوزان قادر نبودند بین عــدد مجموعه‌ای و عدد اندازه‌گیــری[27]، ارتباط ایجاد نماینــد. محور اعداد حقیقــی، یک مدل ریاضی و ذهنی اســت که بین عدد و انــدازه ارتباط ایجاد می‌کند. به‌عبارتی، ویژگی ترتیبی و شمارشــی اعداد روی محور، بــه اندازهٔ یک پاره‌خط یا فاصلهٔ بین یک نقطه تا مبدأ مختصات، مرتبط می‌گردد.

محــور اعداد، محــل پیوند تفکر حســابی و تفکر هندســی است. جمع دو عدد شمارشــی[28] (مقدار) در خارج محور، متناظر با جمع دو اندازه (فاصله) یا جمع دو عدد اندازه‌گیری روی محور است که منجر به ایجاد یک انــدازهٔ (فاصله) جدید می‌گردد. در تحقیق صورت گرفته، در رابطه با اعداد گنگ مربعی با شکل گستردهٔ نمایش (**ک**√ +**ک**√ یا **ک**+**ک**√)، جمع حســابی با جایگزینی تقریب‌های اعشاری، یا ساده کردن رادیکال‌ها انجام شده اســت. در حالی‌که روی محور اعداد، جمع هندســی که آن را به‌عنوان جمع دو اندازه یا دو فاصله تعریف می‌کنیم، معنایی نیافته است.

در مثــال اخیر(مثــال ۶ و۷)، از دیــدگاه ریاضیات وابسته به جسم[29]، بین استعارهٔ حرکت روی مسیر[30] که منجر به ایجاد مدل محور اعداد می‌شود و استعارهٔ چوب اندازه‌گیری[31] که جمع فاصله‌ها را با اعداد مرتبط می‌سازد، ارتباط عرضی مناســبی ایجاد نشده است، یعنی کارکرد محور به‌درستی شناخته نشده است (لکاف و نونِز، ۲۰۰۰).

نتیجه‌گیری و پیشنهاد

از آنچه گفته شد، چنین برمی‌آید که رویکرد آموزشی اعداد گنگ در برنامهٔ درسی، چندان مناسب نیست. برنامهٔ درسی به آرامی از کنار مفهوم عدد گنگ که آخرین حلقهٔ تکمیل کنندهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی، اســت عبور کرده و به‌ســرعت، این مفهوم را با تأکید بر تقریبات اعشــاری، بــه مفهوم عددی گویا و «نادقیق» تقلیل داده اســت. در برنامهٔ درسی، حرکت از جنبهٔ فرایندی به جنبهٔ محصولی و جمع‌بنــدی نهایی عدد گنگ، به‌شــکل ناقصی صورت می‌پذیرد. در این میان، تأکید کتاب درسی و دانش‌آموزان بر عمل جذرگیری در رابطه با اعداد گنگ مربعی، موجب غلبهٔ دیدگاه عملیاتی و فرایندی در دانش‌آموزان می‌گردد. مبدأ تاریخی پیدایش مفهوم عدد گنگ، توســط یونانیان و ارائهٔ تعریف رســمی عدد گنگ توسط ددکیند در قرن نوزدهم میلادی، هر دو بر مبنای کمیات نامتوافق[32] بوده است (ایوز، ۱۹۹۰). شاید بازگشت به این مبدأ و شروع از مفهــوم کمیات متوافق و نامتوافق، شــروع خوبی برای آموزش اعداد گنگ باشــد. فیشباین[33] جِهیام و کوهن (۱۹۹۵) نیــز ایجــاد کنجــکاوی و پرســش از مفاهیم متوافــق[34] و نامتوافق را آغازگر مناســبی برای تدریس اعــداد گنگ می‌داند. انتظار می رود که ایجاد حس نیاز اولیه در دانش‌آموزان به وجود اعداد گنگ، منجر به درک بهتر آنان از این اعداد شــود؛ حســی که در رویکرد فعلی آموزشی ایجاد نشده است. پایان‌بخش این مقاله، نقل قولی است که از لکاف و نونِز (۲۰۰۰)، از ددِکیند آورده‌اند: ددکیند خود، این حس را چنین تجربه نموده اســت: *اگر نقطهٔ p متناظر با عدد گویای a باشد، آن‌گاه چنانچه متداول است، op کمیتی متوافق با واحد اندازه‌گیری نامتغیری است که در ســاخت [محور] به‌کار گرفته شده است. ولی یونانیان باستان، این موضوع را از پیش می‌دانستند و اثبات کرده*

هر عدد طبیعی، در عین حال عددی صحیح و گویا نیز هست. ولی عدد گنگ، موجودی جدا و مستقل از اعداد پیشین است

بودند که همواره اندازه‌هایی نامتوافق با واحد اندازه‌گیریِ فرض شده، وجود دارند. اگر طول‌ها یا چنان اندازه‌هایی را از نقطهٔ مبدأ o روی امتداد خط [محور] قرار دهیم، نقاط انتهایی را خواهیم یافت که با هیچ عدد گویایی متناظر نمی‌باشند.... دامنهٔ اعداد گویا دیگر کفایت نخواهد کرد و کاملاً ضروری می‌نماید که دستگاه اعداد R (حقیقی) که با خلق اعداد گویا ساخته شده بود، این بار با خلق اعداد جدیدی توسعه یابد» (لکاف و نونز، ۲۰۰۰).

پی‌نوشت‌ها

1. structural
2. objective

۳. حتی نام اعداد گنگ در زبان انگلیسی از تعریف آن یعنی نسبت دو عدد صحیح با مخرج غیرصفر گرفته شـده است. rational از واژهٔ انگلیسی ratio گرفته شده است. (نیون ۱۳۶۷)

۴. اثبات اینکه عدد ...۰/۳۳۳ با کسر $\frac{۱}{۳}$ دقیقاً برابر است با معلومات ابتدایی ریاضی امکان‌پذیر است.

5. Collis
6. closure
7. Acceptance of the lack of closure
8. Action-process-object- schema

این نظریه توسط دوبینسکی ارائه شده است.

9. reification
10. Sfard
11. Procept : ترکیبی از واژگان process و concept
12. Tall
13. Gray
14. Empirical abstraction
15. Semi-empirical abstraction
16. Conceived
17. Perceived
18. Procedure
19. process
20. Counting- all
21. Counting - on
22. Procept-process
23.Procept-procept
24. Known fact
25. Process-process
26. Freudenthal
27. Measuring number
28. Counting number,

این اصطلاح و اصطلاحاتی نظیر عدد اندازه گیری و عدد محاسباتی را فرودنتال(۱۹۹۹، ۱۹۷۳) در برخی کتب خود به‌کار برده است.

29. Embodied mathematics
30. Motion on the path metaphor
31. Measuring stick metaphor
32. Incommensurable
33. Fischbein
34. Commensurable

منابع

1. Collis, K. (1975). *The Development of Formal Reasoning*. Newcastle, Australia: University of Newcastle.
2. Fisschbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The Concept of Irrational Numbers in High School Students and Prospective Teachers. *Educational Studies in Mathematics* , 29-44.
3. Freudenthal, H. (1999). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.*
4. Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task. Kluwer.*
5. Lakoff, N., & Nunez, R. (2000). *where mathematics come from*? Basic Books.
6. Peled, I., & Hershkovits, S. (1999). Difficulties in Knowledge Integration: Revisiting Zeno's Paradox with Irattional Numbers. *INT. J. Math. Educ. SCI. Technol.* , 39-46.
7. Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers on the number Line-Where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* , 477-488.
8. Sriraman, B., & English, L. (2010). *Theories of Mathematics Education.* springer.
9. Stein, H. (1990). Eudoxos and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics. *Synthese* , 163-211.
10. Tall D., T. M. (1999). What Is the Object of the Encapsulation of a Process? *Journal of Mathematical Behavire* .
11. Tall, D., & Gray, E. (1991). Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. *PME* 15, (72-79). Assisi.
12. Voskoglou, M., & Kosyvas, G. (2011). A study on the comprehension of irrational numbers. *Quaderni Di Ricerca in Didattica (Mathematics)* .
13. Zazkis, R., & Sirotic, N. (2004). Making Sensa of Irrational Numbers: Focusing on Representation. *PME* 28, (497-504).
14. Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing Missing Link. *CBMS Issues in Mathematics Eduction American Mathematical Society.*

۱۵. ایـوز، ه. و. (۱۹۹۰). **آشـنایی با تاریـخ ریاضیات**. ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل (۱۳۸۶). مرکز نشر دانشگاهی.

۱۶. پـگ، ج.، تـال، د. (۲۰۰۵). چرخهٔ بنیادین سـاخت مفهوم: زیربنـای چارچوب‌های نظری گوناگون. ترجمه حسـین عبدی، محمدرضا فدایی و زهرا گویا (۱۳۸۶). مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۸۸، صص ۴ تا ۱۵، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۷. سـاویزی، ب. (۱۳۹۱). **بررسی سـاختار مفهومی اعداد گنگ در دانش آموزان**. رسـاله منتشـر نشـده دکتری ریاضی با گرایش آمـوزش ریاضی. واحد علوم و تحقیقات دانشـگاه آزاد اسلامی.

۱۸. نیون، ا. م. (۱۹۶۱). گویا و گنگ. ترجمه غلامحسین اخلاقی‌نیا (۱۳۶۷). مرکز نشر دانشگاهی.

مقاله

مـدل مفهومی تصور مفهوم- تعریف مفهوم و اهمیت آن در آموزش ریاضی

زهرا محتشم، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی بوشهر

چکیده

عملکردهای ضعیف و دور از انتظار بســیاری از دانش‌آموزان و حتی دانشجویان، در انجام تکالیف مختلفِ وابسته به تعریف، ذهن بسیاری از آموزشگران ریاضی را به خود مشغول کرده است. برای توضیح این مسئله، آموزشگران ریاضی بیان می‌کنند که در واقع، فرایندی که یک دانش‌آموز در یادگیری مفاهیم ریاضی دنبال می‌کند، با آنچه که یک ریاضی‌دان انجام می‌دهد، متفاوت است. برای توضیح چگونگی شکل‌گیری مفاهیم ریاضی و نشان دادن نقشی که ساختار مفهومیِ ذهن شــخص در این ساخت‌وســاز دارد، همچنین برای تحلیل درک دانش‌آموزان و تعریف‌های آن‌ها از مفاهیم مختلف، «مدل شــناختی تصور مفهوم- تعریف مفهوم»، به‌وسیلهٔ تال و وینر (۱۹۸۱)، معرفی شد. براساس این مدل، برای هر مفهوم ریاضی یک «تصور مفهوم» و یک «تعریف مفهوم» وجود دارد و بســیاری از مشکلاتی که دانش‌آموزان در ساخت و درک مفاهیم ریاضی دارند، بستگی به تشخیص تعریف رسمی یک مفهوم توسط فرد و تصور مفهوم وی دارد. در توضیح این مدل، وینر بیان می‌کند که تصور مفهوم، هنگام حل مسئله و اثبات، نقش اصلی را به‌عهده دارد و تعریف‌ها نقشی حاشیه‌ای دارند. همچنین، ضعف در تصور مفهوم دانش‌آموزان، ممکن است بازتاب تمرین‌های نامناسب کتاب درسی یا شیوهٔ آموزشی نامناسب باشــد. از جمله راه‌های بهبود تصور مفهوم برای دانش‌آموزان، توجه مؤلفان کتاب‌های درسی بــر میزانِ تأکید و تعییــن اولویت تصور یا تعریف مفهوم در برنامه درســیِ گروه‌های مختلف دانش‌آموزان اســت، همچنین طراحی فعالیت‌ها و هدایت بحث‌های کلاســی هدفمند توسط معلمان، برای تشخیص تناقض‌های دانش‌آموزان در درک مفهوم، و اتخاذ رویکردهایی مناسب جهت رفع آن‌ها ضروری است.

کلیدواژه‌ها: تصورمفهوم، تعریف مفهوم، مدل مفهومی، تعریف‌های ریاضی.

مقدمه

تحقیقات در آموزش ریاضی نشان داده است که با وجــود نقش مهمی که تعریف‌ها در یادگیری ریاضی و نیز انجام عملیات ریاضی به‌عهده دارند، تعداد زیادی از دانش‌آموزان دبیرستانی و فارغ‌التحصیلان، برای درک تعریف‌های جدید و کاربرد تعریف‌ها به‌طور مناسـب، دچار مشکل هستند و از نقش تعریف‌ها در حل مسئله و ایجاد اثبات‌ها آگاهی ندارند (زاسـکیس[1] و لیکین[2]، ۲۰۰۸).

آموزشـگران ریاضــی بیــان می‌کننــد که بخش عمده‌ای از این مشکلات از تفاوت بین مراحل منطقیِ (ریاضی) تشـکیل مفهوم و فرایندهای ذهنیِ فرد برای دریافت مفهوم ناشـی می‌شـود. در واقع، فرایندی که یــک دانش‌آمــوز در یادگیری مفاهیــم ریاضی دنبال می‌کنــد، با آنچه کــه یک ریاضی‌دان انجــام می‌دهد، متفاوت است. برای نشان دادن نقشی که ساختار ذهنیِ مفهومی شخص دارد، «مدل شناختی تصور مفهوم[3] و تعریف مفهوم[4]» به‌وسـیلهٔ تال و وینر (۱۹۸۱) معرفی شد. براسـاس این مدل، تعداد زیادی از مشکلاتی که دانش‌آموزان در ساخت معنایی مفاهیم ریاضی دارند، به تشـخیص[5] فرد از تعریف رسمی یک مفهوم و تصوری که وی از آن مفهوم دارد مرتبط اسـت (تال[6]، ۱۹۸۸). در واقع، در فرایند یادگیری یک مفهوم معین، ابتدا در ذهن یــک تصور مفهوم و یک تعریف مفهوم سـاخته می‌شـود. «تصور مفهوم» یک سـاختار شناختی کلی اسـت که به مفهوم وابسته است، اما «تعریف مفهوم»، شـکلی از کلماتی اسـت که برای معرفی مفهوم به‌کار می‌رود. شخص ممکن است دارای تعریفِ مفهومی باشد که با تعریف ریاضی آن سازگار نباشد یا تعریف مفهومی کــه لزوماً مرتبط با تصور مفهوم او نیسـت. در نتیجه، فاصله‌ای بین تعریف ریاضی مفهوم و روشی که شخص آن را درک می‌کنـد وجــود دارد. در ادامه، این مدل با تفصیلی که استفاده از آن را ممکن کند تشریح می‌شود.

برای نشان دادن نقشی که ساختار ذهنیِ مفهومی شخص دارد، «مدل شناختی تصور مفهوم و تعریف مفهوم» به‌وسیلهٔ تال و وینر (۱۹۸۱) معرفی شد. براساس این مدل، تعداد زیادی از مشکلاتی که دانش‌آموزان در ساخت معنایی مفاهیم ریاضی دارند، به تشخیص فرد از تعریف رسمی یک مفهوم و تصوری که وی از آن مفهوم دارد مرتبط است

تصور مفهوم و تعریف مفهوم

به گفته وینـر[7] (۱۹۷۶)، اگرچه به نظر می‌رسـد دانش‌آموزان هیچ تصور خاصی نسبت به ساختار ریاضی «تعریف- قضیه- اثبات» نداشـته‌اند، براسـاس نظریهٔ پیاژه[8]، انسـان به‌ویژه در سال‌های جوانی، تجارب خود را در تعامل با محیط سازمان‌دهی می‌کند و حتی بدون اینکه صریحاً چیزی به او گفته شـود، می‌تواند به‌طور مسـتقیم، نتایجی را از این تجارب اسـتنباط کند. او اضافه می‌کند که چگونه در موارد زیادی، دانش‌آموزان حتی دربارهٔ موضوعاتی که برای اولین بار به آن‌ها ارائه می‌شد تصوراتی داشتند (تارسکی[9]، ۱۹۶۵؛ وینر، ۱۹۷۵ و ۱۹۷۶؛ نقل شـده در وینـر، ۱۹۷۶). وینر با تأکید بر دیدگاه پیاژه دربارهٔ تجسم ذهنی[10]، آن را به حوزهٔ تفکر ریاضی (بیشتر دربارهٔ تعریف) گسترش داد و با تأکید بر اهمیت ایجاد یک چارچوب مرجع[11] برای تصور ذهنی، به‌کمک تال (۱۹۸۱)، یک مدل ساده برای فرایندهای شناختی به‌منظور تحلیل فرایند یادگیری بعضی مفاهیم ریاضی (وابسته به تعریف‌ها) ارائه کرد (وُنگ[12]، ۱۹۸۹). برای این منظور، تال و وینر، برای هر مفهوم، دو سلول (منظور سلول‌های زیستی نیست) مختلف در ساختار شناختی در نظر گرفتند؛ یک سلول برای تصور مفهوم و دیگری برای تعریف (یا تعریف‌های) مفهوم که ممکن است یکی از این دو سلول یا هر دو، خالی یا پر باشند؛ اولی شـامل هـر تصویر ذهنی[13] از یـک مفهوم معین اسـت؛ یعنی اطلاعاتی که مفهوم را برای فرد مشخص می‌کند، نظیر نمودارهـا، نمادها و نمایش‌های کلامی یا اطلاعات عددی و یک مجموعه ازخواص وابسـته به مفهوم. این مجموعه از خواص، به همراه تصویر ذهنی، «تصور مفهوم» نامیده می‌شود که طی سال‌ها، از طریق انواع تجارب شـکل می‌گیرد و در مواجههٔ شـخص با محرک‌های جدید، تغییر می‌کند و کامل‌تر می‌شـود. برای یک مفهوم معین، هر شـخص ممکن است تصور مفهومی متفاوتی با دیگران و متناسب با درک و تجارب شخصی خود تشـکیل دهد که لزوماً همهٔ بخش‌های آن با هم مرتبط و سـازگار نیستند، یعنی ممکن است تصور مفهوم، حتی شامل بخش‌های متناقضی هم باشد. همچنین، یک فرد می‌تواند واکنش‌های متفاوتی نسبت به یک مفهوم خاص در وضعیت‌های مختلف نشان دهد که لزوماً، بیانگر همهٔ آنچه که فرد دربارهٔ مفهوم می‌داند نباشد. مثلاً ممکن است فرد در زمان‌ها یا موقعیت‌های متفاوت، دربارهٔ موضوعی مثل تابع، مثال‌ها یا توضیحات متفاوتـی ارائه کند که تال و وینـر (۱۹۸۱)، اصطلاح «تصورِ مفهومِ فراخوانده شده[14]» را برای چنین وضعیتی انتخاب کردند (شکل ۱).

تصور مفهوم

تجربیات حاصل از کار کردن با آن مفهوم | فرایندهای مرتبط با مفهوم | تصور ناشی از تعریف مفهوم

شکل ۱، جوادی، ۱۳۸۶

هم‌چنین، بخشی از سلول تصور مفهوم که حاصل تأثیر سلول تعریف مفهوم بر سلول تصور مفهوم است، «تصور ناشی از تعریف مفهوم» نامیده می‌شود. سلول دومی یعنی تعریف مفهوم، شامل یک تعریف کلامی از مفهوم است که به‌دقت مفهوم را توضیح می‌دهد و یک تعریف رسمی از مفهوم است (شکل ۲).

تصور مفهوم

تعریفِ شخصی از مفهوم | تعریفِ رسمی مفهوم

شکل ۲، جوادی، ۱۳۸۶

در ریاضیات، «تعریف مفهومی» که از سوی اکثریت جامعهٔ ریاضی‌دانان پذیرفته شده است، «تعریف مفهوم رسمی» یا فقط تعریف مفهوم نامیده می‌شود، درحالی‌که یک شکل از کلماتی که هر شخص برای توضیح تصور مفهوم فراخوانده‌اش به‌کار می‌برد، «تعریف مفهوم شخصی» در نظر گرفته می‌شود. در کل، تعریف مفهومِ شخصی ممکن است با تعریف مفهومِ رسمی کاملاً متفاوت باشد (شکل ۲). تال و وینر ادعا می‌کنند که ما از طریق تجربیاتمان، با بعضی از مفاهیم آشنا می‌شویم و بدون اینکه تعریف دقیق و مشخصی از آن‌ها داشته باشیم، آن مفاهیم را در زمینه‌های مختلف به‌کار می‌بریم. این در حالی است که فرد می‌تواند تعریف یک مفهوم را، بدون آنکه تصور مناسبی از آن داشته باشد، فقط به‌خاطر بسپارد (حفظ کند). گیرالدو[15] و همکاران (۲۰۰۶، نقل شده در جوادی، ۱۳۸۶) بیان می‌کنند که یک «تصور مفهوم جامع»، لزوماً یک تعریف مفهوم درست را در بر نمی‌گیرد و در ساختار شناختی یک مفهوم، هر یک از دو سلولِ «تصور» و «تعریف» مفهوم، می‌توانند خالی باشند و به‌طور مستقل از دیگری، به‌وجود آمده باشند. وینر (۱۹۸۳ و ۱۹۹۱)، تأثیراتی را که این دو سلول بر هم می‌گذارند، با توجه به تقسیم‌بندی فوق، در دو حالت مورد بررسی قرار می‌دهد: **حالت اول** زمانی است که تصور مفهوم فرد از طریق تجربیات وی با آن مفهوم شکل گرفته و هنوز تعریف رسمی به او ارائه نشده است و با وجود تهی نبودن سلول تصور مفهوم، تعریف رسمی مفهوم ارائه می‌گردد. **حالت دوم** نیز زمانی است که یک مفهوم، اولین بار به‌وسیلهٔ تعریفش معرفی می‌شود. در این حالت، سلول تصور مفهوم در ابتدا خالی است و بعد از ارائهٔ چندین مثال و تشریح آن‌ها، به‌تدریج پر می‌شود. با این حال، ممکن است سلول تصور مفهوم، بازتابی از تمام جنبه‌های تعریف مفهوم نباشد. وی در ادامه توضیح می‌دهد که در هر دو حالت- در حالت اول که تصور مفهوم قبلاً شکل گرفته و در حالت دوم که تصور در مراحل بعدی و به‌تدریج، شکل می‌گیرد- اگر تصور مفهومِ ساخته شده منطبق بر تعریف مفهوم باشد، مشکلی وجود ندارد و ایده‌ال است. برای مثال، اگر تعریف «محور مختصات» به‌عنوان دو خط متقاطع در نظر گرفته شده باشد و تکالیف و فعالیت‌هایی که دانش‌آموزان برای یادگیری آن انجام داده‌اند با همان دو خط متقاطع باشد، مشکلی به‌وجود نمی‌آید. اما ممکن است وضع همیشه به این منوال نباشد. مثلاً در حالت اول؛ یعنی زمانی که تصورِ

برای یک مفهوم معین، هر شخص ممکن است تصور مفهومی متفاوتی با دیگران و متناسب با درک و تجارب شخصی خود تشکیل دهد که لزوماً همهٔ بخش‌های آن با هم مرتبط و سازگار نیستند

مفهوم دانش‌آموز از مفهوم محور مختصات، در نتیجهٔ دیدن بسیاری از نمودارها در وضعیت‌های مختلف و به‌صورت دو محور عمود بر هم ایجاد شده باشد، آنچه که در تصورِ مفهوم او از محور مختصات شکل می‌گیرد، احتمالاً دو محور عمود بر هم خواهد بود. حال بعد از اینکه معلم ریاضی، دستگاه مختصات را به‌صورت دو خط متقاطع معرفی کند، پیش‌بینی می‌شود که یکی از سه حالت زیر اتفاق بیفتد:

۱. تصور مفهوم در جهت تعریف مفهوم تغییر می‌کند؛ یعنی تصور مفهوم فرد، محورهایی را که بر هم عمود نیستند نیز، به‌عنوان دستگاه مختصات در نظر می‌گیرد که این اتفاق، یک بازسازی و تطابق ایده‌ال و مطلوب است.

۲. تصور مفهوم به همان صورت باقی می‌ماند درحالی‌که سلول تعریف مفهوم در واقع تعریف رسمی ارائه شده توسط معلم را در برمی‌گیرد که اغلب، این تعریف یا به فراموشی سپرده می‌شود یا پس از مدت کوتاهی تحریف می‌گردد. لذا زمانی که مثلاً از دانش‌آموز خواسته می‌شود یک دستگاه مختصات را تعریف کند، او دربارهٔ محورهایی با زاویه‌های ۹۰ درجه صحبت می‌کند و ممکن است که در این حالت، تعریف رسمی به‌طور کامل درک نشود و جذب نگردد.

۳. هر دو سلول به‌همان صورت که بوده‌اند باقی می‌مانند؛ بدین معنی که سلول تصور مفهوم تغییری نمی‌کند و تنها سلول تعریف مفهومِ ارائه شده توسط معلم را درون خود حفظ می‌کند و در لحظه‌ای که از او خواسته می‌شود تا یک دستگاه مختصات را تعریف کند، تعریف معلم را عیناً تکرار می‌کند، درحالی‌که در وضعیت‌های دیگر، او دستگاه مختصات را به‌صورت دو محور عمود بر هم در نظر می‌گیرد.

در حالت دوم، تأثیر سلول تعریف مفهوم بر سلول تصور مفهوم، شبیه سه اتفاق بالاست، یعنی:

- تصور مفهوم بر مبنای تعریف مفهوم شکل می‌گیرد.
- تصور مفهوم با دیدن تمثیل‌ها و کار کردن با آن‌ها، متفاوت از تعریف مفهوم شکل می‌گیرد و تعریف مفهوم فراموش می‌گردد یا تحریف می‌شود. برای مثال، معرفی مفهوم تابع در قالب تعریف، به‌صورت «رابطه‌ای بین دو مجموعهٔ A و B، که هر عضو A فقط با یکی از اعضای B رابطه دارد» عرضه می‌گردد و پس از مدت کوتاهی، تمام مثال‌های عرضه شده در قالب توابع تک ضابطه‌ای و تک فرمولی ارائه می‌شوند. لذا احتمالاً، تصور مفهوم به‌سمت تک ضابطه‌ای بودن هر تابع می‌رود. برای مثال، یافته‌های تحقیق نشان می‌دهند که اکثر دانش‌آموزان، تناظری را که عدد غیر صفر را به مربعش و صفر را به ۱- نسبت می‌دهد، به‌عنوان تابع قبول نمی‌کنند (وینر ۱۹۸۳و۱۹۹۱؛ وینر و دریفوس[۱۶]، ۱۹۸۹؛ نقل شده در جوادی، ۱۳۸۶).
- تصور مفهوم، مستقل از تعریف مفهوم شکل می‌گیرد و تغییری در سلول تعریف مفهوم رخ نمی‌دهد. مثلاً دانش‌آموزان، تعریف را به‌همان صورت رسمی ارائه می‌کنند ولی تناظر مطرح شده در قسمت قبل را به‌عنوان تابع نمی‌پذیرند (وینر۱۹۸۳و وینر و دریفوس ۱۹۸۹؛ نقل شده در جوادی، ۱۳۸۶).

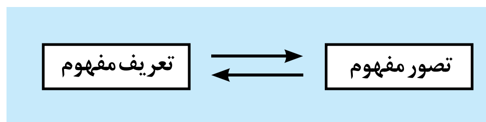
تال و وینر، مدل خود را برای توصیف بعضی عامل‌هایی که ممکن است منشأ تناقض شناختی یادگیرندگان در مورد مفاهیم حدِ دنباله، حدِ توابع و توابع پیوسته باشد به‌کار بردند

وینر (۱۹۹۱) بیان می‌کند که شکل‌گیری یک مفهوم، به‌طور کلی به‌معنای تشکیل یک تصور مفهوم مناسب و جامع برای آن است و تعریف‌های مفهوم بسته به **روزمره** یا **تخصصی بودن**، نقش‌های متفاوتی در شکل‌گیری مفهوم به‌عهده دارند. تعریف‌های روزمره، اگرچه به شکل‌گیری تصور مفهوم کمک می‌کنند، اما پس از این شکل‌گیری، تعریف غیرضروری می‌شود و در هنگام کار با آن مفهوم، غیرفعال گشته و حتی ممکن است فراموش شود. درحالی‌که در زمینه‌های تخصصی، تعریف‌ها نه‌تنها به شکل‌گیری و ساخته شدن مفهوم کمک می‌کنند، بلکه اغلب نقشی حیاتی و مهم در انجام تکالیف و فعالیت‌های شناختی به‌عهده دارند و از اشتباهاتی که با تصور مفهوم آمیخته شده است، جلوگیری می‌کنند. برای مثال، نقطهٔ زاویه‌دار روی نمودار یک تابع، ممکن است براساس تصور مفهوم، یک نقطهٔ عطف محسوب شود، اما براساس تعریفِ نقطهٔ عطف، چون در این نقطه مماسِ واحد وجود ندارد، نقطهٔ عطف در نظرگرفته نمی‌شود.

مدل شناختی تصور مفهوم و تعریف مفهوم

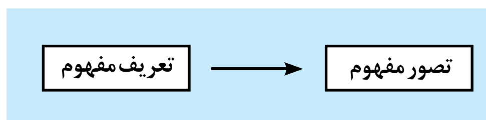
تال و وینر (۱۹۸۱)، فرایند یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان را بررسی کردند. آن‌ها تفاوت بین استدلال در ریاضی پیشرفته را که براساس تعریف‌های رسمی است- تعریف مفهوم- و استدلالی که دانش‌آموزان

براســاس درک خــود از مفهوم- تصــور مفهوم- به‌کار می‌برنــد، توضیح دادند. تــال و وینر، مدل خود را برای توصیف بعضی عامل‌هایی که ممکن است منشأ تناقض شناختی یادگیرندگان- شــرکت‌کنندگان در تحقیق آن‌ها دانش‌آموزان پایهٔ دوم دبیرســتان و دانشــجویان دانشگاه- در مورد مفاهیم حدِ دنباله، حدِ توابع و توابع پیوسته باشــد به‌کار بردند (ولا[17]، ۲۰۱۱). تال و وینر، ارتباط متقابل تصور مفهــوم و تعریف مفهوم را، حتی زمانی که هر کدام به‌طور مســتقل شکل گرفته باشند، به‌صورت زیر مدل‌سازی کردند (شکل ۳).



شکل ۳. فرایند شکل‌گیری مفهوم

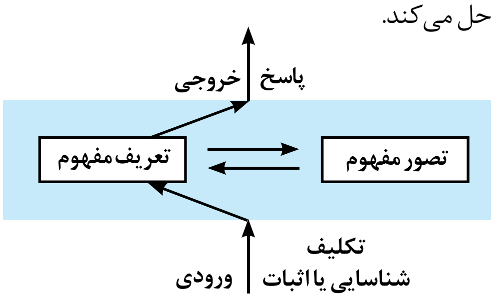
وینــر (۱۹۹۱) ادعــا می‌کند که تعــداد زیادی از معلمان ریاضی دورهٔ متوســطه و مدرسان دانشگاهی، فرایند شــکل‌گیری مفهوم را فراینــدی تک مرحله‌ای می‌دانند (شکل ۴) و معتقدند که تصور مفهوم، به‌وسیلهٔ تعریف مفهوم و تحت کنترل آن شکل می‌گیرد.



شکل ۴. شکل‌گیری یک مفهوم رسمی

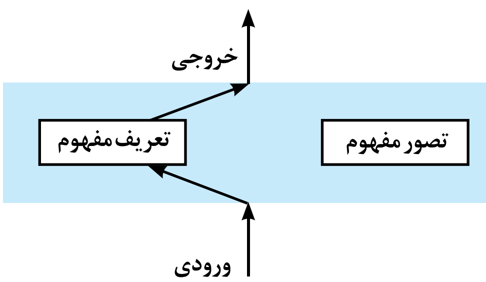
وینر (۱۹۹۱) بیــان می‌کند که اگر، برای مثال، از دانش‌آموزی خواســته شود که تشــخیص دهد از بین چند نمودار، کدام یک می‌تواند معرف یک تابع باشــد، بیشتر معلمان باور دارند که دانش‌آموز، براساس تعریفِ مفهوم، به این مســئله پاسخ می‌دهد و برایش استفاده از تصور مفهوم اهمیتی ندارد (حمــزا[18]، ۲۰۱۲). وینر (۱۹۹۱) مدعــی اســت که پاســخ‌های دانش‌آموزان با توجه به تعریفِ مفهوم، طی یکی از سه فرایند زیر ارائه می‌شود:

الــف. در این حالــت، دانش‌آموز، پس از بررســی مســئله، ابتدا تعریفِ مفهوم را به‌خاطــر می‌آورد. بعد به‌کمــک تعریــف، تصورات وابســته بــه آن مفهوم از جمله مثال‌هــا، نامثال‌ها و به‌طور کلی تجاربی را که از دستورزی با آن‌ها، مفهوم را شکل داده است به‌خاطر مــی‌آورد. پس از طی این مراحــل، جنبه‌های مختلف تعریف مفهــوم را درک می‌کند و نحوهٔ به‌کارگیری آن را در مســئله تشخیص می‌دهد و به‌کمک آن مسئله را حل می‌کند.



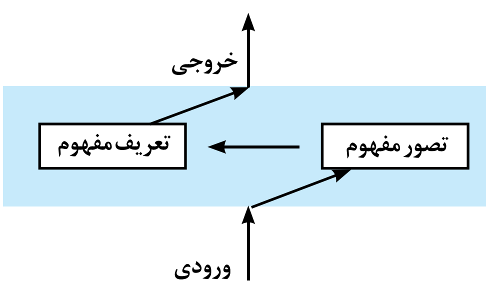
شکل ۵

ب. پس از بررسی مسئله، دانش‌آموز بدون توجه به تصورات مفهومِ خود، مستقیماً تعریفِ مفهوم مناسب با زمینهٔ مسئله را تشخیص و براساس آن پاسخ می‌دهد.



شکل ۶

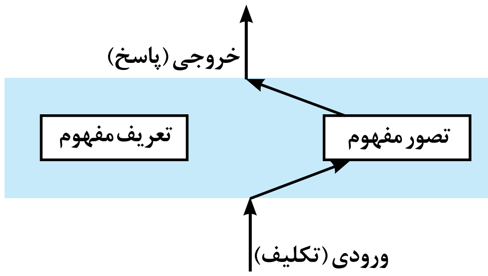
پ. پس از بررسی مسئله، دانش‌آموز ابتدا تصورات وابســته به مفهوم خود را، مانند مثال‌ها و نامثال‌های[19] کمکــی و تجاربــی کــه از دســتورزی با مفهــوم در موقعیت‌هــای مختلف به‌دســت آورده اســت در نظر می‌گیرد و به‌کمک آن‌ها، تعریف مفهوم را به‌یاد می‌آورد یا بازسازی می‌کند. نهایتاً براساس تعریفِ مفهوم، مسئله را حل می‌کند.



شکل ۷

اما براســاس مدل تال و وینر، این شکل‌ها (۳ و ۴ و ۵)، عملاً آنچه را که اتفاق می‌افتد، نشــان نمی‌دهند.

بلکه چیزی که در عمل اتفاق می‌افتد، شبیه فرایندی است که در شکل زیر، توصیف شده است (شکل ۸):



شکل ۸

براساس این مدل، دانش‌آموزان اغلب براساس تصورِ مفهومِ خودشان به مسئله پاسخ می‌دهند که وینر (۱۹۹۱) آن را پاسخ شهودی[20] می‌نامد.

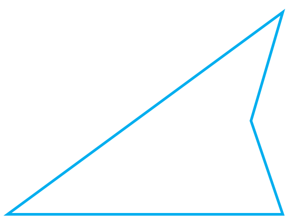
به باور بسیاری از معلمان، موقعی که یادگیرنده درگیر انجام یک فعالیت شناختی می‌شود، هر دو سلول تصورِ مفهوم و تعریفِ مفهوم وی فعال می‌شوند؛ باوری که مدل وینر آن‌ها را به چالش می‌کشد.

بازتاب مدل مفهومی تال و وینر در تحقیقات آموزش ریاضی

مدل مفهومی تال و وینر چارچوب مفیدی برای مؤلفان کتاب‌های درسی، آموزشگران و معلمان ریاضی جهت درک فرایندهای ذهنی دانش‌آموزان است. این مدل در مطالعات بسیاری از جمله تال و وینر(۱۹۸۱)، هرشکوویتز[21] و وینر (۱۹۸۴)، هرشکوویتز (۱۹۸۹)، وینر (۱۹۹۱)، روسکین[22] و رولکا[23] (۲۰۰۷)، جوادی(۱۳۸۶) و محتشم و همکاران (۱۳۹۱)، برای بررسی مفاهیم تابع، خط مماس بر منحنی، پیوستگی، حد دنباله، انتگرال و عدد زوج، از منظر دانش‌آموزان، دانشجو- معلمان، دانشجویان و معلمان ریاضی به‌کار گرفته شده است. برای نمونه، می‌توان به مطالعاتی که هرشکوویتز و وینر (۱۹۸۴) و هرشکوویتز (۱۹۸۹) انجام دادند، اشاره کرد. در این مطالعات، علاوه بر دانش‌آموزان، معلمان و دانشجو- معلمان نیز شرکت کردندکه همهٔ آن‌ها، باید تکالیف مشابهی را حل می‌کردند. در هر مطالعه، دو پرسش‌نامه به شرکت‌کنندگان داده شده بود؛ در پرسش‌نامهٔ اول از آن‌ها خواسته شده بود در بین مجموعه‌ای از اشکال هندسی شامل زاویه، مثلث متساوی‌الساقین، مثلث قائم‌الزاویه و چهارضلعی، قطر را مشخص کنند. در پرسش‌نامهٔ دوم، از آن‌ها خواسته شده بود که مثال‌هایی از یک مفهوم نظیر ارتفاع مثلث، ارائه کنند.

از جمله مهم‌ترین نتایج حاصل از این دو مطالعه، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- زمانی که از معلمان، دانشجو- معلمان و دانش‌آموزان خواسته شد تکالیف مشابهی انجام دهند، بین سه گروه، بدفهمی‌های یکسانی اتفاق افتاد، یعنی «تصور مفهوم» معلمان و دانشجو-معلمان، فقط کمی از «تصور مفهوم» دانش‌آموزان، بهتر بود (هرشکوویتز، ۱۹۸۹؛ هرشکوویتز و وینر، ۱۹۸۴؛ نقل شده درگاتییِرز و جیم، ۱۹۹۹).
- تصور مفهوم تعداد زیادی از معلمان، دانشجو- معلمان و دانش‌آموزان، شامل تعداد کمی از مثال‌های خاص، شکل‌ها و مستقل از تعریف مفهوم آن‌هاست. برای مثال، یک تصور مفهومِ مرسوم از قطر چهارضلعی، معمولاً شامل قطرهای‌داخلی است. لذا فقط یک قطر برای چهارضلعی‌های مقعر[24] (شکل ۹) رسم می‌شود (هرشکوویتز، ۱۹۸۹؛ هرشکوویتز و وینر، ۱۹۸۴؛ نقل شده درگاتییرز و جیم، ۱۹۹۹).


شکل ۹

- در سؤالاتی که مربوط به شناسایی مفهوم می‌شود، حضور «تعریف مفهوم»، تقریباً هیچ تأثیری روی پاسخ‌ها نداشته است. اما در سؤالی که از دانش‌آموزان خواسته شده بود تا ارتفاع مثلث‌ها را رسم کنند، پاسخ‌هایی که با تعریف ارائه شده بود، به‌طور قابل‌توجهی بهتر بود (هرشکوویتز، ۱۳۸۹؛ هرشکوویتز و وینر، ۱۹۸۴؛ نقل شده درگاتییرز و جیم، ۱۹۹۹).

مثال دیگر، مطالعهٔ روسکین و رولکا (۲۰۰۷) دربارهٔ یادگیری مفهوم انتگرال معین است که توسط دانش‌آموزان دبیرستانی انجام شد. پژوهشگران، پرسش‌نامه‌ای دربارهٔ مفهوم انتگرال و به‌منظور آشکار کردن «تصور مفهوم» دانش‌آموزان طراحی کردند. بر اساس نتایج به‌دست آمده، آن‌ها دریافتند که تعریف‌ها، نقش حاشیه‌ای در یادگیری دانش‌آموزان دارند و

استدلال‌های آن‌ها دربارهٔ مفهوم انتگرال به‌طور عمده، براساس «تصور مفهوم» و شهود، صورت می‌گیرد.

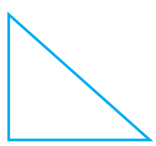
در ایران نیز دو تحقیق با استفاده از این مدل، یکی توسط جوادی (۱۳۸۶) و دیگری محتشم، غلام‌آزاد و ریحانی (۱۳۹۱) انجام شده است. جوادی (۱۳۸۶) در مطالعهٔ خود، به بررسی درک دانشجویان از مفهوم تابع براساس «تصور مفهوم» و «تعریف مفهوم» آن‌ها پرداخت. داده‌های این پژوهش از طریق پرسش‌نامه‌ای شامل ۸ سؤال جمع‌آوری شد. سه سؤال اول، حاوی سه نمودار بود و از شرکت‌کنندگان خواسته شده بود تا نشان دهند کدام یک از آن‌ها، معرّف تابع هستند. در سؤال چهارم و پنجم، از دانشجویان خواسته شده بود که مثال‌هایی از دو تابع خاص ارائه کنند که در کتاب درسی، با آن‌ها به‌عنوان «توابع دارای نام» (ثابت و دیریکله) آشنا شده‌اند و پاسخ‌های خود را توضیح دهند. تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان نشان داد که «تصور مفهومِ» بیشتر دانشجویان از تابع، به‌صورت یک قانون یا یک ماشین است. جوادی (۱۳۸۶)، نتیجه گرفت که بخشی از «تصور مفهومِ» دانشجویان که تابع را یک قانون می‌داند، مانع از درک «تعریف مفهوم» تابع می‌شود. از این گذشته، محتشم، غلام‌آزاد و ریحانی (۱۳۹۱) نیز در مطالعه خود، دو پرسش‌نامه بین دانش‌آموزان پایهٔ دوم دبیرستان توزیع کردند. محققان در پرسش‌نامهٔ اول، از دانش‌آموزان خواستند که عدد زوج را تعریف کنند. پرسش‌نامهٔ دوم نیز حاوی سه سؤال بود که در سؤال اول، دانش‌آموزان باید تعیین می‌کردند که از بین چندین تعریف برای عدد زوج، کدام‌ها تعریفی برای عدد زوج محسوب می‌شوند. در سؤال دوم و سؤال سوم هم، از دانش‌آموزان خواسته شده بود «مناسب‌ترین» و «ضعیف‌ترین» تعریف عدد زوج را از دیدگاه خود مشخص کرده و پاسخشان را توضیح دهند. تجزیه و تحلیل داده‌ها نشان داد که تصور دانش‌آموزان از عدد زوج، در مراحلِ مختلفِ درک مفهوم، مانند ارائهٔ تعریفی برای مفهوم و انتخاب از بین تعریف‌های مختلف مفهوم، «تصور مفهوم» نقش اصلی را به‌عهده دارد.

دسته‌بندی تصورات مفهوم براساس مدل تال و وینر

طبق مدل تال و وینر، زمانی که به یادگیرندگان تکلیفی داده می‌شود، تنها بخشی از سلول «تصور مفهوم»، در لحظات معینی فعال می‌شود. مثلاً، برای اشخاص مختلف، بخش‌های متفاوتی از سلول تصویری و در لحظات متفاوت، فراخوانده می‌شود. در نتیجه، برای درک فرایند شناختی یادگیرندگان، مطالعهٔ «تصورات مفهوم» وابسته به یک مفهومِ معین ضرورت دارد.

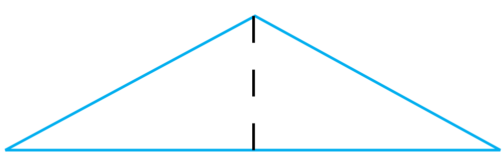
براساس نتایج حاصل از به‌کارگیری این مدل در پژوهش‌های متعدد و متنوع، گاتییرز و جِیم (۱۹۹۹)، «تصور مفهوم» افراد را در سه نوع رفتار[۲۵] زیر شناسایی کردند:

● **افراد با تصور مفهوم غیر منسجم:** تصور مفهوم این افراد، از تعداد کمی مثال مربوط به یک مفهوم خاص، به‌عنوان «مثال‌های نوعی[۲۶]» و برخی ویژگی‌های آن مثال‌ها، ایجاد شده است. این افراد، تکلیف‌های جدیدی را که به آن‌ها ارائه می‌شود، با مثال‌ها و ویژگی‌هایی که در «تصور مفهوم» خود دارند، مقایسه می‌کنند. بنابراین، اگر تکلیفی نیازمند درک جنبه دیگری از مفهوم باشد که با آن مثال‌های نوعی متفاوت باشد، آن جنبه را کنار می‌گذارد. برای نمونه، «تصور مفهوم» بسیاری از دانش‌آموزان از یک مثلث قائم‌الزاویه، اغلب شامل یک ضلع قائم و یک ضلع افقی است (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

● **افراد با تصور مفهومِ تا حدی منسجم:** در تصور مفهوم این افراد، علاوه بر تعدادی مثال، برخی ویژگی‌های کلی‌تر مفهوم‌ها نیز وجود دارند که برای بررسی تکلیف‌هایی مربوط به آن‌ها، به‌کار می‌روند. به‌عنوان نمونه، بسیاری از دانش‌آموزان، «تصور مفهوم»شان از مثلث، یک سه ضلعی است که فقط زاویهٔ حاده دارد و در نتیجه، همهٔ ارتفاع‌ها داخل مثلث می‌افتند. بنابراین، از نظر این دانش‌آموزان، مثلثی با زاویهٔ منفرجه، تنها یک ارتفاع و آن هم ارتفاع وارد از رأس زاویهٔ منفرجه دارد (شکل ۱۱).



شکل ۱۱

● **افراد با تصور مفهومِ منســجم**: این افراد، «تصور مفهومِ» منسجم و کاملی دارند، به‌طوری که این تصور، جنبه‌های مختلف مفهوم را دربرمی‌گیرد. تصور مفهوم این افراد، شامل مثال‌های متنوع، همهٔ ویژگی‌های مهم ایــن مثال‌ها و روابط بین آن‌هاســت. این دانش‌آموزان می‌توانند با توجه به کلیت این مثال‌ها و امکان تحلیل ویژگی‌های اصلــی مفهوم، در انجام تکلیف‌های متنوعِ مرتبــط با مفهــوم، بهتر عمل کنند. بــرای نمونه، این دانش‌آموزان با انواع مثلث، ویژگی‌ها و تفاوت‌هایشان و نحوهٔ رسم اجزای داخلی آن‌ها کاملاً آشنا هستند.

در حقیقــت، می‌توان گفت آشــکار کردن «تصور مفهــوم» دانش‌آمــوزان، نه‌تنها درک بهتــری از نحوهٔ تفکر آن‌ها را نشــان می‌دهد، بلکه رویکردهای بهتری را هم برای تدریس پیشنهاد می‌کند. به‌هر حال، اغلب آموزشگران و معلمان ریاضی دریافته‌اند که دانش‌آموزان، به‌واسطه مجموعهٔ خاصی از مثال‌ها، ممکن است «تصور مفهوم» اشتباهی در ذهن خود ایجاد کرده باشند. یعنی، روش ارائه مفهوم‌ها و تعریف‌ها به یادگیرندگان ریاضی، «تصور مفهوم»، «تعریف مفهومِ شخصی» و ارتباط بین آن‌ها را شکل می‌دهد تا زمینه مناسب را برای یادگیری معنادار «تعریف مفهوم»، فراهم کند.

آشکار کردن «تصور مفهوم» دانش‌آموزان، نه‌تنها درک بهتری از نحوهٔ تفکر آن‌ها را نشان می‌دهد، بلکه رویکردهای بهتری را هم برای تدریس پیشنهاد می‌کند

بحث و نتیجه‌گیری

در اواخر دههٔ ۱۹۷۰ و دههٔ ۱۹۸۰ میلادی، چگونگی تأثیر مثال‌ها و دست‌ورزی‌ها و تجارب پیشین یادگیرندگان ریاضی بر یادگیری تعریف‌های رسمی مفهوم‌های ریاضی و مشکلات آن‌ها در این‌باره، موضوعی بود که ذهن بسیاری از آموزشگران ریاضی را به خود مشغول کرد. این دغدغه، نیروی محرکه‌ای قوی برای انجام تحقیقات در این حوزه شد که حاصل آن‌ها، در قالب مقالات متعددی منتشر شد (شــوارزنبرگر[۲۷] و تال، ۱۹۸۷؛ تال، ۱۹۷۷؛ وینر، ۱۹۸۰؛ وینر و هرشکوویتز، ۱۹۸۰؛ کورنو[۲۸]، ۱۹۸۱). در این بین، علاقه‌های مشــترکِ نظری و تجربی تال و وینر (۱۹۸۱) باعث شد که آن‌ها بتوانند تلاش‌های مستقل خود را در قالب یک تحقیــق طراحی و اجرا کنند. یافته اصلی این تحقیق، تبیین «مدل شــناختیِ تصــور مفهوم و تعریف مفهوم» بود. این مدل، ضمن توضیح ارتباط بین «تصور مفهوم» و «تعریف مفهوم» و نقش آن‌ها در شکل‌گیری یک مفهوم ریاضی، ابزار مناسبی برای تحلیل فرایندهای شــناختی یادگیرنده فراهم می‌کند. همچنین، این مدل کمک می‌کند تا تناقض‌های احتمالی بین «تصور مفهوم» و «تعریف مفهوم» یادگیرندگان، شناخته شود. شناسایی این تناقض‌ها و چگونگی شــکل‌گیری آن‌ها، به معلمان این امکان را می‌دهد تا رویکردهای تدریسی مناسب‌تری انتخاب کنند.

به اعتقاد وینر (۱۹۹۱)، در حالی که از نظر بسیاری از معلمان ریاضی و مؤلفان کتاب‌های درسی ریاضی، ارائهٔ تعریف رسمی یک وظیفه می‌باشد، اما آن‌ها نمی‌توانند نســبت به اثرات شناختی این تعریف‌ها بر شکل‌گیری تفکر ریاضــی و تصور مفهوم دانش‌آمــوزان، بی‌تفاوت باشند. بنابراین، با وجود اهمیتی که تعریف‌های رسمی در ریاضی دارند، ارائهٔ به‌موقع آن‌ها مهم است و ضروری اســت که با اهداف آموزشــیِ در نظر گرفته شده برای دانش‌آموزان تناســب داشــته باشــد. به عبارت دیگر، بســیاری از تکلیف‌ها، تنها با رجــوع به تصور مفهوم و بدون نیاز به تعریف رســمی، فهمیده و انجام می‌شود. در این صورت، با تأکید بر «تصور مفهوم» در کنار ارائه تعریف‌ها، لازم اســت زمینهٔ ایجاد مناسب آن از طریق عرضهٔ مجموعــه‌ای از مثال‌ها کــه جنبه‌های مختلف مفهوم را نشــان می‌دهند، فراهم شــود. در عین حال، به‌دلیــل اینکه توانایی کار با تعریف‌های رســمی برای موفقیت در ریاضیات ضروری است، پس لازم است که در طراحی برنامه‌های درسی ریاضی برای دانش‌آموزانی که در رشته‌هایی تحصیل می‌کنند که ریاضی در آن‌ها، نقــش زیربنایــی و بنیادی دارد، «تصــور مفهوم»‌های مناســب برای آمادگی جهت درک مناسب از «تعریف مفهوم» و کاربرد آن در زمینه‌های مختلف، ایجاد شود. این کار زمانی امکان‌پذیر اســت که بــه دانش‌آموزان، تکلیف‌هایی داده شــود کــه تنها با رجــوع به «تصور مفهوم»، درک و انجامشان ممکن نباشد (وینر، ۱۹۹۱). شناسایی مثال‌ها و نامثال‌های[۲۹] یک مفهوم، حل مسئله و اثبات‌های ریاضی، از جمله فعالیت‌هایی هســتند که باعث می‌شوند دانش‌آموزان، به جای استفاده صِرف از «تصور مفهوم»، «تعریف مفهــوم» را هم به‌کار گیرند. از طرف دیگر، نتایج حاصل از تحقیقات مرتبط نشــان می‌دهــد که در بعضــی موارد، معلمان نیز مشــکلات

مشـــابهی دارند. یعنی در فرایند یادگیری یک مفهوم، شکاف موجود بین «تصور مفهوم» و «تعریف مفهوم»، به دانش‌آموزان منحصر نمی‌شود. بلکه در برخی موارد، معلمان نیز به این مشـــکل دچارند که این نیز به نوبۀ خود، ممکن اســـت در فرایند یادگیـــریِ دانش‌آموزان، به‌طـــور جدی اختلال ایجاد کنـــد. در این رابطه، مدل شـــناختی تال و وینـــر در تدوین برنامه‌هـــای آموزش معلمان ریاضی، می‌تواند به‌طور جدی مورد توجه قرار گیرد تا **آموزشـــگرانِ معلمـــان** با استفاده از آن، قادر به تربیت معلمانی باشند که دارای «تصور مفهوم»های قوی و آمادگی برای درک «تعریف مفهوم»ها باشند.

پی‌نوشت‌ها

1. Zazkis
2. Leikin
3. Concept Image
4. Concept Definition
5. Comparetmentalization
6. Tall
7. Vinner
8. Piaget
9. Tarski
10. Mental Imagery
11. Frame of Reference
12. Vong

۱۳. تصویـــر ذهنی یک اســـم (یا یک عبـــارت) معین در ذهن هر شـــخص، به عنوان مجموعه همه تصاویر (اطلاعات) وابسته با آن اسم (یا عبارت اسمی) تعریف می‌شود.

14. Evoked Concept Image
15. Giraldo
16. Dreyfus
17. Vela
18. Hamza
19. Nonexamples
20. Intuitive Response
21. Hershkowitz
22. Rosken
23. Rolka

۲۴. چهار ضلعی که یک زاویۀ آن، از ۱۸۰ درجه بیشتر است.

25. Behavior
26. Typical Examples
27. Schwarzenberger
28. Cornu
29. Nonexamples

منابع

۱. جوادی، مهـــدی (۱۳۸۶). **تصور مفهوم و تعریف مفهوم از مفهوم تابع**. پایان‌نامۀ کارشناســـی ارشـــد منتشر نشده آموزش ریاضی. دانشگاه شهیدبهشتی، تهران.

۲. محتشـــم، زهرا؛ غلام‌آزاد، ســـهیلا و ریحانی، ابراهیم (۱۳۹۱). **نقش تعریف در یادگیری ریاضی**. مقاله ارائه شده در دوازدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، شـــهریورماه ۱۳۹۱، سمنان، ادارۀ آموزش‌وپرورش سمنان

3. Gutierrez, A., & Jaime, A. (1999). Pre-service primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2, 253–275.

4. Hamza, Safia F. (2012) *A Study of Concept Images and Concept Definitions related to Metric Spaces*. PhD thesis, National University of Ireland Maynooth.

5. Rosken, B., & Rolka,k. (2007). Integrating Intuition: The Role of Concept Image and Concept Definition for Students' Learning of Integral Calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast*. Monograph 3, pp.181- 204.

6. Schwarzenberger, R. L. E. and Tall, D. O. (1978). Conflict in the learning of realnumbers and limits, *Mathematics Teaching*.82, 44–9

7. Tall, D. O. (l977a). Cognitive conflict and the learning of mathematics. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht, Holland.

8. Tall, D. (1988). Concept Image and Concept Definition, Senior Secondary Mathematics Education, (ed. Jan de Lange, Michiel Doorman), *OW&OC Utrecht*, 37– 41.

9. Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and Concept Definition in Mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.

10.Vela, M. J.(2011). A Snapshot of Advanced High School Students' Understanding of Continuity.

11. Vinner,S. (1976). The Naive Concept of Definition in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 413- 429.

12. Vinner, S. (1983). Concept definition, Concept Image and the Notion of Function. *Math.Edu.Sci. Technol*. VOL. 14, NO. 3, 293- 305.

13. Vinner,S. & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concepts of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education*. 20 (5), 356- 366.

14. Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D,O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical* Thinking,(pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer.

15. Vong, M. C. (1989). *Concept Image and Concept Definition in the Calculus: A Comparison between their Occurrence in History and in the Class. Unpublished Master Thesis*, Concordia University. Montreal, Quebec, Canada.

16. Zazkis,R., & Leikin,R. (2008). Exemplifying Definitions: A Case of a Square. Educational Studies in Mathematics. 69:131–148.

این مقاله، با همکاری سرکار خانم دکتر سهیلا غلام‌آزاد و سرکار خانم دکتر زهرا گویا بازسازی شده. بدین‌وسیله، از آن‌ها تشکر می‌کنم. (نویسنده)

مقاله

دوزبانـــــــــــــگی
و حل مسائل کلامی ریاضی

صابر قدمی، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان تکاب
زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

اشاره
بحث دوزبانگی و حل مسائل کلامی ریاضی، برای بسیاری از پژوهشگران آموزش ریاضی، موضوعی جذاب و پراهمیت بوده و هست. به‌خصوص در کشورهایی که از تنوع قومی و زبانی چشمگیری برخوردارند، این مطالعات بیشتر انجام شده است. همچنین، با موج شدید مهاجرت‌ها در سراسر دنیا، چالش‌هایی که مسئله «زبان» به‌وجود آورده، نظام‌های آموزشی را وادار به سرمایه‌گذاری پژوهشی در این حوزه کرده است. در این مقاله و به‌خصوص در بررسی پیشینهٔ تحقیق، از واژه‌های گوناگون «زبان مادری»، «زبان دوم»، «زبان آموزش»، «زبان وارداتی»، «زبان طبیعی» و «زبان رسمی» استفاده شده است که شاید برای خوانندگانی که با این حوزه آشنا نباشند، جای سؤال بیشتری داشته باشد. بدین جهت، قبل از ورود به بحث اصلی، اشاره کوتاهی به هر یک می‌شود تا تمایز بین آن‌ها روشن شود. زیرا اگرچه برای افراد معمولی، شاید این دقت ضرورت نداشته باشد، اما برای سیاستگذاران و تصمیم‌گیرندگان و تصمیم‌سازان آموزشی و همچنین معلمان مناطق دوزبانه، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

زبان مادری: زبانی که کودک با آن، تکلم را شروع می‌کند.

زبان دوم: هر زبانی به غیر از زبان مادری

زبان آموزش: زبانی که آموزش فرد، با آن شروع می‌شود، زیرا زبان رسمی آموزش در یک کشور یا نظام آموزشی است بدین سبب، اغلب زبان دوم و زبان آموزش، یکی گرفته می‌شوند و انتظار می‌رود که فرد به‌تدریج به هر دو زبان مسلط شده و به اصطلاح، «دوزبانه» شود.

زبان وارداتی: زبانی است که منحصر به آموزش رسمی / مدرسه‌ای است و دانش‌آموزان حاضر نیستند که نسبت به آن، «دوزبانه» شوند. یعنی در زندگی واقعی خود، از زبان وارداتی به‌عنوان ابزار ارتباطی، استفاده نمی‌کنند.

زبان طبیعی: عمدتاً برای برقراری ارتباط به هر شکل گفتاری، علامتی یا نوشتاری است.

زبان رسمی: هر زبان رسمی، دارای واژه‌ها و اصطلاحات اختصاصی و منحصربه‌فرد است. ریاضی نمونه‌ای از زبان رسمی است.

کلیدواژه‌ها: حل مسئله کلامی، دوزبانگی، ریاضی سال اول متوسطه

طرح مسئله
آموزش ریاضیات، همواره جزو یکی از بحث‌های مهم و چالش‌برانگیز در برنامهٔ درسی مدرسه‌ای بوده و هست. این مهم برای محققان، آموزشگران ریاضی و آنان که سابقهٔ تدریس ریاضیات مدرسه‌ای را داشته‌اند، امری واضح است. دلایل این امر می‌تواند سخت

بـودن ذاتـیِ ریاضی که نیازمنـد کار فکری و اسـتدلال و استنتاج است، ذهنیت ایجاد شده در دانش‌آموزان حتی قبل از ورود به مدرسـه یا روش‌های مختلف آموزش ریاضی باشـد. با وجود این، گاهی اوقات شـرایطی پیش می‌آید که به سـختیِ کار می‌افزاید. یکی از موضوعات و مسـائلی که به فراوانی در کتاب‌های درسی ریاضـی وجـود دارد، بحث مربوط به مسـائل کلامی و حل آن‌هاسـت. تحقیقات انجام شده در این زمینه (هگارتی، ۱۹۹۵؛ چارلز، ۲۰۰۴)، حکایت از این دارد که مسائل کلامی، جزو یکی از سخت‌ترین مسائل برای دانش‌آموزان و حتی برخی دانشجویان به حساب می‌آید، به‌خصوص وقتـی کـه زبان این مسـائل، با زبـان مادری دانش‌آموزان فرق دارد. به‌طور مشخص، با توجه به اینکه در ایران زبان رسـمی آموزش فارسی اسـت و تمام کتاب‌های درسی به زبان فارسی نگارش شده‌اند، عامل زبان به‌عنوان یک مداخلهٔ منفی در آمـوزش دانش‌آموزانی عمل می‌کند که زبان مادری آنان فارسی نیست. برای نمونه، ترکیب ساختار ویژهٔ زبان ریاضی با زبان فارسی و تشکیل یک مسـئلهٔ کلامی به زبان فارسی، کار حل مسئله را برای دانش‌آموزان ترک‌زبانی که زبان فارسی برای آنان به‌عنوان «زبان دوم»[1] و در بیشـتر مناطق به‌عنوان «زبان وارداتی»[2] محسوب می‌شود، مشـکل‌تر می‌کند. چرا که سـاختار مسـائل کلامی، به‌گونه‌ای اسـت که دانش‌آمـوز ابتدا باید بتواند مسـئله را بخواند، توانایی فهمیدن مسئله و بازنمایی آن را داشته باشـد و بتواند داده‌ها و خواسـته‌های مسئله را بـه زبان ریاضی بیان کنـد و بعد، برای حل آن اقدام کنـد. اما وقتی این مسـائل در زبان دیگری برای دانش‌آموزان مطرح می‌شـود که گاهی نمی‌توانند مسـئله را به درستی بخوانند و استراتژی‌های درک مطلب محدودی در زبان مسـئله دارند، حتی کار به فهمیدن و بازنمایی مسئله هم نمی‌کشـد چه رسد به حل آن؛ در نتیجه مسـئله را بدون پاسـخ رها می‌کنند. از نظر سیاسـت‌گذاری‌های آموزشی، درک تمایز بین «زبان دوم» و «زبان وارداتی» حائز اهمیت اسـت. دانش‌آموز دارای «زبان دوم» یا دوزبانه به هر دو زبان تسلط دارد. در حالی‌که اگر یک زبان به‌عنوان «زبـان وارداتی» برای دانش‌آموز به‌حساب آید، تنها مواجههٔ وی با آن زبان، فقط در محیط مدرسـه خواهد بود و در محیط‌های اجتماعی خود، با زبان مادری‌اش ارتباط برقرار می‌کنـد. بی‌توجهی به عامـل «دوزبانگی» در آمـوزش ریاضی در حالی اسـت کـه معیار و ملاک رسـمی برای سنجش مهارت‌های زبانیِ دانش‌آموزان در زبان دوم وجود ندارد و اقدامات لازم در این زمینه، صورت نگرفته است.

با این توصیف، شاید این انتظار بجاست که دانش‌آموزانی که زبان مادری آنان فارسی است، در حل مسـائل کلامی در کتاب‌های درسـی ریاضی که به زبان فارسی است، مشکلی نداشته باشـند، زیرا این دانش‌آموزان، توانایی خواندن مسـئله و فهمیدن اصطلاحات مطرح شده در مسـئله را دارند و اگر در ادامه حل مسـئله با مشـکل روبه‌رو شـوند، ناشـی از ضعف دانش ریاضی و آشنا نبودن آن‌ها با استراتژی‌های حل مسائل کلامی است. اما دانش‌آموزان دوزبانه در ایران، که در اینجـا به‌طور خاص دانش‌آموزان مناطـق ترک‌زبان مورد نظر اسـت، برای حل مسائل کلامی، با سختی‌های بیشتری مواجه‌اند که ریشـهٔ آن، در بیان این مسائل به زبان دوم آن‌ها یعنی زبان فارسی است. این دانش‌آموزان، ابتدا باید صورت مسئله را به زبانی بخوانند که آشـنایی کامل با آن ندارنـد و حتی گاهی در حرف زدن به آن زبان با مشـکل مواجه‌اند. این امر می‌تواند انگیزهٔ دانش‌آموزان را برای سـعی در خواندن دوباره و چندباره مسئله و فهمیدن آن، تحت تأثیر قرار دهد. تحقیق انجام شـده بـر روی دانش‌آموزان دوزبانه در آموزش و حل مسائل کلامی توسط مولیگان (۲۰۱۳)؛ بیان‌گر چنین واقعیتی است. این تحقیق نشان می‌دهد که برای حل این مشـکل، تأثیر مداخله‌هایی مانند اینکه معنای کلمات و عبارات مطرح شده در مسـائل کلامی به زبان دوم هم گفته شود، بسیار ناچیز است و حتی در صورت اثربخشی چنین کاری، این مداخله فقط در کلاس درس می‌توانـد صورت گیرد چرا کـه در آزمون‌های پایانی و سراسـری، ممکن اسـت دانش‌آموز با

مسائل کلامی، جزو یکی از سخت‌ترین مسائل برای دانش‌آموزان و حتی برخی دانشجویان به حساب می‌آید، به‌خصوص وقتی که زبان این مسائل، با زبان مادری دانش‌آموزان فرق دارد

مسـئله‌ای روبه‌رو شـود که برخی اصطلاحات خـاصِ مربوط بـه آن را در زبـان مادری خود نمی‌داند.

اهمیـت ایـن موضـوع بـرای محققان و آموزشـگران ریاضـی، باعث شـده اسـت که پژوهش‌های زیادی در سراسـر دنیا، در ارتباط بـا آموزش ریاضی به «زبان دوم» انجام شـود. بنابرایـن، لازم اسـت در ایران نیـز، به منظور بهبود کیفیـت آموزش و بالا بردن توانایی‌های حل مسـئله دانش‌آموزان دوزبانـه در مناطق مختلف کشـور، توجه ویژه‌ای بـه این موضوع صورت گیرد.

ضرورت و اهمیت مسئله

مسـئله‌های کلامی ریاضی، هستهٔ اصلی برنامهٔ درسـی ریاضـی را تشـکیل می‌دهند. در بسـیاری از کشـورها، کتاب‌های درسی و ارزشـیابی‌ها، دانش‌آموزان را به حل مسـائل کلامـی نیازمنـد می‌کننـد. به‌عنـوان مثال، گارنـر[۳] (۲۰۰۶) ادعا کرد که در آمریکا، بخش اعظمی از برنامهٔ درسـی ریاضی مدرسـه‌ای، به مسـائل کلامـی اختصـاص دارد. اهمیت مسئله‌های کلامی به حدی است که در اغلب آزمون‌های هوش و استعداد تحصیلی، جایگاه ویژه‌ای به آن‌ها اختصاص داده شـده است. با این وجود، پژوهشگران نشان داده‌اند که اغلب دانش‌آموزان و حتی برخی دانشجویان، از عهدهٔ حل مسـئله‌های کلامی برنمی‌آیند (لوییس و مایر[۴]، ۱۹۸۷). این مطالعات، بعضی از محققان آمـوزش ریاضی از جمله شـونفیلد (۱۹۸۵) و کای[۵] (۱۹۹۸) را، علاقه‌مند به آسیب‌شناسـی این پدیده کرد. آنان در مطالعات خود دریافتند که لازمهٔ موفقیت در حل مسائل ریاضی، علاوه بر درک اصول و مفاهیم ریاضی، مجهز بودن به راهبردهای شناختی و فراشناختی است. بر این اساس، جهت رفع مشکلات یادگیرندگان در حل مسائل، بیشتر بر آموزش‌های شناختی از جمله آموزش اسـتراتژی‌ها یا روش‌ها و رهیافت‌های اکتشـافی تأکید می‌شـود. این در حالی است که یافته‌های تحقیقـی هم‌چنان حاکی از این حقیقت اسـت کـه آموزش‌های شـناختی به تنهایی، دانش‌آموزان را قادر نسـاخته‌اند که از توانایی‌های خود، در موقعیت‌های جدید استفاده کنند. کامینز[۶] (۱۹۷۹) و ورزوسـا و مولیگان[۷] (۲۰۱۳)، یکی دیگـر از عوامل مؤثر را بر نحوهٔ عملکـرد دانش‌آموزان در حل مسـائل کلامی پدیدهٔ «دوزبانگی» می‌دانند. یعنی اینکه گاهی دانش‌آموزان مجبور می‌شوند مسائل کلامی را در «زبان دوم» حل کنند در حالی که زبان اصلی آن‌ها نیست و تسلط چندانی به آن ندارند و در محیطی‌های اجتماعی خود، استفاده زیادی از آن نمی‌کنند. مولیگان (۲۰۱۳) معتقد اسـت که یک دلیل مهم عملکرد ضعیف دانش‌آموزان فیلیپینی در پاسخ به مسائل کلامی، این است که آن‌ها زبان آموزشـان انگلیسـی اسـت و مسـائل کلامی نیـز به زبان انگلیسـی مطرح می‌شوند که دانش‌آموزان، تسلط زیادی به آن ندارند.

با توجه به اینکه نویسـندهٔ اول این مقاله، دبیر ریاضی در مناطق ترک‌زبان ایران اسـت، بارها شـاهد ضعف عملکرد دانش‌آمـوزان در رابطه با حل مسـائل کلامی ریاضی بوده است. بدین‌سـبب، دو سؤال پژوهشی شکل گرفت تا معلوم شود علت این ضعف چیست، و چرا اغلب دانش‌آموزان در این مناطق، در برخورد با مسائل کلامی ریاضی، نسبت به مسائل دیگر، ضعیف‌تر عمل می‌کنند. پیشینهٔ تحقیق نشان داد که این مشـکل منحصر به دانش‌آموزان دوزبانهٔ ایرانی نیسـت، بلکه بسـیاری از دانش‌آموزان دوزبانه در کشـورهای دیگر نیز در این زمینه مشـکل دارند (هگارتی[۸]، ۱۹۹۵). تبدیل عبارات کلامی بـه زبان ریاضـی در صورتی به‌درسـتی انجام می‌پذیرد که دانش‌آموزان به مهارت‌های زبانیِ زبان مسـئله مجهز باشند تا بتوانند با خواندن مسئله و درک آن و اسـتفاده از دانش ریاضی خود، مسـئله را به زبـان ریاضی تبدیل کنند، آنگاه به حل مسئله بپردازند. نویسنده اول بیان می‌کند که روزی در کلاس درس ریاضی وقتی از دانش‌آموزی خواسـتم مسئلهٔ کتاب را حل کند، او پس از اینکه چند بار صورت مسـئله را

یافته‌های تحقیقی هم‌چنان حاکی از این حقیقت است که آموزش‌های شناختی به تنهایی، دانش‌آموزان را قادر نساخته‌اند که از توانایی‌های خود، در موقعیت‌های جدید استفاده کنند

خواند گفت: «یعنی چی؟»، [البته او همین را هم به ترکی گفت] من از او خواستم مسئله را به زبان ترکی بیان کند اما توانست فقط بخشی از آن را به زبـان ترکی برگرداند و باز هم بقیهٔ آن را متوجه نمی‌شـد. نمونه‌هایی از این قبیل از زبـان دبیران ریاضی دیگر هـم برای او نقل می‌شد و آن‌هایی که در مناطق دوزبانه مشغول به تدریس ریاضی هسـتند، این امر برایشـان ملموس است. با این توصیف، در چنین مواقعی نمی‌شود از دانش‌آموز انتظار داشت که توانایی حل مسـئلهٔ ریاضی خـود را به‌طور کامل بروز دهد.

مسائل کلامی

آموزشـگران ریاضـی، تـلاش می‌کنند تا چگونگی استفاده از ریاضی را در موقعیت‌های زندگی واقعـی، از طریق تدریـس ریاضی، به دانش‌آمـوزان بیاموزند که یکی از ابزارهای این کار، اسـتفاده از مسائل کلامی است. محققان آموزش ریاضی، تعریف‌های متعدد اما مشابهی از مسـائل کلامـی ارائه کرده‌اند. بـرای مثال، چارلز[۹] (۲۰۰۴) مسـائل کلامـی را در زمینهٔ مسائل واقعی دنیای اطراف معرفی می‌کند که در آن مقدار یک یا چند کمیتِ معلوم، و مقدار یک یا چند کمیت دیگر مجهول اسـت، رابطه بین کمیت‌ها شـرح داده شده است و مسئله، به‌دنبال یافتن یک یا چند کمیت مجهول است. وی ادامه می‌دهد که در حل مسـائل کلامی، مشـکل، اغلب تـلاش برای مشـخص کردن کمیت‌های معلوم یا یافتن کمیت‌های مجهول نیسـت، بلکه برای روشن شـدن ارتباط بین کمیت‌ها و فهمیدن این رابطه و انتخاب عملگر مناسب برای نشان دادن این ارتباط‌هاست. به گفتهٔ وی، این نوع مسـائل ممکن است شامل داده‌های اضافی نیز باشند و یک مسئله ممکن است یک یا چند سؤال مستتر هم داشته باشد که به‌منظور حل آن مسـئله، لازم است جواب آن سـؤال‌ها را نیز پیدا کرد. درواقع، مسـائل کلامـی، توضیح‌های کوتاه و طراحی شـده‌ای از روابط بین اشـیای مختلف هستند که برای حل، نیاز به راه‌حل‌های ریاضی دارند (مارتین و باسوک[۱۰]، ۲۰۰۵).

مسائل کلامی و زبان دوم

هگارتی (۱۹۹۵) معتقد اسـت که یکی از مهم‌ترین اسـتراتژی‌های حل مسائل کلامی، خوانـدن آن اسـت. حل مسـئله‌های کلامی مستلزم فهمیدن مسئله است. فهمیدن صورت مسئله عبارت از ایجاد یک بازنمایی مفهومی از شکل کلامی مسئله به گونه‌ای است که بتوان با توجه به آن، فرایند حل مسئله را تا رسیدن به راه‌حل، طی نمود.

زبـان یکی از مؤلفه‌های مهم در یادگیری، فکر کـردن، فهمیـدن و برقـراری ارتباطات میان انسـان‌ها است و برای یادگیری ریاضی و به‌خصوص فهمیدن مسئله نیز ضروری و مهم اسـت. زبان با فکر کردن، یادگیری و توسـعهٔ شناختی ارتباط دارد. زبان و ارتباطات، عناصر ضروری و اساسـی آموزش و یادگیری ریاضی به‌شـمار می‌رونـد و این، از نتیجـهٔ تحقیقات انجام شـده بر روی دوزبانگی آشکار شده است (نی‌ریوردِین و اُدُنُقو[۱۱]، ۲۰۰۹). سوفونگ و لی[۱۲] (۲۰۰۹)، ضمن اشـاره به اینکه مسائل کلامی حساب و جبر، جزو کلیدیِ برنامهٔ درسی ریاضی سنگاپور هستند، می‌افزایند که مسائل کلامی، توجهات بیشتری را در ادبیات آموزشی به خود جلب کرده است، زیرا این موضوع، دربرگیرنده یکی از موضوعات سـخت در کلاس‌های درس ریاضی اسـت. دلیل این سختی هم، بیشتر به ساختار معنایی مسـئله و تأثیرات فهمیدن و خواندن مسـئله بر حل مسائل کلامی مربوط می‌شـود که هر دو، در ارتباط مستقیم با زبان هسـتند. از این گذشـته، ریاضی به نوبهٔ خود، یک «زبان رسـمی» اسـت که بیشتر از لغات دربرگیرندهٔ واژه‌هـای فنی و کلمات، عبارات و روش استدلال در یک وضعیت داده شده است و توسط زبان طبیعی[۱۳]، با یادگیرندگان ارتباط برقـرار می‌کند. اما ریاضی یـک زبان طبیعی نیسـت، زیرا دربرگیرندهٔ واژه‌ها و اصطلاحات اختصاصـی و منحصر به فرد اسـت و به‌دلیل

زبان یکی از مؤلفه‌های مهم در یادگیری، فکر کردن، فهمیدن و برقراری ارتباطات میان انسان‌ها است و برای یادگیری ریاضی و به‌خصوص فهمیدن مسئله نیز ضروری و مهم است

واژگان خـاص و نحـوهٔ گفتمانـی کـه دارد، می‌تواند باعث بروز مشکلاتی، به‌خصوص برای دانش‌آموزانی شـود که زبان آموزش، زبان دوم آن‌هاست (بارتون، ۲۰۰۳).

تحقیقات اولیـه در یادگیـری ریاضی در جمعیت‌های دوزبانـه، با کارهای جیمز کامینز (۱۹۷۶) آغاز شـد. به گفته نی‌ریوردِین و اُدُنُقو (۲۰۰۹)، پس از کامینز، بررسـیِ اثرشناختی دوزبانگـی بر یادگیری ریاضی، با کارهای داو[14] (۱۹۸۳) و کلارکسـون[15] (۱۹۹۲) ادامـه پیدا کرد. آن‌ها دریافتند که دانش‌آموزانی که در هر دو زبان مهارت دارند، نسـبت به دانش‌آموزانی که فقط در یـک زبان مهارت دارنـد، توانایی ریاضـی بیشـتری از خود نشـان می‌دهند و دانش‌آموزانی که در هر دو زبان ضعیف هستند، عملکرد ضعیفی در ریاضی بروز می‌دهند.

این در حالی اسـت که کامینـز (۱۹۷۹)، معتقد بود که دوزبانگی، مانع یادگیری نیست و حتی ممکن اسـت مزایای شـناختی تسلط به هر دو زبان را نیز داشـته باشد. طبق نظریهٔ او، مشـکلات حل مسئله در «زبان دوم» صرفاً به‌خاطر زبان دوم نیسـت، بلکه به مهارت‌های محدود کـودکان در فهـم و به‌کارگیری زبان مسئله مربوط می‌شود.

زبان با فکر کردن، یادگیری و توسعهٔ شناختی ارتباط دارد. زبان و ارتباطات، عناصر ضروری و اساسی آموزش و یادگیری ریاضی به‌شمار می‌روند و این، از نتیجهٔ تحقیقات انجام شده بر روی دوزبانگی آشکار شده است

بنابراین، انتظار می‌رود کودکانی که مسائل کلامی را در زبان اولشان حل می‌کنند، بتوانند همـان مسـائل را در زبان دیگـری که مهارت دارند نیز حل کنند. به گفته ورزوسا و مولیگان (۲۰۱۳)، باید توجه داشـت کـه پژوهش‌های کلارکسـون (۲۰۰۷) و کلارکسـون و داو (۱۹۹۴)، در ارتباط با دوزبانگی و حل مسـئلهٔ کودکانـی اسـت که قادر بـه اسـتفاده از زبان دوم، در موقعیت‌های دیگر اجتماعی هسـتند. یـک موقعیت متفاوت که ممکن اسـت عامل بازدارنده‌ای در یادگیـری ریاضی برای کودکان باشـد، زبان دوم به‌عنوان «زبان وارداتی» است. در این حالت، دانش‌آموز با زبان آموزش، فقط در مدرسه روبه‌رو می‌شود. آن‌ها اشاره می‌کنند که با وجود تحقیقات گسترده در زمینهٔ کلاس‌های چندزبانه، مطالعات اندکی بر روی کودکانی انجام گرفته اسـت که ریاضی را در زبـان وارداتی یاد می‌گیرند. البته به دلیل بروز مسـائل اجتماعی ناشی از ضرورت آموزش ریاضی به دانش‌آموزانی کـه زبان آمـوزش آن‌ها بـا زبان مادری‌شـان متفاوت اسـت، تعدادی از پژوهشگران آموزش ریاضی، مشـغول به تحقیق در این زمینه‌اند که از آن جمله، می‌توان به لئن، کلمنتس و دلکامپو (۱۹۹۰) در گینهٔ نو، سـتاتی و بارول[16] (۲۰۰۶) در آفریقای جنوبی و جورگنسن[17] (۲۰۱۱) در استرالیا اشـاره نمود. این پژوهشگران دریافتند که کودکان برای فهمیدن کلمات مشـابهی که در زبان مادری و زبان رسمی‌شـان به یک معنا استفاده نمی‌شوند، نیازمند حمایت قابل توجهی از طرف معلمان خود هستند. در تحقیق دیگری، ورزوسا و مولیگان (۲۰۱۳)، با اشاره به یافته‌های پژوهش‌هـای آدتـولا[18] (۱۹۹۰) و برنـاردو[19] (۱۹۹۹) در رابطه با حل مسائل کلامی، بر «زبان وارداتی» تأکید کرده و اشاره کرده‌اند که بعضی مطالعات نشان می‌دهند دانش‌آموزان فیلیپینی و نیجریه‌ای، حل مسئله را در زبان اولشان آسان‌تر انجام می‌دهند. در حالی که مطالعات دیگری هم نشان می‌دهند که کودکان، لزوماً در حل مسئلهٔ کلامی ریاضی در زبان دوم، ناتوان نیستند که از آن جمله، تحقیقات ونگ[20] (۱۹۹۶) و سِـکادا[21] (۱۹۹۱) بر روی کودکان اقلیت[22] در آمریکا قابل توجه اسـت. این پژوهشـگران تأکید کردند که مقایسهٔ مستقیم این دو نوع تحقیق امکان‌پذیر نیسـت، زیرا اگرچه بـرای کـودکان در اقلیت آمریکایی نیز زبان رسمی آموزش انگلیسی است که در حکم زبان دوم آن‌هاسـت، اما آن‌ها از این زبان دوم، یا زبان انگلیسی، به‌طور گسترده‌ای در تعاملات اجتماعی استفاده می‌کنند، در حالی که کودکان فیلیپینی و نیجریه‌ای، با زبان دومشان فقط در مدرسه روبه‌رو می‌شوند.

ورزوسـا و مولیـگان (۲۰۱۳) در تحقیـق خود، به بررسی عملکرد دانش‌آموزان فیلیپینی در حل مسـائل کلامی که نیازمند اسـتفاده از عملگرهـای جمع و تفریق بودنـد، پرداختند. زبان آمـوزش دانش‌آموزانی که در این تحقیق شرکت داشتند انگلیسی بود؛ زبانی که فقط در

مدرسه با آن روبه‌رو می‌شدند، ولی تسلط کمی به آن داشتند، چون در محیط زندگی خود به زبان انگلیسی صحبت نمی‌کردند. از نظر این پژوهشگران، این وضعیت عادی ولی حیرت‌آور است، زیرا بعضی از معلمان فیلیپینی در استفاده از زبان انگلیسی که زبان تدریس آنان است، روان و سلیس نیستند و این مشکل، نیازمند توجهی خاص است. در این وضعیت، زبان آموزش که می‌تواند ابزاری قوی برای برقراری ارتباط باشد، خود به مانع ارتباط تبدیل می‌شود و دستاورد آن برای یادگیرندگان ریاضی، پایین ماندن سطح درک و فهم ریاضی آن‌هاست. در این تحقیق، ورزوسا و مولیگان(۲۰۱۳) به این جمع‌بندی رسیدند که مهم‌ترین مشکلات این دانش‌آموزان در حل مسائل کلامی ریاضی، محدود بودن مهارت‌های رمزگشایی آنان، ناشی از کمبود دانش زبان انگلیسی، و استراتژی‌های محدود خواندن و درک مطلب است. برای نمونه، از نظر آن‌ها، کودکانی که جمله‌های سادهٔ انگلیسی مانند «Alvin had three coins» را هم نمی‌فهمند، موظف به یادگیری ریاضی به زبان انگلیسی می‌شوند. این در حالی است که پژوهشگران تلاش کردند مسائل کلامی را که در زبان دوم طراحی شده بود، مجدداً برای آنان شرح دهند. با این حال، بسیاری از دانش‌آموزان در عمل، فاقد مهارت‌های لازم زبانی برای فهم مسئله به زبان دوم بودند و موفق به ساخت مدل‌های معنایی از موقعیت مسئله نمی‌شدند. در نتیجه، مداخله‌های جزئی مانند توضیح تعریف‌ها و واژگان کلیدی انگلیسی به کار رفته در مسائل کلامی به زبان مادری آن‌ها هم مؤثر واقع نشد. یعنی در چنین شرایطی، تجربه‌های مدرسه‌ای کودکان از زندگی واقعی‌شان حذف می‌شود و نمی‌توان انتظار داشت که آن‌ها بتوانند مسائل کلامی ریاضی را به زبانی حل کنند که آموزش آن زبان، به‌طور معنادار، موضوع آموزش آنان نبوده است. در واقع، محدود کردن کتاب‌های درسی و ارزشیابی‌ها به زبان دوم یا زبان رسمیِ آموزش، مزایای آموزش در زبان اول را نادیده می‌گیرد که این امر باعث وارد آمدن ضربات جبران‌ناپذیری بر آموزش ریاضی این دانش‌آموزان دوزبانه می‌شود.

معرفی یک تحقیق در ایران

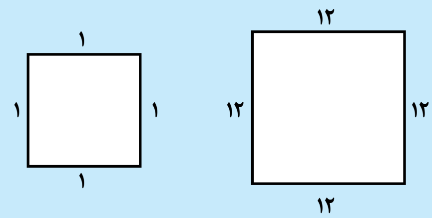
نویسندهٔ اول این مقاله، در کلاس‌های درس ریاضی و در رابطه با آموزش حل مسائل کلامی به‌طور دائم شاهد تأثیر عامل زبان بر عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان بوده است. بدین سبب، مصمم شد تا با همکاری نویسندهٔ دوم، این مشکل را به‌صورت منظم، مورد بررسی قرار دهد. برای این کار، تحقیقی با همکاری دانش‌آموزان چهار کلاس ریاضی پایهٔ اول متوسطه در یکی از شهرستان‌های شمال غربی کشور انجام شد که در آن، دانش‌آموزان به مسائل کلامیِ انتخاب شده از متن کتاب درسی پایه اول متوسطه، پاسخ دادند. برای اطمینان از روایی سؤال‌های آزمون که ابزار جمع‌آوری داده‌ها بودند، یک مطالعهٔ مقدماتی انجام شد و پس از آن، بعضی از سؤال‌های آزمون که دانش‌آموزان را دچار بدفهمی می‌کرد، مورد ویرایش قرار گرفت تا در مطالعهٔ اصلی، جلوی بدفهمی‌های احتمالی ناشی از زبان برای دانش‌آموزان دوزبانه، گرفته شود. به‌طور مشخص، مطالعهٔ مقدماتی نشان داد که ترجمهٔ تحت‌اللفظی، ضرورتاً مؤثر نیست و نمی‌توان منظور و معنای برخی واژگان و اصطلاحات را از این طریق به دست آورد. پس از این مرحله، در مطالعهٔ اصلی، ویرایش‌های زبانی صورت گرفت که باعث شد درصد پاسخ‌های درست به سؤال‌های تصحیح شده، به‌طور چشمگیری افزایش یابد. برای نمونه، به دو مورد از مسئله‌هایی که نیازمند ویرایش زبانی بودند، اشاره می‌شود:

مسئله ۱: مربع یک عدد، ۱۲ واحد بیشتر از خود آن عدد است. آن عدد را بیابید.

در مطالعهٔ مقدماتی معلوم شد که بسیاری از دانش‌آموزان در پاسخ به این سؤال، از «شکل مربع»، به جای «مفهوم مربع» استفاده کرده بودند. در حالی‌که دانش‌آموزان در چند فصل

تحقیقات حوزهٔ آموزش ریاضی و دوزبانگی نشان می‌دهد که لازم است برنامه‌ریزان درسی و مؤلفان کتاب‌های درسی، سختی‌ها و ظرافت‌های آموزش ریاضی را در شرایطی که زبان آموزش، زبان مادری دانش‌آموزان نیست، در نظر بگیرند و از توصیه‌های پژوهشی این حوزه استفاده کنند

قبل‌تر از آن، مبحث تبدیل از زبان نوشتاری به زبان ریاضی و برعکس را خوانده بودند. برداشتی که دانش‌آموزان از عبارت «مربع یک عدد» داشتند، رسم مربع‌هایی با ضلع‌های مختلف بود. یک مورد از پاسخ‌های دانش‌آموزان به‌صورت زیر بود:



۱۲+۱=۱۳

این نوع پاسخ‌ها، در نتیجهٔ ضعف آن‌ها در دانش معنایی زبانی بود که از دانش‌های لازم برای حل مسائل کلامی ریاضی است و به گفتهٔ موارچ[۲۳] (۲۰۱۰)، مربوط به تأثیرات فهمیدن و خواندن مسئله است. به گفته نی‌ریوردِین و اُدُنُقو (۲۰۰۹)، ریاضیات بیشتر از واژه‌های محض، دربرگیرندهٔ واژه‌های فنی است و کلمهٔ کلیدی «مربع» در این سؤال نیز، یکی از همین واژه‌های فنی است. این پاسخ‌ها، نمونه‌ای از خطاهای دانش‌آموزان بود که به سبب حل مسئله در زبان دوم اتفاق افتاده بود. آن‌ها مسئله را خوانده بودند اما آن را درست نفهمیده بودند. دقیق‌تر اینکه در حل این مسئله آن‌ها از دورهٔ ابتدایی، واژهٔ «مربع» را، همراه با شکل هندسی آن، در ذهن‌شان بازنمایی کرده بودند. در واقع چون این مسئله در زبان اول آن‌ها مطرح نشده بود، در به خاطر سپردن نقش‌های مختلف واژهٔ مربع در زبان دوم، توانایی کافی نداشتند.

۲. از تعداد سیبی که احمد داشت، نیمی را به بهنام و نیم بقیه را به علی داد. احمد برای خودش ۵ سیب باقی ماند. تعداد سیب‌های اولیهٔ او چند تا بوده است؟

در مطالعهٔ مقدماتی، اکثر دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نادرست دادند. اما پس از بررسی ساختار زبانی مسئله، برای آزمون نهایی ویرایش لازم به‌صورت زیر انجام شد:

ویرایش: از تعداد سیبی که احمد داشت، نیمی را به بهنام و نیمی از باقی‌ماندهٔ سیب‌ها را به علی داد. احمد برای خودش ۵ سیب باقی ماند. تعداد سیب‌های اولیهٔ او چند تا بوده است؟

با این ویرایش زبانی، پاسخ‌های درست دانش‌آموزان رشد قابل توجهی کرد.

جمع‌بندی

ناتوانی دانش‌آموزان در حل موفقیت‌آمیز مسائل کلامی، یکی از دغدغه‌های اصلی آموزش ریاضی مدرسه‌ای است. دانش‌آموزان با استراتژی‌های حل مسائل کلامی و دانش‌های لازم برای حل این مسائل، آشنایی کمی دارند. یکی از دلایل این امر، کم‌توجهی به آموزش حل مسائل کلامی در برنامهٔ درسی ریاضی است. از نظر معلمان، دلایل اصلی این کم‌توجهی، ناهماهنگی بین نظام آموزشی و نظام ارزشیابی، زمان‌بر بودن آموزش حل مسائل کلامی، ضعف پایه‌ای ریاضی دانش‌آموزان و نقش عامل زبان در آموزش و یادگیری حل مسائل کلامی است. به‌خصوص با توجه به ساختار مسائل کلامی، عامل زبان یکی از عوامل مهم در نحوهٔ عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل کلامی است، زیرا حل این مسائل، مستلزم خواندن و فهمیدن مسئله است. هر زبان، ساختار معنایی خاص خود را دارد که ترکیب آن با زبان رسمی ریاضی، کار را برای دانش‌آموزانی که در زبان مسئله تسلط و توانایی ندارند، مشکل می‌کند. تحقیق مولیگان (۲۰۱۳) نشان داد که وقتی دانش‌آموزان مسائل کلامی را به زبان اولشان حل می‌کنند، عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهند. به‌عبارتی، وقتی مسائل کلامی به زبان مادری به دانش‌آموزان عرضه می‌شود و حل آن نیز در همان زبان خواسته می‌شود، عملکرد آن‌ها بهتر می‌شود. در حقیقت، تحقیقات حوزهٔ آموزش ریاضی و دوزبانگی نشان می‌دهد که لازم است برنامه‌ریزان درسی و مؤلفان کتاب‌های درسی، سختی‌ها و ظرافت‌های آموزش ریاضی را در شرایطی که زبان آموزش،

زبان مادری دانش‌آموزان نیست، در نظر بگیرند و از توصیه‌های پژوهشـــی این حوزه اســـتفاده کنند. همچنیـــن، معلمان ریاضـــی در مناطق دوزبانه، نیازمنـــد آموزش‌ها و حمایت‌های ویژه در این زمینه هستند. بالاخره، ضروری است به این نکتهٔ مهم توجه شود که در حالی که طرح نادرســـت و مبهم صورت مســـئله کلامی برای دانش‌آموزانی که مسئله را در زبان اولشان پاسخ می‌دهند باعث بروز مشکل در فرایند حل مسئله می‌شود، کار برای دانش‌آموزانی که مسئله را به زبان دوم پاسخ می‌دهند، به مراتب ســـخت‌تر است.

پی‌نوشت‌ها

1. Second Language
2. imported Language
3. Garner
4. Leiws & Mayer
5. Cai
6. Cummins
7. Verzosa & Mulligan
8. Hegarty
9. Charles
10. Martin & Bassok
11.Ni Riordain & ODonoghue
12. Swee Fong & Lee
13. Natural Language
14. Dawe
15. Clarkson
16. Setati & Barwell
17. Jorgensen
18. Adetula
19. Bernardo
20. Wang
21. Secada
22. Minority Children
23. Mevarech

منابع

۱. کریمـــی، فرهاد. (۱۳۷۵). **مقایســـه تأثیر دانش فراشـــناختی، بازنمایی گـــزاره‌ای و راهبردهای شـــناختی بـــر عملکـــرد حـــل مســـائل کلامـــی دانش‌آمـــوزان موفق و ناموفق پســـر پایه ســـوم راهنمایی شهرســـتان ســـنقر در سال تحصیلی ۵-۱۳۷۴**. پایان‌نامه منتشـــر نشده کارشناسی ارشد روان‌شناسی تربیتی، دانشگاه تربیت معلم.

2. Charles, R. (2004). **Solving wordproblems: Developing students' quantitative reasoning abilities**. Retrieved from *pearsonschool.com/elementaryproducts*. Pearson Education, Inc. Mat07289.

3. Barton, B. & Neville-Barton, P. (2003). **Language issues in undergraduate mathematics: A report of two studies**. *New Zealand Journal of Mathematics*. 32, 19- 28 Supplementary Issue.

4. Chi, G. (1998). *The role of metacognition in problem solving*. *Paper presented at the 1999 Annual Meeting of the Americam Educational Research Association*.

5. Cummins, J. (1979). *Linguistic interdependence and the educational development of bilingual children. Review of Educational Research*. Vol. 49, 222- 251.

6. Garner, M. (2006). Old problems with new questions. *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) News bulletin*. May/ June. Retrieved from: http://www.nctm.org/news/content. aspx?id=608.

7. Hegarty, M. R. E.; Myer, M. C. & Monk, A. (1995). Comprehension of Arithmetic Word Problems: A Comparison of successful and unsuccessful problem solver. *Journal of Educational Psychology*. University of California, Santa Barbara.

8. Lewis, A. B. & Myer, R. (1987). *Students' miscomprehensions of relational statements in arithmetic word problem*. *Journal of Educational psychology*. Vol. 79. pp 363-371.

9. Ni Riordain, M. & O'Donoghue, J. (2009). *The relationship between performance on mathematical word problems and language proficiency for students learning through the medium of Irish*. Department of Mathematics & Statistics, University of Limerick, Limerick, *Ireland Educ Stud Math*. Vol. 71, pp43- 64. DOI 10.1007/s 10649- 008- 9158 -9.

10. Martin, S. H. & Bassok, M. (2005). *Effects of semantic cues on mathematical modeling: Evidence from word - problem solving and equation construction tasks*. *Memory & Cognition*. Vol. 33, Issue 3, pp. 471- 478.

11. Mevarech, Z. R.; Terkieltaub, S. H.; Vinberger, T. & Nevet, V. (2010). *The effects of meta-cognitive instruction on third and sixth graders solving word problems. ZDM Mathematics Education*. Vol. 44, pp. 195-203. DOI 10. 1007/s 11858- 010- 0244- y.

12. Mulligan, J. & Verzosa, D. B. (2013). *Learning to solve addition and subtraction word problems in English as an imported language. Educational Studies in Mathematics*. Vol. 82, Issue 2, pp. 223- 244.

13. Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. San Diego, CA: Academic Press.

14. Swee Fong, N. & Lee, K. (2009). *The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. Journal for Research in Mathematics Education*. 40, 282- 313.

مقاله

دترمینان در سرزمین ریاضیات!

مرتضی بیات، دانشگاه آزاد اسلامی واحد زنجان
زهرا خاتمی، دبیر ریاضی ناحیهٔ یک زنجان

مقدمه

در این مقاله، قصد داریم چند روش ساده و بازگشتی برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس مربعی ارائه دهیم. روش تراکم برای محاسبهٔ دترمینان اولین بار توسط لوئیس کارول (معروف به داجسون) (۶۷-۱۸۶۶) ریاضیدان و نویسنده کتاب «آلیس درسرزمین عجایب» ارائه گردید (زیلبِرگِر، ۱۹۹۷). این روش ساده و مبتکرانه متأسفانه در بین علاقه‌مندان ریاضی فراگیر نشده است. اما اخیراً این روش به‌طور مؤثری در بین کارهای تعدادی از ریاضی‌دانان، برجسته شده است، به‌طوری که حدس ماتریس‌های با علامت‌های متناوب به‌کمک این روش، حل گردیده است (برِسود و پِروپ، ۱۹۹۹).

همان‌گونه که می‌دانیم، دترمینان با روش‌های مختلفی به‌شرح زیر محاسبه می‌شود:

الگوها. روش الگو معمولاً برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۲×۲ و ۳×۳ به‌کار برده می‌شود:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = -2$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right| = (-1)\times 5\times 9 + 2\times 6\times 7 + 3\times 4\times 8 - (7\times 5\times 3 + 8\times 6\times (-1) + 9\times 4\times 2)$$

بسط براساس عامل‌ها. براساس بسط لاپلاس نسبت به هر سطر (یا هر ستون)، دترمینان بسط داده می‌شود:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\times(-1)\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\times 2\times\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\times 3\times\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

مثلثی‌کردن یا روش حذفی گاوس.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 13 & 18 \\ 0 & 22 & 30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 13 & 18 \\ 0 & 0 & -6/13 \end{vmatrix} = (-1)\times 13\times\left(-\frac{6}{13}\right) = 6$$

سه روش بالا از جهاتی ناکارآمد هستند که در زیر، به‌آن‌ها اشاره می‌کنیم:

۱. معمولاً الگوها برای ماتریس‌های ۴×۴ و بالاتر، قابل تعمیم نیستند.

۲. بسط براساس عامل‌ها، مستعد خطا و نیز برای محاسبات دستی، خسته‌کننده است.

۳. مثلثی کردن، همواره ساده نیست و برای استفاده از این روش، اساساً بایستی از کسرها استفاده نمود.

روش تراکم داجسون (یا الگوریتم آلیس)

در ریاضیات، روش تراکم داجسون، روشی برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های مربعی است. باید گفته شود که این روش، یک حالت خاص از قضیهٔ ژاکوبی (۱۸۳۳) اســت. اما داجســون، به‌طور مستقل، این ایده را کشف و بیان کرده است.

الگوریتم داجسون (یا الگوریتم آلیس) در چهار گام زیر، ارائه می‌شود:

گام ۱. فرض کنیم A ماتریس $n\times n$ باشد. ابتدا این ماتریس را چنان مرتب می‌کنیم که هیچ صفری در درایه‌های درونی آن اتفاق نیفتد. درایه‌های درونی به‌شکل $a_{i,j}$ هستند که $i,j\neq ۱,n$. برای آنکه درایه‌های درونی را ناصفر کنیم با استفاده از اعمال مقدماتی، مثلاً جمع کردن یک سطر با مضربی از سطر دیگر بدون آنکه مقدار دترمینان تغییر کند، به‌دست می‌آوریم.

گام ۲. یــک ماتریس B از مرتبه $(n-۱)\times(n-۱)$، با اســتفاده از دترمینان‌هایــی از زیرماتریس‌های ۲×۲ ایجاد می‌کنیم.
به‌طور صریح $\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i,j+۱} \\ a_{i+۱,j} & a_{i+۱,j+۱} \end{vmatrix} = b_{ij}$.

گام ۳. عملیــات گام ۲ را روی ماتریــس B انجــام می‌دهیــم و به‌یــک ماتریــس C از مرتبــهٔ $(n-۲)\times(n-۲)$ می‌رســیم. ســپس هر جمله از C را بر جملهٔ متناظرش در عناصر درونی A تقســیم می‌کنیم، یعنی $\dfrac{c_{ij}}{a_{i+۱,j+۱}} = c'_{ij}$.

گام ۴. گیریم A=B و B=C، حال گام ۳ را تا رسیدن به‌یک ماتریس ۱×۱ تکرار می‌کنیم. تنها درایهٔ ماتریس۱×۱، نشانگر مقدار دترمینان ماتریس اصلی است.

مثال ۱. با استفاده از روش تراکم داجسون، دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$|A| = \begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & \boxed{۵} & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{vmatrix} = ?$$

حل. شرایط گام ۱ برقرار است. حال طبق گام ۲ داریم:

$$B = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ۴ & ۵ \\ ۷ & ۸ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۵ & ۶ \\ ۸ & ۹ \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۳ & -۳ \\ -۳ & -۳ \end{bmatrix}$$

اینک طبق گام ۳ داریم:

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -۱۳ & -۳ \\ -۳ & -۳ \end{vmatrix} \end{bmatrix} = [۳۰] \xrightarrow{\div ۵} [۶]$$

بنابراین، $|A| = ۶$.

مثال ۲. با استفاده از روش تراکم داجسون، دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$|A| = \begin{vmatrix} -۲ & -۱ & -۱ & -۴ \\ -۱ & -۲ & -۱ & -۶ \\ -۱ & -۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۱ & -۳ & -۸ \end{vmatrix}$$

حل. گام ۱ برقرار است، حال طبق گام ۲ داریم:

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix}-2&-1\\-1&-2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1&-1\\-2&-1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1&-4\\-1&-6\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}-1&-2\\-1&-1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-2&-1\\-1&2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1&-6\\2&4\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}-1&-1\\2&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1&2\\1&-3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&4\\-3&-8\end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & \boxed{-5} & 8 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

اینک طبق گام ۳ داریم:

$$\text{د} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix}3&-1\\-1&-5\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1&2\\-5&8\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}-1&-5\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-5&8\\1&-4\end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 2 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\div \begin{bmatrix}-2&-1\\-1&2\end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \frac{8}{-2} & \frac{2}{-1} \\ \frac{4}{-1} & \frac{12}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

با تکرار مجدد گام‌های بالا برای ماتریس $\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{bmatrix}\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}\end{bmatrix} = \text{ضص۴} \xrightarrow{\div 5} \text{ضص۸}$$

بنابراین $|\text{ا}| = -8$.

یکی از مشکلاتی که در روش تراکم داجسون وجود دارد، صفر شدن درایه‌های درونی است.

مثال ۳. با روش تراکم داجسون، دترمینان زیر را محاسبه کنید:

$$|\text{ا}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

حل. با اجرای گام‌های الگوریتم داجسون داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \\ -5 & -3 & -1 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -30 & 6 & -12 \\ 0 & \boxed{0} & 6 \\ 6 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌شود که در گام سوم، عنصر درایه‌های درونی صفر است. اینک با تعویض سطر اول و پنجم (با این عمل مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند)، مجدداً الگوریتم را تکرار می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \\ -5 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 6 & \boxed{-6} & 8 \\ -17 & 8 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 18 & 40 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ںص۳۶}$$

بنابراین $|\text{ا}| = 36$.

روش انباشتگی محوری

در این بخش، روش دیگری برای محاسبه دترمینان ارائه می‌دهیم که دیگر مشکل صفر شدن درایه‌های درونی را ندارد.

در این روش، باید یک درایهٔ ناصفر را به‌عنوان لولا در نظر بگیریم (در اینجا درایه واقع در سطر اول و ستون اول که ناصفر است را لولا در نظر می‌گیریم، البته می‌توانیم هر درایهٔ ناصفر را لولا در نظر بگیریم. در این صورت، سطر اول را با سطرهای دیگر برای ساختن دترمینان ۲×۲ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ـع} & \text{ـعـ} \\ \text{عـ} & \text{غ} & \text{ـغ} \\ \text{ـغـ} & \text{غـ} & \text{ق} \end{vmatrix} = \frac{1}{\text{ع}^{3-2}} \left\| \begin{array}{cc} \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ـع} \\ \text{عـ} & \text{ـغ} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ـعـ} \\ \text{عـ} & \text{ـغ} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ـع} \\ \text{ـغـ} & \text{غـ} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ـعـ} \\ \text{ـغـ} & \text{ق} \end{vmatrix} \end{array} \right\|$$

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ـع} & \text{ـعـ} & \text{عـ} \\ \text{غ} & \text{ـغ} & \text{ـغـ} & \text{غـ} \\ \text{ق} & \text{ـق} & \text{ـکـ} & \text{کـ} \\ \text{ـگ} & \text{گـ} & \text{ل} & \text{لا} \end{vmatrix} = \frac{1}{\text{ع}^{4-2}} \left\| \begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ـع} \\ \text{غ} & \text{ـغ} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ـعـ} \\ \text{غ} & \text{ـغـ} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{عـ} \\ \text{غ} & \text{غـ} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ـع} \\ \text{ق} & \text{ـق} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ـعـ} \\ \text{ق} & \text{ـکـ} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{عـ} \\ \text{ق} & \text{کـ} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ـع} \\ \text{ـگ} & \text{گـ} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ـعـ} \\ \text{ـگ} & \text{ل} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{عـ} \\ \text{ـگ} & \text{لا} \end{vmatrix} \end{array} \right\|$$

توجه داریم که برای دترمینان ماتریس n×n، در مخرج درایهٔ لولا با توان ۲-n ظاهر می‌شود.

مثال ۴. از روش انباشتگی محوری، مقدار دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$|\text{ا}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

حل. با توجه به فرمول، خواهیم داشت:

$$|\text{ا}| = \frac{1}{2^2} \left\| \begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{array} \right\| = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 11 & 5 & -2 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

اینک دترمینان ماتریس ۳×۳ را محاسبه می‌کنیم:

$$|\text{ا}| = \frac{1}{4} \times \frac{1}{-7} \left\| \begin{array}{cc} \begin{vmatrix} -7 & 7 \\ 11 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 11 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -7 & 7 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \end{array} \right\| = \frac{1}{-28} \begin{vmatrix} -112 & 14 \\ 14 & 28 \end{vmatrix}$$

منابع

1. C.L. Dodgson, *Condensation of Determinants*, Being a New and Brief Method for Computing their Arithmetical Values, Proceedings of the Royal Society of London, 15 (1866-1867), 150-155.
2. D. Zeilberger, *Dodgson's determinant evaluation rule proved by two-timing men and women*, Electronic Journal of Combinatorics, 4 no. 2 (1997).
3. M.D. Bressoud and J. Propp. (1999). *How the alternating sign matrix conjecture was solved*, Notices of the American Mathematical Society, 46, 637-646.
4. C.G.J. Jacobi, *De Binis Quibulibet Functionibus Homogeneis Secundi*…, Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 12 (1833), 1-69.

مرجع

D. Leggett, J. Perry and A. Sanders, *Determinants in Wonderland*, www.math.usm.edu/perry/Research/determinants_in_Wonderland.pdf.

مقاله

از تجزیه و تحلیل محتوای برنامهٔ درسی ۲۰۶۱* بیاموزیم

اعظم کائیدی
کارشناس ارشد رشتهٔ تحقیقات آموزشی دانشگاه تهران

اشاره

پروژه ۲۰۶۱، یک کار تحقیقی بود که از سال ۱۹۸۶، در ایالات متحده شروع شد. هدف اصلی این طرح، آموزش علوم و ریاضی بود و علت انتخاب ۲۰۶۱، نوبت بعدی دیده شدن سیارهٔ هالی در آسمان است. قبلاً، ترجمهٔ ۶ یا ۷ مقاله از این پروژه، در مجلهٔ رشد آموزش ریاضی به چاپ رسیده است و در پژوهشگاه مطالعات آموزش‌وپرورش اکثر بخش‌های این طرح، به‌تدریج ترجمه شده‌اند. این بخش به تازگی ترجمه شده است که با توجه به اهمیت آن، در اختیار خوانندگان محترم مجله قرار می‌گیرد. از خانم کائیدی هم که زحمت ترجمه را کشیده‌اند، سپاسگزاریم.

کلیدواژه‌ها: پروژهٔ ۲۰۶۱، تألیف کتاب درسی، تجزیه و تحلیل محتوا، برنامه درسی

پروژهٔ تجزیه و تحلیل محتوای برنامه درسی ۲۰۶۱

در سال ۱۹۸۵ با نزدیک شدن ستارهٔ دنباله‌دار هالی به کرهٔ زمین بنیاد ملی علوم[1] آمریکا اجرای طرحی با عنوان پروژهٔ ۲۰۶۱ را شروع کرد که هدف اصلی آن توجه به نیازهای زندگی در حال تغییر و ارتقاء سطح سواد علمی جامعه آمریکا برای یک دورهٔ ۷۶ ساله، یعنی تا بازگشت دوباره ستاره دنباله‌دار هالی در سال ۲۰۶۱ بود. پروژه ۲۰۶۱ به ما خاطر نشان می‌کند که آموزشِ امروز، کیفیت زندگی در قرن ۲۱ را شکل می‌دهد. از همان آغاز کار، پروژه ۲۰۶۱ براین باور بود که سواد در علوم و ریاضیات و تکنولوژی برای همه دانش‌آموزان یک نیاز ضروری است. بر این اساس این پروژه معتقد است است که سواد در این حوزه‌ها نیازمند دانش و مهارت همراه با عادت‌های خاص تفکر و درک درستی از ماهیت علوم، ریاضیات و تکنولوژی و تأثیر آن‌ها بر افراد جامعه است. برای اینکه دانش‌آموزان بتوانند به چنین سوادی دست یابند، به نظر می‌رسد که محتوا تحت پوشش در برنامه‌درسی امروز می‌بایست به میزان قابل توجهی کاهش یابند تا زمان کافی برای یادگیری مهارت‌ها و مفاهیم مهم‌تر وجود داشته باشد.

برای بسیاری از معلمان ریاضی، کتاب درسی اولین راهنما برای اجرای برنامهٔ درسی است. پروژه ۲۰۶۱ با سه پیش فرض ارزشیابی کتاب‌های درسی را آغاز کرد:

۱. کتاب درسی مناسب در اصلاح آموزش ریاضی نقش اساسی دارد.

۲. کتاب درسی ریاضی می‌بایست بر اساس میزان اثربخشی‌اش در کمک به دانش‌آموزان برای رسیدن به اهداف مهم آموزش ریاضی که در مورد آن‌ها اجماع وسیع ملی وجود دارد، مورد ارزیابی قرار گیرد.

۳. یک تحلیل عمیق باید مطلوبیت مطالب و موضوعات کتاب را برای یادگیری واقعی دانش‌آموزان ارزیابی کند.

عملکرد ضعیف دانش‌آموزان آمریکایی در سومین مطالعهٔ بین‌المللی علوم و ریاضی (TIMSS) حاکی از آن بود که برنامه درسی ریاضیات برای متوسطه اول[۲] نیاز به توجه فوری دارد. در این مدارس است که خیلی از دانش‌آموزان، خودشان را در یک برنامه ریاضی تکراری و بی‌چالش می‌بینند، در نتیجه پیشرفت و علاقه آن‌ها به ریاضی متوقف می‌شود و آن‌ها از بهره‌مندی از طیف گسترده‌ای از گزینه‌های دانشگاهی و حرفه‌ای در آینده باز می‌مانند. بنابراین مدارس متوسطه اول، یک نقطهٔ اهرمی برای تلاش‌ها در جهت اصلاح آموزش هستند.

رویکرد پروژهٔ ۲۰۶۱ به اصلاحات نظام‌دار است و تصدیق می‌کند که بهبود معنادار و درازمدت در یادگیری دانش‌آموزان، نیازمند تغییر در خیلی از حوزه‌های پیچیده و غیرمتمرکز کشورآمریکا است. در مرکز این نظام، برنامهٔ درسی قرار دارد که تا حد زیادی از طریق کتاب‌های درسی، که دانش‌آموزان استفاده می‌کنند، تعریف می‌شود؛ در نتیجه بهبود کیفیت کتاب‌های درسی برای هرگونه تلاش در بهبود پیشرفت دانش‌آموزان ضروری است.

پروژهٔ ۲۰۶۱ امیدوار است از طریق تمرکز دقیق بر اینکه چگونه کتاب‌های درسی برخی ایده‌های کلیدی را در ریاضیات ارائه می‌دهند و همچنین از طریق هدایت آموزشی که برای رسیدن به این ایده‌ها و مهارت‌های خاص وجود دارد، تدریس و یادگیری ریاضی را اصلاح کند.

پروژهٔ ارزشیابی کتاب‌های درسی ۲۰۶۱ چند ویژگی منحصربه فرد دارد که این پروژه را از سایر تلاش‌های ارزشیابی جدا می‌سازد:

۱. فرایند کاربردی دقیق و یکنواخت[۳]: تحلیل‌گران پروژهٔ ۲۰۶۱ معلمان با تجربه و کارآزمودهٔ مدارس و اساتید دانشکده‌های آموزش عالی بودند که همهٔ آن‌ها در زمینه پژوهش درمورد آموزش و یادگیری ریاضی و محتوای ریاضی، افرادی متخصص، ماهر و توانمند بودند و به‌طور گسترده در مورد شیوهٔ تحلیل در پروژه ۲۰۶۱ آموزش دیده بودند. فرایند کار به این شکل بود که ۶ تیم دو نفره کتاب‌های ریاضی پایه‌های ۶ تا ۸ را ارزشیابی کردند. به هر تیم دو معیار برای ارزشیابی کتاب‌ها اختصاص یافته بود و هر تیم درهر مرحله یک کتاب را با ۲ شاخص خود ارزشیابی می‌کرد. بعد از اتمام تجزیه و تحلیل هر سری از کتاب‌ها، تیم‌ها گرد هم آمده و رتبه‌هایشان را با هم تطبیق می‌دادند، سپس به بررسی سری بعدی کتاب‌ها می‌پرداختند. بدین‌ترتیب هر تیم شش سری کتاب را با استفاده از ۲ شاخص تعیین شده برای هر تیم تجزیه و تحلیل کردند.

۲. شیوهٔ تحلیل مبتنی بر شواهد[۴]: تحلیل‌گران با استفاده از یک نرم افزار نسخه‌های کتاب‌های درسی معلمان و دانش‌آموزان را برای شناسایی درس‌ها، فعالیت‌ها، یاداشت‌های معلم و غیره، بر اساس۲ ایده در هر ۶ معیار آموزش عمومی (مفاهیم عددی، مهارت‌های عددی، مفاهیم هندسی، مهارت‌های هندسی، مفاهیم نمودار جبری و مفاهیم معادلات جبری) که از معیارهای سواد علوم پروژهٔ ۲۰۶۱ بیرون کشیده بودند، ارزشیابی کردند و سپس محتوا را بر اساس یک مجموعه معیار آموزشی مبتنی بر تحقیق (معیار مفهومی هدف، شکل دادن به ایده‌های دانش‌آموزان دربارهٔ ریاضیات، درگیر کردن دانش‌آموزان با ریاضیات، توسعه ایده‌های ریاضیات، ارتقاء تفکر دانش‌آموزان دربارهٔ ریاضیات، ارزیابی پیشرفت دانش‌آموزان در ریاضیات و ارتقاء محیط یادگیری ریاضیات) تحلیل کردند. همهٔ تحلیل‌گران معیارهای آموزشی یکسانی را در کتاب‌ها بررسی کردند و از متدولوژی و دستورالعمل‌های نمره‌گذاری یکسان در رتبه بندی‌های خود استفاده کردند.

و از متدولوژی و دستورالعمل‌های نمره‌گذاری یکسان در رتبه‌بندی‌های خود استفاده کردند.

رویکرد پروژهٔ ۲۰۶۱ به اصلاحات نظام‌دار است و تصدیق می‌کند که بهبود معنادار و درازمدت در یادگیری دانش‌آموزان، نیازمند تغییر در خیلی از حوزه‌های پیچیده و غیرمتمرکز کشورآمریکا است. در مرکز این نظام، برنامهٔ درسی قرار دارد که تا حد زیادی از طریق کتاب‌های درسی، که دانش‌آموزان استفاده می‌کنند، تعریف می‌شود؛ در نتیجه بهبود کیفیت کتاب‌های درسی برای هرگونه تلاش در بهبود پیشرفت دانش‌آموزان ضروری است

۳. معیارهــای کلیــدی در ریاضیــات[۵]: تجربهٔ پروژهٔ ۲۰۶۱ نشان داد که تحلیل کردن تعداد کوچکی از معیارهــا، اما با دقت، می‌تواند نیمرخی از نقاط قوت و ضعف مواد درســی را به عنوان یک کل نشــان دهد. کتاب‌ها ممکن است برخورد متفاوتی با استانداردهای ویژهٔ محتوایی (اعداد، هندسه و جبر) یا در بسط دانش مفهومی‌شان و کاربرد مهارت‌ها و رویه‌ها داشته باشند. ایــن پروژه ۶ معیــار را انتخاب کرد که ایــن ۶ معیار، نشــان‌دهندهٔ سه رشــتهٔ مهم ریاضی (عدد، هندسه و جبر) هســتند. این معیارها نمونه‌ای از محتوای اصلی ریاضیات هســتند که بــه احتمال زیــاد، در هر کتاب درسی پایهٔ ۶ تا ۸ دیده می‌شوند. آن‌ها عبارتند از: یک معیار مفهومی پیرامون کسرها و عملیات بر روی آن‌ها، یک معیار مهارتی پیرامون اشــکال هــم‌ارز اعداد، یک شــاخص مفهومی و مهارتی پیرامون خواص اشکال و محاسبه مساحت و حجم، و دو معیار مفهومی پیرامون نمودار و معادلات.

۴. معیارهای آموزشــی مبتنی بــر پژوهش[۶]: تحلیل‌گران هــر کتاب را براســاس ۲۴ معیاری که از پژوهش‌ها در مورد آموزش و یادگیری و دانش مهارتی معلمان با تجربه به‌دســت آمده بود رتبه‌بندی کردند. همچنین آن‌ها بررسی کردند که آیا کتاب‌ها آیتم‌های ارزشــیابی مناســب را که مبتنی بر درک و فهم باشند فراهــم می‌کنند؟ و آیا به معلمان در مورد اینکه چطور از نتایج ارزشــیابی در فعالیت‌های کلاس‌شان استفاده کنند، آگاهی لازم را ارائه می‌دهند؟

پروژهٔ ۲۰۶۱ دو دسته از کتاب‌های درسی ریاضی را بــرای ارزیابــی انتخاب کرد. کتاب‌های دســتهٔ اول نماینــدهٔ پرفروش‌ترین کتاب‌های درســی بودند که احتمالاً بیشــتر معلمان مدارس میانی در کلاس‌شان از آن‌ها اســتفاده می‌کردند و یا بیشــتر مورد پذیرش بودنــد و کتاب‌های دســتهٔ دوم نماینــدهٔ تلاش‌های اخیر تولید کنندگان برنامه درســی، پژوهشــگران و ناشران کتاب‌های درسی بود؛ کتاب‌هایی که وارد بازار می‌شــدند اما به خوبی شناخته شده نبودند و جنبهٔ تجاری زیادی نداشتند.

ارزشیابی محتوا

شــش معیار به عنوان معیارهــای محتوایی برای ارزشــیابی پایه‌های ۶ تا ۸ انتخاب شــد. محتوای این معیارها و ســایر اهداف یادگیری مشــخص شــده در AAAS با اســتانداردهای ارزشــیابی و برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای (شورای ملی معلمان ریاضی[۷]، ۱۹۸۹) پیرامــون مفاهیم و مهارت‌هایی که تقریباً همه بر روی اهمیت آن‌ها برای دانش‌آموزان پایه ۶ تا ۸ توافق دارند، مطابقت دارد. آن‌ها عبارتند از:

مفاهیم عددی

عبارت a/b می‌تواند معانی مختلفی داشته باشد:
- a برابراندازه ۱/b
- a تقسیم بر b
- نسبت a به b

مهارت‌های عددی

کاربرد، تفسیر و مقایسه اعداد در چندین فرم هم‌ارز مثل کسر، اعشار، درصد

مفاهیم هندسی

دانش‌آمــوز بایــد بداند که برخی اشــکال خواص ویژه‌ای دارند:
- شــکل‌های مثلثی تمایل به ایجاد ســاختارهای صلب دارند و شــکل‌های دایره‌ای حداقل مرز ممکن را برای یک مقدار داده شــده از منطقهٔ داخلی دارند (در دایره نسبت محیط به مساحت آن حداقل است).
- اشــکال می‌توانند دقیقاً عین هم باشند یا همان شکل را در اندازه‌های مختلف داشته باشند.

مهارت‌های هندسی

محاســبهٔ محیط و مساحت مســتطیل و مثلث و دایره و محاســبه حجم اجسام (مثل مکعب، منشور و غیره).

مفاهیم نمودار جبری

نمودارها می‌توانند انواع روابط ممکن بین ۲ متغیر را نشان دهند. وقتی یک متغیر به‌طور یکنواخت افزایش یابد متغیر دیگر ممکن اســت به یکی از شکل‌های زیر تغییر کند:
- به طور پیوسته افزایش یا کاهش یابد؛
- با سریع‌تر و سریع‌تر افزایش یا کاهش یابد؛
- به یک مقدارِ حدی نزدیک‌تر و نزدیک‌تر شود؛
- به برخی مینیمم و ماکزیمم‌های نسبی برسد؛
- به طور نامحدود متناوباً افزایش و کاهش داشته باشد؛
- به طور پله‌ای افزایش یا کاهش داشته باشد؛
- به صورتی غیر از موارد فوق.

مفاهیم معادلات جبری

معادلات نمادین می‌توانند برای به اختصار نشـــان دادن چگونگی تغییرات یک متغیر برحســـب زمان یا برحسب متغیر دیگر مورد استفاده قرار گیرند.

ارزشیابی آموزشی

بعد از شناســـایی فعالیت‌های کتاب‌های درســـی، تحلیل‌گران هر فعالیت را با توجه به اینکه تا چه اندازه ۲۴معیار آموزشی را مدنظر قرار داده بودند، رتبه‌بندی کردنـــد. ایـــن معیارها بـــر آن نبودند کـــه از نظریه یا ایدئولوژی یادگیری ویژه‌ای فراتر از اصول و راهبردهایی که از طریق شـــواهد پژوهشی موجود حمایت شده‌اند، پشـــتیبانی کنند. به‌علاوه این معیارهای آموزشـــی با اصول آموزش و یادگیری مؤثر ریاضیات در نسخهٔ فعلی NCTM از اســـتانداردهای ریاضی منطبق هســـتند. این ۲۴ معیار آموزشی که به ۷ دسته تقسیم می‌شوند عبارت‌اند از:

دسته ۱. شناسایی هدف: بخشی از طراحی یک برنامه درسی تصمیم‌گیری در مورد انتخاب آن دسته از اهداف و تجربیات یادگیری است که به دستیابی آن اهـــداف کمک می‌کنند. برای تعیین اینکه آیا کتاب‌ها هدف یک فصل، یـــک درس را انتقال می‌دهند و یک دنبالـــه از فعالیت‌هـــا را توجیه می‌کنند، از ســـه معیار استفاده شد:

۱/۱: انتقال دادن هدف بخش

۲/۱: انتقال دادن هدف درس

۳/۱: توجیه کردن دنباله‌ای از فعالیت‌ها

دسته ۲. شکل دادن به ایده‌های دانش‌آموزان دربارهٔ ریاضیات: برای پرورش درک بهتر دانش‌آموزان، باید به ایده‌هایی که آن‌ها تا کنون داشته‌اند، هم ایده‌های نادرســـت و هم ایده‌هایی که می‌توانند برای یادگیری‌های بعدی پایه و اســـاس باشند، توجه کرد. برای تعیین اینکه آیا کتاب‌ها دانش پیش‌نیاز را مشـــخص می‌کنند، معلمان را از ایده‌هـــای دانش‌آموزان مطلع می‌کنند و به معلمان در تشخیص ایده‌ها و درنظر گرفتـــن تصورات غلط کمک می‌کنند، از ۴ معیار استفاده شد:

۱/۲: مشخص کردن دانش پیش‌نیاز

۲/۲: آگاه کردن معلمان از ایده‌های دانش‌آموزان

۳/۲: کمک به معلمان در شناسایی ایده‌ها

۴/۲: پرداختن به بدفهمی‌ها

دســـته ۳. درگیـــر کـــردن دانش‌آمـــوزان بـــا ریاضیات: برای اینکه دانش‌آموزان نیرومندی ریاضیات را درک کننـــد نیـــاز دارنـــد کـــه مفهومـــی از دامنه و پیچیدگی ایده‌ها و برنامه‌های کاربردی را، که ریاضیات می‌تواند شـــرح دهد یا مدل سازی کند، داشته باشند. برای تعیین اینکه آیا مواد درســـی زمینه‌های متنوع و تعداد مناسبی از تجارب دست اول را فراهم می‌کنند از ۲ معیار استفاده شد:

۱/۳: فراهم کردن زمینه‌های متنوع

۲/۳: فراهم کردن تجارب دست اول

دســـته ۴. توســـعهٔ ایده‌های ریاضیات: ســـواد ریاضی مســـتلزم آن است که دانش‌آموزان ارتباط بین مفاهیـــم و مهارت‌ها را درک کننـــد، و درک کنند که ریاضیات علمی منطقی و مفید اســـت و در اســـتفاده از ریاضیـــات مهارت پیدا کنند. بـــرای تعیین اینکه آیا کتاب‌هـــا اهمیت ایده‌های معیار را توجیه می‌کنند، در صورت نیاز اصطلاحـــات و روش‌ها را معرفی می‌کنند، ایده‌ها را به درســـتی ارائـــه می‌دهند، ایده‌های معیار را به‌هم ربط می‌دهند، مراحل را مدل‌ســـازی می‌کنند و تمرین ارائه می دهند از ۶ معیار استفاده شد:

۱/۴: توجیه اهمیت ایده‌های معیار؛

۲/۴: معرفی اصطلاحات و رویه‌ها؛

۳/۴: ارائه دقیق ایده‌ها؛

۴/۴: مرتبط کردن ایده‌های معیار؛

۵/۴: مدل‌سازی/ نمایش رویه‌ها؛

۶/۴: ارائه تمرین.

دسته ۵. ارتقاء تفکر دانش‌آمـــوزان دربـــارهٔ ریاضیـــات: دانش‌آمـــوزان می‌بایســـت ایده‌هایشان را بســـازند و به شـــکل روشن استدلال کنند، استدلالشان را به دقت مورد بررسی قرار دهند و هر جا که نیاز است آن‌ها را از نو بســـازند. برای تعیین اینکه آیـــا کتاب‌ها دانش‌آمـــوزان را به توضیح استدلالشـــان تشـــویق

برای پرورش درک بهتر دانش‌آموزان، باید به ایده‌هایی که آن‌ها تا کنون داشته‌اند، هم ایده‌های نادرست و هم ایده‌هایی که می‌توانند برای یادگیری‌های بعدی پایه و اساس باشند، توجه کرد

می‌کنند، دانش‌آموزان را در تفسیر استدلال‌هایشان راهنمایی می‌کنند و آن‌ها را به تفکر در مورد آنچه که می‌خواهند تشویق می‌کنند، از ۳ معیار استفاده شد:

۱/۵: تشویق دانش‌آموزان به توضیح دادن استدلال‌هایشان؛

۲/۵: هدایت تفسیرها و استدلال‌های آن‌ها؛

۳/۵: تشویق دانش‌آموزان به تفکر در مورد آنچه که یاد گرفته‌اند.

دسته ۶. ارزشیابی پیشرفت دانش‌آموزان در ریاضیات: ارزشیابی‌ها باید دامنهٔ وسیعی از مهارت‌ها و کاربردها و زمینه‌هایی را که نشان‌دهندهٔ این است که دانش‌آموزان چه چیزی را باید بگیرند، مد نظر قرار دهد. این امر فقط زمانی امکان دارد که ارزشیابی در طول آموزش صورت گیرد نه فقط در آخر هر بخش. برای تعیین مطالبی که بیان شد، از ۳ معیار استفاده شد:

۱/۶: هماهنگی ارزشیابی‌ها؛

۲/۶: ارزشیابی از طریق کاربردها؛

۳/۶: ارزشیابی به عنوان بخشی از فعالیت‌های یادگیری.

دسته ۷. ارتقاء محیط یادگیری ریاضی: فراهم کردن شرایطی که استفاده و کاربرد کتاب درسی را برای همه دانش‌آموزان افزایش دهد مهم است. برای تعیین اینکه آیا مواد محتوای کمکی را برای معلم فراهم می‌کنند، چالش و اشتیاق را در کلاس درس ایجاد می‌کنند و از همهٔ دانش‌آموزان پشتیبانی می‌کنند، از سه معیار استفاده شد:

روش تجزیه و تحلیل مواد درسی ۲۰۶۱ را می‌توان یک ابزار قدرتمند پژوهشی در شناسایی نقاط قوت و ضعف کتاب‌های درسی دانست. همچنین، این روش می‌تواند بینش عمیقی را در مورد کیفیت کتاب‌های درسی موجود فراهم کند

۱/۷: تأمین محتوای کمکی برای معلم؛

۲/۷: ایجاد کلاسی شوق‌آور و چالش‌برانگیز؛

۳/۷: پشتیبانی و کمک به همه دانش‌آموزان.

نتایج

روش تجزیه و تحلیل مواد درسی ۲۰۶۱ را می‌توان یک ابزار قدرتمند پژوهشی در شناسایی نقاط قوت و ضعف کتاب‌های درسی دانست. همچنین، این روش می‌تواند بینش عمیقی را در مورد کیفیت کتاب‌های درسی موجود فراهم کند. برای مثال به یافته‌های زیر توجه کنید:

عمق مطلب: با توجه به ۶ معیاری که برای بررسی رشد ایده‌های مهارتی و مفهومی ریاضیات مورد استفاده قرار گرفت، ۱۲ یا ۱۳ کتابی که ارزیابی شده بودند در شمول مهارت‌های عددی و هندسی تفاوت زیادی نداشتند، ولی در وسعت و عمق مفاهیم کسر، شکل‌ها و معادلات تفاوت‌های قابل ملاحظه‌ای وجود داشت. هیچ یک از کتاب‌های درسی به همهٔ ایده‌ها و مفاهیمی که در ۶ معیار وجود داشت، توجه نکرده بودند. یک مجموعه از کتاب‌های درسی ۵ یا ۶ معیار را عمیقاً مورد توجه قرار داده بودند و ۴ مجموعه ۴ معیار را عمیقاً مورد توجه قرار داده بودند.

اثربخشی آموزشی: تحلیل راهبردهای آموزشی کتاب‌های درسی، تضاد آشکاری را در کفایت آموزشی معیارهای خاص نشان داد. ۴ مجموعه از کتاب‌های درسی در درگیر کردن دانش‌آموزان، توسعهٔ مفاهیم ریاضیات و حمایت از معلم، امتیاز بالایی گرفتند و ۸ کتاب دیگر، امتیازهای مختلفی را در مورد معیارهای آموزشی دریافت کردند.

نتایج خوب

۱. تعداد اندکی از مجموعه کتاب‌های درسی ریاضی در دوره متوسطه اول بودند که عالی بودند؛

۲. بیش از ۲ مجموعه از کتاب‌های درسی هم از عمق مطلب و هم اثر بخشی آموزشی در حد بالایی برخوردار بودند؛

۳. در بیشتر کتاب‌ها، کارهای مفیدی در زمینهٔ مهارت‌های عددی و هندسی انجام شده بود؛

۴. در اکثر کتاب‌ها، کارهای قابل ملاحظه‌ای در حوزه‌های کلیدی آموزش، چون درگیر کردن دانش‌آموزان در ریاضی و کمک به آن‌ها در توسعه و استفاده از ایده‌های ریاضی، انجام شده بود.

نتایج بد

۱. هیچ یک از کتاب‌های معروف تجاری، در بین بهترین رتبه‌ها نبودند؛

۲. اکثر کتاب‌ها در پوشش دادن معیارهای مفهومی ریاضی، ضعیف عمل کرده بودند؛

۳. اکثر کتاب‌ها در حمایت آموزشی از معلم و دانش‌آموز، ضعیف بودند؛

۴. اکثر کتاب‌ها، ایده‌های ریاضی را در پایه ۶ تا ۸ به‌طور موشکافانه مورد بحث قرار نداده بودند؛

۵. اکثر کتاب‌ها، در ارائهٔ هدف برای یادگیری ریاضی، بیان ایده‌های دانش‌آموزان و ارتقاء تفکر دانش‌آموزان به‌طور رضایت بخش عمل نکرده بودند.

به‌طور خلاصه، یافته‌های پروژهٔ تجزیه و تحلیل محتوای برنامه درسی ۲۰۶۱ هم باعث خوش‌بینی می‌گردد و هم موجب نگرانی. روشن است که اصلاح و بهسازی آموزش ریاضی، بر کتاب‌های درسی و تولیدکنندگان و ناشران آن‌ها تأثیرگذار خواهد بود، با این حال، مقدار زیادی اطلاعات در مورد اینکه چگونه از این کتاب‌های درسی، به‌طور واقعی در کلاس درس استفاده می‌شود و چگونه ارزیابی مناسب از دانش‌آموزان به عمل می‌آید، مورد نیاز است.

نگاهی به برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ راهنمایی ایران –متوسطه اول– در چارچوب پروژهٔ ۲۰۶۱

روش تجزیه و تحلیل محتوای درسی ۲۰۶۱ را می‌توان یک ابزار قدرتمند پژوهشی در شناسایی نقاط قوت و ضعف کتاب‌های درسی دانست. همچنین، این روش می‌تواند بینش عمیقی را در مورد کیفیت کتاب‌های درسی موجود در ایران فراهم کند. بنابراین، با استفاده از این روش، کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی کشورمان را به منظور بررسی کیفیت کتاب‌های درسی ریاضی این دوره و شناسایی نقاط قوت و ضعف آن‌ها مورد بررسی قرار دادیم. بدین منظور، معیارهای پایه‌های ۶ تا ۸ پروژه تجزیه و تحلیل محتوای برنامه درسی ۲۰۶۱ به طور کامل مطالعه شد و معیارهای محتوایی و آموزشی این پروژه برای پایه‌های ۶ تا ۸ در درس ریاضی استخراج گردید و براساس آن ابزار، پرسش‌نامه‌ای تهیه گردید. در مرحله بعد به سازمان آموزش‌وپرورش استان مرکزی مراجعه شد و فهرست دبیران ریاضی دورهٔ راهنمایی و مدارس شهر اراک و مدارسی که این دبیران در آن‌ها تدریس می‌کردند، اخذ گردید. سپس به تک تک مدارس مورد نظر شهر مراجعه شد و پرسش‌نامه بین دبیران توزیع گردید. در مجموع ۹۸ پرسش‌نامه توزیع شد. از این تعداد ۷۸ پرسش‌نامهٔ تکمیل شده عودت داده شده که از این تعداد ۱۲ پرسش‌نامه مخدوش بود، لذا تعداد ۶۶ پرسش‌نامه مورد تحلیل قرار گرفت. برای تجزیه و تحلیل سؤالات پرسش‌نامه، از آزمون خی دو تک نمونه‌ای (نیکویی برازش) استفاده شد. نتایج به‌دست آمده به قرار زیر است.

در زمینهٔ معیارهای محتوایی پروژهٔ ۲۰۶۱، نتایج نشان می‌دهند که میزان توجه کتاب‌های ریاضی دورهٔ راهنمایی به مفاهیم عددی، مفاهیم هندسی، مفاهیم نمودار جبری و مفاهیم معادلات جبری پایین‌تر از حد متوسط است. میزان توجه کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به مهارت‌های عددی در حد متوسط و میزان توجه آن‌ها به مهارت‌های هندسی بالاتر از حد متوسط است. این نتایج با نتایج پروژه ۲۰۶۱ و پژوهش محمد اسماعیل (۱۳۸۴) همخوانی دارد. در پژوهش‌های ذکر شده، نتایج پروژه ۲۰۶۱ نشان داد که اکثر کتاب‌ها در زمینهٔ معیارهای مفهومی ریاضیات ضعیف عمل کرده‌اند اما در زمینهٔ مهارت‌های عددی و هندسی کارهای مفیدی را انجام داده بودند. همان‌طور که مشاهده می‌شود در پژوهش حاضر هم نتایج حاکی از آن است که در کتاب‌های ریاضی دورهٔ راهنمایی، میزان توجه کتاب‌ها به مهارت‌های عددی و هندسی بیش از میزان توجه به مفاهیم عددی و هندسی است. نتایج پژوهش محمد اسماعیل هم نشان داد که میانگین عملکرد مربوط به تمامی حیطه‌های مختلف محتوایی ریاضیات (اعداد و جبر و اندازه‌گیری و هندسه و داده‌ها) پایین‌تر از سطح بین‌المللی است. در پژوهش حاضر هم همان‌طور که مشاهده می‌شود میزان توجه کتاب به اکثر حیطه‌های محتوایی (مفاهیم عددی، مفاهیم هندسی، مفاهیم نمودار جبری، مفاهیم معادلات جبری) پایین‌تر از حد متوسط است.

در زمینهٔ معیارهای آموزشی پروژهٔ ۲۰۶۱، نتایج نشان می‌دهد، در مورد معیار شناسایی هدف میزان توجه کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به معیارهای انتقال اهداف هر بخش کتاب و مرتبط کردن دنباله‌ای از فعالیت‌ها در هر درس در حد متوسط رو به بالا است و میزان توجه این کتاب‌ها به معیار انتقال دادن هدف هر درس، بالاتر از حد متوسط است. این نتایج، نشان‌دهندهٔ آن است که کتاب‌های ریاضی دورهٔ راهنمایی به‌طور کلی در زمینهٔ معیار شناسایی هدف نسبتاً خوب عمل کرده‌اند.

در مورد معیار شکل دادن به ایده‌های دانش‌آموزان دربارهٔ ریاضیات، میزان توجه کتاب‌های ریاضی دورهٔ راهنمایی به معیار فراهم کردن دانش پیش‌نیاز برای هر قسمت، در حد متوسط رو به بالا، میزان توجه کتاب‌ها به معیارِ آگاه کردن معلمان نسبت به ایده‌های دانش‌آموزان، در حد متوسط رو به پایین و میزان توجه کتاب‌های ریاضی دورهٔ راهنمایی به معیارِ پرداختن به بدفهمی‌های دانش‌آموزان، پایین‌تر از حد متوسط است. بنابراین کتاب‌های ریاضی دورهٔ راهنمایی به‌طور کلی در شکل دادن به ایده‌های دانش‌آموزان درباره ریاضیات، به اندازه کافی موفق نبوده‌اند.

در مــورد معیــار درگیــر کــردن دانش‌آموزان بــا ریاضیــات، میزان توجــه کتاب‌های ریاضــی دورهٔ راهنمایی به معیارهای فراهم کردن زمینه‌های متنوع بــرای دانش‌آموزان و فراهم کردن تجارب دســت اول برای آن‌ها پایین‌تر از حد متوســط است. بنابراین، این کتاب‌ها به‌طور کلی در معیارِ درگیر کردن دانش‌آموزان با ریاضیات موفق نبوده‌اند.

در مــورد معیار توســعهٔ ایده‌های ریاضیــات، میزان توجــه کتاب‌های ریاضی دورهٔ راهنمایی بــه معیارهای معرفــی اصطلاحــات و رویه‌ها و مرتبط کــردن ایده‌های ریاضی، در حد متوســط، میزان توجــه کتاب‌ها به معیار مدل‌ســازی یا نمایش رویه‌ها، در حد متوسطِ رو به پایین است. اما میزان توجه این کتاب‌ها به معیارهای ارائه دقیق ایده‌های ریاضی و فراهم کردن تمرین‌های مناســب برای هر مبحث بالاتر از حد متوســط است. بنابراین کتاب‌های ریاضی دورهٔ راهنمایی به‌طور کلی در معیار ایده‌های مهم ریاضیات به‌طور متوسط موفق بوده‌اند. این نتایج با نتایج پژوهش‌های کلدوی (۱۳۸۳) همخوانی دارد. در بخشــی از پژوهش مذکور اشــاره شــده است که کیفیت و کمیت تمرین‌های مربوط به هر بخش از دید دبیران مناسب است.

در مورد معیار ارتقای تفکر دانش‌آموزان در مورد ریاضیات، میزان توجه کتاب‌های ریاضی دورهٔ راهنمایی بــه معیارهای کمک به دانش‌آمــوزان در توضیح دادن استدلال‌هایشان و تشویق دانش‌آموزان به تفکر در مورد آنچه یاد گرفته‌اند پایین‌تر از حد متوسط است. بنابراین، کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به‌طور کلی در معیار ارتقــای تفکر دانش‌آمــوزان در مــورد ریاضیات موفق نبوده‌اند. این نتایج با نتایج پروژهٔ ۲۰۶۱ و پژوهش‌های محمدی (۱۳۸۵) و محمد اسماعیل (۱۳۸۴) و کیامنش و نوری (۱۳۷۷) همخوانی دارد. در پژوهش‌های مذکور، اشاره شــده که سطح اســتدلال ریاضی دانش‌آموزان پایین است و به‌ندرت، معلمان نحوه تفکر دانش‌آموزان را بررسی می‌کنند. همچنین، نتایج پروژه ۲۰۶۱ نشان می‌دهد که اکثر کتاب‌ها در ارتقای تفکر دانش‌آموزان، به‌طور رضایت‌بخش عمل نکرده‌اند.

در مورد ارزشــیابی پیشــرفت دانش‌آموزان در ریاضیات، میزان توجه کتاب‌های ریاضی دورهٔ راهنمایی به معیارهای ارزشــیابی از طریق کاربردها و استفاده از ارزشیابی‌ها به‌عنوان بخشــی از فعالیت‌های یادگیری، پایین‌تر از حد متوســط اســت. در نتیجه، کتاب‌های ریاضــی دورهٔ راهنمایــی به‌طــور کلی، در ارزشــیابی پیشرفت دانش‌آموزان در ریاضی موفق نبوده‌اند.

در مورد معیار ارتقای محیط یادگیری ریاضی، میزان توجــه کتاب‌های ریاضی دورهٔ راهنمایی به معیار فراهم کردن محتوای کمکی برای معلم در حد متوســطِ رو به پایین است، اما میزان توجه این کتاب‌ها به معیارِ توجه به تفاوت‌های فردی دانش‌آموزان و ایجاد کلاسی شوق‌آور و چالش‌برانگیز، پایین‌تر از حد متوســط است. بنابراین کتاب‌هــای ریاضی دورهٔ راهنمایی، به‌طور کلی در معیار ارتقای محیط یادگیری ریاضی موفق نبوده‌اند. این نتایج با نتایج پروژه ۲۰۶۱ همخوانی دارد. نتایج پروژه ۲۰۶۱ نشان داد که اکثر کتاب‌ها در فراهم کردن محتوای کمکی برای معلم و پشتیبانی از دانش‌آموز ضعیف بوده‌اند.

بحث

از آنجــا که آماده کردن دانش‌آموزان برای زندگی آینده، که نیاز به ســواد علمی و یادگیری در طول عمر دارد، از طریق آموزش مهارت‌ها و کســب نگرش‌های ضروری امکان‌پذیر می‌شود، برنامه‌ریزان برنامهٔ درسی کوشــش می‌کنند دانش‌ها را در حــد ضروری کاهش دهنــد و در عــوض، مهارت‌هــا و نگرش‌هــا را به‌طور گسترده مطرح کنند. پس آموزش مهارت‌ها، باید به‌طور جدی‌تری در کتاب‌ها مورد توجه قرار گیرد و دانش‌آموز بتواند ارتبــاط درونی مفاهیم و مهارت‌ها را درک کند. همچنین، کتاب‌های درســی می‌بایست ارتباط ریاضی با زندگی روزمره و با ســایر علــوم را برای دانش‌آموزان به روشــنی بیان کنند و ریاضیات را برای دانش‌آموزان علمی مفید و ارزشمند جلوه دهند و اهمیت ریاضیات را در شــکل دادن بــه آیندهٔ شــغلی و تحصیلی آن‌ها، برایشان مشخص سازند. کتاب‌های درسی ریاضی دورهٔ راهنمایی در ایــران در آموزش «مهارت»های عددی و هندسی نسبت به «مفاهیم» عددی و هندسی و مفاهیم نمودار جبری و معادلات جبری موفق‌ترند، بنابراین، جا دارد این کتاب‌ها در زمینه آموزش مفاهیم مهم ریاضی، مورد بررسی و تجدید نظر قرار گیرند.

پی‌نوشت‌ها

* این ترجمه تحت نظارت خانم دکتر سهیلا غلام‌آزاد، انجام شده است.

1. National Science Foundation
2. Middle school

در آمریکا، پایه‌های ۶ و ۷ و ۸ به‌عنوان دوره متوسطه اول در نظر گرفته می‌شود.

3. A rigorous and uniformly applied process
4. An evidence-based analysis procedure
5. Key mathematics benchmarks
6. Research-based instructional criteria
7. National Council of Teachers of Mathematics

اشاره

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

حال و هوای یک زنگ ریاضی

فاطمه ابراهیمی*، دانشجوی کارشناسی ریاضی

با توجه به اینکه کتاب پایهٔ اول دبستان تغییر کرده است، به کلاس اول دبستان . . . واقع در ناحیهٔ . . . تهران رفتم تا روایت خود را از آن کلاس، بنویسم.

معلم کلاس، سرکار خانم . . . با مدرک کارشناسی آموزش ابتدایی و سابقهٔ ۲۵ سال کار در پایهٔ اول، با روی گشاده از من استقبال کردند و وقت خودشان را به‌طور کامل در اختیارم قرار دادند.

ابعاد کلاس حدود پنج در شش بود و در آن، سه ردیف به‌ترتیب ۷، ۶ و ۶ تایی نیمکت بود که پشت هر کدام، دو صندلی برای دانش‌آموزان قرار داده شده بود. همگی نو و به رنگ‌های سبز و زرد بودند. نیمکت‌ها تا نزدیکی تخته آمده بودند و زیر هر نیمکت، دو جعبه با کارتن پلاست، شامل وسایلی مثل چسب و قیچی و نظایر آن، مربوط به افرادی بود که پشت آن‌ها می‌نشستند و اسم هرکس روی جعبهٔ خودش نوشته شده بود. کلاس ۳۸ دانش‌آموز داشت.

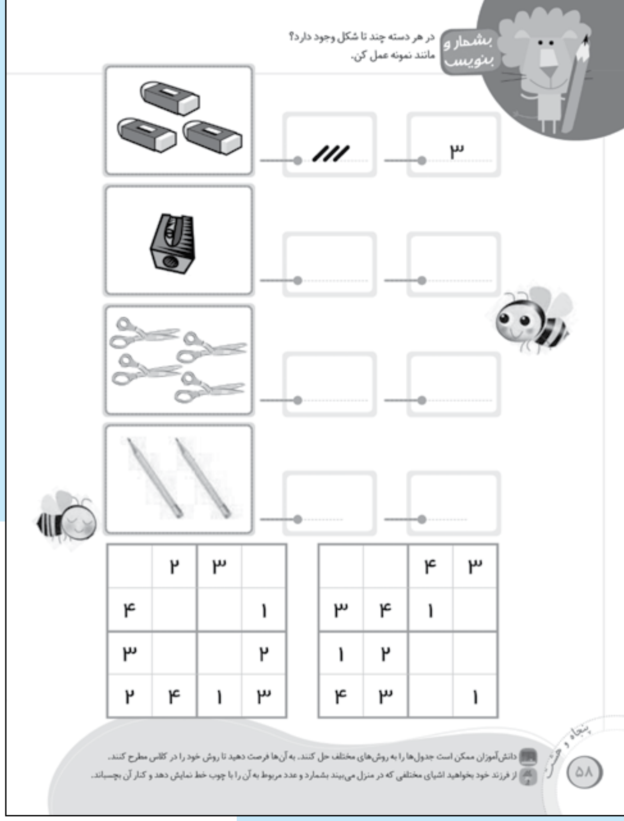
نکته‌ای که با حضورم در کلاس به آن پی بردم، این بود که چقدر کودکان ۶ ساله، از نظر قد و اندازه کوچک هستند؟! یا شاید ما خیلی بزرگ شده‌ایم؟!

اولین نیمکت در ردیف کنار پنجره یک جای خالی داشت که معلم کلاس، مرا به‌سمت آنجا راهنمایی کرد. از دانش‌آموزی که پشت آن نیمکت بود پرسیدم: «به‌نظر تو من اینجا جا می‌شم؟» و او سرش را به‌معنای «نمی‌دانم، شاید!» تکان داد.

رنگ لباس فرم کودکان، یاسی و بنفش بود.

از امسال، کلاس به سیستم کامپیوتر و ویدئو پروژکتور مجهز شده بود و یک میز به‌همین منظور، کنار تخته اضافه شده بود. همچنین، نرم‌افزارهایی برای آموزش شامل خود کتاب درسی نیز به کمک معلم آمده بود.

میز اصلی معلم جلوی در ورودی کلاس بود و روی آن دفترهای تکلیف کودکان، یک لیوان پر از قلم‌های مختلف، کیف معلم، یک بسته شکلات و یک دسته



با شروع ساعت مربوط به تدریس ریاضی، خانم معلم یک عکس روی پرده انداخت که جزو ۲۲ مضمونی بود که باید برای تدریس دروس از آن‌ها استفاده می‌شد و مفاهیم اجتماعی و فرهنگی و حتی سیاسی را برای دانش‌آموزان باز می‌کرد

برگه بود که همگی با نظم خاصی چیده شده بودند.

کلاس دو پنجرۀ بزرگ داشـت که نور را از سمت جنوب وارد کلاس می‌کرد. پرده‌هـا به رنـگ صورتی بود (محیط پر از رنگ‌های محبوب دختـر بچه‌ها بود).

دیوارهـای کلاس پر بود از کاردسـتی‌های کودکان و نقاشی‌هایی که با اعداد و حروف کشیده شده بودند.

در گوشه‌های دیوارهای مجاور تخته، یک کمد و چند کشو بود که محل نگهداری پوشۀ کار دانش‌آموزان و وسایل مورد نیازشان برای انجام فعالیت‌ها و آزمون‌های عملی بود.

روی تختۀ گچی، یک تخته وایت‌برد نصب شـده بود و پردۀ ویدئو پروژکتور، هنگام باز شـدن، روی آن را می‌پوشاند.

به‌مـرور متوجه شـدم کـه معلم محتـرم، جای دانش‌آموزان را به‌گونه‌ای تنظیم کرده است که آن‌هایی که آمادگی کمتری دارند یا بازیگوش‌ترند، جلوی کلاس و تحت نظارت مستقیم وی باشند (برخلاف زمان ما که بازیگوش‌ترها عقب‌تر می‌نشستند!)

با شروع سـاعت مربوط به تدریس ریاضی، **خانم معلم یک عکس روی پـرده انداخت که جزو ۲۲ مضمونی بود که باید برای تدریس دروس از آن‌ها استفاده می‌شد و مفاهیم اجتماعی و فرهنگی و حتی سیاسی را برای دانش‌آموزان باز می‌کرد.**

برای مضمون این درس، از تصویر یک کلاس درس استفاده شـده بود که معلم پشت دوربین قرار داشت، به‌عبارت دیگر معلم در تصویر نبود.

شروع کلاس

معلم محترم سؤالات خود را شروع کرد:

معلم: بچه‌ها! [در این عکـس]، دانش‌آموزها کجا نشسته‌اند؟

دانش‌آموزان: پشت نیمکت‌ها روی صندلی.

معلم: به‌صورت‌هاشون نگاه کنین! توی قیافه‌شون شیطنت‌می‌بینین؟

دانش‌آموزان: نه!

معلم: دوتا دوتا با هم حرف می‌زنن؟

دانش‌آموزان: نه!

معلم: اون آرامش لازم رو، مثل شما که تمام گوش و چشم و حواستون به خانم معلمه، دارن؟ تیز، خوشگل و آماده هستن خانم معلم درس جدید رو شروع کنن؟

دانش‌آموزان: خانم معلم! توی تصویر که معلم پیدا نیست؟!

معلم: چرا؟

دانش‌آموزان: چون اگر آقا بود باید بگیم آقای معلم!

(معلم به استدلال دانش‌آموزان توجهی نکرد)

معلم: (دوباره همین سؤال را پرسید)

دانش‌آموزان: الان که ما نمی‌بینیم آقا یا خانم هستن!

معلم: چرا من نگفتم آقای معلم؟ گفتم خانم معلم؟

دانش‌آموزان: چون نمی‌دونیم!

معلم: ولی من می‌دونم که معلمشون خانم هستن!

کلاس شـلوغ شد و دانش‌آموزان شروع به صحبت پیرامـون این موضـوع کردند. معلم سـعی کرد با این جملات کلاس را آرام کند که «موقع جواب به سؤالات من، فقط باید دسـت بگیرین و اجـازۀ صحبت زمانی داده می‌شـه که خانم معلم بگه بفرماییـد!». بالاخره یکـی از بچه‌ها گفت «چون دانش‌آمـوزان دخترن» و معلم او را تشـویق کرد! زیرا جوابی را که می‌خواسـت بشـنود، شنیدند! بعد هم مجدداً توضیح داد که «چون دانش‌آموزان دختر هسـتن، حتماً معلمشـون خانمه. می‌شه الان معلم شما آقا باشه؟» و بچه‌ها گفتند «نه!» و جواب‌هایی مورد انتظار معلم پیرامون این موضوع دادند. مثلاً یکی گفت که «اگه آقا باشـه، زشته ما مقنعه‌مون رو جلوش برداریم». معلم اضافه کرد که «اسـلام اجازه این کار رو نمی‌ده که شما جلوی نامحرم، مقنعه‌تون رو بردارین.»

تحلیل: (آموزش مباحث دینی در ساعت ریاضی شاید به‌منظور توجه به رویکردهای فرهنگی- دینی است که در سند تحول آموزش‌وپرورش بر آن تأکید شده، شاید هم به‌عنوان وجهی از رویکرد تلفیقی به برنامهٔ درسی ریاضی؟؟ نمی‌دانیم.)

معلم به پرسش‌هایش، دربارهٔ تصویر، ادامه داد:

معلم: کلاس [در تصویر] چه وضعیتی داره؟ به زمین کلاس نگاه کنید؛ تراشه‌های مداد رو کجا می‌ریزن؟

دانش‌آموزان: سطل آشغال.

معلم: به مقنعه‌ها نگاه کنین! سفید هستن! لکی روی آن‌ها می‌بینین؟

دانش‌آموزان: نه!

معلم: چرا؟

دانش‌آموزان: چون‌که! (با صدای کش‌دار!) (بچه‌ها فقط با لحن معلم پیش می‌رفتند و کمتر فکر می‌کردند. نشانه آن هم سکوت‌های کش‌دار بعد از هر «چون» که در جواب هر «چرا» بود. چند بار چون‌که را تکرار می‌کردند و بعد جوابی می‌دادند که مورد نظر معلم نبود.) آشغالی توی میزشون نیست!

معلم: (با احترام و محبت) من اینو نپرسیدم!

دانش‌آموزان: چون‌که وقتی می‌آیم بیرون، باید مقنعه‌مون تمیز باشه که خانم مربی ما رو دعوا نکنه!

معلم: سؤال منو نتونستین خوب جواب بدین!

یک دانش‌آموز: (در حالی‌که دست خود را بالا گرفت) مثلاً غذا می‌خورن، مقنعه‌شون رو می‌زنن بالا به‌خاطر اینکه کثیف نشه!

معلم: چون مراقبت می‌کنن (مضمونی که باید آموزش داده می‌شد، مراقبت بود!)

معلم: درخانه چه کسی به بچه‌های ۲ ساله غذا می‌ده؟

دانش‌آموزان: مادر!

معلم: چرا مادر باید به بچه‌های کوچک غذا بده؟

چند دانش‌آموز: تا رشدش خوب بشه!

دانش‌آموز دیگر: چون‌که ضعیف نشه بیفته گوشهٔ خونه! بزرگ شه مثل ما، بتونه درسشو خوب بخونه و اینا!

یکی دیگر: اگه مامان بِده دست بچه، بچه می‌ریزه روی لباسش!

بالاخره، معلم پاسخ مورد نظرش را یافت و آن را تکمیل کرد: «چون نمی‌تونه مراقبت کنه! اما شما به راحتی و بدون وجود مادر، از لباساتون و از خودتون و وسایلتون مراقبت می‌کنین! بزرگ شدین!»

معلم پیرامون مضمونِ روی پرده راجع به تعداد پنجره‌ها، لزوم وجود پنجره در کلاس و همچنین، تابلویی که در آن، تصویر نقشهٔ ایران بود سؤال‌هایی را پرسید. از جمله ویژگی‌های پرچم ایران را توضیح داد و گفت که چرا پرچم‌های کشورها با هم متفاوت هستند. بعد در این باره سؤال‌هایی پرسید و دانش‌آموزان پاسخ‌های صحیحی دادند. هرچند که هم‌چنان، هنگام جواب به سؤالاتی که با **چرا** شروع می‌شدند، کودکان به شیوهٔ قبل، یعنی گفتن **چون‌که** و **سکوت** و **کمی مکث** تا **بیان استدلال** عمل می‌کردند.

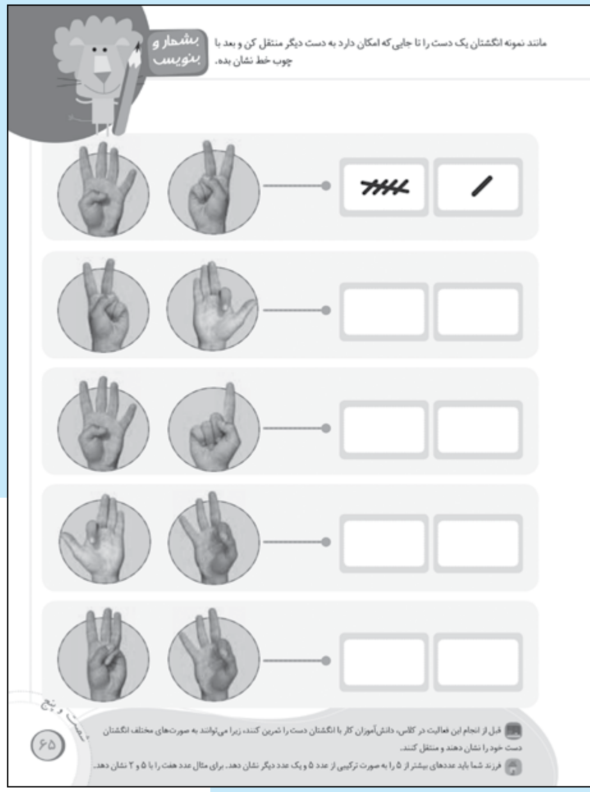
با این حاشیهٔ طولانی و غیرِمرتبط، درس ریاضی آن روز به‌طور رسمی شروع شد.

شروع درس

معلم ازسه نفر از دانش‌آموزان خواست پای تابلو بیایند. سپس از سایر کودکان، نام و تعداد دوستانِ پای تختهٔ آن‌ها را پرسید و از آن‌ها خواست با انگشت‌های خود، تعداد دوستان پای تخته را نشان بدهند. او چندین بار این جمله را به‌صورت آهنگین تکرار کرد که «چندتا دانش‌آموز؟ سه‌تا دانش‌آموز!»

بازتاب: به این روش تمرین و تکرار[1] گفته می‌شود و یکی از رایج‌ترین شیوه‌های آموزشی رفتارگرایان برای یادگیری است که همان ایجاد تغییر در رفتارهای بیرونی یادگیرنده است.

در ادامه، معلم از یکی از دانش‌آموزان خواست تا از وسایلی که روی میزش هست، به تعداد دانش‌آموزانِ پای تخته انتخاب کند و به همه نشان بدهد. همچنین،



از بقیه خواست به دست آن دانش‌آموز خوب نگاه کنند. آن دانش‌آموز سه مداد برداشت و معلم با ضرب‌آهنگ قبلی چندین بار تکرار کرد: «سه‌تا مداد، سه‌تا دانش‌آموز.»

انتظار داشتیم یکی از دانش‌آموزان، وسایلی غیر از جنس یکسان برگزینند. دانش‌آموز دیگری که معلم همان درخواست قبلی را برای او نیز تکرار کرد، دو مداد و یک پاک‌کن برداشت و به معلم نشان داد. معلم بلافاصله او را تحسین و تکمیل کرد که چون مانند درخواست معلم از وسایل روی میزش شیء انتخاب کرده، کار او درست است؛ البته معلم اضافه کرد که ولی بهتر این است که اشیای انتخابی او از یک جنس باشند. آن‌گاه با مثالی شروع به توضیح بیشتر آن‌چه گفته بود کرد: «اگر من این کتاب را کنار دو دوست شما بگیرم، می‌توانم برای شمارش هر سه چه بگویم؟ سه‌تا کتاب ؟ سه‌تا دانش‌آموز؟» همه از این مثال معلم خندیدند و وی باز مثال زد که«سه‌تا تراش، سه‌تا مداد، سه‌تا دانش‌آموز، سه‌تا پاک‌کن و... ! »

بعد از این، معلم تصویر کتاب را روی پرده انداخت. اولین تصویر، نشان دهندهٔ سه پاک‌کن بود. معلم یادآوری کرد که برای نشان دادن این سه پاک‌کن، از دو راه استفاده می‌کردیم که یکی **چوب‌خط** و دیگری **عدد** بود. سپس از یکی از دانش‌آموزان خواست تا از هر دو راه انجام دهد و این جمله را چندین بار تکرار کرد که «سه‌تا پاک‌کن، سه‌تا چوب‌خط.»

تصاویر بعدی یک تراش، چهار قیچی و شکل‌های دیگری بود که معلم برای نشان دادن تعداد آن‌ها به هر دو شیوه، از دانش‌آموزان خواست تا پای تابلو بیایند و همین کار را انجام دهند و هر بار، برای مثال این جمله را آهنگین تکرار می‌کرد: «چهارتا قیچی، چهارتا چوب‌خط.»

معلم: چوب‌خط‌ها کی پُر می‌شن؟

دانش‌آموزان: وقتی می‌شن پنج‌تا.

یکی از دانش‌آموزان متوجه هدف معلم از این سؤال نشد و پرسید:

دانش‌آموز: خانم اگه ۶ تا تراش بود باید چیکار کنیم؟

یکی از دانش‌آموزان پای تابلو آمد و شکل ۶ تا چوب‌خط را کشید و با گذاشتن پنجمین چوب‌خط روی چهار چوب‌خط دیگر، یک دستهٔ ۵تایی درست کرد. سپس هر کدام از دانش‌آموزان شروع به پرسیدن شکل چوب‌خط‌های یک عدد کردند مثلاً یکی ۷، بعدی ۸، دیگری ۱۰ و به‌همین ترتیب.

بازتاب: راه کار اصلیِ معلم برای آرام‌سازی کلاس، نشنیدن سؤالات دانش‌آموزان و در عوض، **تکرار** سؤال خود تا جایی بود که به **پاسخ مورد انتظار** در برنامه و کتاب درسی برسد.

معلم از کلاس خواست تا برای دانش‌آموزانِ پای تخته **دست بزنند**. بعد آن‌ها می‌رفتند سر جایشان می‌نشستند. به‌خاطر این **تشویق**، همه مشتاقانه می‌گفتند «خانم می‌شه منم بیام؟» چون می‌خواستند بقیه برایشان **دست بزنند**! پس از این، باز هم معلم طبق روش قبلی خود، از دانش‌آموزان خواست که قسمت‌های مورد نظر را در کتاب پر کنند. بعد هم یک‌به‌یک بالای سر کودکان رفت تا از درستی کارشان مطمئن شود.

سپس معلم راجع به **جدول‌های سودوکو** توضیح داد و گفت: «مانند همهٔ جدول‌های قبلی که از اول با هم کار کردیم، باید عدد تکراری توی هیچ سطر یا ستونی نباشد. باید هر بار چک کنیم.» با آنکه دانش‌آموزان توضیحات معلم را متوجه نشدند، شروع به پر کردن جدول‌ها کردند.

بازتاب: جالب اینجاست که حالت چهرهٔ دانش‌آموزان، خبری از نفهمیدن آن‌ها نمی‌داد. شاید مثل بزرگ‌ترها، گاهی وقت‌ها می‌دانستند که نمی‌فهمند، اما به روی خود نمی‌آوردند و سعی می‌کردند چهره‌های مطمئن و موجهی از خود بروز دهند یا اینکه از سر ناچاری (و البته برخلاف ما بدون ترس!) شروع به عددگذاری می‌کردند. شاید هم نمی‌دانستند که نمی‌دانند! انگار بازی می‌کردند و

معلم از کلاس خواست تا برای دانش‌آموزانِ پای تخته دست بزنند. بعد آن‌ها می‌رفتند سر جایشان می‌نشستند. به‌خاطر این تشویق، همه مشتاقانه می‌گفتند «خانم می‌شه منم بیام؟» چون می‌خواستند بقیه برایشان دست بزنند!

به حرف‌های معلم گوش نمی‌دادند و کار خودشـــان را می‌کردند وقت می‌گذراندنـــد و بدون فکر، عددگذاری می‌کردند تا بالاخره، به نتیجه برســـند. دنیای شـــاد و بی‌غم آن‌ها را، تشویق‌های معلم هم به هم نمی‌زد!

معلـــم بالای ســـر تعـــدادی از کـــودکان رفت و اشتباهاتشان را به آن‌ها گوشزد کرد. ولی متوجه شد اکثراً دچار مشـــکل هستند. معلم علت را در کلامش جســـت‌وجو کرد و گمان نمود به‌خاطر عبارت«چک کردن»، کودکان به اشـــتباه افتاده‌انـــد. با این تصور، توضیـــح داد کـــه «چـــک کـــردن یعنی اینکـــه عدد تکراری در ســـتون نداشته باشیم. مثلاً الان ۱، ۳، ۴ رو توی یک ســـطر نوشـــتی. چه عددی رو از ۱ تا ۴ ننوشتی؟ به این می‌گن چک کردن». دانش‌آموزان با **آزمون و خطای** زیاد، بالاخره جدول‌ها را پُر کردند (نکتهٔ خوب این پرســـش و پاســـخ این بود که معلم به‌طور مســـتقیم، از روش رد گزینه‌هایی که کودکان پیشنهاد می‌کردند، استفاده نمی‌کرد). ایشان درست فکر کرده بود، چرا که با توضیح معنای **چک کردن جدول** برای نوشـــتن هر عدد، دانش‌آموزان آرام آرام شـــروع به پر کردن جدول‌ها کردنـــد، هر چند هنوز عده‌ای دچار اشـــتباه می‌شـــدند. معلم دوبـــاره بلند گفت:«بچه‌هـــا من هنوز توی جدول بعضی از شـــما، عـــدد تکراری می‌بینم. چرا؟ چون می‌خواین با عجله بنویسین. هر ستون رو نگاه کنین، اگر تکراری دارین عددها رو جابه‌جا کنین.»

بازتـــاب: یافته‌هـــای پژوهشـــی بســـیاری در مـــورد چگونگـــی ایجـــاد **درک عـــددی**[2] در کودکان پیش‌دبســـتانی و پایهٔ اول ابتدایی وجود دارد. تقریباً در هیچ یک، توصیه‌ای برای ایجاد این فهم و درک از طریق **جدول سودوکو** نشده است. اگرچه در سال‌های بالاتر، به‌عنوان **مهارت‌آموزی** و **تـــداوم** یادگیری، از چنین راهکارهایی ممکن اســـت استفاده شود. در هر صورت، انتخاب چنین سازوکارهایی برای شروع آموزش ریاضی کـــودکان، جای بحث و تأمـــل دارد و نیازمند ارجاع به یافته‌های پژوهشی است.

جمع‌بندی

در پایـــان کلاس، خانم ناظم بـــه کلاس آمده و به ما اعلام «خســـته نباشید» کرد و زنگ ریاضی این‌گونه تمام شد.

نظر معلم محترم راجع به تغییرات کتاب درســـی، به‌عنوان کسی که ۲۵سال سابقهٔ تدریس ریاضی داشت، چنین بود:

● کتاب جدید با ۸۰ درصد تغییر نسبت به کتاب قبل، با امکانات آموزشی و استفاده از تکنولوژی، در کلاسی تا ســـقف حداکثر ۲۵ نفر، جذاب است و می‌توان بالاترین سطح آموزشی را در این شرایط، به دانش‌آموزان ارائه کرد.

● حجـــم کتـــاب ۳۰ صفحه افزایش یافتـــه و این ۳۰ صفحه، انرژی زیادی از معلم می‌گیرد.

● مطالبی مانند ســـاعت و محور و جمع اعداد بالاتر از ۱۰، از پایهٔ دوم به پایهٔ اول منتقل شده که بار سنگینی را بـــر دانش‌آموز و معلم تحمیل می‌کنـــد. باید آموزش از پیش‌دبستانی هدفمند باشـــد و دانش‌آموزان به‌جای مفاهیمی مثل فصول و مشاغل و حیوانات، با مطالبی آشنا شوند که به مطالب این کتاب وصل شود تا فرایند آموزش این کتاب تسهیل شود. این کامل نبودن زیرساخت‌ها، به نظام آموزشی ضربه وارد می‌کند. آموزش رسمی باید به پیش‌دبستانی برگردد و هدفمند صورت پذیرد.

● اضافه شـــدن بخش‌های خلاقیـــت مثل جدول‌های ســـودوکو و الگویابی جالب اســـت و همـــهٔ این‌ها برای کلاسی حداکثر با جمعیت ۲۵ نفر و با کیفیت بالا، قابل اجراست. ۳۸ نفر دانش‌آموز در کلاس، انرژی زیادی از معلم می‌گیرد و باز هدف کتاب برآورده نمی‌شود.

● در رابطه با تم‌های (مضمون‌های) آموزشـــی نیز، ۲۲ تِم موجود در طرح درس به مفاهیم آموزشی، سیاسی، اجتماعی، فرهنگـــی و ایدئولوژی می‌پـــردازد که برای هر یک، طرح درس‌های مشـــخصی داده شـــده است و مطالبی که در رابطه با هر تم بیان می‌شود، چیزی است که از قبل تعیین شده و معلم ملزم به بیان آن‌ها است.

● برای تدریس این کتاب، حدود ۸۰ ساعت دورهٔ ضمن خدمت دیده‌ام (که خود عدد قابل توجهی است.)

پی‌نوشت‌ها

* با همکاری **زهرا گویا**، دانشگاه شهید بهشتی

1. Drill & Pracfice
2. Number Sense

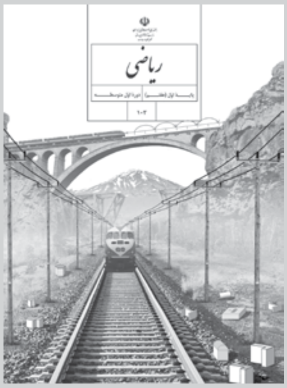
دورهٔ بازآموزی ریاضی پایهٔ هفتم

صفر جلیلی، دبیر ریاضی شهرستان سیلوانه/ آذربایجان غربی
و کارشناس ارشد آموزش ریاضی

کلیدواژه‌ها: دوره بازآموزی، ریاضی پایه ۷، فعالیت

دورهٔ تحلیل روش تدریس ریاضی پایهٔ هفتم و بازآموزی عملی آن با حضور دبیران ریاضی در ارومیه مرکز استان آذربایجان غربی و با حضور مدرسی که در تهران آموزش دیده بود اجرا شد. بنا به گفتهٔ مدرس این دوره، «مؤلفان این کتاب، از جمله . . . ، به آن‌ها چند ساعتی آموزش دادند، اما بنا به کسالتی که برای یکی از ایشان پیش آمده بود، آموزش آن‌ها به‌همین اندازه منتهی شد». در این دوره، کتاب تازه تألیف ریاضی پایهٔ ۷ تا حدودی مورد بررسی قرار گرفت و موارد مختلفی مطرح شد، اما برخی از آن‌ها به نتایج خاصی نرسید. در اینجا، چند مورد از موارد مطرح شده را معرفی می‌کنیم:

● **بعضی استدلال‌ها و تعریف‌های نادقیق یاغیرعلمی:** در بعضی فصل‌های کتاب، استدلال‌ها و تعریف‌های نادقیق و گاهی غیرعلمی ارائه شده است. به‌عنوان نمونه، در مبحث «عبارت‌های جبری»، اشاره شده که «در یک عبارت جبری اغلب از علامت ( ) یا پرانتز برای حاصل‌ضرب بین آن‌ها استفاده می‌شود و از نماد × پرهیز می‌گردد زیرا ممکن است [نماد] ضرب با نماد انگلیسی x به‌عنوان یک متغیر اشتباه شود». این در حالی است که تحقیقات مختلفی که در داخل و خارج از ایران انجام شده، به این نتیجه رسیده‌اند که «معمولی‌ترین نمادِ میان‌بر در جبر، حذف علامت ضرب است و چون متغیرها ارزش مکانی ندارند، می‌توانیم ضرب را با کنار هم قرار دادن اعداد، حرف‌ها یا پرانتزها، نشان دهیم؛ مانند $۳ \times a = ۳a$ و $\frac{۱}{۲} \times ۳ = (\frac{۱}{۲})۳$. اما در حساب، پی‌درپی آوردن اعداد (الحاق)، بیانگر «جمع به‌طور ضمنی» است و به‌عنوان هر دو عدد در محل ارزش مکانی‌شان است. به‌عنوان مثال، ۲۷ به‌معنای ۷+۲۰ و $۲\frac{۱}{۲}$ به‌معنای $۲ + \frac{۱}{۲}$ است.



● **عدم توجه به ویژگی‌های فعالیت:** فعالیت به‌عنوان یک ظرفیت یادگیری، فرایند حل مسئلهٔ اکتشافی و خلاقانه است که دانش‌آموزان به‌صورت گروهی در کلاس انجام می‌دهند تا با راهنمایی معلمان، زمینهٔ یادگیری مطلب جدید ریاضی فراهم شود و بتوانند در شکل‌گیری یا ساختن دانش خویش، سهیم باشند. به گفته میسون (۱۳۸۶)، از لحاظ پداگوژیکی، فعالیت کارآمد، یادگیرنده را به چالش می‌اندازد تا اعمال آشنا را به روش‌های جدید، به‌کار بندد. اما در برخی مباحث کتاب تازه تألیف ریاضی۷، از جمله «میانگین داده‌ها»، از همان ابتدای فعالیت، اول فرمول میانگین به‌صورت $\overline{\text{س}} = \frac{\text{ذ}}{\text{ج}}$ و میانگین مساوی مجموع داده‌ها تقسیم بر تعداد داده‌ها نشان داده شده است، و بدون اینکه دانش‌آموز را به چالش بکشد، قاعده را در اختیار دانش‌آموز قرار داده است. این طراحی، با هدف «فعالیت» مغایر است.

● **نامرتبط بودن بعضی تصویرها با محتوای فصل:** در این راستا، یکی از دبیران حاضر در این دوره، از مدرس دورهٔ استانی که در تهران به‌عنوان تأمین مدرس توسط مؤلفان آموزش دیده بود پرسید که «هدف تصویرهای این فصل چیست و چرا به محتوای آن ربطی ندارد؟» و او پاسخ داد «با توجه به سند تحول بنیادین، هدف این تصاویر، پرداختن به مسائل فرهنگی است.»

خلاصه اینکه، برای برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، لازم است حساسیت‌ها بیش از این باشد. کتابی که میلیون‌ها خوانندهٔ دقیق و موشکاف- معلم و دانش‌آموز- دارد و قشر عظیمی از مردم لازم است مطالب آن را بیاموزند و براساس آن ارزشیابی شوند، شایسته است کمترین اشکالی نداشته باشد. درپایان این دوره، گفتهٔ یکی از دبیران شهر ما خیلی جالب بود و اینکه «چه کلاس‌های تقویتی که از این کتاب بیرون خواهند آمد!؟»

پایانی بر ستون معرفی چکیدهٔ پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی

پس از شروع دورهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی در ایران، به پیشنهاد یکی از اعضای هیئت تحریریه و موافقت همگی، قرار شد ستونی در مجله باز شود و چکیدهٔ پایان‌نامه‌های این دوره- به‌دلیل ارزش بالقوه‌ای که می‌توانستند برای آموزش مدرسه‌ای ایران داشته باشند- به‌همراه مشخصات لازم، جهت اطلاع‌رسانی چاپ شوند. برای این کار، در سر ستون این بخش از همهٔ استادان راهنما در دانشگاه‌های مجری این برنامه تقاضا شد که در صورت موافقت با این نوع اطلاع‌رسانی، مشخصات دانشجویان خود را که فارغ‌التحصیل شده‌اند بفرستند.

بعضی از استادان راهنما، با ارسال اطلاعات خواسته شدهٔ مربوط به دانشجویان فارغ‌التحصیل خود، از این کار استقبال کردند و به‌تدریج، بانک اطلاعاتی مفیدی در دسترس همگان قرار گرفت. این کار، برای دانشجویان دکتری فارغ‌التحصیل شده نیز ادامه پیدا کرد و در این ستون، چکیدهٔ تفصیلی رساله‌های آنان چاپ شد.

اما به دو دلیل، تجدیدنظر در این ستون ضروری شد؛ یکی گسترش بی‌سابقه و غیرقابل پیش‌بینی تعداد فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد رشتهٔ آموزش ریاضی و پیش‌بینی افزایش چشمگیر فارغ‌التحصیلان دکتری این رشته و دیگری؛ توسعهٔ فناوری ارتباطات و اطلاعات. این دو، باعث شدند که ضمن تشکر از تمام استادان راهنمایی که ما را راهنمایی کردند، از این پس ظرفیت این ستون را به مطلب دیگری بدهیم و ستونی با این عنوان را تمام شده تلقی کنیم

با تشکر مجدد از همه همکاران این ستون؛ سردبیر

نقدی بر کتاب ریاضی (۲)
فصل هفتم

مهدی میرزافام، کارشناس ارشد ریاضی کاربردی
دبیر دبیرستان، عجبشیر، آذربایجان‌شرقی

چکیده
در این مقاله، یک تمرین از فصل ۷ کتاب ریاضی۲ (فصل جایگشت، قسمت ترتیب، ص۱۸۶، تمرین ۷) مورد توجه قرار گرفته است. از آنجایی که نحوهٔ مطرح کردن مسئله با تداعی و استدلال آن در ذهن دانش‌آموزان رابطهٔ مستقیم دارد لذا باید تا حد امکان صورت مسئله به شکل مناسبی مطرح شود تا دانش‌آموز بتواند با استفاده از اصول شمارش، یعنی اصل‌های جمع و ضرب و جایگشت آن را حل کند.
کلیدواژه‌ها: ترکیبیات، جایگشت، نقد و بررسی کتاب درسی، ریاضی دوم دبیرستان.

مقدمه

اصل جمع: اگر کار A را بتوان به m_1 یا m_2 ... یا m_n طریق انجام داد، آنگاه به‌طور کلی کار A را می‌توان به $m_1+m_2+...+m_n$ طریق انجام داد.

مثال: محمد می‌تواند با استفاده از ۲ خط تاکسی یا ۳ خط اتوبوس به دانشکده برود، لذا او برای رفتن به دانشکده می‌تواند از ۵ = ۲ + ۳ راه استفاده کند.

اصل ضرب: هرگاه عملی از n جزء مختلف تشکیل شده باشد و جزء اول به m_1 طریق، جزء دوم به m_2 طریق و... جزء nام به m_n طریق مختلف قابل انجام باشد، آنگاه آن عمل را می‌توان به $m_1 \times m_2 \times ... \times m_n$ حالت مختلف انجام داد.

جایگشت: اگر تعدادی شیء متمایز داشته باشیم، به هر نحوه قرار گرفتن آن‌ها در کنار هم جایگشت می گوییم.

ترتیب k شـــیء متمایز از n شیء: تعداد جایگشت‌های k تایی از n شیء متمایز را معمولاً با نماد p(n,k) نشان می‌دهیم و داریم:

$$گ(ق,ک) = \frac{ک!}{(ق-ک)!} \quad ک \leq ق$$

متن اصلی

این تصویر تمرین ۷ صفحه ۱۸۶ کتاب ریاضی۲ است.

۷. اگر در یک سالن دو ردیف صندلی و هر ردیف ۱۰ صندلی باشد، مشخص کنید به چند طریق ۶ دانش‌آموز اول دبیرستان، ۳ دانش‌آموز دوم و ۴ دانش‌آموز سوم دبیرستان می‌توانند روی آن‌ها بنشینند طوری که اولی‌ها در ردیف اول و دومی‌ها در ردیف دوم باشند؟

به‌نظر نگارنده، با توجه به آنکه ترتیب نشستن یا همان نوبت نشستن در بین گروه‌های دانش‌آموزی اول و دوم و سوم مشخص نشده است، صورت مسئله در این تمرین مبهم است. چنانچه نوبت نشستن بین گروه‌های دانش‌آموزی دلخواه باشد، حل این مسئله سخت و حداقل خارج از توان دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان است. از صورت مسئله ۶

حالت برداشت می‌شود که اکثر همکاران این مسئله را بنا به برداشتی که در حالت اول آمده، حل کرده یا می‌کنند. این ۶ حالت به‌صورت زیر است و برای حل آن‌ها تنها از اصل جمع و اصل ضرب و تعریف ترتیب استفاده شده است.

حالت اول: اگر ابتدا دانش‌آموزان کلاس اول، بعد کلاس دوم و در آخر کلاس ســوم روی صندلی‌ها بنشینند، جواب به‌صورت زیر است:

$$p(۱۰,۶) \times p(۱۰,۳) \times p(۱۱,۴)$$

یعنی ۶ دانش‌آموز اولی در ۱۰ صندلی ردیف اول و ۳ دانش‌آموز دومی در ۱۰ صندلی ردیف دوم و ۴ دانش‌آموز سومی در ۱۱ صندلی باقی‌مانده می‌نشینند.

حالت دوم: اگر نوبت نشستن به این صورت باشد که ابتدا کلاس دومی‌ها، بعد کلاس اولی‌ها و در آخر کلاس سومی‌ها بنشینند، جواب به‌صورت زیر خواهد بود که البته با حالت اول یکسان است.

$$p(۱۰,۳)\times p(۱۰,۶)\times p(۱۱,۴)$$

حالت سوم: اگر ابتدا کلاس سومی‌ها، بعد کلاس اولی‌ها و در آخر کلاس دومی‌ها بنشینند، جواب زیر به‌دست می‌آید:

$$p(۲۰,۴)\{p(۱۰,۶)p(۶,۳)+p(۹,۶)p(۷,۳)+p(۸,۶)p(۸,۳)+p(۷,۶)p(۷,۳)+p(۶,۶)p(۱۰,۳)\}$$

یعنی ۴ دانش‌آموز کلاس سومی در هر یک از ۲۰ صندلی می‌توانند بنشینند و برای اولی‌ها و دومی‌ها حالت‌های زیر وجود دارد:

۱. هیچ‌کدام از سومی‌ها در ردیف اول ننشسته باشند و هر چهار نفر آن‌ها در ردیف دوم نشسته باشند. در این صورت برای کلاس اولی‌ها ۱۰ صندلی در ردیف اول باقی‌مانده و برای کلاس دومی‌ها ۶ صندلی در ردیف دوم، پس تعداد حالت‌های نشستن اولی‌ها و دومی‌ها $p(۱۰,۶)\times p(۶,۳)$ است.

یا

۲. یکی از سومی‌ها در ردیف اول و سه نفر از آن‌ها در ردیف دوم نشسته باشند؛ لذا برای کلاس اولی‌ها ۹ صندلی باقی‌مانده و برای کلاس دومی‌ها ۷ صندلی، پس تعداد حالت‌های نشستن اولی‌ها و دومی‌ها $p(۹,۶)\times p(۷,۳)$ است.

یا

۳. دو نفر از سومی‌ها در ردیف اول و دو نفر از آن‌ها در ردیف دوم نشسته باشند؛ لذا برای کلاس اولی‌ها ۸ صندلی باقی‌مانده و برای کلاس دومی‌ها ۸ صندلی، پس تعداد حالت‌های نشستن اولی‌ها و دومی‌ها $p(۸,۶)\times p(۸,۳)$ است.

یا

۴. سه نفر سومی در ردیف اول و یک نفر از آن‌ها در ردیف دوم نشسته باشد؛ لذا برای کلاس اولی‌ها ۷ صندلی باقی‌مانده و برای کلاس دومی‌ها ۹ صندلی، پس تعداد حالت‌های نشستن اولی‌ها و دومی‌ها $p(۷,۶)\times p(۹,۳)$ است.

یا

۵. در نهایت هر چهار دانش‌آموز سوم در ردیف اول نشسته باشند؛ لذا برای کلاس اولی‌ها ۶ صندلی باقی‌مانده و برای کلاس دومی‌ها ۱۰ صندلی، پس تعداد حالت‌های نشستن اولی‌ها و دومی‌ها $p(۱۰,۶)\times p(۶,۳)$ است.

حالت چهارم: اگر ابتدا کلاس سومی‌ها، بعد کلاس دومی‌ها و در آخر کلاس اولی‌ها بنشینند، جواب به‌صورت زیر است که با حالت سوم یکسان است.

$$p(۲۰,۴)\{p(۱۰,۳)p(۶,۶)+p(۹,۳)p(۷,۶)+p(۸,۳)p(۸,۶)+p(۷,۳)p(۷,۶)+p(۶,۳)p(۱۰,۶)\}$$

حالت پنجم: اگر نوبت نشستن چنان باشد که ابتدا دانش‌آموزان کلاس اول بعد کلاس سوم و در آخر کلاس دومی‌ها بنشینند، جواب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$p(۱۰,۶)p(۱۴,۴)\{p(۶,۳)+p(۷,۳)+p(۸,۳)+p(۹,۳)+p(۱۰,۳)\}$$

یعنی کلاس اولی‌ها ۱۰ صندلی ردیف اول را برای نشستن دارند، لذا از ۱۰ صندلی در ۶ تای آن‌ها می‌نشینند و حال‌که سومی‌ها می‌خواهند بنشینند ۱۴ صندلی باقی‌مانده است، لذا از ۱۴ تا صندلی در ۴ تای آن‌ها می‌نشینند و برای کلاس دومی‌ها حالت‌های زیر پیش می‌آید:

۱. هر چهار دانش‌آموز کلاس سوم در ردیف دوم نشسته باشند؛ لذا برای دومی‌ها ۶ صندلی باقی می‌ماند که به $p(۶,۳)$ حالت در ۳تای آن‌ها می‌نشینند.

یا

۲. سه دانش‌آموز از سومی‌ها در ردیف دوم نشسته باشند؛ لذا برای دومی‌ها ۷ صندلی باقی می‌ماند که به $p(۷,۳)$ حالت در ۳ تای آن‌ها می‌نشینند.

یا

۳. دو دانش‌آموز سومی در ردیف دوم نشسته باشند؛ لذا برای دومی‌ها ۸ صندلی باقی می‌ماند که به $p(۸,۳)$ حالت در ۳تای آن‌ها می‌نشینند.

یا

۴. یکی از دانش‌آموزان سوم در ردیف دوم نشسته باشد؛ لذا برای دومی‌ها ۹ صندلی باقی می‌ماند که به $p(۹,۳)$ حالت در ۳تای آن‌ها می‌نشینند.

یا

۵. هیچ دانش‌آموز سومی در ردیف دوم ننشسته باشد؛ لذا برای دومی‌ها ۱۰ صندلی باقی می‌ماند که به $p(۱۰,۳)$ حالت در ۳تای آن‌ها می‌نشینند.

حالت ششم: اگر ابتدا کلاس دومی‌ها، بعد کلاس سومی‌ها و در آخر کلاس اولی‌ها بنشینند، جواب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$p(۱۰,۳)p(۱۷,۴)\{p(۶,۶)+p(۷,۶)+p(۸,۶)+p(۹,۶)+p(۱۰,۶)\}$$

یعنی کلاس دومی‌ها ۱۰ صندلی ردیف دوم را برای نشستن دارند لذا از ۱۰ صندلی در ۳تای آن‌ها می‌نشینند و دانش‌آموزان سوم در ۱۷ صندلی باقی‌مانده می‌نشینند، لذا از ۱۷تا صندلی در ۴تای آن‌ها می‌نشینند و برای کلاس اولی‌ها حالت‌های زیر پیش می‌آید:

۱. هر چهار دانش‌آموز کلاس سوم در ردیف اول نشسته باشند؛ لذا برای کلاس اولی‌ها ۶ صندلی باقی می‌ماند که به $p(۶,۶)$ حالت در ۶تای آن‌ها می‌نشینند.

یا

۲. اگر سه دانش‌آموز سوم در ردیف اول نشسته باشند؛ آنگاه برای اولی‌ها ۷ صندلی باقی می‌ماند که به $p(۷,۶)$ حالت در ۶تای آن‌ها می‌نشینند.

یا

۳. اگر دو دانش‌آموز سوم در ردیف اول نشسته باشند؛ آنگاه برای کلاس اولی‌ها ۸ صندلی باقی می‌ماند که به $p(۸,۶)$ حالت در ۶تای آن‌ها می‌نشینند.

یا

۴. اگر یک دانش‌آموز سومی در ردیف اول نشسته باشد؛ آنگاه برای کلاس اولی‌ها ۹ صندلی باقی می‌ماند که به $p(۹,۶)$ حالت در ۶تای آن‌ها می‌نشینند.

یا

۵. اگر هیچ دانش‌آموز سومی در ردیف اول ننشسته باشد؛ آنگاه برای کلاس اولی‌ها ۱۰ صندلی باقی می‌ماند که به $p(۱۰,۶)$ حالت در ۶ تای آن‌ها می‌نشینند.

منبع

کتاب ریاضی (۲)- ۲۳۴/۲ مؤلفان: دکتر علی ایرانمنش، محسن جمالی، حمیدرضا ربیعی، دکتر ابراهیم ریحانی، دکتر احمد شاهورانی و دکتر وحید عالمیان.

گزارش و خبر

گزارشی از فعالیت‌های اخیر اتحادیهٔ انجمن‌های علمی‌آموزشی معلمان ریاضی ایران

محمدباقر منزوی
دبیر اتحادیه انجمن‌های
علمی آموزشی معلمان ایران

افق‌های نو در آموزش ریاضی

علی‌رغم مشکلات فراوان و عدم وجود امکانات لازم برای فعالیت انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی و نیز اتحادیهٔ انجمن‌ها، این اتحادیه تلاش فراوان نمود تا همگام با تغییرات در سیاست‌های وزارت آموزش‌وپرورش، به دنبال پی‌گیری‌ها و کوشش‌های قبلی، خدمات خود را در جهت حل مسائل آموزش ریاضی کشور گسترش دهد. به همین منظور آخرین مجمع عمومی دوره پنجم اتحادیه در روزهای ۱۰ و ۱۱ مهرماه ۱۳۹۲ در تهران برگزار شد. برای برنامه‌ریزی این مجمع، سه جلسه در دفتر آموزش‌های کوتاه مدت نیروی انسانی وزارت آموزش‌وپرورش، با پی‌گیری شورای اجرایی اتحادیه تشکیل شد و سرانجام مرکز آموزش نیروی انسانی پیامبر اعظم(ص) واقع در ولنجک تهران برای محل برگزاری جلسات مجمع عمومی انتخاب گردید. برای برنامه‌ریزی علمی این نشست نیز جلسه‌ای در «خانه ریاضیات اصفهان» تشکیل شد.

برنامهٔ مجمع شامل موارد زیر بود:

۱. دعوت از وزیر آموزش‌وپرورش، دکتر علی‌اصغر فانی، به‌منظور استماع نظر اتحادیه و نمایندگان معلمان ریاضی کشور توسط ایشان و اعلام سیاست‌های آتی وزارت در حمایت از انجمن‌های علمی و اتحادیه‌های علمی معلمان؛

کنفرانس‌های آموزش ریاضی ایران با حمایت وزارت آموزش‌وپرورش به‌طور مرتب برگزار گردد

۲. حضور سرپرست محترم دانشگاه فرهنگیان جهت بحث و تبادل نظر در مورد مسائل دانشگاه فرهنگیان و نیز ارتباط این دانشگاه با اتحادیه و استفاده از تجارب معلمان ریاضی؛

۳. سخنرانی رئیس انجمن آمار ایران درخصوص معرفی فعالیت‌های «ستاد ملی سال جهانی آمار» مخصوصاً در رابطه با موضوع آموزش آمار در مدارس؛

۴. سخنرانی آقای دکتر اسمعیل بابلیان، سرکار خانم دکتر زهرا گویا و آقای دکتر علی رجالی؛

۵. حضور مسئول جدید گروه درسی ریاضی دفتر تألیف وزارت آموزش‌وپرورش و بحث و تبادل نظر پیرامون مسائل و مشکلات تألیف کتب درسی و بیان سیاست‌های گروه ریاضی دفتر تألیف برای استفاده از نیروی بالقوهٔ اتحادیه؛

۶. سخنرانی معاون مرکز آموزش نیروی انسانی وزارت؛

۷. بیان عملکرد و فعالیت شورای اجرایی اتحادیه و انتخاب شورای اجرایی جدید.

در این نشست، جمع‌بندی نظرات نمایندگان انجمن‌های علمی آموزشی معلمان ریاضی به شرح زیر به آقای دکتر علی‌اصغر فانی اعلام شد:

الف. انجمن‌ها و اتحادیه‌ها مجدداً بازشناخت شوند، به‌نحوی که از نیروی بالقوه آن‌ها برای کمک به استانداردسازی، برنامه‌ریزی و تألیف کتب برنامه‌های درسی ریاضی، ارزشیابی‌ها و نیز ارتقا حرفه‌ای معلمان استفاده شود.

ب. وزارت آموزش‌وپرورش از خدمات و نیروهای انجمن‌ها و خانه‌های ریاضیات ایران که نهادهای غیردولتی هستند، بهره‌گیری بیشتری داشته باشد.

ج. کمیسیون انجمن‌های علمی آموزشی معلمان (همانند وزارت علوم، تحقیقات و فناوری) در وزارت آموزش‌وپرورش تشکیل شود.

د. وزارت آموزش‌وپرورش از انجمن‌ها و اتحادیه‌ها در بررسی و نحوهٔ پیاده‌سازی اسناد بالادستی، تهیه استانداردهای آموزشی، برنامه‌ریزی درسی، ارتقا دانش حرفه‌ای معلمان و برنامه‌ریزی‌های دانشگاه فرهنگیان بهره‌گیری بهتری داشته باشد.

هـ. کنفرانس‌های آموزش ریاضی ایران با حمایت وزارت آموزش‌وپرورش و بدون دخالت در برنامه‌های علمی آن (همانند کنفرانس‌های ریاضی که با حمایت وزارت علوم و زیر نظر انجمن ریاضی ایران برگزار می‌شود) به‌طور مرتب برگزار گردد.

و. مکان مناسب برای استقرار هر انجمن در استان‌ها و اتحادیه در تهران تدارک دیده شود و از این انجمن‌ها و اتحادیه حمایت شود.

دکتر فانی که خود از آغازگران و حامیان اولیهٔ تشکیل انجمن‌های علمی آموزشی معلمان در دههٔ هفتاد بوده‌اند نسبت به اجرای درخواست‌های فوق قول مساعد دادند و بر سیاست آتی وزارت، مبنی بر حمایت از نهادهای غیردولتی، مخصوصاً انجمن‌های علمی آموزشی معلمان ریاضی ایران و خانه‌های ریاضیات ایران و استفاده از توانمندی‌های آنان برای ارتقا جایگاه علمی آموزش‌وپرورش و بهره‌گیری از نظرات معلمان و عدم موازی‌کاری و رقابت بین آموزش‌وپرورش و این نهادها، تأکید نمودند. ایشان همچنین با بیان برخی از مشکلات موجود در برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های ریاضی، از انجمن‌ها و معلمان ریاضی درخواست همکاری نمودند.

آقای دکتر مهرمحمدی سرپرست محترم دانشگاه فرهنگیان از سیاست‌های جدید دانشگاه فرهنگیان و برنامه‌ریزی‌های آینده آن صحبت کردند و اعلام آمادگی نمودند که از خدمات و نظرات اتحادیه انجمن‌های علمی آموزشی معلمان در ادامه راه بهره‌گیری نمایند. ضمناً قرار شد از نمایندگان اتحادیه و کمیسیون پیشبرد ریاضیات و فرهنگستان علوم

سیزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی با همت انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی تهران در تهران در سال ۱۳۹۳ و چهاردهمین کنفرانس با همت انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی استان آذربایجان شرقی در تبریز در سال ۱۳۹۴ برگزار خواهد شد

جمهوری اسلامی ایران نیز در برنامه‌های آتی این دانشگاه بهره‌گیری شود.

آقای حمیدرضا امیری، رئیس جدید گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، نیز با استماع نظرات نمایندگان انجمن‌ها، آمادگی خود را برای بهره‌گیری از نظرات انجمن‌های علمی آموزشی معلمان و خانه‌های ریاضیات ایران اعلام و درخواست کردند که این نهادها در استانداردسازی، برنامه‌ریزی درسی و تألیف و تصحیح کتب درسی با دفتر تألیف همکاری نمایند.

آقایان دکتر بابلیان، دکتر رجالی و خانم دکتر گویا نیز در رابطه با مسئله دانشگاه فرهنگیان، افت ریاضی و برخی از دلایل این افت که مرتبط با نحوه تدریس معلمان است و نیز ارتقا حرفه‌ای معلمان ریاضی صحبت کردند.

آقای دکتر محمدزاده رئیس انجمن آمار ایران برنامه‌های ستاد ملی سال جهانی آمار را، که به مناسبت سال ۲۰۱۳ در ایران تشکیل شده است، تشریح نمودند و از معلمان ریاضی و انجمن‌های علمی آموزشی معلمان ریاضی سراسر کشور درخواست کردند در زمینه تدریس مناسب دروس آمار، ایجاد علاقه در دانش‌آموزان برای انتخاب رشته آمار و معرفی توانمندی‌های علم آمار و نیاز جامعه به این رشته از دانش بشری همت نمایند.

آقای دکتر جلالی معاون مرکز آموزش نیروی انسانی وزارت آموزش‌وپرورش راهکارهایی را برای تعامل بیشتر این مرکز با اتحادیه بیان نمودند.

در این جلسات نتیجهٔ عملکرد و فعالیت‌های شورای اجرایی دورهٔ پنجم ارائه شد، همچنین مشکلات و موانع موجود در راستای فعالیت‌های انجمن‌ها مطرح گردید و اظهار امیدواری شد که با تغییرات سیاستگزاری در وزارت آموزش‌وپرورش فعالیت‌های اتحادیه در دوره‌های بعد گسترش یابد.

به جز انجام انتخابات و تعیین اعضای شورای اجرایی جدید اتحادیه، تصمیمات زیر نیز اتخاذ شد.

- سیزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی با همت انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی تهران در تهران در سال ۱۳۹۳ و چهاردهمین کنفرانس با همت انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی استان آذربایجان شرقی در تبریز در سال ۱۳۹۴ برگزار خواهد شد (در ضمن قرار شد از هم‌اکنون برنامه‌ریزی علمی این دو کنفرانس آغاز گردد).
- به‌منظور بهره‌گیری اتحادیه از حمایت فکری، علمی و معنوی انجمن‌های علمی آموزشی معلمان ریاضی سراسر کشور امکانات لازم فراهم شود.
- ایجاد وب‌سایت فعال برای اتحادیه و غنی نمودن آن، ایجاد بانک اطلاعاتی فعال برای دسترسی تمام اعضا، استعدادیابی و به‌کارگیری نیروهای مؤثر و مفید برای غنی‌سازی سایت و بهره‌گیری از امکانات ICT در آموزش ریاضی
- کمیته‌های اتحادیه فعال شوند و این کار در دستور کار اتحادیه قرار گیرد.
- پذیرش دعوت سرپرست وزارت، سرپرست دانشگاه فرهنگیان و رئیس گروه ریاضی دفتر تألیف، مبنی بر همکاری اتحادیه و انجمن‌های علمی با آنان.
- بازنگری کارهای انجام شده اتحادیه هرچه زودتر انجام شود و مستندسازی از فعالیت‌ها انجام گیرد.
- راهکارهایی برای تأمین نیازهای مالی انجمن‌های علمی آموزشی معلمان ریاضی اندیشیده شود.
- تلاش برای قانع نمودن وزارت جهت استفاده از توانمندی‌های انجمن‌ها در مسائل مربوط به آموزش‌وپرورش مخصوصاً آموزش‌های ضمن خدمت به‌طور کامل، ارتقا حرفه‌ای معلمان، تصحیح، تألیف و نقد و بررسی برنامه‌های درسی و کتب ریاضی، شدت یابد.
- نشریه اتحاد با حمایت علمی انجمن‌ها، با نوشتن مقالات مناسب برای آن تقویت شود.

گزارش کوتاه از کلاس ریاضی در درس معادلهٔ سوم راهنمایی

محمدجواد کارخانه، دبیر ریاضی شهرستان پیشوا

دیروز در کلاس ریاضی، با بچه‌ها مشغول حل تمرین‌های درس معادله بودیم. در جلسهٔ قبل معادلات کسری و چگونگی حل آن‌ها را برای کلاس توضیح داده بودم. البته با توجه به اینکه تقریباً تمام موارد مطرح شده در این درس را بچه‌ها در سال قبل آموخته بودند، در آموزش این بخش، خیلی از خود بچه‌ها کمک گرفتم و از معادله‌های خیلی ساده شروع کردم تا در انتها به هدف اصلی که حل معادلات کسری بود، رسیدم. بچه‌ها معادلهٔ درجهٔ اول از نوع کسری را با همان روش‌های قبلی نیز می‌توانستند حل کنند ولی از آنجا که معمولاً کار کردن (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) با اعداد گویا نسبتاً مشکل است و احتمال اشتباه کردن در آن وجود دارد، من روش دیگری را هم که در کتاب درسی وجود دارد برایشان توضیح دادم ولی به آن‌ها گفتم از هر روش که مایلند استفاده کنند. بیشتر بچه‌ها روش دوم را انتخاب کردند ولی عده کمتری ترجیح دادند از همان روش اول استفاده کنند. توضیحات من در مورد روش دوم در حل این معادله داده شده است.

$$۱۲\times\left(\frac{۳}{۴}\mathbf{و}-\frac{۵}{۶}\right)=\left(\frac{۲}{۳}\right)\times ۱۲$$

ابتدا مخرج مشترک کسرها را انتخاب و دو طرف تساوی را در آن ضرب می‌کنیم.

نحوهٔ ضرب دادن را به این شکل توضیح دادم: $\frac{۳}{۴}\times$۱۲را به سه طریق می‌توان انجام داد:

الف. ۱۲ را در ۳ ضرب و حاصل را بر ۴ تقسیم کنیم؛

ب. ساده کنیم یعنی $\frac{۳}{\cancel{۴}_{۱}}\times\cancel{۱۲}^{۳}$

ج. ۱۲ را بر ۴ تقسیم کنیم، حاصل آن را در ۳ ضرب کنیم.

روش الف به صرفه نیست مخصوصاً زمانی‌که حاصل‌ضرب بزرگ شود، آن وقت تقسیم کردن مشکل می‌شود.

روش ب مناسب نیست زیرا طبق خاصیت توزیع‌پذیری اگر ۱۲ را با ۴ ساده کنیم، روی آن می‌نویسیم ۳ و برای ضرب کردن در $\frac{۵}{۶}$ به‌جای ۱۲، ۳ را درنظر می‌گیریم.

روش ج مناسب است زیرا حاصل تقسیم عدد کوچک‌تری نسبت به روش الف به‌دست می‌آید و ضرب کردن آن در صورت ساده‌تر است. بنابراین این روش مقرون به صرفه‌تر است. با این کار معادله از شکل کسر خارج شده و مانند مثال‌های قبلی به‌راحتی حل می‌شود.

من با این روش از بچه‌ها تقاضا کردم فرایند فکری خود را بیان کنند. این حرف من در کلاس باعث شد یکی از بچه‌ها که دانش‌آموز خیلی زرنگی هم نبود معادله‌ای را با روش بسیار زیبایی حل کند. معادله این بود: مقدار x را از معادلهٔ $۱۰x = ۹x+۸$ به‌دست آورید. این یکی از تمرین‌های کتاب درسی بود. بچه‌ها غالباً این معادله را مانند تمام معادله‌های موجود در این بخش با معلوم، مجهول کردن و تقسیم معلوم بر ضریب مجهول به‌دست آوردند. اما آن دانش‌آموز بعد از حل معادله گفت: مشخصه که جواب هشته! بچه‌ها حرف او را زیاد جدی نگرفتند ولی از آنجا که در کلاس من اغلب فضای بحث داغ است، از او خواستم توضیح دهد.

توضیح او چنین بود: خوب $۹x+۸$ می‌شه $۱۰x$ و $۹x+x$ نیز می‌شود $۱۰x$، پس $x=۸$. به‌محض اینکه پاسخ او را فهمیدم دفتر کلاس را برداشتم و گفتم «آفرین! یه ۲۰ برات می‌ذارم». راستی چقدر این دانش‌آموز در حل این معادله فکرش زیبا بود.

نامه‌های رسیده

مجله رشد آموزش ریاضی با دریافت مقاله‌ها، روایت معلمان، دیدگاه‌ها، نقد و بررسی کتاب از سوی خوانندگان گرامی، پربارتر خواهد شد. تا پایان مهر ۱۳۹۲، نامه‌ها و مطالب دوستان زیر، به‌دست ما رسیده است. ضمن تشکر از همگی آن‌ها، منتظر دریافت نامه‌های شما هستیم.

- محمدباقر عظیمی‌نژاد، از خراسان رضوی؛
- مقداد قاری، از تهران؛
- محمدرضا محمدپور فهندری، از خراسان رضوی؛
- غلامحسین ظفری، از هرمزگان؛
- فرشته فاطمه سمیع‌فنی، از تهران؛
- معصومه نامدار، از خراسان؛
- زیبا خوشبخت، از فارس؛
- نرگس عزیزی، از خراسان رضوی؛
- مسلم ولی‌زاده، از آذربایجان شرقی؛
- اکبر زارع بزگ آبادی، از یزد؛
- محمدرضا خوش‌بین خوش‌نظر، از تهران؛
- رضا سنایی‌نژاد، از ایلام؛
- قاسم حسین قنبری، از سمنان؛
- اسفند ملیح ملکی، از آذربایجان شرقی.

IN THE NAME OF ALLAH

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning
Publications &Teaching Technology Office

115 Roshd
Mathematics
Education Journal

رشد
آموزش ریاضی

vol.31 no.3 2014 ISSN:1606-9226

www.roshdmag.ir
e-mail: riyazi@roshdmag.ir
P. O. Box: Tehran 15875 - 6585