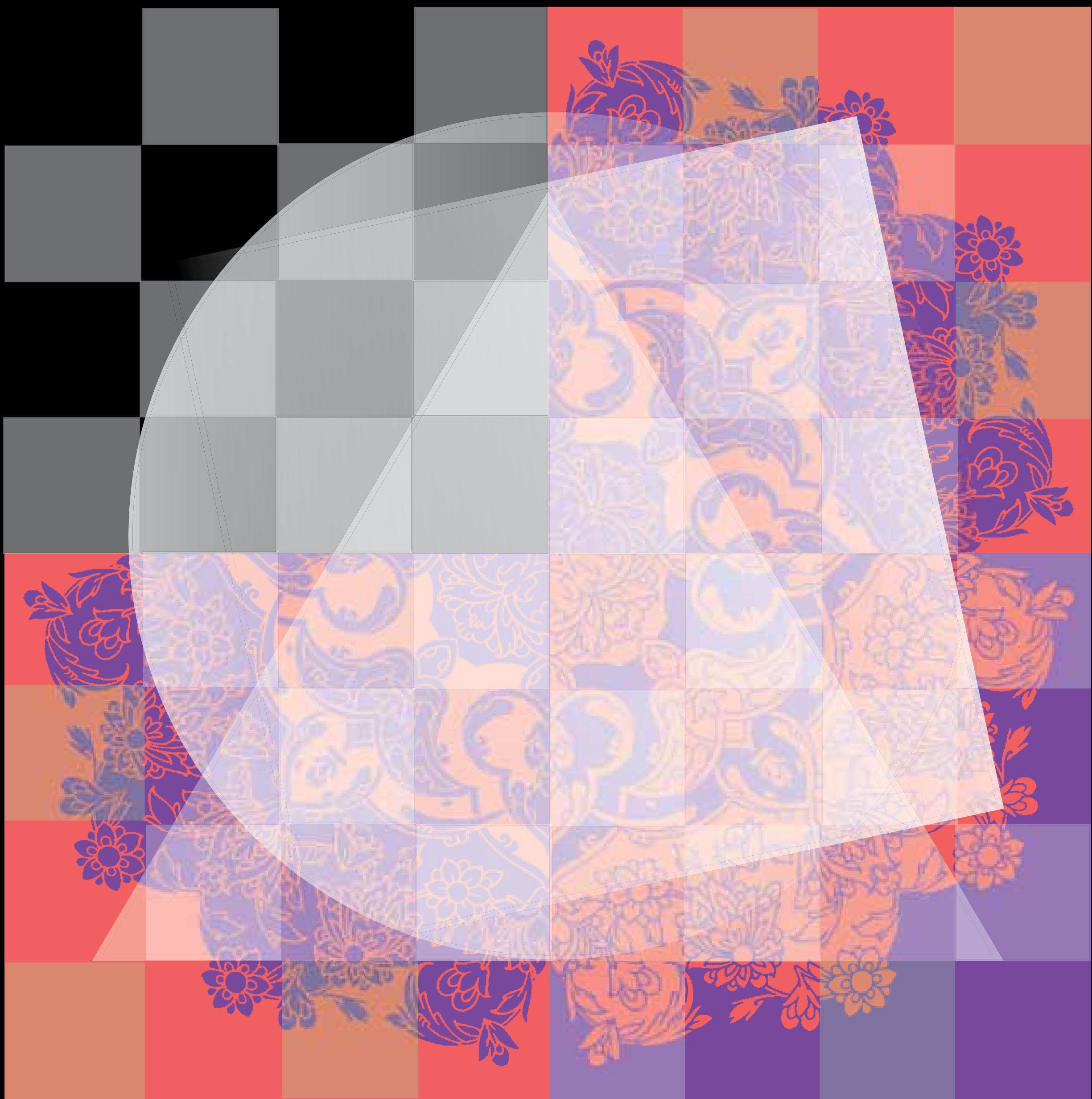
وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش‌وبرنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات‌وتکنولوژی آموزشی

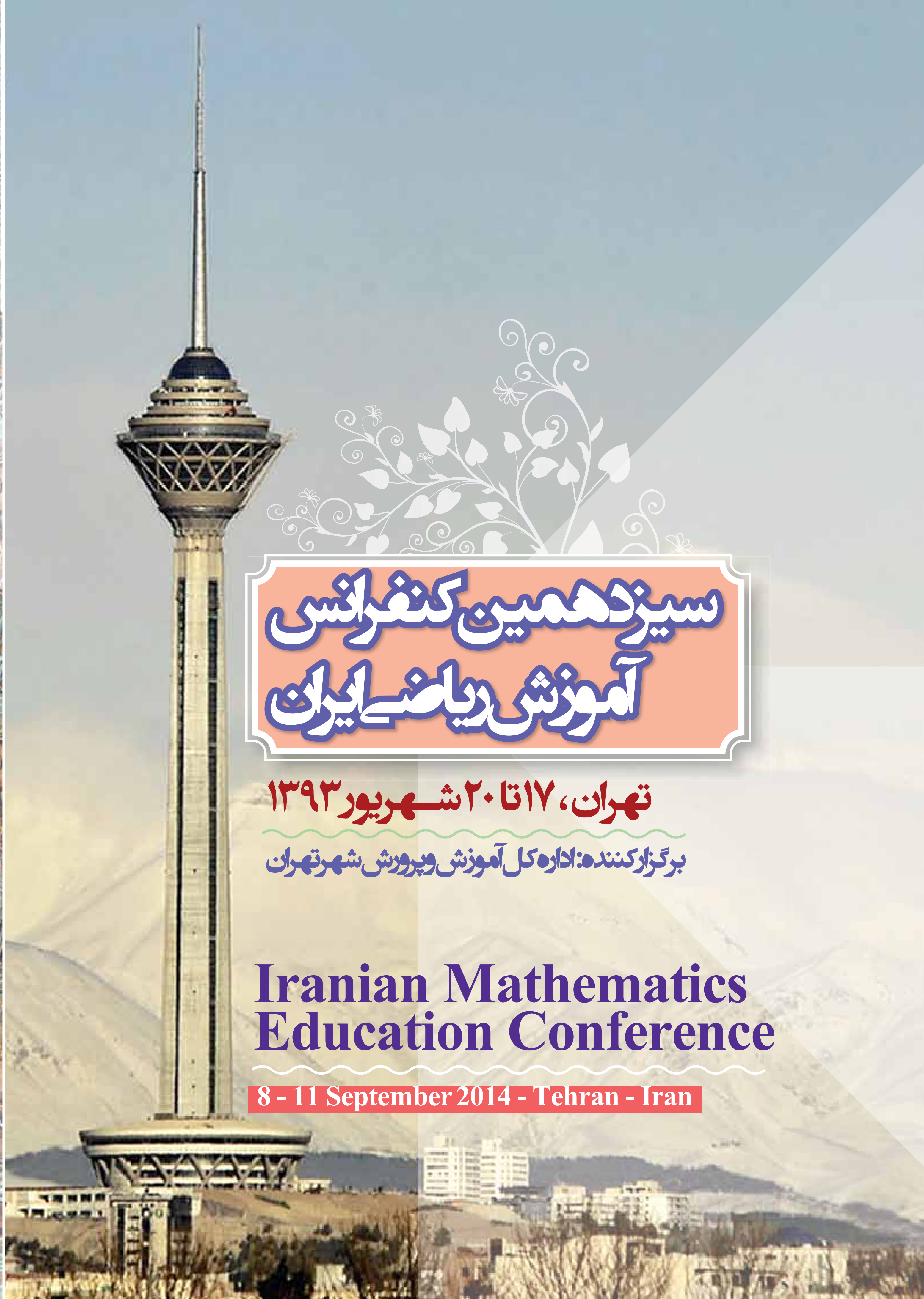
رشد آموزش ریاضی ۱۱۶

دورهٔ سی ویکم ، شمارهٔ ۴ ، تابستان ۱۳۹۳، ۶۴ صفحه ، ۸۵۰۰ ریال
فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
www.roshdmag.ir ISSN: 1606-9226



م. کریم خانی

- نقش و جایگاه کتاب‌های کمک‌آموزشی در مدرسه
- معماهایی در منطق ریاضی
- زنون، حرکت و بی‌نهایت
- استفاده از روش مور در تدریس هندسه ۱



سیزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

تهران، ۱۷ تا ۲۰ شهریور ۱۳۹۳

برگزار کننده: اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران

Iranian Mathematics Education Conference

8 - 11 September 2014 - Tehran - Iran

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد آموزش ریاضی ۱۱۶

دورهٔ سی و یکم، شمارهٔ ۴، تابستان ۱۳۹۳

فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی

● نشانی دفتر مجله: تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶. صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ ● تلفن: ۹–۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴) ● نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ ● وبگاه: www.roshdmag.ir ●
پیام‌نگار: riyazi@roshdmag.ir ● تلفن پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ ● کد مدیرمسئول: ۱۰۲ ● کد دفتر مجله: ۱۱۳ ● کد امور مشترکین: ۱۱۴ ● نشانی امور مشترکین: تهران،
صندوق پستی: ۱۶۵۹۵/۱۱۱ ● تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ – ۷۷۳۳۶۶۵۵ ● چاپ: شرکت افست (سهامی عام) ● شمارگان: ۶۰۰۰

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به‌ویژه معلمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

● مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود. ● شکل قرار گرفتن جدول‌ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.
● نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود. ● برای ترجمهٔ مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمهٔ یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمهٔ ارائه شده، سفارش ترجمه به فرستندهٔ مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می‌تواند سفارش ترجمهٔ مقاله را به مترجم دیگری بدهد. ● در متن‌های ارسالی تا حد امکان از معادل‌های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود. ● پی‌نوشت‌ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد. ● چکیده‌ای از اثر و مقالهٔ ارسال‌شده در حداکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.
● در مقاله‌های تحقیقی یا توصیفی، واژه‌های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود. هم‌چنین: ● مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است. ● مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبین نظر دفتر انتشارات کمک‌آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ‌گویی به پرسش‌های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است. ● مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

کتاب‌های کمک آموزشی در مدرسه

زهرا گویا

در زمانی که جمعیت دانش‌آموزی کم بود، نه از «آجیل دانش» خبری بود و نه از «سیر تا پیاز» کتاب‌های درسی! بچه‌ها، نُه ماه بی‌سر و صدا مدرسه می‌رفتند و چون رقابت چندانی نبود، به «منابع کمکی» هم نیازی نداشتند. تابستان‌ها هم در واقعیتی ملموس، «مهارت‌های زندگی» را می‌آموختند. مدرسه‌ها نیز به تناسب امکاناتی که داشتند - اگرچه اغلب محدود- هم محل یادگیری و ایجاد کوره‌سوادی برای بچه‌ها بودند و هم محل گذراندن اوقات فراغت آن‌ها از طریق برگزاری برنامه‌های ساده، کلاس‌های فوق‌العاده و کارهای دستی؛ مثل شکل دادن به چوب با اره مویی برای پسران و آشپزی برای دختران؛ بعدش هم که تابستان می‌رسید، بچه‌ها شروع می‌کردند به بازی با بچه‌های محل، کمک به کارهای خانه، رفت‌وآمد با دوستان و کتاب خواندن و شعر خواندن و انجام دادن آنچه را که در طول سال تحصیلی، فرصتش را نداشتند. شب هم برایشان قصه‌های دلنشینی از «کلیله و دمنه»، «شاهنامه»، «مثنوی» و «اخلاق ناصری» گرفته تا «حسن کچل» و «سندباد» و نظایر آن می‌گفتند و می‌گفتند و یادش بخیر که چقدر چیز می‌آموختند. گاهی نیز به تقلید از بزرگ‌ترها، برای هم قصه می‌گفتند و توسن خیال و اندیشه را به هر سو می‌راندند و قدرت تخیل خود را تقویت می‌کردند. آری! تابستان فرصت بی‌نظیری برای معنا بخشیدن به هر آنچه بود که در مدرسه آموخته بودند و عرصه‌ای برای آماده شدن برای زندگی.

البته، به‌طور طبیعی زمانه تغییر نمود و در این مورد هم، با افزایش جمعیت دانش‌آموزی، ضرورت گسترش سواد عمومی و بالارفتن سطح انتظارات؛ مدرسه‌داری، پُر کردن اوقات فراغت دانش‌آموزان در تابستان، پاسخ به نیازهای برآمده از تغییرات جدید، کمبود شدید نیروی انسانی و منابع درسی، همه و همه، ضرورت تدوین راهکارهای مناسبی را برای رویارویی با شرایط جدید، ایجاب نمود. برای مثال در سال ۱۳۴۲ «مرکز انتشارات آموزشی» تأسیس شد که اقدام به انتشار ماهنامه «آموزش‌وپرورش» و هر پانزده روز یک‌بار، مجموعه نشریات «پیک» در طی شش ماه اول سال تحصیلی با شمارگان سه میلیون نسخه برای توزیع در شهرها و روستاهای کشور نمود. آن مجلات، علاوه بر پر کردن اوقات فراغت دانش‌آموزان، به نوعی به آموزش رسمی هم کمک کردند. به گفتهٔ ایرج جهانشاهی[1]، «مجلات پیک، به‌خوبی با برنامهٔ درسی مطابقت داشتند و به‌راستی «کلید درک بهتر مطالب درسی» بودند. به‌علاوه، راهنمایِ معلم و والدین (مجلهٔ پیک معلم و خانواده) هم داشتند و چنان طراحی شده بودند که معلم برای تدریس بهتر و علاقه‌مند کردن دانش‌آموزان به مطالعه، در کلاس درس از آن‌ها سود می‌برد. این ویژگی‌ها باعث شد دانش‌آموزان، معلمان، پدران و مادران و مسئولان آموزش‌وپرورش، از آن مجلات به‌خوبی استقبال کنند و از آن‌ها به‌عنوان بهترین خواندنی‌های کمک‌آموزشی، بهره گیرند». جهانشاهی، در مورد تبیین نقش و جایگاه کتاب‌های کمک آموزشی، توضیح می‌دهد که «تنها مباحث و درس‌های مدرسه، برای رسیدن به نتیجهٔ غایی تعلیم‌وتربیت، یعنی دریافت هرچه بیشتر دانستنی‌ها و مهارت‌ها، کافی نیست. در جامعهٔ امروزی، هر فردی نیاز دارد که به موازات آنچه در برنامه درسی مدرسه به او آموخته می شود، در زمینه مسائل اجتماعی، اقتصادی، سیاسی، علوم، صنعت و حرفه‌وفن، سلامت جسم و روح، تفریح و سرگرمی و استفاده از اوقات بیکاری، ادبیات و هنر، و مناسبات داخلی و خارجی، دانش کافی به‌دست بیاورد. بسیاری از این‌گونه آگاهی‌ها، جز از راه خواندن و مطالعه کردن به‌دست نمی‌آید و نمی‌توان آن‌ها را یک‌جا، آن هم پس از فراغ از تحصیل به‌دست آورد».

در جریان تغییرات باز هم گسترده‌تر عظیمِ جمعیتی و اجتماعی، تقاضا برای ارتقای سطح توانایی‌های دانش‌آموزان فزونی گرفت و به‌تدریج، رقابت‌های دانش‌آموزی برای ورود به آموزش عالی فشرده‌تر شد. در این راستا، جامعه انتظار کمک داشت و نیروهای فرهنگی با تلاش بسیار، برای ارائهٔ چنین

کمکی، دست به‌کار شدند. چنین بود که مفهوم‌های تازه‌ای مانند «نشریات کمک آموزشی»، «کتاب‌های کمک درسی»، «مواد آموزشی»، «کتاب‌های حل‌المسائل»، «کتاب‌های کنکور»، «راهنمای نکته و تست» و نظایر این‌ها، شکل گرفتند.

در هر صورت، تاریخچه آموزش‌وپرورش، و از جمله در کشور ما، نشان می‌دهد که نظام آموزشی، با دغدغهٔ کمک به ارتقای سطح توانایی، شعور و رفع نیازمندی‌های علمی- آموزشی دانش‌آموزان، همواره تلاش کرده تا با درک شرایط زمان و مکان، راهکارهایی را برای ارائه، اشاعه، و نظارت بر تولیدات جانبی کمکی تدوین کند. مثلاً، در عصر اطلاعات و ارتباطات، بر دیدگاه‌های شناختی و توسعهٔ تفکر انتقادی تأکید شده و توجه صِرف بر حافظه‌محوری، مورد نقد قرار گرفته است. در راستایِ چنین نظارتی، به‌طور نمونه، رئیس سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش‌وپرورش[۲]، با انتقاد از ترویج حافظه‌محوری در کتاب‌های کمک‌آموزشی، ابراز می‌دارد که «آموزش‌وپرورش، همواره به‌دنبال این است که از حافظه‌محوری فاصله بگیرد، اما عوامل این کار در بیرون زیاد است و در بیرون کسانی هستند که به آموزش‌وپرورش آویزان می‌شوند و نمی‌گذارند از مدار حافظه‌محوری فاصله بگیرد که نمونه بارز آن، کتاب‌های کمک‌آموزشی انتشارات مختلف است». ایشان در ادامه تأکید می‌کند که «کتاب‌های کمک‌آموزشی، تخریب آینده تعلیم‌وتربیت است و ما که یک بار از کنکور آسیب دیده‌ایم این بار در حال آسیب دیدن از کتب کمک آموزشی هستیم. . . . این کتاب‌ها ضدخلاقیت بوده و در نظام تعلیم‌وتربیت، ایجاد تخریب می‌کند، چرا که کتاب‌های کمک‌آموزشی، نه تحقیق بنیان است و نه پژوهش‌بنیان». به بیان وی، «در آموزش‌وپرورش به‌دنبال این هستیم که نمره گرفتن را تعدیل کنیم و درس خواندن برای نمره، حذف شود. چرا که هدفمان این نیست که دانش‌آموزان را صرفاً برای گرفتن نمره بیست تربیت کنیم. بلکه تربیت دانش‌آموز شایسته برای زندگی هدف اصلی است. هم‌اکنون آموزش‌وپرورش ویترینی شده است از تربیت شده‌هایی که نمره ۲۰ دارند، آن هم از مدارس خاص[۳]».

همهٔ این دغدغه‌ها، نشانگر این است که هدف متعالی آموزش‌وپرورش، «تربیت دانش‌آموز شایسته» است که در حال حاضر، توسط بعضی از ناشران مدعی که «هدف از تشکیل گروه آموزشی» خود را، «توسعه کیفی آموزش ریاضی در کشور» می‌دانند، نادیده گرفته می‌شود و حتی به عقل سلیم دانش‌آموزان، به‌راحتی اهانت می‌شود. حکایت زیر، برگرفته از آخرین صفحهٔ یکی از کتاب‌های یکی از این ناشران است[۴]. نوشته‌های داخل قلاب []، توضیحات اجمالی اینجانب است، به مصداق آیهٔ شریفهٔ «فاعتبروا یا اولوالابصار!»

حکایت رانندهٔ باهوش

«انیشتین [البته منظور نویسنده، اینشتین است]، برای رفتن به سخنرانی‌ها و دانشگاه‌ها از رانندهٔ مورد اطمینان خود کمک می‌گرفت. [این رفتار، برای افراد علمی در اروپا و آمریکا- آن هم در شروع قرن بیستم، تقریباً محال بوده است]. رانندهٔ وی، نه تنها ماشین او را هدایت می‌کرد، بلکه همیشه در طول سخنرانی‌ها در میان شنوندگان حضور داشت، به طوری که به مباحث انیشتین تسلط پیدا کرده بود! [تحمیق خواننده و به سُخره گرفتن عقل و علم و خِرد تا به کجا؟!]

«یک روز انیشتین در حالی که در راه دانشگاه شهر دیگری بود با صدای بلند [به راننده‌اش] گفت که احساس خستگی می‌کند [دانشگاه برلین شرقی را در آلمان یا دانشگاه پرینستون را در ایالت نیوجرسی آمریکا- دو دانشگاهی که انیشتین استاد آن‌ها بوده- روی نقشه پیدا کنید و ببینید که نزدیک‌ترین دانشگاه شهر دیگر به آن کدام بوده است و از نظر مرتبهٔ علمی، چه جایگاهی داشته که پذیرای حرف‌های انیشتین بوده باشد؟]. راننده‌اش پیشنهاد داد که آن‌ها، جایشان را عوض کنند و او به‌جای انیشتین سخنرانی کند، چرا که انیشتین تنها در یک دانشگاه استاد بود و در دانشگاهی که سخنرانی داشت کسی او را نمی‌شناخت و طبعاً نمی‌توانستند او را از راننده اصلی تشخیص دهند. [عوام‌فریبی تا چه اندازه؟ چرا از کسی که هیچ کس او را نمی‌شناسد، برای سخنرانی دعوت کرده بودند؟ و چرا شعور انسان‌ها- آن هم جامعهٔ فرهیختهٔ دانشگاهی، نمی‌توانست بین انیشتین و ظرفیت‌های دیگر، تمایزی قائل شود؟]. انیشتین قبول کرد، اما در مورد اینکه اگر پس از سخنرانی سؤالات سختی از وی [راننده] بپرسند، او چه می‌کند، کمی تردید داشت. به‌هر حال سخنرانی راننده به‌نحوی عالی انجام شد» [یعنی می‌توان تصور کرد که با حقه، می‌توان همه را- حتی دانشگاهیانِ هم رشتهٔ انیشتین را که تشنهٔ شنیدن حرف‌های علمی جدید او بودند- فریفت؟]، ولی تصور انیشتین درست از آب در آمد. دانشجویان در پایان سخنرانی شروع به مطرح کردن سؤالات خود کردند. [آیا می‌شود هر متاعی را در هر بازاری فروخت؟!]. در این حین رانندهٔ باهوش گفت: سؤالات به‌قدری ساده هستند که حتی رانندهٔ من نیز می‌تواند به آن‌ها پاسخ دهد. [باز هم افراط در تحقیر علم و عالم! و تحقیر شغل شریف رانندگی] سپس انیشتین از میان حضار برخاست و به‌راحتی به سؤالات پاسخ داد، به‌حدی که باعث شگفتی حضار شد! [انوع جدید بدل‌کاری در عرصهٔ علمی- تخصصی و شبیه فیلم‌های ماجراجویانهٔ تخیلی؟!]

حال، بعد از این داستان مدهوش کنندهٔ دقیق و علمی و تاریخی و آموزنده! که قرار بوده به «تربیت دانش‌آموز شایسته» و «توسعه کیفی آموزش ریاضی در کشور» کمک کند!، پیام اخلاقی زیر، حسن ختام این داستان وزین! شده است:

«مهم نیست ما کی هستیم، مهم این است که در مواقع بحرانی چطور تصمیم می‌گیریم» و انگار نه انگار که «کی بودن» به معنای ویژگی‌ها و توانایی‌های فرد است نه نسب و منصب وی، و آن ویژگی‌ها و توانایی‌هاست که تعیین کنندهٔ نوع «تصمیم‌گیری» در «مواقع بحرانی» است.

پر کردن اوقات فراغت دانش‌آموزان در تابستان و استفاده از این ظرفیت، بهانه‌ای برای گشودن باب بررسی کتاب‌های جانبی و نقش و جایگاه آن‌ها در نظام آموزشی شد. در حال حاضر، این حوزه، عرصهٔ گسترده‌ای برای مطالعه و تبیین سیاست‌های نوین است. مسئله‌ای است که می‌توان برای آن، راه‌حل‌های متنوع و مناسبی پیدا نمود.

پی‌نوشت‌ها

۱. ارسال خبر به وبگاه «جزیره دانش: آموزش در ایران» در تاریخ ۱۳۸۴/۳/۷

۲. وبگاه ایرانی جوان، یکشنبه ۱۳۹۲/۱۰/۸

۳. برگرفته از www.javaneirani.com

۴. نسخهٔ کتاب در دفتر مجله موجود است

تفسیرهای دانش‌آموزان از نمادهای حرفی در جبر

صفر جلیلی، آموزشگر ریاضی و دبیر ریاضی دوره راهنمایی و متوسطه- منطقه سیلوانا- ارومیه، استان آذربایجان غربی
زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

متغیر و نماد، از مهم‌ترین مفاهیم ریاضیِ مدرسه‌ای برای ورود به جبر و ایجاد تفکر جبری هستند. با این وجود، یافته‌های پژوهشی بسیاری نشان می‌دهند که دانش‌آموزان، در درک این مفاهیم مشکل دارند و اگر درک درستی از این مفاهیم در دانش‌آموزان ایجاد نشود، این امر آن‌ها را در پایه‌های بالاتر، با مشکلات جدی مواجه می‌کند. این مقاله، بخشی از یک طرح بزرگ‌تر است که با هدف مطالعه چگونگی تفسیر دانش‌آموزان از نمادهای حرفی در جبر طراحی شده است. برای این منظور، پرسش‌نامه‌ای شامل پنج سؤال مرتبط به این مبحث طراحی گردید. در این پژوهش، ۲۸۹ دانش‌آموز از ۳۱ مدرسهٔ دولتی واقع در یکی از ناحیه‌های آموزشی واقع در تهرانِ بزرگ، شرکت کردند که در پایهٔ هشتم (سوم راهنمایی) مشغول به تحصیل بودند. این عده به روش نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای انتخاب شدند. در این تحقیق، برای جمع‌آوری داده‌ها از دو ابزار آزمون و مصاحبه استفاده شد. به‌منظور تأیید روایی و پایایی آزمون نیز، مجدداً همین آزمون بر روی یک نمونهٔ ۱۰۰ نفری از دانش‌آموزان در یکی از شهرستان‌های شمال غربی ایران اجرا شد. در این مقاله، به ارائهٔ نتایج حاصل از این مطالعه می‌پردازیم.

کلیدواژه‌ها: نمادهای جبری، دانش‌آموزان پایه هشتم (سوم راهنمایی)، تفکر جبری، متغیر و نماد

مقدمه

آیندهٔ تکنولوژی در جوامع مدرن، تا حد زیادی بستگی به سواد ریاضی شهروندان آن جامعه دارد و بازتاب این نیاز را می‌توان در روند جهانی به‌سوی همگانی کردن آموزش در دوره‌های راهنمایی و متوسطه ملاحظه کرد (گویا و محمدی، ۱۳۸۸). در همگانی شدن آموزش، ریاضی نقش برجسته‌ای در باسوادی شهروندان دارد و در ریاضی دورهٔ عمومی به‌طور خاص، نمادها و عبارت‌های جبری یکی از مهم‌ترین مفاهیم ریاضی مدرسه‌ای برای گذر از حساب به جبر و ایجاد تفکر جبری در دانش‌آموزان

است. اهمیت جبرِ مدرسه‌ای تا جایی است که به گفتهٔ شهریاری (۱۳۷۸)، «جبر شاخه‌ای از ریاضیات است که مفهوم‌ها و روش‌های کلی را برای همهٔ ریاضیات منظم می‌کند». بنابراین، یکی از مباحث ریاضی که نقش مهمی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای داشته و دارد، جبر به معنای فهم و درک و کار با نمادهاست. همچنین، در دوازدهمین مطالعهٔ ICMI، جبر به‌عنوان زبانی برای عمومی کردن، ابزاری برای حل مسئله، زبانی نمادین برای استفاده در سایر قسمت‌های ریاضی و بالاخره بخشی از برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای برای همهٔ دانش‌آموزان معرفی شده است (نقل شده در گویا و حسام، ۱۳۸۴). با این وجود، تحقیقات نشان می‌دهند که اغلب دانش‌آموزان، کار کردن با نمادها را یاد می‌گیرند، بدون آنکه درک صحیحی از آن داشته باشند، مانند کودکی که حرف زدن را یاد می‌گیرد (غلام آزاد، ۱۳۸۰). در مقالهٔ حاضر، ابتدا به تعریفی از جبر می‌پردازیم. سپس به مشکلات شناسایی شدهٔ دانش‌آموزان در تفسیر نمادهای حرفی در جبر می‌پردازیم. بعداً، هدف اصلی این مقاله که بررسی خطاها و تصورات نادرست دانش‌آموزان پایه هشتم (سوم راهنمایی) در رابطه با درک عبارت‌های جبری و شناخت ماهیت و منشأ آن‌هاست، پیگیری می‌شود.

پیشینهٔ تحقیق: چیستیِ جبر

جبر زبانی برای توصیف اعمال روی کمیت‌ها و روابط بین آن‌هاست، و مانند هر زبان، ممکن است در قالب آن زبان یا در ترجمه از یک زبان به زبان دیگر مشکلاتی ایجاد شود. در زبان جبر، بیشترِ مشکلاتِ زبانی مربوط به متغیرها و عبارات هستند و بیشترِ مشکلات ترجمه‌ای هنگام ترجمهٔ مسائل کلامی به معادلات ایجاد می‌شوند (غلام‌آزاد، ۱۳۸۰).

واژهٔ «جبر» برای نخستین بار به‌وسیلهٔ خوارزمی بر روی این شاخه از ریاضیات گذاشته شد. خوارزمی جبر را به معنای یکی از روش‌های تبدیل معادله به‌کار می‌برد. همچنین، در دوازدهمین مطالعهٔ کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی[1] در سال ۲۰۰۴، جبر به‌عنوان: زبانی برای عمومی کردن تجرید و اثبات، ابزاری برای حل مسئله از طریق معادلات یا نمودارها و برای مدل‌سازی با توابع، زبانی نمادین برای سایر قسمت‌های ریاضی و بالاخره بخشی از برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای برای همهٔ دانش‌آموزان معرفی شده است (نقل شده در محمدی و گویا، ۱۳۸۵).

لی[2] (به نقل از استیسی و همکارانش، ۲۰۰۴) در مطالعه‌ای با عنوان «در جست‌وجوی درک جبری»، در مورد اینکه «جبر چیست؟» نظرات معلمان و دانش‌آموزان، ریاضی‌دانان و آموزشگران ریاضی را بررسی نمود. از مطالعهٔ او، موارد زیر در باب جبر از دیدگاه افراد مختلف آشکار شد:

- جبر، یک موضوع مدرسه‌ای است.
- جبر، تعمیم حساب است.
- جبر، یک ابزار است.
- جبر، یک زبان است.
- جبر، یک روش فکر کردن و یک فرهنگ است.
- جبر یک فعالیت است.

علاوه بر این‌ها، وانس[3] (به نقل از کریگلر[4]، ۲۰۰۱) بیان می‌کند که «جبر گاهی اوقات، به‌عنوان یک حساب تعمیم یافته یا به‌عنوان یک زبان برای تعمیم حساب تعریف می‌شود. در هر صورت جبر، بیش از یک مجموعه قوانین برای به‌کار بردن نمادها است، جبر یک روش فکر کردن است». این روش فکر کردن، تفکر جبری در نظر گرفته می‌شود و چگونگی آن بزرگ‌ترین عامل موفقیت دانش‌آموزان در جبر است.

تفسیرهای دانش‌آموزان از نمادهای حرفی در جبر

مک‌گری‌گور[5] و استیسی[6] (۱۹۹۷) در تحقیقاتشان، که روی درک دانش‌آموزان از نمادهای جبری در سنین ۱۱ تا ۱۵ سال انجام شد، دریافتند که دانش‌آموزان معمولاً تا سنین ۱۵سالگی قادر به تفسیر حروف، که تعمیمی از حساب است، نیستند. علاوه بر این، دانش‌آموزان حروف را نادیده می‌گیرند و معمولاً آن‌ها را با مقادیر عددی جایگزین می‌کنند یا اغلب تفسیرشان از حروف و عبارت‌های جبری، براساس حدس و شهود یا اثرات مواد آموزشی گمراه‌کننده مانند استفاده از اشیا ملموس بود. برداشت اشتباه از نمادهای جبری توسط دانش‌آموزان، منجر به ایجاد مشکل از مفهوم جبر می‌شود و اگر اصلاح نشود، ممکن است برای سال‌ها در ذهن دانش‌آموز باقی بماند. البته آن‌ها اشاره می‌کنند که تفسیر نادرست دانش‌آموزان، نشان‌دهندهٔ پایین بودن سطح توسعه

شناختی آن‌ها نیســت، بلکه نشان می‌دهد که آنان، بــرای ایجاد درک درســتی از نمادهای جدید تلاش می‌کنند.

کوچمــن[7] (۱۹۸۱) بیان می‌کنــد که چون اکثر دانش‌آمــوزان نمی‌تواننــد قبــول کنند کــه حروف تفســیرهایی از اعداد هســتند، پس تدریس جبر در ابتدا باید براســاس عملیات ملموس (عینی) باشــد. عــلاوه بر این، به اعتقاد کوچمن (۱۹۸۱، نقل شــده در مک‌گری‌گور و استیســی،۱۹۹۷)، استفاده از مواد آموزشــیِ گمراه‌کننده در دروس اولیه مانند اشــیای قابل لمس که به‌عنوان ابزاری برای یادگیری آســان جبر به‌کار می‌رود، می‌تواند به‌طور جدی، نقطهٔ ضعف دانش‌آموزان باشد، چرا که اولین تجربهٔ دانش‌آموزان در استفاده از حروف در جبر، بر پایه و ساختار دانش جبــری آن‌ها تأثیرگذار اســت. بیشــتر دانش‌آموزان به‌طور نادرســت، حروف را به‌عنوان یک شیء یا یک عــدد می‌دانند و این تفکر، هم‌چنــان در ذهن آن‌ها باقی می‌ماند.کوچمن در (۱۹۷۸و۱۹۸۱، نقل شــده در ریچارد[8] و هــال[9]، ۲۰۰۲ و مکین‌تایر[10]، ۲۰۰۷) تفســیرهای دانش‌آموزان را از نمادهــای جبری، به شش دستهٔ عمده تقسیم می‌کند:

۱. بــه حرف، یک مقدار عددی دلخواه اختصاص می‌دهنــد. به‌عنوان مثــال؛ در عبــارت $2x+1$، به x یک عدد دلخواه اختصاص می‌دهند، بنابراین جوابی که دانش‌آموزان به این عبارت می‌دهند بســتگی به مقدار عــددی دارد که به جای این متغیر جایگذاری می‌کنند.

۲. حــروف را نادیده می‌گیرند و بــه آن معنایی نمی‌دهند.

۳. حروف را به‌عنوان یک شیء در نظر می‌گیرند.

۴. حــروف را به‌عنوان یک عدد ناشــناخته مورد اســتفاده قرار می‌دهند. برای مثال، برای بســیاری از آن‌ها، در معادلهٔ $4x-2=6$، x به تنهایی یک عدد است که باید پیدا شود.

۵. حروف را به‌عنوان تعمیم اعداد، یعنی به جای مقدارهایی می‌گیرند که می‌توانند ارزش‌های مختلفی داشــته باشند. مثلاً $x<4$ ، x شامل اعدادی است که از ۴ کوچک‌ترند.

۶. حــروف را به‌عنوان یک متغیــر، به نمایندگی طیف وسیعی از مقادیر نامشخص می‌بینند و برایشان، ارتبــاط نظام‌مندی بین دو مجموعــه از مقادیر دیده می‌شــود. به‌عنوان مثال، در خــط $y=2x$، y می‌تواند مقادیر متفاوتی با توجه به مقدار x داشته باشد.

کوچمــن (۱۹۸۱) تفســیرهای دانش‌آمــوزان را از نمادهای جبری، در چهار ســطح زیر دســته‌بندی می‌کند:

۱. دانش‌آمــوزان که در پایین‌ترین ســطح تفکر جبری هســتند، حروف را نادیده می‌گیرند یا به‌عنوان یک مقدار عددی دلخواه یا شیء تلقی می‌کنند.

۲. درســطح دوم تفکــر جبــری، دانش‌آمــوزان می‌توانند با مسائل کمی پیچیده کار کنند، اما به‌طور منظم نمی‌توانند روی مجهول کار کنند و اعداد را به متغیرها تعمیم دهند.

۳. در یک مسئله، می‌توانند با متغیرها کار کنند.

۴. در این سطح که بالاترین سطح تفکر جبری از نظر کوچمن است، دانش‌آموزان قادرند به‌طور مناسب تمــام متغیرها را با توجه بــه موقعیتی که در آن قرار دارند، تفسیر کنند.

نتایج تحقیقات کوچمن نشــان داد که بیشــتر دانش‌آموزان، در سطح اول تفکر جبری‌اند.

مک‌گری‌گور و استیســی (۱۹۹۷) نیز در تحقیق خود، فهرستی از دلایلی را که باعث ایجاد مشکل برای دانش‌آموزان در اســتفاده از نمادهای جبری می‌شود، بیان کرده‌اند:

❖ با پیش‌فرض‌های منطقی، شهودی و استدلال عملی در مورد کارکرد نظام‌های نمادین ناآشنا هستند.

❖ تمثیل‌های جبری با نظام‌های نمادینی که در زندگی روزانه یا سایر بخش‌های ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرند، متفاوت است.

❖ یادگیری مطالب جدید با مطالب قبلی، تداخل پیدا می‌کند.

❖ طراحی اغلب مواد آموزشــی بــرای یادگیری جبر، ضعیف و گمراه‌کننده‌اند.

علاوه‌بر این‌ها، عمدهٔ تفســیرهای دانش‌آموزان از حروف، غیرعددی[11] اســت؛ یعنی بهایی که به حرف می‌دهند، اکثراً ماهیت غیرعددی دارد. به‌عنوان مثال، حروف نادیده گرفته می‌شوند و به‌عنوان یک شیء در نظر گرفته می‌شوند (کوچمن، ۱۹۸۱؛ مک‌گری‌گور و استیسی، ۱۹۹۷؛ نقل شده در استاینِل[12] ،گیوازدِنکو[13] و استیسی، ۲۰۰۹).

فوجی[۱۴] (۲۰۰۳) نیز برای شناخت مشکلات دانش‌آموزان از مفهوم حرف در جبر، آزمونی با دو سؤال زیر طراحی کرد:

۱. ماری برای حل مسئلهٔ «مقادیر x را در عبارت جبری $x+x+x=12$ بیابید»، پاسخ‌های زیر را نوشت:

a) ۲ ، ۵ ، ۵

b) ۱۰، ۱، ۱

c) ۴ ، ۴ ، ۴

کدام پاسخ درست است؟ دلیل انتخاب شما چیست؟

۲. جان برای حل مسئلهٔ «مقادیر x و y را در عبارت جبری $x+y=16$ بیابید»، پاسخ‌های زیر را نوشت:

a) ۶ و ۱۰

b) ۹ و ۷

c) ۸ و ۸

کدام پاسخ درست است؟ دلیل انتخاب شما چیست؟

فوجی (۲۰۰۳) پس از تجزیه و تحلیل داده‌های جمع‌آوری شده از طریق این آزمون، به دو نتیجهٔ زیر رسید:

۱. مفهوم نماد تحت‌اللفظی برای دانش‌آموزان مبهم است، یادگیری دانش‌آموزان از مفهوم نماد سطحی است و حروف را با معنای اشتباهی به‌کار می‌برند. مثلاً در سؤال ۱، دانش‌آموزان از جعبه‌های خالی برای حل آن استفاده کردند؛

$\square + \square + \square = 12$

و ۱+۱+۱۰را جواب مسئله دانستند و کمتر از $3x=12$ و درنتیجه $x=4$ ، استفاده نمودند.

۲. استدلال دانش‌آموزان بیشتر با توجه به موقعیت‌های حرفی و اینکه حروف متفاوت باید توسط اعداد متفاوت ارائه شوند، بود. مثلاً در سؤال ۲، برای انتخاب گزینهٔ a استدلال کرده بودند که «چون در ترتیب حروف الفبا، x قبل از y است، پس x کوچک‌تر از y است».

طبق گفتهٔ کولیس[۱۵] (۱۹۷۵؛ نقل شده در کریستو، وامواکوسی و واس‌نیادو، ۲۰۰۷)، در بسیاری موارد، دانش‌آموزان حروف را به‌عنوان مختصر شده یا مخفف یک شیء یا به‌عنوان یک شیء می‌دانند. یکی دیگر از مشکلات در استفاده از حروف جبری این است که دانش‌آموزان، آن را «فقدان بستار» می‌دانند که اشاره به عدم تمایل آن‌ها به پذیرش عبارت‌های جبری به‌عنوان پاسخ نهایی است که به نظر می‌رسد این تصورات اشتباه، کاملاً قوی و تغییر دادن آن‌ها دشوار است. به‌عنوان مثال، وقتی که به دانش‌آموز گفته می‌شود ۲ برابر یک عدد را به‌صورت یک عبارت جبری بنویسید، آن‌ها تمایلی به قبول جواب $2x$ ندارند، اما در جایگزینی آن با اعداد خاص، اصرار می‌ورزند (بوت، ۱۹۸۴؛ فرث[۱۶]، ۱۹۷۵، نقل شده در کریستو، وامواکوسی و واس‌نیادو، ۲۰۰۷).

سامو[۱۷] (۲۰۰۹، به نقل از کوچمن، ۱۹۸۱)، پاسخ دانش‌آموزان را به سؤالات زیر مورد بررسی قرار داد:

«ارزش هر پیراهن S دلار و هر شلوار P دلار است. اگر من ۳ پیراهن و ۲ شلوار بخرم، $3S + 2P=$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟»

بسیاری از دانش‌آموزان پاسخ دادند «۳ پیراهن و ۲ شلوار». این نشان می‌دهد که آن‌ها به جای اینکه S را به‌عنوان قیمت پیراهن و P را به‌عنوان قیمت شلوار در نظر بگیرند، S و P را همان پیراهن و شلوار به حساب آورده بودند.

«قیمت هر مداد آبی ۵ پنی و هر مداد قرمز ۶ پنی است، من تعدادی مداد قرمز و آبی خریدم که مجموع قیمت آن‌ها ۹۰ پنی شد. اگر b تعداد مداد آبی و r تعداد مداد قرمز خریداری شده باشد، چگونه می‌توانیم تعداد مدادهای خریده شده را به صورت یک رابطه بر حسب r و b بنویسیم؟»

متداول‌ترین پاسخ‌های دانش‌آموزان به این مسئله، "$r+b=90$" بود. می‌توان این پاسخ را چنین تفسیر نمود که دانش‌آموزان تمایل شدیدی به تصور حروف به‌عنوان برچسب‌هایی[۱۸] دارند که مجموعه‌های خاصی‌اند. این کار، می‌تواند نتیجه تلاش دانش‌آموزان برای انطباق تجارب حسابی قبلی خود با معنایی باشد که حروف در یک زمینه جبری دارند.

از طرف دیگر، کلمنتس[۱۹] (۱۹۸۲) نشان داد که اکثر دانش‌آموزان در سن ۱۵ سالگی، قادر به تفسیر حروف جبری به‌عنوان تعمیم اعداد، یا به‌عنوان یک عدد ناشناخته نیستند. کلمنتس و کی‌یِرن (۱۹۸۲) و لوییز[۲۰] (۱۹۹۳، نقل شده در سِمو، ۲۰۰۹) هم دریافتند که تجارب حسابی دانش‌آموزان در مدارس ابتدایی، باعث می‌شودکه آن‌ها، معانی متفاوتی از حروف بسازند. به عبارت دیگر، بسیاری از مشکلات

دانش‌آمــوزان هنگام معرفی جبر بــروز می‌کند، زیرا مجموعه قراردادهایی که در حساب مورد استفاده قرار می‌گرفتند، تغییر می‌کنند.

یکی‌دیگر از مشکلاتی که دانش‌آموزان در استفاده از حروف در عبارت‌های جبری دارند، مشــکل الحاق اســت. در حساب، الحاق بیانگر جمع به‌طور ضمنی و به‌عنوان هر دو عدد در محل ارزش مکانی‌شــان است. به‌عنــوان مثال، ۲۷ به معنای ۲۰+۷ و $۲\frac{۱}{۲}$ به معنای $۲+\frac{۱}{۲}$ اســت (ماتز، ۱۹۸۰؛ نقل شــده در کریســتو، وام‌واکوسی و واس‌نیادو، ۲۰۰۷). اما در مقابل، الحاق در جبر به معنای ضرب اســت. به‌عنوان مثال، ۲a به معنای ۲×a است.

جدول۱: تفاوت‌های الحاق در زبان حساب و جبر

حساب	جبر
۳ × ۵ ≠ ۳۵ ۳۵ ≠ ۵۳ $۲+\frac{۱}{۲} = ۲\frac{۱}{۲}$	a × b = ab ab= ba a + ۲b ≠ ۲ab

وقتی از دانش‌آموز خواســته می‌شود به‌جای a در عبارت جبری ۳a، عدد ۲را قرار دهد، بسیاری از اوقات، دانش‌آموز از تفسیر الحاق در حساب استفاده کرده و آن را ۳۲ می‌بینند (چالو[۲۱] و هرشکوویچ[۲۲]، ۱۹۸۸).

اینکــه چــرا دانش‌آموزان تمایل دارنــد حروف را به‌عنوان یک شــیء یا یک اســم خاص تفسیر کنند، در نظریهٔ پیاژه توضیح داده شده است. پیاژه می‌گوید، چون دانش‌آمــوزان هنوز به مرحلهٔ عملیات رســمی نرســیده‌اند، نمی‌توانند به مفهوم متغیر دســت یابند (کولیس، ۱۹۷۵ و کوچمن، ۱۹۷۸و ۱۹۸۱).

برخــی از محققان دیگر به این نکتــه پی‌برده‌اند کــه ممکن اســت یــک تعامــل بین دانش حســابی دانش‌آمــوزان و تلاش‌های آن‌ها بــرای یادگیری جبر وجود داشــته باشــد. به‌عنوان مثال، بــوت (۱۹۸۴ و ۱۹۸۸) نشــان می‌دهد که مشکلات دانش‌آموزان در جبر، ممکن است تا حدودی به دلیل مشکلات دانشی آن‌ها در حســاب باشد. همان‌طور که ساختن مفاهیم جبری دانش‌آموزان، براســاس تجارب‌شان درحساب است، اشتباهات حسابی دانش‌آموزان هم می‌تواند به جبر منتقل شود. همچنین، کی‌یِرن (۱۹۸۸ و ۱۹۹۲) ادعا می‌کند که مشکلات دانش‌آموزان با ساختارهای ریاضی در نظام‌های نمادین، بازتاب مشــکلات قبلی دانش‌آموزان با ســاختار ریاضی در نظام عددی است. در مقابــل، ماتــز (۱۹۸۰) بحث می‌کند که مشــکل دانش‌آموزان با جبر، لزوماً ریشــه در مشکلات دانش حسابی آن‌ها ندارد؛ بلکه ناشــی از استفادهٔ نامناسب از خواص حســاب، به منظور تفسیر یک رشته جدید یعنی جبر در برنامه درســی ریاضی اســت. در همین راستا، کِریســتو و واس‌نیادو (۲۰۰۵) بیان می‌کنند هنگامی که جبر به دانش‌آموزان معرفی می‌شود، ابتدا دو مشکل بروز می‌کند؛

۱. اختصاص معانی به نمادهای جدید

۲. اختصــاص معانی جدید بــه معانی قدیم برای نمادهــا که در زمینهٔ حســاب مــورد اســتفاده قرار می‌گیرند.

کِریستو و واس‌نیادو (۲۰۰۵) طی یک آزمون دو سؤالی که برای ۵۷ دانش‌آموز در سنین ۹ تا ۱۴ ساله برگزار کردند، دریافتند که دانش قبلیِ دانش‌آموزان از اعداد طبیعی، در تفســیر آن‌ها از حروف دخالت دارد و آن‌هــا تمایل دارند که حروف را به تنهایی، به‌عنوان یک عدد طبیعی تفسیر کنند. البته این مطالعه، دوباره توسط کریستو[۲۳]، وام‌واکوسی[۲۴] و واس‌نیادو در۲۰۰۷ انجام شد و نتایجی مشابه نتایج ذکر شده داشت.

۱. ارزش مقادیر عددی را که فکر می‌کنید عبارت جبری زیر **می‌تواند** داشته باشد بنویسید؟

$a, -b, ۴d, \frac{۱}{d}, \frac{a}{b}, k+۳$

۲. ارزش مقادیر عددی را که فکر می‌کنید عبارت جبری زیر **نمی‌تواند** داشته باشد بنویسید؟

$a, -b, ۴d, \frac{۱}{d}, \frac{a}{b}, k+۳$

نتایج نشان داد که تنها یک سوم از دانش‌آموزان، این پاسخ صحیح ریاضی را داده بودندکه «هر عددی را می‌تــوان به هر عبارت جبــری اختصاص داد»، در حالــی کــه ۶۶٪ آن‌هــا، a را فقط یک عــدد طبیعی پنداشته بودند و ۷۲٪ آن‌ها b- را فقط یک عدد منفی دانســته بودند. در حالت کلی، اکثر دانش‌آموزان فقط اعداد طبیعی را به جای حروف در عبارت‌های جبری، جایگزین کرده بودند و به اینکه این عبارت‌ها می‌توانند اعداد اعشاری و کسری باشند، کسی اشاره نکرده بود. در ســؤال ۲، نیمی از دانش‌آموزان اشاره کرده بودند

کـه b نمی‌توانـد یک عدد منفی باشـد. در حقیقت، بسیاری از اشتباهات دانش‌آموزان، ناشی از به‌کارگیری ویژگی‌هـای اعداد طبیعی برای اعـداد صحیح، اعداد گویا، اعداد حقیقی و حتی نمادها بود. از این گذشته، رزنیک[۲۵] (۱۹۸۷) دریافت زمانی که دانش‌آموزان یک عبارت جبری را که شـامل حروف است، با دنیایی از اعداد نظیر می‌کنند، در واقع، یک معنای ارجاعی[۲۶] به عبارت‌های جبری می‌دهند که می‌تواند عملکرد آن‌ها را در زمینه‌های مختلف ریاضی، تحت تأثیر قرار دهد.

بعضی از تصورات اشتباه دانش‌آموزان در استفاده از نمادهای حرفی، نتیجهٔ انتقال نامناسب دانش قبلی دربارهٔ اعداد در مفاهیم حسابی از جمله اعداد طبیعی، برای تفسـیر حروف در جبر اسـت؛ زیـرا چارچوب توضیحـی دانش‌آموزان، از ابتـدا با اعداد طبیعی گره خورده است (گالیس‌تل[۲۷] و گلمن[۲۸]، ۱۹۷۸ و گلمن، ۲۰۰۰؛ نقل شده درکریستو، وام‌واکوسی و واس‌نیادو، ۲۰۰۷).

کریستو، وام‌واکوسی و واس‌نیادو (۲۰۰۷)، تفاوت اعداد طبیعی درحساب و حروف در جبر را به صورت زیر بیان می‌کنند (جدول ۲):

جدول ۲: تفاوت اعداد طبیعی در حساب و نمادهای حرفی در جبر

نماد حرفی به عنوان متغیر در جبر	اعداد طبیعی در حساب	تفاوت
علامت عارضی[۲۹] (مثبت یا منفی) a , b, c, …	علامت واقعی (مثبت) ۱,۲,۳,…	شکل‌گیری علامت
هر نماد، حرفی متناظر با طیفی از اعداد حقیقی است - نمادهای متفاوت می‌توانند معرف اعداد یکسان باشند.	هر عدد در مجموعه اعداد طبیعی، یک نماد منحصر به فرد دارد - نمادهای متفاوت، متناظر با اعداد هستند.	بازنمایی نمادین[۳۰]
ارزش یا ترتیب حروف در جبر، با ارزش یا ترتیب حروف در الفبا متفاوت است. در جبر چیزی به نام حرف بعدی یا قبلی وجود ندارد.	اعداد طبیعی با توجه به موقعیتشان ارزش پیدا می‌کنند. همیشه یک عدد قبلی یا بعدی وجود دارد. هیچ عددی بین دو عدد متوالی، وجود ندارد.	ترتیب/چگالی
در جبر، کوچک‌ترین عددی که بتواند جایگزین یک متغیر شود، وجود ندارد مگر اینکه مقدارش مشخص شده باشد.	واحد، کوچک‌ترین عدد طبیعی است.	ارتباط با واحد

طبـق گفتـهٔ کولیـس (۱۹۷۵؛ نقل شده درکریستو، وام‌واکوسی و واس‌نیادو، ۲۰۰۷)، در بسـیاری مـوارد، دانش‌آمـوزان حـروف را به‌عنـوان مختصر شـده یا مخفف یک شـیء یا به‌عنوان یک شـیء می‌دانند. یکی دیگر از مشـکلات در اسـتفاده از حـروف جبری این اسـت کـه دانش‌آمـوزان، آن را «فقدان بستار» می‌دانند که اشاره به عـدم تمایل آن‌ها بـه پذیرش عبارت‌های جبری به‌عنوان پاسخ نهایی است که به نظر می‌رسد این تصورات اشتباه، کاملاً قوی و تغییر دادن آن‌ها دشوار است

علاوه‌بـر این، برخی از آموزشـگران معتقدند که گاهی دانش‌آمـوزان، حروف را به‌عنوان اعداد متفاوت می‌شناسند و حروف متفاوت، اعداد متفاوتی را نشان می‌دهند، و به‌جای دادن جواب جبری به یک عبارت جبری، بیشـتر تمایـل دارند به حـروف و متغیرها، ارزش عـددی بدهنـد. به‌عنوان مثـال، آن‌ها توضیح می‌دهنـد کـه دو عبـارت x+y+z و x+p+z هرگـز نمی‌توانند با هم برابر باشـند، چون نمادهای متفاوت، بیانگـر اعداد متفاوت‌اند (کولیس و رامبرگ[۳۱] ۱۹۷۵؛ کوچمـن، ۱۹۸۱؛ بوس، ۱۹۸۴؛ کنـوت[۳۲]، علی‌بالی[۳۳]، مک‌نیل[۳۴]، وینبرگ[۳۵] و استفنز[۳۶]، ۲۰۰۵؛ استیسی و مک‌گری‌کور، ۱۹۹۷ و واگنر[۳۷] ۱۹۸۱).

قبلاً هـم بـوت (۱۹۸۴ و ۱۹۸۸؛ نقل شـده در شلی‌مَن[۳۸]، ۲۰۰۳)، در تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان ۱۳ تا ۱۶ساله به مسائل جبری، اشتباهات دانش‌آموزان را در تفسیر نمادهای جبری، به‌صورت زیر بیان کرده بود:

❖ تمرکـز بر پیداکردن یک جواب خاص حتی زمانی که مناسب نیست؛

❖ تفسـیر نمادهای عملیاتی (جمع، ضرب و تساوی) صرفاً به‌عنوان عملیاتی که باید انجام شوند؛

❖ اسـتفاده از حروف به‌جای متغیـر و به‌عنوان یک برچسب یا به‌عنوان مقادیر خاص؛

❖ استفاده اشتباه از روش‌های محاسباتی.

بالاخـره، یـک مشـکل عمـده در درک جبری دانش‌آموزان این اسـت که همان‌طور که در حسـاب بیـن عدد منفـی و عدد مثبت از نظر ارزشـی تفاوت قائل هستند، در جبر نیز این انتظار را تعمیم می‌دهند. به‌طور مشخص، از نظر بسیاری از آن‌ها، حرف با علامت منفی، مقدار منفی دارد، همان طور که مثلاً ۲- با ۲+، ارزش متفاوتـی دارد. به همین خاطـر، دانش‌آموزان تمایل دارند که "x" را یک عدد با مقدار مثبت و "x-" را عددی با مقدار منفی تصور کنند.

پژوهش حاضر

برای انجام بخشی از پژوهش که نتایج آن در این مقاله آمده است، پرسش‌نامه‌ای شامل ۵ سؤال ریاضی براساس ادبیات پژوهشی مربوط، طراحی و تدوین شد و برای اجرا در اختیار دانش‌آموزان پایهٔ هشـتم (سوم راهنمایی) قرار گرفت. نحوهٔ اجرای این پرسش‌نامه به این شکل بود که در ابتدای صفحه، معرفی آزمون که شامل توضیحاتی در مورد هدف مطالعه بود در اختیار دانش‌آموزان قـرار گرفت. قبل از اجرا، از دانش‌آموزان درخواست شد که در صورت تمایل و با دقت و حوصلهٔ کافی، به سؤالات پاسخ دهند. به دانش‌آموزان نیز این اطمینان داده شد که نمرهٔ آزمون، هیچ تأثیری بر نمرهٔ ریاضی آن‌ها نخواهد داشـت و صرفاً یک کار تحقیقی اسـت و نوشتن نام و نام‌خانوادگی‌شان ضرورتی ندارد. جامعهٔ آماری ایـن پژوهش، تمـام دانش‌آموزان پایه هشـتم (سـوم راهنمایی) در یکی از شهرسـتان‌های حاشیه تهرانِ بزرگ بود. از این جامعه، یک نمونهٔ ۲۸۹ نفری، به‌طور تصادفی و به روش نمونه‌گیری خوشـه‌ای انتخاب شـدند. در این تحقیق، برای جمع‌آوری داده‌ها از دو ابزار آزمون و مصاحبه استفاده شد. به منظور تأیید روایـی و پایایی آزمون نیز، مجدداً همین آزمون بر روی یک نمونه ۱۰۰ نفری از دانش‌آموزان همین پایه در یکی از شهرستان‌های شمال غربی ایران اجرا شد. سپس برای شناخت عمیق‌تر بدفهمی‌های دانش‌آموزان در رابطه با نقش حروف در عبارت‌های جبری، با بعضی از آن‌ها به‌طور داوطلبانه، مصاحبه شد.

نتایج

پاسخ‌های دانش‌آموزان به هر سؤال آزمون تجزیه و تحلیل شد و بر حسـب نوع اشتباهات، دسته‌بندی گردید. در این قسـمت، نتایج حاصل از این تجزیه و تحلیل، به تفکیک هر سؤال معرفی می‌شود. سؤال‌های ۱ و ۲ به شرح زیر بود.

۱. برای مسـئلهٔ زیـر، کدام‌یک از پاسـخ‌ها درست هستند؟ چرا؟

مقـدار x را در عبـارت جبـری ۱۲= x+x+x بیابید.

الف) ۵ ، ۵ ، ۲

ب) ۱۰، ۱، ۱

ج) ۴ ، ۴ ، ۴

دلیل انتخاب جواب:

۲. برای مسـئلهٔ زیـر، کدام‌یک از پاسـخ‌ها درست هستند؟ چرا؟

مقادیـر x و y را در عبـارت جبری ۱۶= x+y بیابید.

الف) ۶ ، ۱۰ ب) ۹ ، ۷ ج) ۸ ، ۸

دلیل انتخاب جواب:

پاسـخ به سـؤال‌های ۱ و۲، به پنج دسته تقسیم شدند:

❖ **دستهٔ ۱:** دانش‌آموزانی که سؤال‌های ۱ و ۲ را با استدلال‌های صحیح جواب داده بودند. در مجموع، ۶/۴٪ (۱۵نفر) پاسخ صحیح داده بودند.

❖ **دستهٔ ۲:** دانش‌آموزانی که مسئلهٔ ۱ را درست و برای مسئلهٔ ۲، گزینهٔ الف و ب را برگزیده بودند. در مجموع، ۲۴/۵٪ (۵۷ نفر) این دو گزینه را انتخاب کرده بودند. دانش‌آموزان استدلال کرده بودند که «چون در سؤال ۱ هر سه x هستند، پس گزینهٔ ج درست است» و برای سـؤال ۲، «چـون x و y متفاوت‌اند، بنابراین اعداد آن‌ها هم باید متفاوت باشـد و در نتیجه، هر دو گزینه الف و ب پاسخ این مسئله است».

❖ **دسـتهٔ ۳:** دانش‌آموزانی که برای سـؤال ۱ و سؤال ۲، هر سه گزینه را به‌عنوان جواب انتخاب کرده بودند. در مجمـوع، ۳۵/۶٪ (۸۳ نفر) دانش‌آموزان به این سؤالات چنین پاسخ داده بودند. آن‌ها در سؤال ۱ اسـتدلال کرده بودند «چون جمع هر سه گزینه ۱۲

جبر زبانی برای توصیف اعمال روی کمیت‌ها و روابط بین آن‌هاست، و مانند هر زبان، ممکن است در قالب آن زبان یا در ترجمه از یک زبان به زبان دیگر مشکلاتی ایجاد شود. در زبان جبر، بیشترِ مشکلات زبانی مربوط به متغیرها و عبارات هستند و بیشترِ مشکلات ترجمه‌ای هنگام ترجمهٔ مسائل کلامی به معادلات ایجاد می‌شوند

می‌شود، پس هر سه مورد صحیح است». در سؤال ۲ هم گفته بودند که «چون جمع‌شان به ۱۶ می‌رسد، پس هر سه گزینه صحیح است».

❖ **دستهٔ ۴:** بعضی دانش‌آموزان برای هر دو سؤال، گزینه ج را انتخاب کرده بودند. تعداد این دانش‌آموزان ۳۵ نفر (۱۵/۱٪) بود. آن‌ها استدلال کرده بودند که «چون در سؤال ۱، ۳ تا x داریم، پس ۴=۳÷۱۲ و گزینهٔ ج درست است». همچنین برای سؤال ۲، «چون دو حرف x و y داریم، پس گزینهٔ ج درست است، زیرا ۸=۲÷۱۶».

❖ **دستهٔ ۵:** در مجموع، ۳۹ نفر (۱۶/۷٪) از دانش‌آموزان، به صورت تصادفی یا با استدلال‌های دیگری به این سؤالات پاسخ داده بودند. به‌عنوان مثال، در سؤال ۱ استدلال کرده بودند «چون x ضریب ندارد، پس ضریب آن ۱ است و چون ۱۲= ۱۰ +۱ +۱، پس گزینهٔ «ب» درست است». علاوه بر این، در سؤال ۲، گفته بودند که «x به معنای طول و y به معنای عرض است و چون طول همیشه از عرض بزرگ‌تر است، پس گزینهٔ الف درست است».

سؤال ۳ از این قرار بود:

سؤال ۳: اگر قیمت هر پیراهن مردانه را با S و هر شلوار را با P نشان دهیم، معنی عبارت $3S + 2P$ چیست؟ توضیح دهید.

در سؤال۳، باتوجه به پاسخ‌های داده شده و مصاحبه با دانش‌آموزان، پاسخ‌ها در سه دسته قرار گرفتند:

❖ **دستهٔ اول:** دانش‌آموزانی که عبارت جبری را به درستی درک کرده بودند و پاسخ صحیحی برای آن نوشته بودند. در مجموع، ۳۲نفر (۱۳/۷٪) پاسخ صحیح داده بودند.

❖ **دستهٔ دوم:** در مجموع، ۸۲ نفر (۳۵/۲٪) از دانش‌آموزان، $3s+2p$ را تعداد سه شلوار و دو پیراهن تفسیر کرده بودند.

❖ **دستهٔ سوم:** ۵۳ نفر از دانش‌آموزان (۲۲/۸٪)، بر حسب تصادف، پاسخ‌های دیگری مانند $3s + 2p=5sp$ داده بودند. این دانش‌آموزان برای پاسخ خود استدلال کرده بودند که «قیمت هر پیراهن ۳ تومان و هر شلوار ۲ تومان است و جمعاً ۵ تومان باید پول پرداخت کنیم.» به عبارت دیگر، این دانش‌آموزان تصور کرده بودند که ضریب s و p، قیمت‌ها را نشان می‌دهد. ۲۸/۶٪ هم به این سؤال، پاسخی نداده بودند.

سؤال ۴: آیا دو عبارت $x+y+z$ و $x+p+z$ می‌توانند، مساوی باشند؟چرا؟

در رابطه با سؤال ۴، در مجموع، ۵۸ نفر (۲۴/۹٪) به این سؤال هیچ پاسخی نداده بودند و پاسخ‌های داده شده، در چهار دسته زیر جای گرفتند:

❖ **دستهٔ ۱:** دانش‌آموزانی که به درستی استدلال کرده بودند و تعداد آن‌ها ۲۲ نفر (۹/۵٪) بود.

❖ **دستهٔ ۲:** دانش‌آموزانی که استدلال کرده بودند «این دو عبارت نمی‌توانند مساوی باشند چرا که p و y دو حرف متفاوت‌اند، بنابراین اعدادشان نیز متفاوت خواهد بود». تعداد این عدد ۹۵ نفر (۴۰/۷٪) بود.

❖ **دستهٔ ۳:** تعداد ۲۰ نفر از دانش‌آموزان (۸/۶٪)، استدلال کرده بودند که «چون حروفی که ضریب ندارند، ضریب آن‌ها ۱ است، پس دو عبارت با هم برابر هستند». این پاسخ، می‌تواند ناشی از تفسیر اشتباه یا دخالت یادگیری جدید یا حذف ضریب ۱در عبارت‌های جبری باشد.

❖ **دستهٔ۴:** ۳۸ نفر (۱۶/۳٪) از دانش‌آموزان، پاسخ «بله» به این سؤال داده بودند، اما استدلال‌هایشان اشتباه بود یا بیشتر استدلال‌های آن‌ها بدون توجیه بود. به‌عنوان نمونه، یکی از دانش‌آموزان چنین استدلال کرده بود که «چون بین این عبارت‌های جبری علامت جمع هست، پس می‌توانند مساوی باشند. اما اگر علامت یکی از آن‌ها تفریق بود، با هم برابر نمی‌شدند».

سؤال ۵: درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل، مشخص کنید.

❖ **x- به ازای هر مقدار عددی x، یک عدد منفی است.**

❖ **x بــه ازای هــر مقدار عددی، عــددی مثبت است.**

❖ **b بــه ازای هر مقــدار عــددی، می‌تواند یک عدد، مثبت یا منفی باشد.**

نتایج تجزیه و تحلیل پاسـخ‌ها به سؤال ۵، در جدول ۳ آمده است.

	به ازای هر مقدار عددی مثبت است	به ازای هر مقدار عددی منفی است	هر مقدار عددی می‌تواند باشد	بی‌پاسخ
x	٪۵۲	-	٪۳۱	٪۱۷
-x	-	٪۵۶	٪۳۰	٪۱۴
b	٪۴۲	-	٪۴۱	٪۱۷

جدول ۳- پاسخ به سؤال ۵

با توجه به پاسـخ‌های داده شــده به این سؤال، مشــخص شد که بیشتر دانش‌آموزان، متغیر را مانند یک مقدار عــددی می‌دانند که منفی یا مثبت بودن آن، براساس علامتی است که پشت آن قرار دارد.

بحث و نتیجه گیری

یافته‌های این تحقیق نشــان داد که مفهوم نماد، برای بیشتر دانش‌آموزان پایهٔ هشتم (سوم راهنمایی) مبهم اســت و یادگیری آن‌ها از مفهوم نماد، سطحی اســت و گاهــی هم نماد را با معنای اشــتباهی به کار می‌برند. علاوه بر این، هنوز دانش‌آموزان، قادر به تفسیر حروف به‌عنوان تعمیمی از حســاب نیســتند. به‌طور کلی، مشــکلات عمدهٔ دانش‌آموزان پایهٔ هشتم (سوم راهنمایی) در تفسیر و معنای نماد، بدین قرار است:

۱. حــروف متفــاوت، بیانگــر اعــداد متفاوتند. به‌عنوان مثال، در سؤال ۱ حدود ٪۲۵ گزینهٔ ج و در ســؤال ۲ حدود ٪۲۵ گزینهٔ الف و ب را انتخاب کرده بودند و استدلال کرده بودند «چون در سؤال هر سه موارد x اســت، پس گزینهٔ ج و در ســؤال ۲ چون x و y متفاوتند، پس گزینهٔ الف و ب درســت اســت». حدود ٪۴۲ از دانش‌آموزان نیز در ســؤال ۴، استدلال کرده بودند «این دو عبارت نمی‌توانند مساوی باشند چرا که p و y دو حرف متفاوت‌اند، بنابراین اعدادشان نیز متفاوت خواهد بود». در همین راســتا، اســتاینِل ،گیوازدِنکو و استیسی (۲۰۰۹) در تحقیق خود به این نتیجه رسیدند که مفهوم «نماد تحت‌الفظی» یا همان «متغیر»، برای دانش‌آموزان مبهم است، یادگیری اکثر دانش‌آموزان از نماد ســطحی است و بسیاری اوقات، حروف را با معنای اشــتباهی به کار می‌برند، مثل این که گاهی به جای متغیر، از مربع‌های خالی اســتفاده می‌کنند. بعضی اوقات هم دانش‌آموزان، تفســیرهای نادرســتی از حروف دارند که عمدتاً عددی هســتند؛ یعنــی به باور آنــان، حــروفِ متفاوت، بیانگــر اعداد متفاوت‌اند که در برخی مواقع با توجه به وضعیت هر حرف، یک عدد را به آن نسبت می‌دهند.

۲. بعضــی دانش‌آموزان، حــروف را به‌عنوان یک شیء تلقی می‌کنند. در سؤال ۳، بیشتر دانش‌آموزان در تفســیر عبارت جبری ۳s+۲p، s را به‌عنوان شلوار و p را به‌عنــوان پیراهن در نظر گرفته بودند و بر این اســاس، معنای ۳s+۲p را سه عدد شــلوار و دو عدد پیراهن تفســیر کرده بودند. با توجه به این پاســخ‌ها، مشاهده می‌شــود که دانش‌آموزان، متغیر را به‌عنوان خودِ شــیء یعنــی «پیراهن»یا«شــلوار» فرض کرده بودند نه قیمت تعداد شــلوارها و پیراهن‌ها. این گونه تفســیرهای اشتباه دانش‌آموزان، می‌تواند مانعی برای ترجمه و تبدیل مسائل کلامی به زبان ریاضی باشد.

۳. تفســیر اغلب دانش‌آموزان از حروف، به‌عنوان یک عدد و اغلب در گسترهٔ اعداد صحیح مثبت است. یافته‌هــای این تحقیق نشــان داد کــه دانش‌آموزان، بیشــتر تمایل دارند به جای حــروف از اعداد طبیعی اســتفاده کنند. علاوه بر این، دانش‌آمــوزان متغیر را مانند یک مقدار عــددی می‌دانند که منفی یا مثبت بودن آن، براســاس علامتی اســت که پشت آن قرار دارد. به‌عنوان مثال، حــدود ٪۵۷ دانش‌آموزان، x- را به ازای هر مقدار عددی، منفی پنداشته بودند و حدود ٪۵۲، x را یــک عدد مثبت دانســته بودند. در حالت کلی، اکثــر دانش‌آموزان فقط اعداد طبیعی رابه جای حروف، در عبارت جبــری جایگزین کرده بودند و به این که این عبارت‌ها می‌توانند اعداد اعشاری و کسری باشند، اشاره نکرده بودند.

۴. تصـور اکثر دانش‌آموزان این اسـت که حروف مانند اعداد، ارزش منحصر به فردی دارند.

پی‌نوشت‌ها

1. ICMI
2. Lee
3. Vance
4. Kriegler
5. Macgregor
6. Stacey
7. Kuchemann
8. Richard
9. Hall
10. Mcintyre
11. Non-Numerical
12. Steinle
13. Gvozdenko
14. Fujii
15. Collis
16. Firth
17. Samo
18. Label
19. Clements
20. Louise
21. Chalouh
22. Herscovics
23. christou
24. Vamvakoussi
25. Resnick
26. Referential
27. Gallistel
28. Gelman
29. Phenomenal
30. Symbolic Representation
31. Romberg
32. Knuth
33. Alibali
34. Mcneil
35. Weinberg
36. Stephens
37. Wagner
38. Schliemann

منابع

1. Christou, K. P., &Vosniadou, S. (2005). *How students interpret literal symbols in algebra: A conceptual change approach*. In: B. G. Bara, L. Barsalou, & M. Bucciarelli (Eds), Proceedings of the cognitive science 2005 conference Stressa, Italy (pp. 453–458).

2. Kuchemann, D. (1978). *Children's understanding of numerical variables*. Mathematics in School, 7(4), 23–26.

3. Macgregor, M. ; Stacey, K. (1997). *Students' Understading of Algebraic Notation*: 11–15. Educational Studies in Mathematics 33: 1–19, 1997.

4. McIntyre, z. s. (2007). *An Analysis of Variable Misconceptions Before And After Various Collegiate Level Mathematics Courses*. Unpublished Master of Science in Teaching. The University of Maine.

5. Richard, D. & Hall, G. (2002).*An Analysis of Thought Processes during Simplification of an Algebraic Expression*. Philosophy of Mathematics Education Journal 15 (2002).

6. Steinle, D. &Gvozdenko, E. & Price, B.&Stacey, K. & Pierce, R. (2009). *Investigating Students' Numerical Misconceptions in Algebra*. In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (Vol. 2).

7. Schliemann,A. D. ; Carraher, D. W.; Brizuela, B. M. (2003). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice*. Studies in Mathematical Thinking and Learning Series.

8. Samo, M.A. (2009). Students' *Perceptionsabout The Symbols, Letters and Signs in Algebra and How do These Affect Their Learning Of Algebra*: a Case Study in a Government Girls Secondary School Karachi. International Journal for Mathematics Teaching and Learning, (pp. 335-370).

9. Vamvakoussi, X. &Christou, K. P., &Vosniadou, S.(2007). *Students' Interpretations of Literal Symbols in Algebra*. Reframing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction(pp. 285–289).

۱۰. غلام‌آزاد، سهیلا. (۱۳۸۰). **دوباره‌نگری به برنامه جبر دبیرستانی**. مجله رشد آموزش ریاضی. شماره ۶۳. صص. ۴ تا ۱۲. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۱. فرزان، مسعود، باهمت‌شیرانه‌ده، صفر، دیبایی، محمد تقی، فرهودی‌مقدم، پرویز. (۱۳۹۱). ریاضی سال سوم دوره راهنمایی تحصیلی. اداره کل چاپ و توزیع کتاب‌های درسی.

۱۲. گویا، زهرا و محمدی، ژاله. (۱۳۸۸). **بررسی دانش معلمان ریاضی دوره راهنمایی**. مجله رشدآموزش ریاضی. شماره ۹۵صص.۱۲ تا ۱۹. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۳. گویا، زهرا و حسام، عبداله. (۱۳۸۴). **نقش طرح‌واره‌ها در شکل‌گیری بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان**. مجله رشدآموزش ریاضی. شماره ۸۲ صص.۴ تا ۱۶. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

طرح‌های هندسهٔ اسلامی

برای تدریس تقارن در ریاضی[1]

نویسنده: جان اِس عباس[2]
ترجمه: آذر کرمیان، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی دبیرستان‌های قم

چکیده

از قرن دهم تا سیزدهم میلادی، در تمدن اسلامی، طرح‌های متقارن اسلامی بسیار زیادی به‌وسیلهٔ ریاضی‌دانان، هنرمندان و صنعت‌گران مسلمان تولید شد. آن طرح‌ها اکثراً بسیار زیبا بوده و زیبایی اشکال هندسی را، طوری که شرح آن در الفاظ نمی‌گنجد، نشان می‌دهد. طرح‌های اسلامی در عین اینکه کاملاً تزیینی‌اند تنوع ساختارهای هندسی را در چارچوب فضای اقلیدسی به تصویر می‌کشند، بنابراین از امتیاز بزرگ کمک آموزشی بودن برای تدریس بسیاری از مباحث ریاضی، فیزیک، شیمی، بلورشناسی، کامپیوتر و طراحی برخوردارند. به‌ویژه، برای تدریس هندسه در مدرسه و نیز تهیهٔ یک شبکهٔ آموزشی برای تدریس نظریهٔ گروه‌ها در سطح دانشگاه، ارزشمندند. این مقاله، طرح‌های هندسهٔ اسلامی را معرفی کرده و مطالبی را در رابطه با ویژگی‌ها و منشأ آن‌ها و نکاتی که خواننده از منابع گوناگونِ طرح‌های اسلامی (کتاب، مقاله، ویدئو و سایت) می‌تواند در تدریس تقارن ریاضی مورد استفاده قرار دهد، بیان می‌کند.

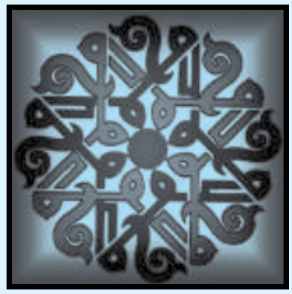
کلیدواژه‌ها: هندسهٔ اسلامی، تقارن در ریاضی، تدریس ریاضی.

مقدمه

طرح‌های هندسی را به وفور، می‌توان در فرهنگ غنی اسلامی مشاهده کرد. آن‌ها در مواد و اشیاء گوناگونی مانند سفال، آجر، چوب، ظروف فلزی، کاغذ، گچ، شیشه و بسیاری از دیگر اشیا یافت می‌شوند. همچنین روی فرش‌ها، در و پنجره‌ها، پرده‌ها، نرده‌ها، جام‌ها، وسایل مخصوص خانه، منبر مساجد و سطوح دیگر، مشاهده می‌گردند. در مینیاتورهای ایرانی، در تذهیب کتاب مقدس قرآن، در معماری نمای مساجد، در کاخ‌ها، در مدارس (مراکز آموزشی) و آرامگاه‌ها، نیز می‌توان آن‌ها را دید.

طرح‌های متقارن اسلامی در سه حال و هوای هندسی مجزا قرار دارند. یکی از آن‌ها هنر **خطاطی** است که اغلب در قالب حروف عربی برای الفاظی چون الله، محمد یا آیات کوچکی از قرآن، و برای خلق شکل‌های متقارن هندسی دیده می‌شود. شکل ۱ تصویری را که از تکرار واژهٔ «محمد» ساخته شده است، نشان می‌دهد.

این تصویر در مقبرهٔ شاعر صوفی، خواجه عبدالله انصاری در هراتِ افغانستان نگهداری می‌شود.

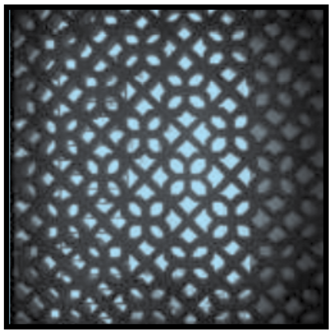


شکل ۱

نوع دوم طرح‌ها، در **کاشی‌کاری**‌های هنریِ اسلامی اســت. در این طرح‌ها، شکل‌های مارپیچی به هم پیوند می‌خورند و به‌طور موج‌دار و موزون، برای تولید ســبک خاصی از شــکل برگ‌هــا و گل‌ها در هــم می‌آمیزند. نمونه‌ای از این طرح‌ها، در شکل ۲ نشان داده شده است.

شکل ۲

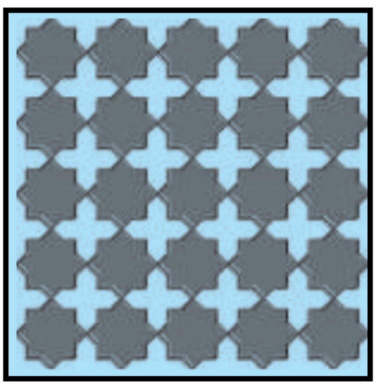
سومین و گسترده‌ترین دسته از طرح‌های اسلامی، از چند ضلعی‌ها و دایره‌ها و کمان‌های دایره برای تولید فضایــی که یک طرح واحــد را پر می‌کنند، اســتفاده می‌کند. در این طرح‌ها که روی سطوح دو بعدی شکل می‌گیرند یک واحد ســلولی اصلی بارها تکرار می‌شود (شکل‌های ۳ تا ۹). نتیجه آنکه در این نوع طرح، نقطه مرکزی طبیعی برای دید چشم وجود ندارد، به‌طوری که شخصی که به فضای طرح نگاه می‌کند، چشم او به‌طور پیوسته «مواج» است و خطوط را به‌دنبال هم و با تنوعی از ترکیبات و روابط پیچیده می‌بیند. در طرح‌های ســه بعدی نیز، همچون سطوح داخلی و خارجی گنبدها، هر واحد سلول، به‌طور ماهرانه‌ای اندازه‌گیری شده و به‌طور ناقص، سطح را پوشانده است (شکل ۹).



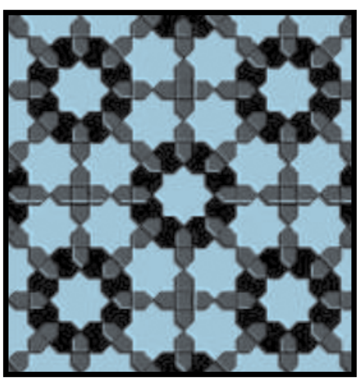
شکل ۳

ویژگی‌های طرح‌های اسلامی

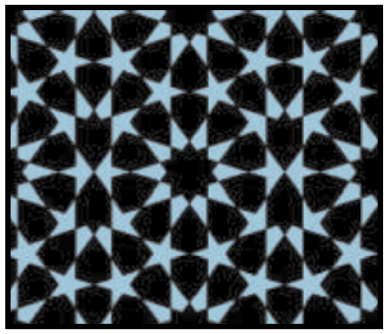
با استفاده از شکل‌های ۳ تا ۹، ویژگی‌های طرح‌های اسلامی را نشان می‌دهیم. شکل ۳، ساختار بسیار ساده‌ای دارد. همان‌طور که دیده می‌شود این شکل با استفاده از ۴ شش ضلعیِ یکسان، برای تشکیل گلبرگ‌های شکل داخلی، در واحدهای مربعی خلق شده است. این طرح، ویژگی‌های اکثر طرح‌های اســلامی را ندارد و ســاختار نکاتی را که در طرح‌های اســلامی، با استفاده از حجم زیــادی از طرح‌های پیچیده ارائه می‌شــوند هم ندارد. در مقایســه با آن، طرح شکل‌های ۴ تا ۱۰، ویژگی‌های طرح‌های «اسلامی» را نشان می‌دهد.



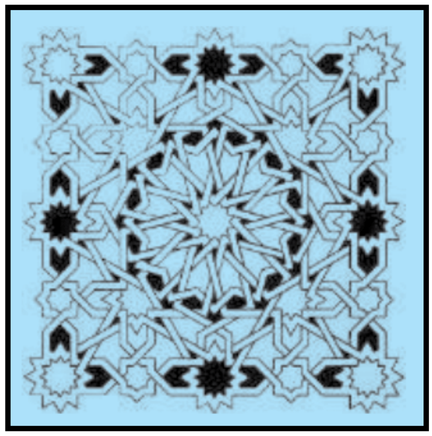
شکل ۴



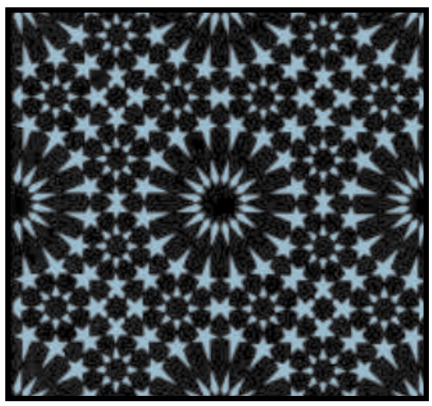
شکل ۵



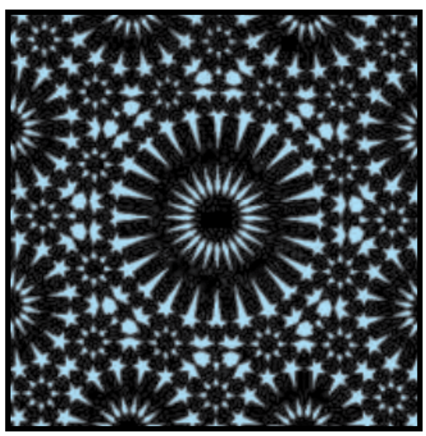
شکل ۶



شکل ۷



شکل ۸



شکل ۹

شکل ۱۰

ویژگی‌های برجسته طرح‌های هندسه اسلامی (شکل‌های ۴ تا ۱۰)، شکل ستاره و تزیین با گل سرخ است، شکل‌هایی که معمولاً با پنج، شش، هشت، ده، دوازده و شانزده پرتو دیده می‌شوند. اما طرح‌ها شامل شمار دیگری هم هست، مخصوصاً در بعضی از این طرح‌ها، تا نود و شش پرتو هم یافت می‌شود.

روان‌شناسی ستارهٔ متقارن در طرح‌های اسلامی

اغلب گفته می‌شود هندسه به‌طور اجباری در طرح‌های اسلامی وجود دارد زیرا اسلام اجازه نمی‌دهد تصویر جانداران رسم شود. اما به‌نظر من (نویسنده) این توضیحی ظاهری و فاقد دلایل با معناتر و عمیق‌تر است. اولین چیزی که در اعتراض به این استدلال رایج باید گفته شود، وجود موارد و نمونه‌های عظیمی از کارهای هنریِ مجازی است که توسط مسلمانان پدید آمده است. همه، نمونه‌هایی از کارهای مینیاتوری ایرانیان را دیده‌اند. به جز این شمار زیادی از تصاویر انسان و حیوان، که واقعی و زنده به نظر می‌رسند، وجود دارد که در حد اعلای استعداد هنری و سبک طبیعی به‌وسیلهٔ هنرمندان مسلمان به‌وجود آمده است؛ کارهایی که به‌خصوص در دورهٔ مغولان در هند تولید شد. چنین کارهایی در جاهای دیگر نیز به‌خوبی دیده می‌شود. برای مثال، هنرمندان مسلمانان شمال آفریقا، (مصر، تونس و...) تصاویر کاملاً متنوعی از اشیای زنده و مجموعه‌های زیبایی برای دیدن همگان در سقف‌های تالارهای پادشاهان تهیه کرده‌اند.

از دیدگاه نویسنده، دلیل عمده‌ای که هنر هندسهٔ اسلامی پدید آمده، به شرح زیر است:

در اسلام تصویری از خداوند، به استثنای نور و پرتو نور ستارگان، وجود ندارد، صحرانشینانِ سرگردان در بیابان، برای هدایت به نور ستارگان اعتماد می‌کنند.

برخــلاف دین مســیحیت و بودا، اســلام تصویری از خداونــد ارائه نمی‌دهد. تنها تصویــر مادی که قرآن از خداوند ارائه می‌دهد، نور به معنای روشــنایی است، همچنان که در قرآن می‌گوید «خداوند، نور آسمان‌ها و زمین است». از این‌رو که ستارگان نور آسمان‌ها را تولید می‌کنند، پس شگفت‌آور نیست که هنرمندان مسلمان، از هنری که شامل شکل ستاره باشد، در ساختمان‌های مقدس مانند مســاجد و آرامگاه‌هــا و در تذهیب قرآن، استفاده کنند.

همچنین، دلایل عملی محکمی برای اســتفاده از ستارگان در هنرهای اسلامی وجود دارد. در هدایت سفر اعراب مسلمانی که بیابان‌گرد بودند و روش زندگی‌شان چادرنشــینی بود، یا دریانورد بودند و در مســافت‌های طولانی مســافرت می‌کردند، رصد ماهرانه آســمان را می‌طلبید. به‌علاوه، اسلام افراد با ایمان را به یک قانون بی‌همتا، یعنی نماز، ملزم کرد. فرد مســلمان، خواه در زمین یا دریا باشد، باید اوقات، پنجگانه را بشناسد و در آن نماز بگزارد. همهٔ این‌ها، جایگاه ستارگان را در فرهنگ اسلامی فوق‌العاده مهم ساخت. قرآن به‌وفور، به توانایی چنین نمونه‌هایی سوگند یاد می‌کند؛ مثل آیهٔ ۹۷ سورهٔ انعام که می‌فرماید، «او کسی است که ستارگان را برای شما قرار داد تا در تاریکی‌های خشکی و دریا، به‌وسیلهٔ آن‌هــا راه خود را بیابید». این دلیل دیگری برای حضور ستارگان در طرح‌های اسلامی است.

– هندسه، دری از جهان مادی به سوی جهان معنوی، و نظری به سوی کمال است.

مدت‌ها پیش از ظهور اســلام، بعضی از فلاســفهٔ یونــان باســتان، علــوم مابعدالطبیعــه را با هندســه درآمیختند. تعریف‌های محض و منطقی یک موضوع، به‌عنوان جهانی کامل، متضمن انبوهی از حقایق است و از این‌رو، جهت آن به ســوی کمالِ خداوند اســت. افلاطون آشــکارا اظهار می‌داشت که «حتی خداوند، هندســه‌دان است». سرشــار از اندیشهٔ خدایی مجرد، شالودهٔ اندیشهٔ عقلانی مسلمانان از هندسه‌دان یونانی، بی‌اندازه ســازگار و موافق با عرصهٔ هندســه است که واســطه‌ای بیــن جهان مــادی و معنوی اســت. پس شگفت‌آور نیســت که هنرمندان مســلمان به‌وسیله هندسه، در جست‌وجوی کمال باشند.

– تجربــهٔ طولانــیِ بافندگان فــرش، مهارت چادرنشینان و علاقه به موزاییک‌کاری، طرح‌های به‌هــم پیچیده‌ای را برای پوشــش ســطوح، ارائه می‌کند.

فــرش و قالیچه، طبیعی‌ترین وســیله برای خانه هســتند که از زمان‌های دور، در سراسر خاورمیانه و منطقهٔ قفقاز تولید می‌شــده‌اند. به‌ویژه چادرنشینان مناطق آســیای مرکزی ایران و افغانســتان، فرش و قالیچه را از هزاران سال پیش، تولید می‌کردند. فرش و قالیچه برای منظورهای مختلفی مورد استفاده قرار می‌گیرنــد که از آن جمله، می‌توان به پوشــش کف خانه، ســجادهٔ نماز، تزیین چادر (خیمه)، ســایبان، نماد ملی، نشــان افتخار و تولید ثروت اشــاره نمود. فــرش، قدیمی‌ترین و معنادارترین شــکل هنر، بین مردمی اســت که به اســلام گرویدند. خلق این هنر، مســتلزم در هم بافتن و از هم گذراندن، برای تولید طرح‌های موزاییکی تکرار شــونده اســت. شگفت‌آور نیست که در ساختار هنر اسلامی، این سنتی دیرینه باشد. پس می‌بینیم دلایل قطعی و دقیقی وجود دارد که چرا هنر اسلامی به‌طور طبیعی، به هندسه تمایل دارد. آیا تصویر ســتاره، موزاییــک‌کاری و طرح‌های درهم‌بافتهٔ مشــبک، حقیقتاً باعث نهراسیدن از آتش جهنم نیســت که در اســلام، مرتباً به آن اشاره شده است؟

– اســتفاده از طرح‌های اســلامی در تدریس تقارن ریاضی

طرح‌های اسلامی، منبع بسیار مناسبی برای تدریس تقارن در همهٔ سطوح- از کودکستان تا دانشگاه- فراهم می‌کند. در اینجا، درباره جزییات بحث نمی‌کنیم، بلکه چند توضیح کلی درباره این ادعا می‌آوریم.

کودکان از سنین اولیه، رنگ‌آمیزی طرح‌ها را دوست دارند، بنابراین طرح‌های اسلامی می‌تواند برای معرفی تقارن به کودکان، در سن ۳ یا ۴ سالگی، مورد استفاده قرار گیرد. در سطح دانشگاه، از این طرح‌ها می‌توان برای تدریس تبدیلات استفاده نمود. مراحل ریاضی در تولید این طرح‌ها، کاربرد تبدیلاتِ متقارن در تصاویر دو بعدی (دَوران، بازتاب، انتقال و بازتاب مرکزی) را نشان می‌دهد. این تبدیلات، یک گروه می‌سازند و از این‌رو، این طرح‌ها روشی شهودی را برای یادگیری ایده‌های محض نظریهٔ گروه‌ها ایجاد می‌کند که کلیدی برای شرح تأثیر متقابل نیروهای طبیعیِ بنیادی است.

پی‌نوشت‌ها

1. Islamic Geometrical Patterns for the Teaching of Mathematics of Symmetry
2. Jan S. Abas

انتخاب اپراتور تلفن همراه:

یک مسئله مدل‌سازی ریاضی

حمیده احمدی: دبیر ریاضی شهر کرمان و عضو هیئت مدیرهٔ اتحادیهٔ معلمان ریاضی کشور
ابوالفضل رفیع‌پور: دانشگاه شهید باهنر کرمان و مشاور علمی خانهٔ ریاضیات کرمان

خانهٔ ریاضیات کرمان، در سال ۱۳۹۰ و در دههٔ ریاضیات، با همکاری دانشگاه شهید باهنر و سازمان آموزش‌وپرورش اســتان کرمان، سومین جشــنوارهٔ خانهٔ ریاضیات کرمان را برگزار کرد. در این برنامه، کارگاه‌های متنوعی برای دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان طراحی و اجرا شد که یکی از آن‌ها کارگاه مدل‌سازی ریاضی بود. چگونگی «انتخاب سیم‌کارت تلفن همراه» یکی از مسائلی بود که در این کارگاه مطرح شد. در این کارگاه، ۲۰ دانش‌آموز دختر پایهٔ دهم، شرکت داشتند که اغلب آن‌ها ۱۶ سال داشتند و در رشتهٔ ریاضی تحصیل می‌کردند. ایدهٔ اولیهٔ مسئله‌ای که در ادامه می‌آید، برگرفته از مسئلهٔ زیر است که در پژوهش کِیزِر و ماب (۲۰۰۷) آمده است.

شکل ۱: مسئله انتخاب اپراتور تلفن همراه کِیزِر و ماب (۲۰۰۷)

رابطهٔ بین هزینهٔ مکالمه با تلفن‌های همراه و عادت‌های مکالمهٔ افراد را تعیین نمایید. سپس شرایطی تدوین کنید تا افراد را در انتخاب اپراتور [سیم‌کارت] تلفن همراه، کمک نماید.

از آنجا که لازم اســت، مســائل مدل‌سازی با مشــخصات فرهنگی و اجتماعی دانش‌آموزان در هر منطقه و کشوری هماهنگ باشد، نویسندگان تلاش کردند این مسئله را با تجربیات دانش‌آموزان ایرانی هماهنگ نمایند. به این ترتیب که با استفاده از اطلاعات مربوط به شرکت‌های ارائه دهندهٔ خدمات تلفن همراه، مسئله به‌شکلی که در ادامه می‌آید، بازســازی شد. دلیل اصلی طرح مسئله به‌شکل چندمرحله‌ای، آشــنا نمودن تدریجی دانش‌آموزان با مسائل مدل‌سازی بود؛ چه براساس داده‌های مطالعات تجربی نگارندگان، چنانچه مســئله به‌صورت شکل ۱ به دانش‌آموزان داده شود، بسیاری از آن‌ها نمی‌دانند چه اقدامی باید انجام دهند. در ادامه، صورت‌مسئلهٔ مربوط به انتخاب سیم‌کارت مناسب تلفن همراه آمده است.

جدول شماره ۱ (*اعداد داخل پرانتز برای زمان‌های معمولی (غیر ترافیک که از ساعت ۱۲ شب تا ساعت ۸ صبح می‌باشد) است)

نوع سیم‌کارت	تماس شهری داخل شبکه		تماس بین‌شهری داخل شبکه		تماس با سایر سیم‌کارت‌ها		پیامک	
	بدون جابه‌جایی	با جابه‌جایی	بدون جابه‌جایی	با جابه‌جایی	نوع ب	نوع پ	فارسی	لاتین
دائمی نوع الف	۴۴۷(۳۵۸)	۵۳۶(۴۴۰)	۷۶۰(۵۳۶)	۸۴۹(۶۱۰)	۶۲۵	۴۴۷	۸۹	۲۲۲
اعتباری نوع الف	۶۷۱(۵۴۰)	۷۶۰(۶۰۸)	۱۱۴(۸۰۰)	۱۲۲۹(۸۷۰)	۹۳۵	۹۳۵	۸۹	۲۲۲

جدول شماره ۲

نوع سیم‌کارت	تماس با سیم‌کارت‌ها داخل شبکه	تماس با سایر سیم‌کارت‌ها	پیامک	
			فارسی	لاتین
دائمی نوع ب	۴۹۵	۶۲۵	۱۰۰	۱۶۰
اعتباری نوع ب	۶۲۰	۸۵۲	۱۰۰	۱۶۰

جدول شماره ۳

نوع سیم‌کارت	تماس شهری	تماس بین‌شهری	پیامک
اعتباری نوع پ	۶۷۰(۵۳۶)	۱۱۳۹(۸۰۴)	۱۵۰

- مکالمات شهری: تماس از شهر مبدأ با تلفن همراه یا ثابت دیگری در همان شهر مبدأ است.
- مکالمات بین‌شهری: بین دو شهر متفاوت است، حتی اگر مشترک در شهر دیگری مستقر باشد و با شهر مبدأ یا سایر شهرها، ارتباط برقرار کند.

مســئله: زهرا در کنکور امســال، در رشتهٔ پزشکی دانشگاه تهران پذیرفته شده است و باید از کرمان به تهران برود. او می‌خواهد ســیم‌کارت جدیدی بخرد که هزینهٔ تماس‌ها و پیامک‌های او، کمترین مقدار ممکن باشد. نرخ مکالمات گوناگون برای اپراتورهای فعال در کشور، در جدول‌های شماره ۱ و ۲ و ۳ آمده است. اکنون شما با استفاده از این جدول‌ها، او را در انتخاب مناسب‌ترین سیم‌کارت، راهنمایی کنید.

جدول شماره ۴

نوع ارتباط	زهرا		زهره	
	پر ترافیک	کم‌ترافیک	پرترافیک	کم‌ترافیک
تماس با تلفن ثابت در کرمان	۳	۵	۲۰	۱۵
تماس با سیم‌کارت نوع ب	۲	۴	۴۰	۲۴
تماس با تلفن ثابت در تهران	۲	۷	۱۰	۷
تماس با سیم‌کارت نوع الف مربوط به کرمان	۴	۳	۵	۷
تماس با سیم‌کارت نوع الف مربوط به تهران	۱۲	۸	۴	۳
تماس با سیم‌کارت نوع الف مربوط به سایر شهرها	۲	۳	۳	۰
تماس با سیم‌کارت نوع سوم	۵	۰	۲	۵
پیامک فارسی	۷		۴	
پیامک لاتین	۵		۱۰	

۱. اگــر زهرا بخواهد از تهران، در شــبانه‌روز ۵ دقیقه با خانــواده خود (تلفن ثابت) در کرمان صحبت کند، با توجه به شرایط زیر، چه نوع سیم‌کارتی را به او پیشنهاد می‌کنید؟

الف. سیم‌کارت کرمان بخرد.

ب. سیم‌کارت تهران بخرد.

جدول شماره ۵

نوع سیم‌کارت	ساعات کم‌ترافیک	ساعات پرترافیک	تماس با سایر سیم‌کارت‌ها	پیامک
دائمی نوعی ب	۲۵۲	۴۵۰	۵۸۸	۸۰
اعتباری نوع ب	۲۸۲	۵۵۸	۷۹۸	۸۰

*فهرست مکالمات چه شرایطی داشته باشد تا استفاده از خدمات بالا، مقرون‌به‌صرفه باشد؟

۲. کدام سیم‌کارت اعتباری برای او مناسب‌تر است، در صورتی که روزانه با یک مکالمه ۴ دقیقه‌ای به‌همراه ۲ پیامک، با سیم‌کارت اعتباری دیگر در تهران ارتباط برقرار کند.

۳. اگر فهرست ارتباط زهرا و دوست او زهره در یک هفته به قرار زیر باشد، خرید چه نوع سیم‌کارتی را و از کجا، به هر کدام پیشنهاد می‌کنید؟

۴. چون همهٔ تماس‌های زهره و زهرا در محدودهٔ خوابگاه دانشگاه اتفاق خواهد افتاد، دوستان آن‌ها پیشنهاد دادند که یک سیم‌کارت نوع ب خریداری کنند و با انتخاب یک محدودهٔ مکانی دایره‌شکل که بیشتر تماس‌ها را از آنجا برقرار می‌کنند، از تخفیف مکالمه در آن محدوده برخوردار شده و هزینه‌های خود را به حداقل برسانند. در این روش با انتخاب یک نقطهٔ دلخواه، می‌توان برای تماس‌های تا شعاع ۵۰۰ متری از نقطهٔ انتخاب شده، از ۱۵ درصد تخفیف بهره‌مند شد. برای استفاده از این تخفیف ۱۵ درصدی لازم است ماهیانه مبلغ ۶۰۰۰۰ ریال (هفته‌ای ۲۸۰۰۰ ریال) به‌عنوان هزینهٔ اضافه این نوع از خدمات، پرداخت شود. به‌نظر شما، آیا سیم‌کارت نوع ب با این امکانات، بهترین گزینه انتخابی برای آن‌هاست؟

لازم است، مسائل مدل‌سازی با مشخصات فرهنگی و اجتماعی دانش‌آموزان در هر منطقه و کشوری هماهنگ باشد

۵. با توجه به فهرست مکالمات زهرا، سیم‌کارت اپراتور جدیدی پیشنهاد کنید که هزینهٔ زهرا، ماهیانه ۷۰۰۰۰ ریال شود.

۶. برای این سیم‌کارت، اپراتور جدید، خدمات ویژه‌ای به‌گونه‌ای تعریف کنید که هزینهٔ تلفن همراه زهرا، از ۷۰۰۰۰ ریال به ۶۰۰۰۰ ریال کاهش یابد.

منبع

Kaiser, G. & Maab, K. (2007). Modeling in Lower Secondary Mathematics Classroom-Problems and Opportunities. In W. Blum; P. Galbraith; H. W. Henn and M. Niss (Eds.), Modeling and applications in mathematics education, 14th ICMI study (pp.99-108). New York: Springer.

چند مفهوم کلیدی

ترجمه: اصغر قاسمی، کارشناس ارشد ریاضی و
دبیر ریاضی شهرستان شهریار

اشاره

مطلب پیش رو گزیده‌ای از کتاب «مفاهیم کلیدی در تدریس ریاضیات دورهٔ ابتدایی»[۱] است که «درک هایلوک»[۲] و «فیونا تانگاتا»[۳]، نویسندگان این کتاب، با تألیف آن تلاش دارند چهل‌وچهار مفهوم مطرح (موضوع کلیدی و مهم) در برنامه درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی را به شیوه‌ای موجز و به نسبت جذاب و با ادبیاتی علمی اما نه‌چندان پیچیده، معرفی و تبیین نمایند. برای هر کدام از مفاهیم کتاب، در ابتدا، معرفی اجمالی تحت عنوان«تعریف»[۴] ارائه شده است و پس از آن توضیح کامل‌تری که دربرگیرندهٔ تاریخچه، مطالعات انجام شده و نظرات گوناگون در باب آن مفهوم می‌باشد، تحت عنوان «توضیح و بحث»[۵] آمده است. بعد از شرح توضیحات نظری در مورد مفهوم، نویسندگان به منظور کمک به خواننده (عمدتاً معلمان دورهٔ ابتدایی)، سعی در ارائه نمونه‌های عملی تحت عنوان «مثال‌های عملی»[۶] دارند تا چگونگی به‌کارگیری آن مفهوم در کلاس درس را روشن سازند و در قسمت بعدی، به معرفی منابع کمکی تحت عنوان «مطالعهٔ بیشتر»[۷] می‌پردازند که می‌تواند برای مطالعهٔ بیشتر پیرامون آن مفهوم، مورد توجه قرار گیرد. مفاهیم کتاب به شیوه‌ای مستقل از یکدیگر و به ترتیب حروف الفبا نگاشته شده‌اند تا خواننده در مطالعه و استفاده از کتاب، از آزادی و اختیار بیشتری برخوردار باشد. اما با این وجود، نویسندگان در پایان تشریح هر کدام از مفاهیم، به معرفی آن دسته از مفاهیمی که قرابت بیشتری با مفهوم مطرح شده دارند نیز اشاره می‌کنند تا به خواننده کمک کنند که در عین اینکه مفاهیم از هم استقلال دارند، اما مفاهیم در شیوه ارائه، متوجه درهم‌تنیدگی ذاتی آن‌ها بشوند و از این ویژگی، در جهت آموزش کودکان دورهٔ ابتدایی، بهره ببرند.

کلیدواژه‌ها: محاسبهٔ ذهنی، تدریس ریاضی، آموزش ابتدایی، تعارض‌شناختی، هم‌ارزی، یادگیری اصول، ساخت و سازگرایی، یادگیری مفهوم، خطاها، هم‌ارزی، مفهوم معنی‌دار، تحول، انتقال‌ناپذیری.

در ریاضی دورهٔ ابتدایی

محاسبهٔ ذهنی[8]

معرفی مفهوم

منظور از «محاسـبهٔ ذهنی» در برنامهٔ درسی دورهٔ ابتدایی آن اسـت که دانش‌آمـوز در جریان انجام یک محاسبهٔ عددی، در ذهن خود عملیات مربوط روی اعداد را انجام دهد. در حقیقت، محاسـبات ذهنی را می‌توان جایگزینی برای استفادهٔ مکرر از ماشین حساب یا سیاه کـردن گوشـه‌ای از کاغذ برای کار بـر روی نمادهای نوشـتاری دانسـت. در جریان یک محاسبهٔ ذهنی، آن هنـگام که به‌خاطرسـپاری همهٔ اطلاعـات مربوط به آن محاسـبه برای دانش‌آموز دشـوار باشد، او می‌تواند قسـمتی از محاسـبه یا نتایجی را که نقش واسطه در روند محاسبه دارند، در گوشـه‌ای از چرک‌نویس خود یادداشـت کند، ولی کماکان کار عمدهٔ محاسبه را در ذهن خود انجام دهد. بنابراین، منظور از محاسبهٔ ذهنی آن نیست که لزوماً صددرصد عملیات محاسبه، در ذهن انجام شود!

توضیح و بحث

پـری و داکت[9] (۲۰۰۲) در تحقیـق خود در مورد تقویت ایده‌هـای ریاضی کودکان، بیـان می‌کنند که «محاسـبات ذهنی بخشـی جدایی‌ناپذیر از یادگیری کودکان در رابطه با اعداد است. زیرا محاسبات ذهنی، به یادگیری معنادار مفاهیم حساب کمک کرده و توانایی تفکر، حدسیه‌سازی و تعمیم بر پایهٔ درک مفهومی را در کودکان، ارتقا می‌بخشد». برخلاف آنکه تصور می‌شود محاسبات ذهنی و روش‌های غیررسمی، ممکن است بر یادگیری طوطی‌وار و روش‌های معمولی استوار باشند، در حقیقت، تأکید بیشـتر آن بر توسـعهٔ درک و فهم اعداد و روابط بین اعداد اسـت. پس به‌نظر می‌رسد که محاسـبات ذهنی، نقش کمکی مهمی در شکل‌گیری «درک عـددی»[10] کـودکان ایفـا می‌کند. تسـلط بر روش‌های محاسبهٔ ذهنی، دانش‌آموزان را قادر می‌سازد که در حل مسـائل عددی و هنگام مواجهه با عمل‌ها و اعداد، به شکلی روان‌تر، سریع‌تر، کاراتر و با اطمینان و طیب خاطر، عمل کنند.

ویژگی‌های روش‌های محاسـبهٔ ذهنـی و مزایای اسـتفاده از آن، از مهم‌ترین دلایلی بود که «استراتژی ملی سواد عددی»[11] در انگلستان را متقاعد ساخت که در برنامهٔ درسی دورهٔ ابتدایی، جایی برای استراتژی‌های محاسـبهٔ ذهنی باز کند. در راهنمای «اسـتراتژی ملی سواد عددی» به‌طور صریح بیان شده است که «توانایی انجام محاسبات ذهنی در قلب حساب واقع شده است». همچنین، در بازنگری اسـتراتژی ملی بـرای مدارس ابتدایی در انگلسـتان، سیاست اسـتفاده از روش‌های ذهنی با این جمله مورد توجه قرار گرفت که «روش‌های انجام محاسبات ذهنی، اساس تمام روش‌های محاسبه اسـت و این روش‌ها باید حفظ و تقویت شوند». اضافه بر آن، «استراتژی ملی سواد عددی» به معلمان توصیه می‌کند که ۵ تا ۱۰ دقیقه از آغاز درس حساب خود را به فعالیت‌های ذهنی و شفاهی اختصاص دهند. توجه به روش‌های محاسـبهٔ ذهنی، به عنوان یک حرکت رو به جلو در برنامهٔ درسـی ریاضی، انگلسـتان را از دیگر کشورهای اروپایی پیرو این سیاست مانند هلند (فن دن هیوول- پنهاوزن ۲۰۰۱)[12] و آلمان و سوئیس (بیرهوف، ۱۹۹۶)[13] که معتقد به تأکید بر محاسبهٔ ذهنی به‌عنوان

بخشی اساسی در برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی هستند، پیش انداخت.

بیشتر روش‌های ذهنی، وابسته به نوع مسئله و اعداد به کار رفته در آن هستند و معمولاً، ماهیت اعداد به کار رفته در مسئله، تعیین‌کننده نوع استراتژی‌ها برای انجام محاسبات ذهنی است. برای مثال، در تفریق ۲۱- ۱۲۳، محاسبهٔ ذهنی را می‌توانیم به این صورت انجام دهیم که ابتدا، ۲۱ را از ۲۳ کم کرده، سپس حاصل را با ۱۰۰ جمع کنیم. در حالی که روشی که برای محاسبهٔ ذهنی ۹۴- ۱۲۳ به‌کار می‌رود، متفاوت است و معمولاً از استراتژی «پرکردن»[۱۴]، استفاده می‌شود، به این صورت که ابتدا، عدد ۹۴ با اضافه کردن ۶، به سمت ۱۰۰، پر می‌شود و عدد ۱۰۰ نیز با ۲۳ واحد به سمت ۱۲۳ پر می‌شود و حاصل، ۲۳+۶ است.

بدین ترتیب، معلمان می‌توانند با در اختیار قرار دادن مجموعه‌ای از استراتژی‌های ذهنی، به دانش‌آموزان خود کمک کنند تا در محاسبات ذهنی، مهارت کسب کرده و درک عددی خود را توسعه دهند. اما نکته مهمی که لازم است معلمان به آن توجه کنند و به دانش‌آموزان خود نیز یاد دهند، آن است که برای حلِ ذهنی یک مسئله، فقط یک روش موجود نیست و ممکن است روش‌های ذهنیِ متنوعی برای حل یک نوع خاص از مسئله، یافت شود.

منظور از «محاسبهٔ ذهنی» در برنامهٔ درسی دورهٔ ابتدایی آن است که دانش‌آموز در جریان انجام یک محاسبهٔ عددی، در ذهن خود عملیات مربوط روی اعداد را انجام دهد. در حقیقت، محاسبات ذهنی را می‌توان جایگزینی برای استفادهٔ مکرر از ماشین حساب یا سیاه کردن گوشه‌ای از کاغذ برای کار بر روی نمادهای نوشتاری دانست

مثال‌های عملی

در ادامه تعدادی مثال برای رده‌های سنی مختلفِ دانش‌آموزان ارائه می‌شود که می‌تواند به آن‌ها، در مدیریتِ روش‌های محاسبهٔ ذهنی‌شان کمک کند.

- برای ۷ ساله‌ها: در محاسبهٔ ذهنی تفریق دو عدد که با فاصلهٔ کمی در دو طرف یکی از ضرایب عدد ۱۰ قرار دارند، مثلاً ۶۸- ۷۳، دانش‌آموز می‌تواند از عدد کمتر یعنی ۶۸ شروع کرده و با اضافه کردن ۲ واحد، به عدد ۷۰ (ضریب ۱۰) برسد. سپس با اضافه کردن ۳ واحد به ۷۳ برسد و در نهایت، به پاسخ ۳ + ۲ برسد.
- برای ۹ ساله‌ها: در محاسبهٔ ذهنی تفریق دو عدد دو رقمی که اختلاف بیشتری از هم دارند، مثلاً ۴۷- ۷۳، دانش‌آموز می‌تواند از ۴۷ شروع کرده و با اضافه کردن ۳ واحد، به ۵۰ برسد و از ۵۰ تا ۷۳ می‌بایست ۲۳ واحد اضافه کند که در نهایت، پاسخ ۲۳+ ۳ یعنی ۲۶ است.
- برای ۱۱ ساله‌ها: برای محاسبهٔ ذهنی اختلاف دو عدد چهاررقمی که مضربی از عدد ۱۰۰ هستند، مثلاً ۴۷۰۰- ۷۳۰۰، دانش‌آموز می‌تواند به‌طور ذهنی از ۴۷۰۰ شروع کرده و با اضافه کردن ۳۰۰ واحد به آن، به عدد ۵۰۰۰ برسد و پس از آن با اضافه کردن ۲۳۰۰ واحد، به ۷۳۰۰ برسد که پاسخ ۳۰۰+ ۲۳۰۰ یعنی ۲۶۰۰ است.

در مثال‌های فوق، در حقیقت این استراتژی به‌کار رفت که برای تفریق دو عدد، ابتدا مقداری را به عدد کوچک‌تر اضافه می‌کنیم (پرکردن) تا به مضربی از عدد ۱۰ برسیم که محاسبهٔ ذهنیِ اختلاف آن تا عدد دوم، آسان‌تر باشد. به این استراتژی، اصطلاحاً «پل زدن»[۱۵] نیز اطلاق می‌شود. در ادامه، به تبیین چند استراتژی دیگر می‌پردازیم که می‌تواند در جهتِ تقویتِ مهارت‌های محاسبات ذهنی، به دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی کمک کند.

استراتژی مضارب پنج[۱۶]

وقتی این واقعیت را بپذیریم که در هنگام شمارش، برای دانش‌آموزان، چیزی قابل دسترس‌تر از انگشتان دستشان نیست و این حقیقت که آن‌ها همواره در تلاشند بین هر عدد و تعداد انگشت‌های دو دستشان (پنج و ضرایب پنج)، ارتباط برقرار کنند، بدون شک به دانش‌آموزان حق می‌دهیم که مدام به‌دنبال گنجاندن اعداد در قالب دسته‌های پنج‌تایی باشند. اگر این کارِ دانش‌آموزان، به موقع و با راهنمایی‌های معلم همراه شود، آن‌ها را در یادگیری یکی از استراتژی‌های مهم محاسبات ذهنی، یاری می‌کند. برای مثال، در محاسبهٔ ۵+ ۷ به صورت ذهنی، دانش‌آموز می‌تواند عدد ۷ را به صورت ۵+ ۲ تصور کند، یا در سطحی بالاتر از آن در عملیات ۳۵+ ۲۷، این عبارت را به صورت ۳۵+ ۲۵ به اضافهٔ ۲ واحد ببیند.

استراتژی دوبرابر سازی[۱۷]

دانش‌آموزان پایه‌های بالاتر، می‌توانند برای محاسبهٔ ذهنی حاصل‌ضرب اعداد دو رقمی که یکی از آن‌ها توانی از عدد دو باشد (در دورهٔ ابتدایی، اعداد ۲، ۴، ۸ و ۱۶ بیشتر مورد نظر هستند)، با هر بار دو برابر کردن عدد دیگر، به حاصل‌ضرب مورد نظر دست یابند.

مثلاً، برای رسیدن به پاسخ ۲۶×۱۶ به صورت ذهنی، می‌توان به ترتیب عمل‌های ۵۲= ۲۶×۲، ۱۰۴= ۵۲×۲، ۲۰۸= ۱۰۴×۲ و ۴۱۶= ۲۰۸×۲ را انجام داد.

استراتژی جبران کردن[18]

استراتژی «جبران کردن» را معمولاً هنگامی استفاده می‌کنند که یکی از اعداد به‌کار رفته در محاسبه را بتوان با یک عدد ساده‌تر از نظر محاسبه، جایگزین کرد. برای نمونه، در عبارت ۳۸ + ۴۷ ، عدد ۳۸ را می‌توان با ۴۰ تعویض کرد، زیرا محاسبهٔ ذهنی آسان‌تر است و پاسخ آن ۸۷ است، اما بعد از آن باید با کم کردن ۲ واحد، آن را جبران کرد تا به جواب واقعی یعنی ۸۵ دست یافت. حتی می‌توان این استراتژی را در ضرب نیز به‌کار برد. برای مثال، در ۷×۱۹، جایگزین کردن ۲۰ به جای عدد ۱۹ و محاسبهٔ ذهنی ۱۴۰= ۷×۲۰ ، کار محاسبه را ساده‌تر می‌کند. اما با متوجه ساختن دانش‌آموز از این موضوع که با جایگزین کردن ۲۰ به‌جای ۱۹، در واقع به جای ۱۹ تا ۷تایی، ۲۰ تا ۷تایی را حساب کرده است، پس باید یک ۷تایی را از حاصل‌ضرب به‌دست آمده کم کند تا به جواب واقعی برسد. یعنی از دانش‌آموز بخواهیم با جبران ۷ واحد (کم کردن ۷ از ۱۴۰)، به پاسخ اصلی یعنی ۱۳۳ برسد.

استراتژی اعداد دوست[19]

کارِ ذهنی بر روی اعدادی که رقم یکان مشابه یا در سطح بالاتر ارقام یکان و دهگان مشابه دارند، بسیار آسان‌تر است. در اینجا، اصطلاحاً چنین اعدادی را «اعداد دوست» می‌نامیم. استراتژی استفاده از اعداد دوست را می‌توان توسیعی از استراتژی «جبران کردن» دانست. مثلاً، برای یافتن حاصل ۴۳۸-۶۳۵ ، می‌توان ۴۳۸-۶۳۸ را محاسبه کرد که به دلیل دوست بودن این دو عدد، تفریقشان آسان‌تر است و پاسخ عدد ۲۰۰ است. بعداً با کم کردن ۳، به جواب واقعی یعنی ۱۹۷ می‌رسیم.

استراتژی دانش پیش‌نیاز[20]

لازم است این واقعیت را بپذیریم که موفقیت در به‌کارگیری بسیاری از روش‌های ذهنی، منوط به برخورداری از دانش پیش‌نیاز و شناخت بهتر اعداد و روابط بین آن‌هاست. برای مثال، در به‌کارگیری استراتژی «دوبرابرسازی» برای یافتن پاسخ ۷×۸ ، دانستن حاصل ۷×۲ و ۷×۴ به‌عنوان پیش‌نیاز، ضروری است. بنابراین، دانش‌آموزانی که پاسخ این دو حاصل‌ضرب را ندانند، قادر به استفاده از استراتژی «دوبرابرسازی» نیستند. یعنی برای تبدیل شدن به یک محاسبه‌گر ذهنی خوب، دانستن مجموعه‌ای از واقعیت‌ها در مورد اعداد (در اینجا برای دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی، با تأکید بیشتر بر تسلط بر جمع و تفریق اعداد)، ضروری است. پس اگر قرار باشد شما به‌عنوان معلم دورهٔ ابتدایی، مهارت‌های محاسبهٔ ذهنی دانش‌آموزان خود را توسعه دهید، نیاز دارید که آن مهارت‌ها را آن‌قدر توسعه دهید تا دانش‌آموزان، در استفاده از آن‌ها متبحر و خود به خودی شوند. علاوه بر این، شیوه ارائهٔ الگوها و تقویت درک و فهم دانش‌آموزان از اعداد و روابط بین آن‌ها، به فراهم کردن این پیش‌نیاز مهم کمک می‌کنند.

استراتژی تصویرسازی فضایی[21]

یکی از اصول مهم در تدریس استراتژی‌های ذهنی که خوب است معلمان به آن توجه کنند، همراه ساختن روش‌های ذهنی با تصویرسازی‌های فضایی است، تا به دانش‌آموزان کمک کنند که ارتباط بین اعداد را در ذهن خود به تصویر بکشند. دو نمونه معمول تصویرسازی در مدارس ابتدایی، یکی به‌کارگیری محور اعداد در اشکال مختلف آن و دیگری مربع صدتایی است (به هایلوک و کوکبرن، ۲۰۰۳، فصل ۵ مراجعه شود[22]).

مفاهیم مرتبط

نویسندگان برای مطالعه بیشتر در مورد محاسبات ذهنی، کلید واژه‌های «الگوریتم»، «روش محاسبات غیررسمی»[23] و «یادگیری مهارتی»[24] را توصیه می‌کنند.

توضیح: در متن اصلی کتاب، استراتژی‌های «دوبرابرسازی» و «مضارب پنج»، توأم با یکدیگر و تحت عنوان یک استراتژی واحد بیان شده‌اند که مترجم به صلاحدید خود، این دو استراتژی را از یکدیگر تفکیک کرده است.

تعارض شناختی

معرفی مفهوم

منظــور از تعارض شــناختی موقعیتی اســت در یادگیری، کــه یادگیرنده با نتایج یا ایده‌هایی متناقض روبه‌رو می‌شود که با انتظارات، تشخیص و یا درک قبلی وی از موضوع مورد نظر، متفاوت است. البته وجود این تناقض‌ها، درصورتی‌که همراه با راهنمایی‌های به‌موقع معلم باشــد، می‌تواند منجر به افزایــش دانش و درک یادگیرنده شــود؛ در این صورت می‌توان از تعارض‌های شناختی برای افزایش فهم دانش‌آموز و کیفیت‌بخشی به آموزش ریاضی بهره برد.

توضیح و بحث

تعــارض شــناختی یکــی از موضوعــات مهم در نظریهٔ یادگیری ساخت‌وســازگرایی است. می‌دانیم که ساخت دانش به‌وسیلهٔ یادگیرنده از کلیدی‌ترین اصول ساخت‌وســازگرایی است و مبنای آن بر اندیشهٔ بازتابی اســت. بنابر این نظریه، یادگیرنده اطلاعات و باورهای خود را به محیط آموزشی آورده و طی یک فرایند فعال، با اســتفاده از اطلاعات پیشــین و تجربیات یادگیری مختلف خود و ســپس واکنش به مسائل، که می‌تواند حاوی تعارض‌های شناختی نیز باشد، به جرح و تعدیل درک پیشــین خود از یــک مفهوم پرداختــه و درک جدید و درســتی از آن مفهوم می‌سازد. پییر و کایران (۱۹۹۲) این ســطح از پیشرفت در شناخت را با عنوان «فرایند بازسازی پویا» می‌نامند. شناخت بر پایهٔ همه یا هیچ نیســت بلکه به روابط یک مفهوم با سایر مفاهیم یا ایده‌هایی که از قبل وجود داشــته‌اند بســتگی دارد. این ســاختارهای مفهومی از ســوی اسکمپ (۱۹۷۱، آخرین نسخه ۱۹۹۳) به‌عنوان «طرحواره‌های ذهنی» معرفی شــده‌اند درحالی‌که هیبرت و کارپنتر (۱۹۹۲) ایــن طرح‌ها را به‌عنوان «شــبکه‌ای واحــد از ایده‌های به‌هم مرتبط» در نظر گرفته‌اند. از نظر اسکمپ، «یک طرحوارهٔ ذهنی دربرگیرندهٔ اجتماعی از اطلاعات قبلی است که به‌عنوان ابزاری برای یادگیری‌های بعدی عمل می‌کند». وی بیان می‌کند که «آنچه از راه فهمیدن یاد خواهیم گرفت به طرحواره‌های موجود و از قبل فهمیده شدهٔ ما بستگی دارد». در واقع هنگامی‌که دانش‌آموزان بــا دانش جدیدی روبه‌رو می‌شــوند بایــد به چگونگی تطبیق این دانش با دانش قبلی خود بیندیشند.

بنــا به گفته‌هــای پیــاژه (۱۹۷۷)، ســاختارهای شناختی، در روند «تطابق» دچار تغییر می‌شوند. تطابق شــامل دو مقولهٔ همگون‌سازی و اسکان است که برای رســیدن به حالت تعادل اجرا می‌شــود. همگون‌سازی هنگامــی رخ می‌دهد که دانش جدید با ســاختارهای شناختی موجود تناسب داشته باشد و با طرحواره‌های موجود در ذهن فراگیر، مطابقت یابد. اسکان نیز زمانی رخ می‌دهد که یادگیرنده ساختارهای شناختی خود را به‌منظور درک اطلاعات و تجارب جدید بازآرایی کند. پیاژه همچنین معتقد است که تعادل طی سه مرحله شــکل می‌گیرد. در مرحلهٔ اول فراگیــران از ایده‌های موجود خود راضی هســتند و در تعادل به سر می‌برند. در مرحلــهٔ دوم از برخی از محدودیت‌های شــناختی خود مطلع شــده و به حالت نامتعادل وارد می‌شــوند. در این حالت با تناقض شــناختی روبه‌رو هستند و اگر بتوان نسخهٔ بهتری از شناخت را از طریق بازسازی (به تعبیر اسکمپ) یا اسکان (به تعبیر پیاژه)، با طرح قبلی جایگزین کرد، آنگاه (مرحلهٔ ســوم) می‌توان دوباره به حالت تعادل رسید. بنابراین توسعهٔ شناختی، در تطابق با شــرایط و از طریق حفظ تعادل بین همگون‌سازی و اسکان، حاصل می‌گردد.

این ایده‌های عنوان شده در بالا، در مورد یادگیری ریاضی در دورهٔ ابتدایی بیشــتر صادق هســتند. برای مثال در یاددهی- یادگیری اعداد، بســیاری از مفاهیم و اصــول در ابتــدا با اولویــتِ آموزشِ اعــدادِ مثبت به کودکان، ارائه می‌شــوند، درحالی‌که می‌توانِ این اعداد را به کمک فرایند همگون‌سازی به همراه اعداد منفی بــه‌کار برد. مثلاً مفهوم ترتیب اعداد منفی دارای کمی تناقض شــناختی است و باید با استفاده از محور اعداد و نشــان دادنِ هندســیِ ترتیب میان اعــداد، آن‌ها را متوجه این موضوع سازیم که اعداد جدید دیگر به‌عنوان مجموعه‌ای از اجســام در نظر گرفته نمی‌شوند. به این ترتیب به کمک یک نوع فرایند اسکان، می‌توان مشکل درک کودکان از اعــداد منفی را حل کرد. مفهوم عدد

منفی حتی برای بسیاری از بزرگ‌سالان هنوز غیرقابل درک و پیچیده است زیرا هرگز به آن‌ها کمک نشده است تا به ساختار لازم در درک صحیح از یک عدد منفی دست پیدا کنند.

یک روش تدریس برای توسعهٔ شناختی، قرار دادن فراگیران در معرض موقعیت‌های غنی از تعارض‌های شناختی است. این روش شامل ارائهٔ فرصت‌هایی به دانش‌آموز است که در آن ایده‌ای در ذهن وی شکل می‌گیرد و در نتیجه او را با یک موقعیت متناقض روبه‌رو می‌سازد؛ به دنبال چنین تناقضی است، که تغییرات شناختی صورت می‌گیرد. در هنگام استفاده از تعارض شناختی برای توسعهٔ شناختی، در نظر گرفتن و اهمیت دادن به ایده‌ها و مفاهیم موجود یادگیرنده‌ها، یک اصل است. تناقض شناختی همچنین می‌تواند حاصل بحث میان یادگیرنده‌هایی باشد که روش‌های حل مسئله را بین خود به اشتراک می‌گذارند. به این ترتیب آنان به گوش دادن به روش‌های شخصی و نوع درک افراد تمایل پیدا می‌کنند و این کار اغلب باعث می‌شود دانش‌آموزان درک محدود یا ناقص خود را با قرار گرفتن در موقعیت متناقض یا در تعامل با ایده‌های دیگران جرح و تعدیل و بازسازی کنند.

روش‌های به‌کارگیری تعارض‌های شناختی، بیشتر در آموزش درس‌های ریاضی و علوم که پر از مفاهیم گوناگون هستند، کاربرد دارند. در این راستا مفاهیم و اصول در اطلاعات و شناخت موجود نقش عمده‌ای دارد؛ بنابراین بسیار مهم است که معلمان درک محدود یا نادرست دانش‌آموزان را در نظر داشته باشند تا بتوانند روش‌های آموزشی خود را اصلاح نمایند.

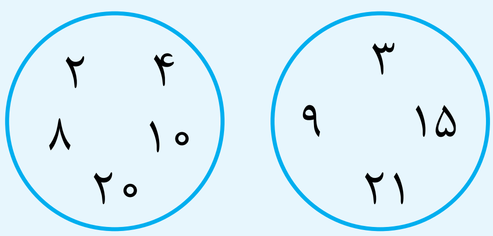
مطالعات اسکان‌شناختی که با اسکان‌شناختی در آموزش علوم (CASE) و بعدها اسکان‌شناختی در آموزش ریاضی (CAME) به میان آمد، اثرات استفاده از تناقض شناختی را برای توسعهٔ شناختی در مدارس ابتدایی و دبیرستان مشخص می‌سازند. (ادی و شایر ۱۹۹۰)

مثال‌های عملی

در زیر سه مثال از کاربرد تعارض شناختی توسط معلم، برای به چالش کشیدن پاسخ‌های اولیهٔ دانش‌آموزان به شرایط و ایده‌های ریاضی، ذکر کرده‌ایم.

نمودار مجموعه‌ها

هنگامی که دانش‌آموزان می‌خواهند اعدادی را در مجموعه‌ها قرار دهند، ابتدا با دو دایرهٔ جداگانه، مثل شکل ۱، کار را شروع می‌کنند، سپس از آن‌ها خواسته می‌شود اعداد ۲۱، ۲۰، ۱۵، ۱۰، ۹، ۸، ۴، ۳، ۲ را در دو گروه عددهای بخش‌پذیر بر ۳ و گروه عددهای زوج دسته‌بندی کنند. حال اگر اعدادی مثل ۶، ۱۲ و ۱۸ را هم به مجموعه‌ها اضافه کنیم، دانش‌آموزان با موقعیتی متناقض مواجه می‌شوند و درمی‌یابند که این اعداد هم به هر دو مجموعه تعلق دارند، زیرا هم مضرب ۳ و هم **فرد** هستند. این تناقض شناختی، با راهنمایی معلم برای تسهیل در حل مسائل، می‌تواند منجر به این شود که دانش‌آموزان تصور کنند این دو مجموعه باید در اعداد مشترک، با هم هم‌پوشانی داشته باشند. در این روش نباید از نقش تعارض شناختی برای درک بهتر حالاتی که مجموعه‌های اعداد را با هم مرتبط می‌سازند، غافل شد.

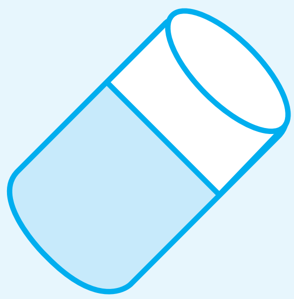


شکل۱- تعارض شناختی هنگام دسته‌بندی اعداد در دو مجموعه

تجسم

تجسم کردن، یکی از فعالیت‌هایی است که در مطالعات CAME انجام شده است (ادی و دیگران ۲۰۰۲). در این فعالیت به هر کدام از دانش‌آموزان یک لیوان شفاف حاوی آب نشان داده شد. سپس از آن‌ها خواسته شد که لیوان را به یک سمت کج کنند و سپس شکل آن را با آب داخلش رسم نمایند. تعدادی از بچه‌ها به‌جای اینکه سطح آب را به موازات زمین بکشند، آن را به موازات لبهٔ بالایی لیوان رسم کردند (شکل ۲).

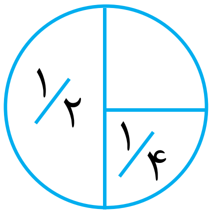
در اینجا به‌منظور تصحیح دیدگاه آن‌ها از روش ایجاد تعارض شناختی استفاده شد، به این صورت که یک خط افقی روی لیوان رسم شد تا سطح آب را در حالت معمولی مشخص کند. سپس لیوان را به آرامی کج کردند و از بچه‌ها پرسیدند که چه چیزی می‌بینند، و از آن‌ها خواسته شد تا این حالت را با پیش‌بینی‌های قبلی خود مقایسه کنند.



شکل۲- تصور کودکان از آب در یک لیوان کج

افزودن کسرها

به‌طور معمول اکثر دانش‌آموزان روش‌های نامناسبی را برای انجام عملیات روی کسرها، به‌کار می‌برند. برای مثال هنگامی‌که از آن‌ها خواسته می‌شود تا $\frac{۱}{۲}$ را با $\frac{۱}{۴}$ جمع کنند، پاسخ‌های غلطی همچون $\frac{۱}{۶}$ یا $\frac{۲}{۶}$ می‌دهند. با نمایش دادن این مسئله در یک نمودار مانند شکل ۳، می‌توان تناقض شناختی لازم را برای اینکه دانش‌آموز دریابد هنگام جمع اعداد کسری چه کاری باید و چه کاری نباید انجام دهد به او نشان داد. این نوع شناخت یک تجربهٔ مهم برای بسیاری از کودکانی است که در آغاز راه شناخت نحوهٔ محاسبهٔ جمع کسرها قدم برمی‌دارند.



شکل ۳. جمع $\frac{۱}{۲}$ با $\frac{۱}{۴}$ برابر نیست با $\frac{۱}{۶}$ یا $\frac{۲}{۶}$

مطالعهٔ بیشتر

اهمیت تناقض شناختی در آموزش ریاضی در فصل دوم از کتاب هایلوک و کوکبرن (۲۰۰۳) تشریح شده است. نظر آن‌ها دربارهٔ توسعهٔ مفاهیم اعداد در ریاضی نشان می‌دهد که چگونه تجربیات جدید دانش‌آموزان به تطابق با مفاهیم موجود نیازمند است، زیرا آن‌ها همواره با حقایق غیرقطعی، متناقض با تجربیات گذشته، ویژگی‌های متغیر و حالت‌های جدید روبه‌رو خواهند شد. هیبرت و همکاران (۱۹۹۷)، یک ساختار پنج‌بعدی را برای ارتقای فهمیدن در یادگیری ریاضیات ارائه کرده‌اند. در بعد سوم این ساختار، تحت عنوان فرهنگ اجتماعی کلاس درس، نویسندگان به بحث دربارهٔ ایدهٔ ایجاد تعارض شناختی به‌عنوان یک روش مؤثر در افزایش درک دانش‌آموزان، پرداخته‌اند. اسکمپ (۱۹۹۳) یک نظریهٔ شناختی را در ریاضیات پیشنهاد می‌کند که در آن بر بازسازی طرحواره‌های موجود به‌خصوص در رویارویی با موقعیت‌های تعارض شناختی تأکید دارد.

یادگیری مفهوم

معرفی مفهوم

یادگیری مفهوم، فرایندی است که در آن، دانش‌آموز، با سازماندهی تجربیات خود بر روی نمونه‌های متفاوت از یک شیء یا یک موضوع، ویژگی مشترک آن‌ها را تحت یک نام، که مفهوم نامیده می‌شود، قرار می‌دهد. می‌توان گفت دانش‌آموز هنگامی یک مفهوم را به‌درستی

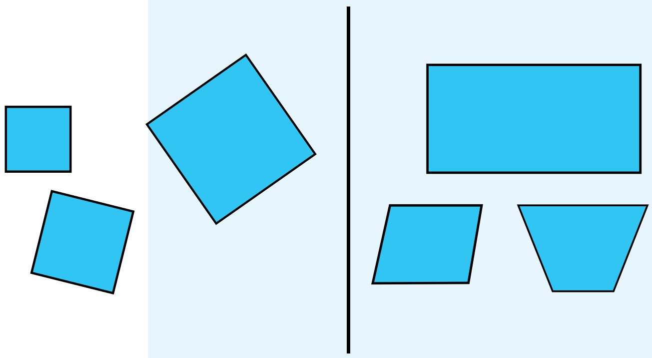
درک کرده است که قادر باشد تعریف روشنی از آن به‌گونه‌ای قاعده‌مند ارائه دهد به‌طوری که شنونده یا خوانندهٔ تعریف بتواند نمونه یا مصداق آن مفهوم را در ذهن خود مجسم نماید.

توضیح و بحث

می‌دانیم که در تعلیم‌وتربیت، هر زمینهٔ آموزشی از روی مفاهیم کلیدی سازندهٔ آن زمینه شناخته می‌شود. به‌طور خاص در ریاضیات ابتدایی، مفاهیم متعددی آموزش داده می‌شود که از جمله می‌توان به مفهوم‌های «سه»، «مثلث»، «مربع»، «ضرب»، «عامل»، «عدد اول»، «تقارن بازتابی»، «زاویه»، «زاویهٔ قائمه» و... اشاره کرد. یادگیری کامل هر مفهوم، معمولاً با عبور از چند مرحلهٔ مهم اتفاق می‌افتد، این مراحل شامل بیان مفهوم از طریق در نظر گرفتن نمونه‌ها و غیرنمونه‌ها، هماهنگی مفهوم با نام آن، انتزاع یا تجرید، بیان ویژگی‌های اصلی نمونه‌های مفهوم، ارائهٔ یک تعریف برای آن مفهوم، ارزیابی کردن جامعیت تعریف برای موارد سخت‌تر و در نهایت بازبینی و اصلاح تعریف می‌باشد. با این حال باید در نظر داشته باشیم که یادگیری کامل یک مفهوم صرفاً از طریق این مراحل امکان‌پذیر نیست. یادگیری همیشه نامتقارن‌تر از آن چیزی است که در مدل‌های ساختاریِ روان‌شناسیِ آموزشی مشاهده می‌شود!

نکتهٔ مهم و قابل توجه در زمینهٔ تعریف یک مفهوم این است که هر مفهوم باید تجریدی از تمامی نمونه‌های عینی آن مفهوم باشد. برای مثال، برای یادگیری مفهومِ «مربع»، دانش‌آموزان شکل‌های متعددی را یاد می‌گیرند که کلمهٔ «مربع» در مورد آن‌ها به‌کار می‌رود. آن‌گاه باید با ویژگی‌های مشترک این اشکال آشنا شوند در حالی‌که ممکن است نتوانند آنچه را که در مراحل ابتدایی شکل‌گیری مفهوم در ذهنشان اتفاق می‌افتد بیان کنند. همچنین آن‌ها باید یاد بگیرند که اگر شکلی، با آنچه که آن‌ها مربع می‌نامند، متفاوت است، آن را از میان بقیهٔ شکل‌ها شناسایی و حذف کنند (معمولاً با معیار اختلاف در اندازه یا نحوهٔ قرارگیری روی کاغذ). علاوه بر این باید با غیرنمونه‌ها (شکل‌هایی که مربع نیستند) نیز آشنا شوند. توضیحات لازم در شکل ۴ آورده شده است.

به‌طور کلی، مفهوم مربع در ذهن دانش‌آموز دورهٔ ابتدایی به‌گونه‌ای بسیار ساده و عینی، و معمولاً متفاوت با تعریف رسمی مربع، شکل می‌گیرد. به‌عبارت دیگر مربع در ذهن دانش‌آموز دبستانی چیزی است که مستقل از غیرنمونه‌های هندسی شکل گرفته است.



شکل ۴. نمونه‌ها و غیرنمونه‌های مفهوم مربع

معلم می‌تواند از روش پرسش و پاسخ برای جلب توجه دانش‌آموزان به تمام شکل‌هایی که مربع نامیده می‌شوند، استفاده کند. مثلاً سؤال کند که «چرا شکل‌های غیرنمونه (مثلاً مستطیل یا ذوزنقه) را نمی‌توان مربع تعریف کرد؟». با این حال باید به نکتهٔ مهم دیگری در این زمینه توجه داشت و آن اینکه آموزش مفهوم، لزوماً با بیان یک تعریف یا جمله‌ای که حاکی از ویژگی‌های کلیدی آن مفهوم باشد، انجام نمی‌گیرد. مثلاً یک تدریس خوب در مورد مربع با گفتن اینکه: «امروز می‌خواهیم دربارهٔ مربع صحبت کنیم. مربع یک شکل چهارگوش است که طول تمام اضلاع آن با هم برابر بوده و تمام زوایای آن قائمه هستند»، شروع نمی‌شود؛ بلکه چنین تعریفی را باید پس از اینکه مفهوم مربع را از طریق نشان دادن نمونه‌ها و غیرنمونه‌ها و دسته‌بندی آن‌ها بر دانش‌آموز آشکار کردیم و در ذهن او جا افتاد، بیان

نکتهٔ مهم و قابل توجه در زمینهٔ تعریف یک مفهوم این است که هر مفهوم باید تجریدی از تمامی نمونه‌های عینی آن مفهوم باشد

کرد. یک کودک ۵ ساله ممکن است مربع را بشناسد در حالی‌کــه می‌دانیم هنوز در او ذهنیتی دربارۀ زاویۀ قائمه و مهارت‌های لازم برای بررسی برابری زوایا وجود ندارد. اما وجود تعریف در برخی موارد بســیار حیاتی است و به‌خصوص برای تعیین مصادیق و تمایزات لازم اســت. برای مثال دانش‌آمــوزان بزرگ‌تری که مفهوم «مستطیل» را یادگرفته‌اند به تعریف دقیق مستطیل برای تشخیص اینکه یک مربع می‌تواند مستطیل باشد یا خیر، نیاز دارند.

بــه این ترتیــب می‌تــوان به یکی از مشــکلات متداول دانش‌آموزان در یادگیری مفاهیم اشاره کرد. این مشــکل هنگامی خود را نشــان می‌دهد که یک مفهوم در تعریف مفهومی دیگر صدق کند یا به نوعی زیرتعریفی از آن باشد و یا اینکه آن دو مفهوم با هم همپوشــانی داشته باشند. برای مثال، یک دانش‌آموز کوچک‌تر ممکن اســت در تشــخیص شکل تصویر۴ به‌عنوان مربع مشــکل داشته باشد و لذا آن را تصویر یک الماس تصور کند (اساساً یک لوزی). زیرا تصویر الماس اثر بیشــتری، نســبت به مربــع، بر ذهن وی داشــته اســت. با چرخاندن کاغذ می‌توان به کودک اطمینــان داد که این تصویر واقعاً یک مربع اســت، اما در مــورد دانش‌آموزان کوچک‌تر این احتمال هم وجود دارد که پس از چرخاندن کاغذ، آن را به شکل مربــع و پس از برگشــت به حالــت اول آن را دوباره به شــکل الماس ببینند! تنها تعریف دقیقی از مربع می‌تواند این مشکل را حل کند. اما ارائۀ تعریف دقیق هم تا زمانی که دانش‌آموز مهارت‌ها و مفاهیم مرتبط با تعریف را درنیافته باشــد، امکان‌پذیر نیست. البته فراموش نکنیم که گاهی اوقات ایجاد یک پیش‌زمینۀ خــوب و بی‌نقص برای یک تعریف، به‌طور متناقضی، دشــوارتر از آن اســت که یک تعریف از آن مفهوم را آماده و شسته رفته، در اختیار دانش‌آموز بگذاریم.

گاهی بیان نمونه‌های به ظاهر ســاده ولی مبهم از یک مفهوم، می‌تواند منجر به اصلاح تعریف شــود. برای مثال، مفهوم «تقارن دورانی» را می‌توان از روی نمونه‌هــا توضیح داد، به‌ویژه اگر به دوران جزئی نیاز باشد، زیرا میزان دوران قابل مشاهده است و با کمی چرخاندن، تصویر روی خودش می‌افتد. اما حالت به ظاهر ساده ولی مبهم وقتی است که از دانش‌آموزان کوچک‌تر پرســیده شــود که اگر یک شــکل، ۳۶۰ درجه بچرخد چه اتفاقی می‌افتد؟ این امر به تعریف جدیدی از مفهوم «تقارن دورانی» منجر خواهد شد.

اســکمپ (۱۹۹۳)، میــان مفاهیــم اولیــه (که مســتقیماً از تجربیــات حســی و حرکتــی حاصل می‌شــوند) و مفاهیــم عالی‌تر (که از ســایر مفاهیم منشاء می‌گیرند)، مقایسه‌ای انجام داده است. یکی از این مقایســه‌ها در مورد مفهوم عدد «ســه» است که آن را می‌تــوان به‌عنــوان مفهوم اولیــه در نظر گرفت که حاصل قرار دادن اشــیاء یا نمونه‌های بسیار سادۀ سه‌تایی در اختیار کودک اســت. اما «عدد اول» یک مفهوم عالی‌تر اســت که «سه» یکی از نمونه‌های آن محسوب می‌شــود. هرچه یک تعریف از تجربه فاصلۀ بیشــتری داشــته باشــد، مفهوم عالی‌تری محسوب می‌شــود. اســکمپ به این نکته نیز اشاره می‌کند که عمدۀ چالش‌هــا در یادگیری ریاضــی به‌دلیل وجود مفاهیم عالی‌تری است که بسیار خلاصه‌تر از مفاهیم پایه‌ای و عینی خود، مطرح شــده‌اند. مسیر یادگیری مفهوم (مسیری که شروع آن با مفاهیمی است که در زندگی روزانه با آن‌ها سروکار داریم و پایان آن مفاهیم عالی‌تر است)، همیشــه در جهت اختصار پیش رفته اســت. این به آن معناست که یادگیری مفاهیم سطح پایین‌تــر که از تنوع و عینیت بیشــتری برخوردارند، بــرای آموزش مفاهیمی بعدی که در ســطح بالاتری قرار دارند و عمومیت بیشتری دارند، ضروری است.

یکی دیگر از مشکلات مرتبط با یادگیری مفهوم در ریاضیات این اســت کــه برخی از مفاهیم کلیدی که دانش‌آموزان در ســال‌های ابتدایی یاد گرفته‌اند، ناکامل، ســاده و دور از مفهوم اصلی می‌باشند. برای مثال، دانش‌آموزان مفهوم «عدد» را برای شــمارش تعــداد اشــیای موجــود در یــک مجموعــه تعریف می‌کننــد؛ اما این تعریف تنهــا می‌تواند برای تجربۀ اولیۀ آن‌ها از شــمارش مناسب باشــد، و لذا بعداً که آنان بــا مفاهیمی چون اعداد ترتیبــی، محور اعداد، اعداد گویا، اعداد اعشــاری، اعداد منفی، اعداد مورد اســتفاده برای اندازه‌گیری و غیــره برخورد خواهند کــرد، باید ایــن مفهوم اولیه از عــدد، در ذهن آن‌ها

تغییر کرده و توسعه یابد. این توسعه، فرایندی است شامل تناقض‌های شناختی قابل ملاحظه که ممکن است، این تناقض‌ها، با کسب تجربیات جدید و نوآرایی درک دانش‌آموزان از مفاهیم اولیه، مرتفع شوند و یا اینکه، برعکس، منجر به توقف تلاش از سوی دانش‌آموزان برای درک مفهوم جدید و یا بیشتر از آن یعنی ریاضیات گردد!

مثال‌های عملی

در ادامه مثال‌هایی ارائه خواهد شد که به چگونگی شکل‌گیری مفاهیم پایه و اساسی ریاضی به‌عنوان پیش‌نیازی برای یادگیری مفاهیم عالی‌تر می‌پردازد. برای نمونه در یادگیری مفهوم «تقسیم»، دانش‌آموزان با مثال‌های متعددی از تقسیم یک عدد بر عدد دیگر آشنا می‌شوند که حاصل همهٔ آن‌ها عدد صحیح است، برای مثال ۲۸ تقسیم بر ۴، ۱۲ تقسیم بر ۳ و غیره. اما به زودی دانش‌آموزان با مواردی روبه‌رو می‌شوند که حاصل تقسیم دیگر عددی صحیح نیست؛ برای مثال زمانی که ۱۹ بر ۴ یا ۱۱ بر ۳ تقسیم می‌شود. انجام این‌گونه تقسیم‌ها مستلزم یادگیری مفهوم‌های انتزاعی‌تری همچون «عدد اعشاری»، «خارج‌قسمت»، «باقی‌مانده» و «عامل» است.

دانش‌آموزان ممکن است مفهوم «عامل» را در اثر توضیحات معلم با مثال‌های مختلف درک کنند، مثلاً اینکه ۴ عامل ۲۸ است، ۳ عامل ۱۲ است، ۴ عامل ۹ نیست و ۳ هم عامل ۱۱ نیست. اما از آنجا که مفهوم «عامل»، یک انتزاع مرتبهٔ بالاتر است، آموزگاران باید به دنبال جایگزینی آن با تعاریف ساده‌تر باشند و حتی، تا جای ممکن، از بیان صریح کلمهٔ عامل در نمونه‌های متنی و تصویری، خودداری کنند (برای مثال به هایلوک ۲۰۰۶ صفحهٔ ۱۲۳ مراجعه شود). اما در همین حد نیز دانش‌آموزان می‌توانند تعریفی از عامل داشته باشند، آن‌ها معمولاً عامل را عددی می‌دانند که عدد بزرگ‌تر بر آن به‌صورت دقیقی بخش‌پذیر است و سعی می‌کنند این تعریف را در مورد مثال‌های تاحدودی سخت‌تر و خاص‌تر نیز به‌کار ببرند. مثلاً، آیا ۷ عاملی از ۷ است؟

یکی دیگر از مشکلات مرتبط با یادگیری مفهوم در ریاضیات این است که برخی از مفاهیم کلیدی که دانش‌آموزان در سال‌های ابتدایی یاد گرفته‌اند، ناکامل، ساده و دور از مفهوم اصلی می‌باشند

آیا ۱ عامل همه‌چیز است؟ آیا صفر عامل همه‌چیز است؟ آیا ۳/۵ عامل ۷ است؟ پاسخ به این سؤالات می‌تواند منجر به بازسازی تعریف قبلی از عامل، در ذهن دانش‌آموز گردد.

هنگامی که مفهوم عامل به‌طور کامل آموخته شد، باید مفاهیم عالی‌تر را مطرح کرد؛ مثلاً مفهوم عدد اول را. در این مورد نیز ابتدا کار را با مشاهده و بحث دربارهٔ نمونه‌ها و غیرنمونه‌ها شروع می‌کنیم. در هنگام بررسی عامل‌ها مشاهده کردیم که برخی از اعداد مثل ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ تنها دارای دو عامل هستند. عدد ۱ و خودشان. این اعداد نمونه‌هایی از یک مفهوم جدید با عنوان اعداد اول هستند. سایر اعداد مثل ۴، ۶، ۸، ۹ و ۱۰ بیش از دو عامل دارند. این اعداد غیرنمونه‌ها یا همان غیراول‌ها هستند. تا اینجا می‌توان از روی نمونه‌های ذکر شده، یک تعریف ابتدایی از عدد اول ارائه کرد و سپس یک مورد چالش برانگیزتر را مطرح نمود. آیا ۱ هم عدد اول است؟ این پرسش باعث تغییر در تعریف اولیه می‌گردد و موجب تصحیح تعریف به‌صورت نهایی آن می‌شود: «عدد اول، عددی است که دقیقاً دارای دو عامل است» (بنابراین ۱ عدد اول نیست).

مطالعهٔ بیشتر

در فصل ۷ از کتاب چیلد (۲۰۰۷)، یک معرفی اجمالی از یادگیری مفاهیم ارائه شده است. در حال حاضر چاپ هشتم این کتاب منتشر شده است. فصل ۲ از کتاب لایبک (۱۹۸۴) نیز به مطالعهٔ چگونگی شکل‌گیری مفهوم در سال‌های اولیهٔ یادگیری ریاضی پرداخته است.

معلمـان ابتدایـی می‌توانند در زمان مناسب با کودکان به بحث و فعالیـت بپردازنـد و ایده‌های اولیهٔ آن‌ها را به چالش بکشـند و فرصت‌هایی را برای ارائهٔ اصل بقای عـدد و دیگـر کمیت‌های اندازه‌گیری فراهم کنند

بقای کمیت

معرفی مفهوم

در ریاضیات و علوم، اصل بقای کمیت به این معنا اسـت که، در یک شـیء، کمیت‌هایی همچون عدد، طول، جرم و حجـم، همواره ثابت و بدون تغییر باقی می‌مانند. آگاه بودن دانش‌آموزان از اصل بقای کمیت و فهم صحیح آن، یکی از معیارهای اصلی در سنجش افزایش درک و فهم دانش‌آموزان است.

توضیح و بحث

طبق قانون بقای جرم، جرم یک کمیت مشـخص از ماده اسـت که در صورت تغییر حالت یا تغییر شکل آن ماده، ثابت باقی می‌ماند. برای مثال، یک تودهٔ خمیر اسباب‌بازی اگر به شکل استوانه درآید یا به تعدادی گلولهٔ کوچک تقسـیم شـود و یا حتی به کرهٔ ماه برده شود، همواره جرم ثابتی خواهد داشـت. اصل بقای حجم نیز مشمول همین قاعده اسـت، بدین معنا که می‌توان با ریختن مقدار مشـخصی آب در چند ظرف متفاوت به دانش‌آموز نشان داد که حجم آب همیشه ثابت خواهد بود حتی اگر ارتفاع آن در یک ظرف بیشـتر یا کمتر از ارتفاع آن در ظرف‌های دیگر باشد.

روان‌شـناس برجسـتهٔ آموزشـی، ژان پیـاژه، اصـل بقای کمیت تحـت انتقال را به‌عنـوان یکی از شـاخص‌های کلیدی در توسعهٔ درک و فهم کودکان معرفـی کرد. نتایج حاصـل از ارزیابی‌های انفرادی او در کودکان، در زمینهٔ بقای کمیت‌های مختلف، نشان داد که اکثر کودکان ۵ تا ۶ سـاله، اصل بقای عدد را درک می‌کننـد. پیاژه در یکـی از مطالعات خود، که به‌منظور سـنجش درک بقای عدد انجام داد، شـش بطری و شش لیوان را به کودکان نشان داد و از آن‌ها می‌خواسـت تا به سـؤالاتی دربارهٔ تعـداد بطری‌ها و لیوان‌ها پس از چینش مجدد، تفکیک و تجمیع آن‌ها در کنار یکدیگر، پاسخ دهند. پیاژه همچنین ادعا کرد که ایدهٔ بقای طول و مسافت به دنبال درک بقای جرم و وزن، در کـودکان ۶ تا ۷ سـاله شـکل می‌گیرد در حالی که بقای حجم تا سـنین ۱۱ تا ۱۲ سالگی برای کودکان قابل درک نیست.

نظـرات پیاژه دربارهٔ توسـعهٔ درک بقای کمیت، از سـوی محققان دیگر به چالش کشیده شد، به‌ویژه این انتقـادات در مـورد «اصل انتزاع» در کارهـای او دیده می‌شد و شیوهٔ بیان پرسش‌ها از سوی پیاژه، بیشتر نمود یافتند. دونالدسـون (۱۹۸۶) معتقد بود که کودکان ۴ ساله زمانی می‌توانند اصل بقای عدد را درک کنند که در صورت سؤالاتی که از آن‌ها پرسیده می‌شود یک جمله یا محتوای معنی‌دار گنجانده شود، مثلاً جملهٔ «زمانی که داری با خرس‌های تدی بازی می‌کنی...».

مک‌گریگل و دونالدسون (۱۹۷۴) نشان دادند که چگونه درک کودکان از اصـل بقای کمیت، می‌تواند تحت تأثیـر انتظارات بزرگ‌ترها از آن‌هـا قرار گیرد. بـرای نمونه آن‌ها می‌گوینـد کودکی که بیش از یک بار، در مورد تعداد بطری‌ها و لیوان‌ها در یک مجموعه، مورد سـؤال قرار می‌گیرد، اگر تعداد بطری‌ها با تعداد لیوان‌ها متفاوت باشد، هر بار پاسخ خود را به گونه‌ای که تصور می‌کند بیشـتر مورد رضایت بزرگ‌ترها قرار می‌گیـرد تغییر می‌دهـد. بنابراین یافته‌هـای پیاژه، اغلب با مشـاهدات معلمان مدارس ابتدایی و با زمینهٔ اجتماعی کلاس درس، مطابقت نداشـت. برای مثال دانش‌آموزان کمتر از ۱۱ سـال در شـرایطی که واقعاً تشنه باشند یا علاقه‌مند به آب‌میوه باشند و معلم دو حجم یکسـان از آب‌میوهٔ خنک را داخل دو لیوان که یکی باریک‌تر اسـت بریزد، بیشتر دانش‌آموزان سراغ نوشیدنی به دید خود کوچک‌تر نخواهند رفت. آن‌ها، به علت تشـنگی، ناخودآگاه تحت تأثیر جاذبهٔ ارتفاع بیشتر از آب‌میوه هستند.

سؤال مهمی که اتفاقاً سؤال معلمان مدارس ابتدایی نیز هست این است که، آیا درک مسئلهٔ بقای کمیت از جانب دانش‌آموز، ناشی از بلوغ است یا اینکه آموزش‌پذیر است و می‌توان آن را از راه تمرکز بیشتر بر آموزش و روش‌های گوناگون تدریس ایجاد کرد؟ این سؤال توسط پیاژه پاسخ داده نشد و حتی در تحقیقاتی که بعد از او در این زمینه انجام شد نیز مدنظر قرار نگرفت.

مثال‌های عملی

بیشتر معلمان مدارس ابتدایی، اصل بقای اعداد را به‌عنوان یک جزء مهم از درک و فهم شمارش و کار با اعداد توسط دانش‌آموزان می‌شناسند و فعالیت‌های خاصی را طراحی می‌کنند که این اصل را در بر داشته باشد. برای مثال معلم زیرمجموعه‌ای از ارقام یک مجموعهٔ ده تایی را پنهان می‌کند و از کودکان می‌خواهد آن‌ها را بشمارند و سپس تشخیص دهند که چه ارقامی پنهان شده‌اند. اقدامات ساده‌ای از این قبیل نشان می‌دهد که کودکان بر این باورند که فلان مجموعهٔ ده‌رقمی وجود دارد، حتی زمانی که قادر به دیدن همهٔ عضوهای آن نباشند. به‌عبارت دیگر اعداد حفظ شده‌اند.

همچنین معلمان ابتدایی می‌توانند در زمان مناسب با کودکان به بحث و فعالیت بپردازند و ایده‌های اولیهٔ آن‌ها را به چالش بکشند و فرصت‌هایی را برای ارائهٔ اصل بقای عدد و دیگر کمیت‌های اندازه‌گیری فراهم کنند. مثلاً می‌توانند دو گلولهٔ خمیر اسباب‌بازی با جرم‌های متفاوت (در اینجا وزن و جرم را یکی می‌گیریم) را در اختیار تعدادی کودک ۸ ساله قرار بدهند و از آن‌ها بخواهند تا از ترازو برای تعیین گلولهٔ سنگین‌تر استفاده کنند. سپس از کودکان می‌خواهند گلولهٔ کوچک‌تر را به‌گونه‌ای تغییر شکل دهند که از دیگری سنگین‌تر شود. این فعالیت در نهایت باعث می‌شود که کودکان چنین جمله‌ای را بر زبان آورند: «هر کاری بکنی نمی‌توانی آن را سنگین‌تر کنی!». با این کار، کودک از طریق یک بازی اصل بقای وزن را درک می‌کند.

اگر، براساس یافته‌های پیاژه، فعالیت‌هایی مشابه با فعالیت فوق را، ولو برای کودکان با سن کمتر، طراحی کنیم و آن‌ها را از روش‌هایی که کودکان دوست دارند تجربه کنند، اجرا کنیم، به شناخت بهتر کودک از اصل بقا کمک کرده‌ایم.

مطالعهٔ بیشتر مارگارت دونالدسون در کتاب «اذهان کودکان» (چاپ اول، سال ۱۹۸۶، تجدید چاپ سال ۱۹۸۷)، نقدی مبتنی بر تحقیق را در مورد کارهای پیاژه در زمینهٔ توسعهٔ درک کودکان از اصل بقا، ارائه کرده است. به گفتهٔ بسیاری از معلمان ابتدایی، کارها و مطالعات دونالدسون در مقایسه با کارهای پیاژه با تجربیات آن‌ها از کلاس درس، بیشتر همخوانی داشت. فصل ۶ از کتاب هایلوک و کوکبرن (۲۰۰۳)، دربارهٔ بقای کمیت‌های اندازه‌گیری بحث می‌کند و در پایان فصل، چند نمونه بازی را در گروه‌های کوچک معرفی می‌کند که می‌تواند مبحث مربوطه را کامل کند. همچنین در فصل ۱۲ از اسمیت و همکاران (۲۰۰۳)، تحت عنوان «شناخت نظریهٔ پیاژه»، در مورد پیشرفت کودکان در ریاضی و نقش مهم اصل بقا در این زمینه، توضیح داده شده است.

پی‌نوشت‌ها

1. Key concepts in teaching primary mathematics
2. Derek Haylock
3. Fiona Thangata
4. Definition
5. Explanation and discussion
6. practical examples
7. Further reading
8. Mental calculation
9. Perry & Dockett
10. Number sense
11. National Numeracy Strategy
12. Van Den Heuvel- Panhuizen
13. Bierhoff
14. Filling
15. Bridging
16. Fives
17. Doubles
18. Compensation
19. Friendly Numbers
20. Prerequisite Knowledge
21. Spatial Imagery
22. Haylock& Cockburn
23. Informal calculation method
24. Skill learning

روش تدریس

ضرب چندجمله‌ای‌ها و ساده کردن آن‌ها

پریسا معمارزاده- دبیر ریاضی متوسطه دوم- شهرستان بیجار

چکیده

یکی از مباحث مهم در ریاضی پایهٔ اول متوسطه، ضرب یک جمله‌ای درچندجمله‌ای و ضرب چندجمله‌ای در چندجمله‌ای است که از مباحث کاربردی و مهم ریاضی به‌شمار می‌رود و به‌ویژه در محاسبات مربوط به درس‌های شیمی و فیزیک کاربرد دارد.

کلیدواژه‌ها: ضرب یک جمله‌ای در چندجمله‌ای، ضرب چندجمله‌ای در چندجمله‌ای

در تجربهٔ تدریس خود در ضرب چندجمله‌ای‌ها، بارها شاهد بوده‌ام که دانش‌آموزان، ضریب را تنها در جملهٔ اول چندجمله‌ای ضرب می‌کنند. برای مثال:

$-۲(x^۲-۲x+۱)=-۲x^۲-۲x+۱$

یعنی دانش‌آموز، به جای اینکه عدد ۲- را درتمام جمله‌ها ضرب کند، آن را فقط درجمله اول ($x^۲$) ضرب کرده است. بعضی از همکاران درس شیمی نیز مشابه این اشتباه را در درس خود، مشاهده کرده‌اند. به گفتهٔ آن‌ها، بسیاری از دانش‌آموزان، برای مثال، برای شمارش اتم‌های $۲H_۲O$، در موازنه، عدد۲ را فقط در تعداد هیدروژن‌ها ($H_۲$)، یعنی ۲ ضرب می‌کنند و به اتم اکسیژن (O) کاری ندارند که این کار، باعث مشکلات مفهومی جدی برای آن‌ها در درس شیمی می‌شود.

نمونهٔ دیگری از این اشتباه‌ها، درضرب چندجمله‌ای‌ها، مانند زیر، رُخ می‌دهد:

$(x+۱)(x^۲-۲x)$

که در آن، بعضی دانش‌آموزان، جمله اول از پرانتز اول یعنی x را، فقط در جملهٔ اول پرانتز دوم یعنی $x^۲$ ضرب می‌کنند.

من برای رفع این مشکل، از روش زیر، برای تدریس ضرب چندجمله‌ای‌ها، استفاده کردم و خوشبختانه در پی آن اشتباهاتی از نوع بالا، به‌طور چشمگیری در کلاس کاهش یافت.

روش تدریس ضرب چند جمله‌ای‌ها: در ابتدای تدریس، این سؤال را از دانش‌آموزان پرسیدم:

شما در کلاس نشسته‌اید و درِ کلاس هم بسته است. شخصی به در ضربه می‌زند. این شخص حامل خبری است. مثلاً خبر آورده است که ساعت بعدی، بدون هماهنگی قبلی، امتحان یکی از درس‌ها را دارید. چه حالی به شما دست می‌دهد؟

دانش‌آموزان پاسخ دادند: «همه دچار همهمه می‌شویم و به جنب‌وجوش می‌افتیم».

از آن‌ها پرسیدم «آیا خبر امتحان، فقط بر شخصی که کنار در نشسته است تأثیر می‌گذارد؟» و آن‌ها پاسخ دادند که «خیر! این خبر همهٔ ما را نگران می‌کند و روی همهٔ ما تأثیر می‌گذارد». سپس از این سؤال، به‌عنوان تمثیلی برای ضرب چندجمله‌ای‌ها، استفاده کردم.

این در وپنجره، به منزلهٔ دو پرانتز بسته هستند و شما دانش‌آموزان، به منزلهٔ عبارت داخل پرانتز هستید. یعنی به‌طور مثال، فرض کنید شما (x^2-3x+1) و شخصی که خبر برگزاری امتحان ناگهانی را آورده و پشت در است، همان عدد ۲ است. پس همان‌طور که خبر امتحان، روی همهٔ دانش‌آموزان تأثیر می‌گذارد، عدد ۲ نیز روی تمام جملات داخل پرانتز تأثیر گذاشته، یعنی در تمام جملات داخل پرانتز ضرب می‌شود!

با این مثال، ضعیف‌ترین دانش‌آموز نیز این مفهوم را درک کرد و به راحتی، فهمید که باید عدد ۲ را در تمام جملات داخل پرانتز ضرب کند. پس حاصل عبارت است از: $2x^2-6x+2$.

پس از آن، مثال زیر را مطرح نمودم:

$(x+1)(2x^2+3x+4)$

برای حل مثال بالا، با اشاره به آن شخص که پشت در بود، این گونه گفتم که: این بار، ۲ نفر پشت در هستند وحامل خبرند. سپس سؤال کردم: وقتی این ۲ نفر، همزمان درِ کلاس را می‌زنند و شما در را باز می‌کنید، چگونه خبرشان را به شما می‌دهند؟ آیا هر دو نفر همزمان با هم خبر را می‌دهند و یا خبرها را فقط به شخصی که کنار در نشسته است، می‌دهند؟ دانش‌آموزان پاسخ دادند: «نه! از آن دو نفر می‌خواهیم یکی‌یکی داخل شوند و خبر خود را بدهند تا درست بشنویم که خبر چیست». آن‌گاه، از آن‌ها خواستم که روشن‌تر توضیح دهند که این اتفاق چگونه می‌افتد.

یکی از دانش‌آموزان، به‌طور کامل، این‌طور توضیح داد: «به نفر اول می‌گوییم وارد کلاس شود و خبرش را بدهد. هنگامی که خبرش را می‌دهد، این خبر روی همه تأثیر می‌گذارد. بعد از اینکه نفر اول خبرش را داد و اثرش را گذاشت، نفر دوم را به کلاس راه می‌دهیم تا او هم خبرش را بدهد. این خبر هم، روی همه دانش‌آموزان اثر می‌کند».

من از این بیان بچه‌ها استفاده کردم و مثال ریاضی بالا را این‌طور نوشتم:

$$(x+1) \times (2x^2+3x+4)$$

این همان دو نفری هستند که خبر آورده‌اند — این شما دانش‌آموزان کلاس هستید

شبیه‌سازی: نفر اول یعنی جمله x می‌آید و خبرش را می‌دهد و تأثیرش روی همه است، پس x را در تمام جملات ضرب می‌کنیم. برای دومین نفر نیز به همین شکل عمل می‌کنیم، یعنی:

$$(x+1)(2x^2+3x+4)=(2x^3+3x^2+4x)+(2x^2+3x+4)=2x^3+3x^2+4x+2x^2+3x+4$$

و بدین ترتیب، ۱ و x را درتک‌تک جملات ضرب می‌کنیم. بعد برای ساده کردن جملات مشابه هم، به دانش‌آموزان پیشنهاد کردم که از روی آهنگ صدا و نحوه تلفظ جملات، جمله‌های مشابه را پیدا کنند. مثلاً، با گوش کردن به صدای خود ـ به این صورت که هنگامی که دو جمله مانند $3x^2$، $2x^2$ را با صدای بلند تکرار می‌کنند، جملات مشابه دارای آواهای مشابه‌اند. هر جمله‌ای که با سایر جملات دارای آوای مشابه بود، یعنی با آن‌ها مشابه است و از یک جنس است، پس می‌توانند با هم جمع یا از هم کم شوند.

من به عنوان دبیر ریاضی، فکر می‌کنم که اگر بتوانیم تا جایی که امکان دارد، مطالب ریاضی را شهودی کنیم، توانایی دانش‌آموزان را در آموختن درس ریاضی بالا برده و به رفع اشتباهاتی مانند آنچه که اشاره شد، کمک می‌کنیم. علاوه بر این، کلاس درس ریاضی از حالت خشکی و بی‌احساس بودن خارج شده و جو شادتری به خود می‌گیرد.

معماهایی در منطق ریاضی

مقداد قاری، پژوهشکده ریاضیات،
پژوهشگاه دانش‌های بنیادی

چکیده

منطق ریاضی بنیاد و مبانی ریاضیات را تشکیل می‌دهد. در عین حال ارائهٔ جذاب و قابل قبولی از این مبحث مهم برای دانش‌آموزان همیشـه دغدغهٔ معلمان بوده است. در این مقاله سعی می‌شود مباحث مقدماتی منطق و مبانی ریاضی، با طرح معماهایی مرتبط، برای دانش‌آموزان ارائه شود. هدف از طرح این معماها این است که دانش‌آموزان به‌طور فعال و با تجربهٔ فردی با مفاهیمی چون رابطه‌های منطقی (مانند نقیض، عطف، فصل، اگر آنگاه، و اگر و تنها اگر)، سـورهای «برای هر» و «وجود دارد»، جدول ارزش، اثبات، و استدلال منطقی آشنا شوند. آموزش منطق ریاضی با استفاده از این معماها در قالب کارگاه‌هایی برای دانش‌آموزان دبیرستان قابل اجرا می‌باشد.

کلیدواژه‌ها: منطق ریاضی، رابطه‌های منطقی، جدول ارزش، اصول ریاضی، اثبات، و قاعده منطقی.

مقدمه

منطـق ریاضی یکـی از بنیادی‌تریـن مباحث در ریاضی است. لزوم ایجاد تفکر منطقی در دانش‌آموزان برای فعالیت ریاضی بر کسی پوشیده نیست. فراگیری مطالبـی مقدماتی از این شـاخه از ریاضـی برای هر دانش‌آموز، معلم و ریاضیدانی ضروری است. آموزش و تمرین در مسـائل منطقی حتی در سطح عموم باعث رشد منطقی ذهن می‌شـود. متأسفانه مباحث مربوط به منطق ریاضی در نظام آموزش‌وپرورش ایران جایگاه مناسـبی ندارد. برخی از مباحث اصلی منطق ریاضی کـه همهٔ دانش‌آموزان و قبل از آن معلمان آن‌ها باید با آن آشنایی داشته باشند عبارت اند از: آشنایی با منطق گزاره‌ها، رابطه‌های منطقـی و جدول‌های ارزش آن‌ها، استدلال منطقی و اثبات.

چالش اصلی در آموزش منطق ریاضی این است که چگونه این مفاهیم را به صورتی جذاب برای دانش‌آموزان ارائه دهیم. از این رو در مقاله حاضر سـعی شده است

مفاهیم اولیه منطق مقدماتی با روش مناسبی ارائه شود. در بخش ۲ و ۳ معماهایی از کتاب‌های منطق‌دان بزرگ، اسمولیان [۴] و [۷] مطرح می‌کنیم. اسمولیان[1] منطق‌دانی است که علاوه بر داشتن فعالیت‌های علمی پژوهشی بسیار در منطق ریاضی، کتاب‌های زیادی نیز پیرامون معماهای منطقی منتشر کرده و در آن‌ها تلاش کرده است تا با روشی مهیج دانش‌آموزان را درگیر مسائل منطقی کند. او به این طریق پا را از منطق مقدماتی فراتر گذاشته و مفاهیم پیشرفته منطق ریاضی (از جمله قضیهٔ ناتمامیّت گودل، منطق موجّهات و مسائل خود ارجاع در [۷] و [۸]، منطق ترکیبیاتی در [۶]، مسائل فلسفهٔ ریاضی در [۵]) را به دانش‌آموزان آموزش می‌دهد. در این مقاله، ما نیز سعی می‌کنیم تا منطق ریاضی را به‌عنوان موضوعی پایه‌ای و در عین حال زیبا در آموزش ریاضی مطرح سازیم.

از آنجا که در این مقاله مطالب به‌صورت معما مطرح شده‌اند به خوانندهٔ علاقه‌مند پیشنهاد می‌شود که پس از خواندن هر معما، سعی کند ابتدا خودش پاسخ را بیابد و سپس مطالب را دنبال کند.

شهر معماها

به‌منظور ایجاد بستری مناسب برای معرفی مفاهیم منطقی، شهری به نام شهر معماها را در نظر می‌گیریم. اهالی این شهر یا راستگو هستند و یا دروغگو (و نه هر دو). راستگوها همیشه راست می‌گویند و دروغگوها همیشه دروغ می‌گویند. همچنین اهالی این شهر یکدیگر را می‌شناسند و اطلاع دارند که کدام‌یک از همشهریان خود راستگو و کدام‌یک دروغگو است. پس به‌طور خلاصه وضعیت اهالی این شهر چنین است:

۱. اهالی شهر یا راستگو هستند و یا دروغگو؛

۲. راستگوها همیشه راست می‌گویند؛

۳. دروغگوها همیشه دروغ می‌گویند.

در ادامه با استفاده از اصول بالا و نیز منطق گزاره‌ها قضیه‌هایی ثابت خواهد شد. به این ترتیب دانش‌آموزان با مفاهیمی چون اصول موضوعه، قضیه و اثبات آشنا خواهند شد. برای معرفی هر یک از رابط‌های منطقی یک معما مطرح می‌کنیم.

معمای ۱ (نقیض): مقداد سه نفر از اهالی شهر معماها، به نام‌های شفیع، محمدرضا و احسان، را می‌بیند. از احسان می‌پرسد: «شما راستگو هستید یا دروغگو؟» احسان طوری صحبت می‌کند که مقداد منظور او را نمی‌فهمد؛ بنابراین از محمدرضا می‌پرسد: احسان چه گفت؟ محمدرضا پاسخ می‌دهد: «احسان گفت که من دروغگو هستم». در این لحظه شفیع می‌گوید: «حرف محمدرضا را باور نکن، او دروغگو است». حال سؤال این است که محمدرضا و شفیع راستگو هستند یا دروغگو؟

برای کمک به یافتن پاسخ این معما می‌توان قضیه زیر را بیان کرد.

قضیه ۱. هیچ یک از اهالی این شهر نمی‌تواند ادعا کند که «من دروغگو هستم».

اثبات. اهالی شهر یا راستگو هستند و یا دروغگو. پس دو حالت داریم:

۱. اگر فردی راستگو باشد، هیچ‌گاه جملهٔ «من دروغگو هستم» را بیان نمی‌کند، زیرا در این صورت دروغ گفته است.

۲. اگر فرد دروغگو باشد، با بیان جملهٔ «من دروغگو هستم» عبارت راستی را بیان کرده، در صورتی‌که دروغگو هیچ‌گاه راست نمی‌گوید.

پاسخ معمای ۱: با استفاده از قضیه ۱ می‌توان به‌راحتی معمای ۱ را پاسخ داد. چون هیچ‌یک از اهالی این شهر نمی‌تواند ادعا کند که «من دروغگو هستم»، پس احسان نمی‌تواند گفته باشد که من دروغگو هستم. در نتیجه محمدرضا دروغگو است، و شفیع راستگو است.

دقت کنید که اهالی این شهر می‌توانند ادعا کنند که: «من دروغگو هستم». برای مثال یک فرد راستگو می‌تواند چنین ادعایی داشته باشد.

قضیهٔ ۱ مشابه با پارادوکس دروغگو[2] ست. شخصی می‌گوید: «من دروغ می‌گویم». سؤال این است که آیا این شخص راست می‌گوید یا دروغ! پارادوکس دروغگو صورت‌های مختلف بسیاری دارد. برای مثال این جمله را در نظر بگیرید: «این جمله غلط است». حال سؤال این است که این جمله راست است یا غلط!

معمای ۱ می‌تواند نقطهٔ شروعی برای معرفی منطق گزاره‌ها[3] باشد. گزاره جملهٔ خبری کامل و ساده‌ای است که بتوان به آن ارزش درستی ۱ یا نادرستی صفر (۰) نسبت داد. زبان منطق گزاره‌ها شامل بی‌نهایت نماد گزاره‌ای $p,q,\ldots$ برای نمایش این گزاره‌ها می‌باشد. ارزش گزارهٔ p را با $v(p)$ نشان می‌دهیم. پس $v(p)\in\{0,1\}$.

حال بیایید به آنالیز منطقی معمای ۱ بپردازیم. فرض کنید گزارهٔ «من راستگو هستم» را با p نشان داده‌ایم. در این صورت جملهٔ «من دروغگو هستم» را می‌توان معادل با «من راستگو نیستم» در نظر گرفت. جملهٔ «من راستگو نیستم» را در منطق گزاره‌ها می‌توان بر حسب گزاره p به صورت $\sim p$ بیان کرد. $\sim p$ را بخوانید «نقیض p» (یا «نه p»). در واقع رابط منطقی نقیض ارزش یک گزارهٔ درست را غلط و ارزش یک گزارهٔ غلط را درست می‌کند. این معنی از رابط منطقی نقیض ~ را می‌توان با جدول ارزش زیر (جدول۱) نشان داد.

v(p)	v(~p)
۰	۱
۱	۰

جدول۱

منطق گزاره‌ها دارای رابطه‌های منطقی دیگری چون ترکیب عطفی $\wedge$، ترکیب فصلی $\vee$، ترکیب شرطی $\rightarrow$ و ترکیب دو شرطی $\leftrightarrow$ می‌باشد. فرمول‌های $p\wedge q$، $p\vee q$، $p\rightarrow q$ و $p\leftrightarrow q$ را به ترتیب به‌صورت "p و q"، "p یا q"، اگر p آنگاه q"، "p اگر و تنها اگر q" بخوانید. در فرمول $p\rightarrow q$ گزارهٔ p را مقدم و گزارهٔ q را تالی می‌نامند. جدول ارزش این رابطه‌های منطقی را در زیر (جدول۲) مشاهده می‌کنید. بقیه رابطه‌های منطق گزاره‌ای در [۱] ارائه شده‌اند.

v(p)	v(q)	v(p∧q)	v(p∨q)	v(p→q)	v(p↔q)
۰	۰	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱

جدول۲

در اینجا برای هر کدام از رابطه‌های منطقی یک معما مطرح می‌کنیم (معماهای بیشتر را می‌توانید در کتاب‌های اسمولیان بیابید [۴-۸]).

معمای۲ (ترکیب عطفی): در شهر معماها به دو نفر از اهالی شهر به نام‌های شفیع و محمدرضا برخورد می‌کنیم. از آن‌ها می‌پرسیم که کدام‌یک از شما راستگو و کدام‌یک دروغگو هستید؟ شفیع جواب می‌دهد: «ما هر دو دروغگو هستیم» یا به عبارت دیگر: «من و محمدرضا دروغگو هستیم». آیا می‌توانید بگویید هر کدام از این دو نفر چه نوع هستند؟ راستگو یا دروغگو؟

پاسخ: دقت کنید که اگر شفیع راستگو بود هیچ‌گاه ادعا نمی‌کرد که «ما هر دو دروغگو هستیم». پس شفیع دروغگو است، و در نتیجه جمله‌ای که گفته غلط است. یعنی هر دوی آن‌ها دروغگو نیستند. پس محمدرضا راستگو است.

معمای۳ (ترکیب فصلی): در شهر معماها به دو نفر از اهالی شهر به نام‌های شفیع و محمدرضا برخورد می‌کنیم. از آن‌ها می‌پرسیم که کدام‌یک از شما راستگو و کدام یک دروغگو هستید؟ شفیع جواب می‌دهد: «حداقل یکی از ما دروغگو است» یا به عبارت دیگر: «من دروغگو هستم یا محمدرضا دروغگو است». آیا می‌توانید بگویید هر کدام از این دو نفر چه نوع هستند؟

پاسخ: اگر شفیع دروغگو باشد، آنگاه جمله او که حداقل یکی از ما دروغگو است درست خواهد بود، که غیرممکن است. پس شفیع راستگو است، و در نتیجه جملهٔ او درست است. یعنی حداقل یکی از آن‌ها دروغگو است. چون شفیع راستگو است، پس محمدرضا باید دروغگو باشد.

البته معماهای ۲ و ۳ را می‌توان با استفاده از جدول‌های ارزش ترکیب‌های عطفی و فصلی (جدول۲) با در نظر گرفتن چهار حالت راستگویی و دروغگویی برای شفیع و محمدرضا نیز حل کرد.

معمای ۴ (ترکیب شرطی). در شهر معماها به دو نفر از اهالی شهر به نام‌های شفیع و محمدرضا برخورد می‌کنیم. از آن‌ها می‌پرسیم که کدام‌یک از شما راستگو و کدام‌یک دروغگو هستید؟ شفیع جواب می‌دهد: «اگر من راستگو باشم، آنگاه محمدرضا نیز راستگو است». آیا می‌توانید بگویید هر کدام از این دو نفرچه نوع هستند؟

در اینجا به‌جای پاسخ دادن به این معمای خاص قضیه کلی زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه۲. برای هر گزارهٔ p، اگر یکی از اهالی بگوید: «اگر من راستگو باشم، آنگاه p، در این‌صورت این شخص باید راستگو باشد و گزاره p نیز درست است.

اثبات. دو حالت در نظر می‌گیریم. اگر شخصی که این جمله را بیان کرده دروغگو باشد، آنگاه جمله شرطیِ بیان شده غلط است. اما چون مقدم جمله شرطی نیز غلط است، پس بنابر جدول ارزش ترکیب شرطی (جدول۲) کل جملهٔ شرطی باید درست باشد، که این تناقض است.

بنابراین شخصی که این جمله را بیان کرده باید راستگو باشد. در نتیجه جملهٔ شرطیِ بیان شده و مقدم آن درست هستند. پس بنابر جدول ارزش ترکیب شرطی (جدول۲) گزارهٔ p نیز درست است.

پاسخ معمای ۴: حال با استفاده از قضیهٔ۲، شفیع و محمدرضا هر دو باید راستگو باشند.

معمای ۵ (ترکیب دو شرطی): در شهر معماها به دو نفر از اهالی شهر به نام‌های شفیع و محمدرضا برخورد می‌کنیم. از آن‌ها می‌پرسیم کدام یک از شما راستگو و کدام‌یک دروغگو هستید؟ شفیع جواب می‌دهد: «من و محمدرضا از یک نوع هستیم؟ یا به عبارت دیگر: «ما هر دو راستگو یا هر دو دروغگو هستیم». آیا می‌توانید بگویید هر کدام از این دو نفر چه نوع هستند؟

بیایید ابتدا قضیهٔ زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیهٔ ۳. برای هر گزارهٔ P، اگر یکی از اهالی بگوید که «من راستگو هستم اگر و تنها اگر p" در این‌صورت گزاره p درست است (صرف‌نظر از اینکه این شخص راستگو است یا دروغگو).

اثبات. دو حالت در نظر می‌گیریم. اگر شخصی که این جمله را بیان کرده راستگو باشد، آنگاه جملهٔ دوشرطیِ بیان شده درست است. چون قسمت اول جملهٔ دوشرطی (یعنی «من راستگو هستم») نیز درست است، پس بنابر جدول ارزش ترکیب دوشرطی (جدول۲) گزاره p باید درست باشد. حال اگر شخصی که این جمله را بیان کرده دروغگو باشد، در نتیجه جمله دوشرطی بیان شده و قسمت اول جمله دوشرطی (یعنی «من راستگو هستم») غلط هستند. پس بنابر جدول ارزش ترکیب دوشرطی (جدول ۲) گزارهٔ p باید درست باشد. بنابراین مستقل از اینکه شخص راستگو باشد یا دروغگو گزارهٔ p درست است.

پاسخ معمای ۵: دقت کنید که آنچه شفیع در معمای ۵ گفته معادل است با اینکه بگوید: «من راستگو هستم اگر و تنها اگر محمدرضا راستگو باشد». حال با استفاده از قضیهٔ۳، نتیجه می‌گیریم که محمدرضا باید راستگو باشد، اما در مورد شفیع اظهارنظری نمی‌توان کرد.

با استفاده از جدول‌های ارزش گفته شده برای رابط‌های منطقی (جدول‌های ۱ و ۲) می‌توان برای هر فرمولی جدول ارزشی به‌دست آورد. حال می‌خواهیم مشابه با اهالی راستگو و دروغگو در شهر معماها، به تعریف فرمول‌های راستگو و دروغگو بپردازیم. فرمولی که در جدول ارزش آن همواره ارزش ۱ داشته باشد فرمول راستگو[۴]، و فرمولی که همواره ارزش صفر (۰) داشته باشد فرمول دروغگو[۵] نام دارد.

سؤال. مثال‌هایی از فرمول راستگو و دروغگو ارائه دهید.

این سؤال پاسخ‌های زیادی دارد، از جمله فرمول‌های راستگو می‌توان به $p\to p$ ، $p\wedge q\to p$ ، $p\vee\sim p$ اشاره کرد. به وضوح نقیض هر فرمول راستگو فرمولی دروغگو است. برای مثال $p\wedge\sim p$ فرمولی دروغگو است.

دقت کنید که فرمولی مانند $\sim p\to q$ نه راستگو است و نه دروغگو. حال بیایید شهری را در نظر بگیرید که اهالی آن راستگو، دروغگو یا نرمال هستند. اهالی نرمال گاهی راست و گاهی دروغ می‌گویند. معمای زیر از [۴] انتخاب شده است.

معمای ۶. سه نفر به نام‌های A، B و C که یکی راستگو، یکی دروغگو و یکی نرمال است جملات زیر را بیان می‌کنند:

A. من نرمال هستم.

B. جمله A درست است.

C. من نرمال نیستم.

فکر می‌کنید A، B و C هر یک چه نوع هستند؟

چگونه همه چیز را ثابت کنیم

در این بخش به معرفی سورهای عمومی و وجودی می‌پردازیم. سورهای عمومی و وجودی به ترتیب عبارت‌اند از $\forall$ و $\exists$، که به ترتیب «برای هر» و «وجود دارد» خوانده می‌شوند. منطقی که زبان آن شامل رابط‌های منطق گزاره‌ها و سورهای عمومی و وجودی می‌باشد را منطق مرتبه اول[۶] یا منطق محمولات[۷] می‌نامند. در اینجا با ارائهٔ دو معما تنها به معرفی سورهای عمومی و وجودی می‌پردازیم و از پرداختن به جزئیات منطق مرتبهٔ اول صرف‌نظر می‌کنیم.

معمای ۷. جملات زیر را در نظر بگیرید:

۱. اسب شاخدار وجود ندارد.
۲. من پرواز نمی‌کنم.
۳. جمله‌ای در این مستطیل وجود دارد که غلط است.

آیا جمله ۳ راست است؟

پاسـخ: فـرض کنید جملـه ۳ غلط اسـت، پس جمله‌ای در مستطیل بالا وجود ندارد که غلط باشد. در صورتی که فرض کرده بودیم که جمله ۳ غلط اسـت، که این یک تناقض است. بنابراین جمله ۳ باید درست باشد، و در نتیجه جمله‌ای در مستطیل بالا وجود دارد که غلط اسـت. از آنجاییکه جمله ۳ درست است، پس جمله ۱ یا جمله ۲ غلط خواهد بود. یعنی اسب شاخدار وجـود دارد یا من پرواز می‌کنم. چون می‌دانیم اسـب شاخدار وجود ندارد، در نتیجه من پرواز می‌کنم.

معمای۸. جملات زیر را در نظر بگیرید:

۱. خانواده من فردا یک لپ‌تاپ برای من می‌خرند.
۲. همه جملات این مستطیل غلط هستند.

آیا جمله ۲ راست است؟

پاسـخ: فـرض کنید جمله ۲ راسـت باشـد. در این‌صورت همه جملات مستطیل بالا باید غلط باشند، در صورتی که فرض کردیم جمله ۲ راسـت است. این تناقض نشان می‌دهد که جمله ۲ باید غلط باشد. یعنی جمله‌ای در مسـتطیل بالا وجود دارد که راست باشد. چون جمله ۲ غلط است، پس جمله ۱ باید راست باشد. یعنی خانواده من فردا یـک لپ‌تاپ برای من خواهند خریـد. دقت کنید که به‌جای جمله ۱ در این معما هر عبارتی که قصد داریم آن را ثابت کنیم می‌توان قرار داد!

در واقع معماهای ۷ و ۸ پارادوکس‌هایی هسـتند که می‌تـوان آن‌ها را گونه‌هایـی از پارادوکس دروغگو به حسـاب آورد. روشی برای حل پارادوکس دروغگو و پارادوکس‌های مشابه آن توسط منطقدان بزرگ آلفرد تارسکی[۸] در [۳] ارائه شده است.

آنچه دانش‌آموزان از لحاظ منطقی از این دو معما می‌آموزند این است که:

$$\sim\exists x\ p(x) \equiv \forall x \sim P(x)$$
$$\sim\forall x\ p(x) \equiv \exists x \sim P(x)$$

۴. قواعد منطقی

منطق ریاضـی نظم دهنده و وحدت‌بخش ریاضی است. همه اسـتدلال‌های یک ریاضیدان باید منطقی باشد. در این بخش به یکی از کاربردهای منطق گزاره‌ها در ریاضی و همچنین در استدلال‌هایی که در زندگی روزمره به‌کار می‌بریم می‌پردازیم.

یک قاعده[۹] تشکیل شده است از تعدادی فرضیات p_1 و p_2 و... و p_n و یک حکم q، که به‌صورت زیر نشـان داده می‌شود:

$$\frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{q}$$

قاعده بالا معتبر (یا منطقی) نامیده می‌شود هر گاه از فرض درستی p_1 و p_2 و... و p_n بتوان درستی q را نتیجه گرفت، یا به عبارت دیگر اگر فرمول $p_1\wedge p_2\wedge\ldots\wedge p_n\rightarrow q$ راستگو باشد. در اثبات قضایای ریاضی ما فقط مجاز به استفاده از قواعد منطقی هستیم. برای مثال برهان خلف را می‌توان به‌صورت قاعدهٔ زیر نوشت:

$$\frac{p \rightarrow \perp}{p}$$

که در آن $\perp$ نشـان‌دهنده یک فرمول دروغگو (یا به اصطلاح تناقض) اسـت. به‌راحتی می‌تـوان دید که اگر $v(\sim p\rightarrow\perp)=1$ آنگاه $v(p)=1$. پس برهان خلف یک قاعدهٔ منطقی اسـت و در نتیجه به‌کار بـردن این قاعده در هر جای ریاضی (و حتی در اسـتدلال‌های خودتان) درست است. مثال‌های بیشتر از قواعد منطقی در [۲] آمده است.

منطق فازی

در این بخش به معرفی کوتاه یکی از پرکاربردترین منطق‌هـا به نام منطق فـازی[۱۰] می‌پردازیم[۱۱]. منطق فازی یک منطق بی‌نهایت ارزشـی اسـت که توسط لطفی عسگرزاده در سال ۱۹۶۵ معرفی شد و تاکنون کاربردهـای زیادی در علوم مختلف یافته اسـت. در منطق فازی ارزش یک گزاره می‌تواند کاملاً درست(۱) کاملاً نادرست (۰) و یا درجه‌ای از درستی بین این دو (یعنی عددی بین ۰ و ۱) باشد. به عبارت دیگر، v(p) عددی حقیقی در بازه [۰، ۱] اسـت. منطق فازی در مـواردی که ارزش یک گزاره مبهم اسـت و به‌صورت کاملاً درسـت یا نادرست تعیین نمی‌شود کاربرد پیدا می‌کند. برای مثال گزارهٔ «این شـخص پیر است» یا «این شـخص بلند قد است» فازی هستند. مثال‌های بیشتر را خود بیابید.

مشـابه با منطق گزاره‌ها این سؤال می‌تواند مطرح شـود که چگونه می‌توان گزاره‌های بـا ارزش مبهم را به‌وسیلهٔ رابط‌های منطقی با هم ترکیب کرد. برای این

منظور ابتـدا باید رابط‌های منطقی منطـق گزاره‌ها را به‌عنوان توابعی[12] روی مجموعـه $\{1 ، 0\}$ (یا $[0 ، 1]$) نگاه کرد.

سـؤال. آیا می‌توانید تابعی برای $v(\sim p)$ بر حسب $v(p)$ بیابیـد؟ آیـا می‌توانیـد تابعی بـرای $v(p \wedge q)$، $v(p \vee q)$، $v(p \rightarrow q)$ و $v(p \leftrightarrow q)$ برحسـب $v(p)$ و $v(q)$ بیابید؟

برخی از پاسخ‌ها به‌صورت زیر است:

- $v(\sim p)=1-v(p)$.
- $v(p \wedge q)=\min\{v(p), v(q)\}=\max\{0, v(p)+v(q)-1\}=v(p).v(q)$.
- $v(p \vee q)=\max\{v(p), v(q)\}=\min\{1, v(p)+v(q)\}=v(p)+v(q)-v(p).v(q)$.
- $v(p \rightarrow q)=\max\{1-v(p), v(q)\}=\min\{1, 1-v(p)+v(q)\}=1-v(p)+v(p).v(q)$.

روابط بالا ارزش گزاره‌های مرکب در منطق گزاره‌ها و همچنین در منطق فازی را تعریف می‌کنند. با در نظر گرفتن ترکیبات مختلفی از تعاریف بالا به‌عنوان ارزش رابط‌های منطقی منطق‌های فازی مختلفی به‌دست می‌آید.[13]

نتیجه‌گیری

در این مقاله سعی کردیم با استفاده از معماهایی به معرفی منطق مقدماتی برای دانش‌آموزان بپردازیم. با به‌کارگیـری این معماها علاوه بـر اینکه مفاهیم و مباحث منطقی به دانش‌آموز آموزش داده می‌شـود، دانش‌آمـوز را به این مباحث علاقه‌منـد می‌کند، در ضمن دانش‌آموزان به‌صـورت فعال در روند یادگیری مشارکت می‌کنند. پس از ارائهٔ این کارگاه، با طراحی کارگاه‌هایی که در آن کاربردهایی از منطق در ریاضی و علوم مختلف (مانند آنچه در بخش‌های ۴ و ۵ به‌طور مختصر بیان شـد، و یـا کاربرد منطـق در مدارهای منطقی و...) را نشـان می‌دهند می‌توان این مطالب را به‌طور ملموس‌تـری بیان کرد. آموزش منطق ریاضی با اسـتفاده از این معماها در قالـب کارگاه‌هایی برای دانش‌آموزان دوم دبیرستان در خانه ریاضیات اصفهان به‌صورت کاملاً موفقیت‌آمیز انجام شـده اسـت. این کارگاه‌ها باعث شـده است که تعدادی از دانش‌آموزان بـه منطق ریاضـی و کاربردهای آن علاقه‌مند شـده و شـروع به تحقیق روی این موضـوع کنند. در واقع این کارگاه‌ها به‌صورت یک نمایش در کلاس توسـط نگارنده و آقایان محمدرضا چنگیز، احسان حق‌شناس و شفیع شکرانی برگزار شد، که لازم می‌دانم در اینجا از همکاری این دوسـتان و همچنین خانم شراره تقی دستجردی صمیمانه سپاسگزاری نمایم.

پی‌نوشت‌ها

1. Smullyan. R
2. Liar Paradox
3. Propositional logic
4. Tautology
5. Contradiction
6. First order logic
7. Predicate logic
8. Alfred Tarski
9. Rule
10. Fuzzy logic

۱۱. فازی به معنای مبهم یا مشکک می‌باشد.

۱۲. این توابـع را توابع بولی، به افتخار جورج بول، می‌نامند ([۱] را ببینید).

۱۳. برای کسـب اطلاعات بیشـتر به مقاله منطق فازی در لینک http://plato.stanford.edu/entries/logic-fuzzy مراجعه کنید.

منابع

۱. اندرتون، هربـرت ب.، (۱۳۷۸)، **آشـنایی با منطق ریاضی**، ترجمه غلامرضا برادران خسروشاهی و محمد رجبی طرخورانی، چاپ دوم، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.

۲. بت داود، جمـس، (۱۳۸۶)، **مبانی ریاضیات**، چاپ هجدهم، انتشارات دانشگاه پیام نور.

۳. ناگل، ارنست، نیومن، ج، آلفرد تارسکی، (۱۳۶۴)، **برهان گودل و حقیقت و برهان**، ترجمه محمد اردشیر، چاپ اول، انتشارات مولی.

4. Smullyan, R., (1978), **What is the name of this book,** Prentice- Hall, INC, New Jersey.

5. Smullyan, R., (1980), **This Book Needs no Title,** Prentice-Hall, INC, New Jersey.

6. Smullyan, R., (1985), **To Mock a Mockingbird, and Other Logical Puzzles Including an Amazing Adventure in Combinatory Logic,** Alfred A. Knopf, New York.

7. Smullyan, R.,(1987), **Forever Undecided, A Puzzle Guide to Godel,** Alfred A. Knopf, New York.

8. Smullyan, R., (1989), **The Lady or the Tiger? And Other logical Puzzles Including a Mathematical Novel That Features Godel's Great Discovery,** Alfred A. Knopf, New York.

زنون، حرکت و بی‌نهایت

زهرا گویا– دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

به گفتهٔ کلاین (۱۹۸۵)، «بشـر با یک معمای دوگانه مواجه اسـت؛ اول اینکه جایی که پدیدهٔ فیزیکی فهمیده می‌شود و ما، اصول موضوعهٔ مرتبط را می‌پذیریم، چرا ثابت شده است که صدها و صدها استنتاجی که از آن اصول موضوعه می‌شود، به اندازهٔ همان‌ها، کارایی دارند؟ آیا منطق بشری با طبیعت مطابقت دارد؟ و دوم اینکـه؛ چرا ریاضـی در حوزه‌هایی که پدیده‌های فیزیکی در آن‌ها ناشـناخته‌اند، کار می‌کند؟» (ص. ۲۱۰). کلاین معتقد است که نمی‌توان این پرسش‌ها را نادیده گرفت، زیرا علوم و تکنولوژی، بسیار به ریاضی وابسته‌اند. پس مطمئناً، باید قدرت یا منبعی در ریاضی باشد که برای ما آشکار نیست. در ذات طبیعت، نوعی هماهنگی نهفته است که این هماهنگی در ذهن‌های ما، به‌صورت قانون‌های سادهٔ ریاضی متجلی می‌شود. این هماهنگی، خود دلیلی است بر اینکه پیشامدهای طبیعی به‌وسیلهٔ ترکیبی از مشاهده و تحلیل‌های ریاضی، قابل پیش‌بینی هستند... انسان به‌طور مستمر، مشاهدات و نظریه‌های خود را با هم تنظیم می‌کند تا به نتایج تجربی و مشاهدات جدیدی برسد. هدف هر دو، تبیین منسجم و جامعی از جهان طبیعت است. ریاضی، بین انسان و طبیعت و بین دنیاهای درونی و بیرونی انسان، وساطت می‌کند... ما به این جمع‌بندی می‌رسیم که ریاضی و حقیقت فیزیکی، جدایی‌ناپذیرند.

در هـر صورت، همان‌طور که شـهریاری (۱۳۸۰، ص. ۳۲) ابـراز می‌دارد، «آنچه می‌تواند ماهیت و جوهر ریاضیات را بشناسد، تاریخ ریاضیات و چگونگی شکل‌گیری مفهوم‌های ریاضی است. بدون توجه به تاریخ ریاضی و بدون توجه به بستگی تنگاتنگ ریاضی با نیازهای بشری، نمی‌توان درون‌مایهٔ ریاضیات را شناخت». در این مقاله، به گوشه‌ای از این تاریخ که مربوط به «باطل‌نمای زنون» است، می‌پردازیم. زنون از نام‌آوران حوزهٔ علمی آتن بود و تا قرن‌ها، با شبهه‌هایی که ایجاد می‌کرد، حرکت را از جامعهٔ علمی سلب کرده بود و بدین سبب، تمپل (۱۹۶۰) او را، متعلق به «مکتب انتقادی خراب‌کننده» دانسته است (ص. ۳۹). در این مقاله، نشان داده شده است که چگونه، امروزه، با پیشرفت ریاضیات، شبهه‌هایی که زنون مطرح می‌کرد، همگی قابل رفع و رجوع‌اند.

کلیدواژه‌ها: پارادوکس زنون، عدد کاردینال، خرگوش و لاک‌پشت، حرکت.

معرفی زنون

پارمنیدس، - یونانی (۵۴۰- ۵۱۵م) از فلاسفه‌ای بود که حواس را شایستهٔ اعتماد نمی‌دانست و مانند افلاطون، حقیقت را تنها در عالم مُثُل، جست‌وجو می‌کرد. در واقع او معتقد بود که ریاضی، در بیرون از ذهن‌های ما وجود دارد. دیویس و هِرش (۱۹۸۱)، به توصیف این دیدگاه پرداخته و توضیح داده‌اند که عبارت معروف «[عدد] پی در آسمان است[۱]»، نمونه‌ای از باورهای فلسفی افلاطونیان بوده است. بر همین اساس پارمنیدس به یافتن حقیقت، از راه استدلال معتقد بود. به گفتهٔ هال (۱۹۶۰)، زنون نیز که شاگرد پارمنیدس بود، تا امروز بیشتر با شبهه‌ها[۲] یا باطل‌نماهایی که مطرح کرده و موضوع اصلی آن‌ها «حرکت» است، شهرت دارد. تلاش برای گشودن راز و رمز سخنان شبهه‌ناک زنون، سرانجام به نظریهٔ جدید بی‌نهایت و تدوین حسابی که برای مقاصد هندسی، از هر حیث دقیق بود، انجامید. برای آشنایی با افکار زنون، به دو باطل‌نمای او اشاره می‌شود.

باطل‌نمای زنون

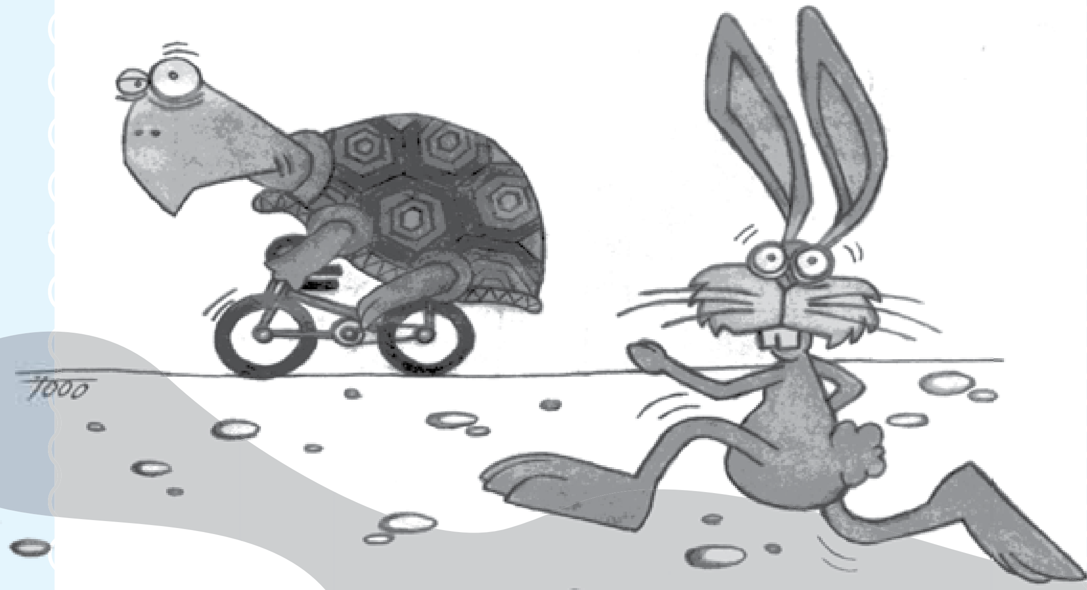
اگر لاک‌پشت حرکت خود را شروع کرده باشد و خرگوش بخواهد به او برسد، ابتدا باید نصف آن فاصله را طی کند. سپس نصف دیگر و همین طور ادامه دهد. به گفته زنون، در این صورت خرگوش هیچ‌گاه به لاک‌پشت نخواهد رسید.

نکتهٔ اصلی در این باطل‌نما این است که در عصر زنون هنوز کسی، مفهوم دنباله هندسی و حد مجموع سری هندسی را درک نمی‌کرد و نمی‌دانست که نصف کردن مستمر فاصله‌ها و جمع آن ۱/۲ها، در واقع محاسبهٔ «حد مجموع یک سری» با جملهٔ اول ۱/۲ و قدر نسبت ۱/۲ است که یک سریِ همگراست و حد آن برابر ۱ است.

داستان این باطل‌نما به تفصیل، در فعالیت ۲-۸ کتاب «ریاضی پایه، دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشته علوم انسانی» (ص ۴۳- ۴۱) آمده است که خوانندگان را به آن ارجاع می‌دهیم. اکنون، به پارادوکس یا باطل‌نمای معروف دیگر زنون می‌پردازیم.

معمای خرگوش و لاک‌پشت (آخیلیس و سنگ‌پشت)

در متن‌های مختلف، با عبارت‌های متفاوتی از این دو موجود- یکی آهسته‌رو و دیگری تیزرو- نام برده شده است که معروف‌ترین آن‌ها **آخیلیس- سنگ‌پشت و خرگوش- لاک‌پشت** است. در متن‌های



زیادی هم به‌جای خرگوش، از آشیل- دونده اساطیری- نام برده شده است. در هر صورت، زنون با این شبهه می‌خواست مفهوم تشکیل خط از نقطه‌های بی‌شمار را متناقض جلوه دهد. اما ببینیم این معما یا پارادوکس چیست.

پارادوکس زنون: پاره‌خط AX را در نظر بگیرید. تصور کنید خرگوشی از نقطهٔ A به سمت نقطهٔ X و لاک‌پشتی از نقطه‌ای روی خط به نام T به سوی X در حرکت‌اند. A————————T————X

برای فهمیدن این داستان، به دانش زیر نیاز داریم که از طریق مثال‌های زیر، به آن‌ها می‌پردازیم.

مثال ۱: اگر دو مجموعه متناهی A و B داشته باشیم که تعداد عناصرشان با هم برابر باشند؛

$A= \{۱, ۲, ۳\}$

و

$B= \{۴, ۵, ۶\}$

آن‌گاه می‌توانیم تابعی ۱-۱ و پوشا از A به B تعریف کنیم، به‌طوری که بین دو مجموعه، تناظر (تطابق) ۱-۱، برقرار باشد:

$f(۱) = ۴$

$f(۲) = ۵$

$f(۳) = ۶$

یعنی؛

$f = \{(۱, ۴), (۲, ۵), (۳, ۶)\}$

طبق تعریف، دو مجموعه دارای یک **عدد اصلی** یعنی **هم‌کاردینال** هستند، در صورتی که یک تابع ۱-۱ و پوشا، بین آن‌ها برقرار باشد (یعنی تناظر ۱-۱ بین آن‌ها برقرار باشد.)

پس عدد اصلی (کاردینال) مجموعه‌های A و B برابر است.

مثال ۲: دو مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم:

$A= \{۱, ۲, ۳\}$ و $B= \{۱, ۲, ۳, ۴\}$

$f(۱) = ۱$

$f(۲) = ۲$

$f(۳) = ۳$

یعنی؛

$f = \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳)\}$

مجموعه A، زیر مجموعهٔ اکید مجموعهٔ B است و یک تابع همانی است، اما پوشا نیست. پس عدد اصلی (کاردینال) A، کوچک‌تر از عدد اصلی (کاردینال) B است.

کاردینال A = ۳ که کوچک‌تر از کاردینال B = ۴ است.

پس در مجموعه‌های متناهی، این خاصیت وجود دارد که اگر A زیر مجموعهٔ اکید B باشد، کاردینال A، کوچک‌تر از کاردینال B است.

البته، وقتی که وارد مجموعه‌های نامتناهی می‌شویم، این قاعده به هم می‌خورد. به مثال زیر، توجه کنید.

مثال: مجموعهٔ اعداد طبیعی[۳] را در نظر بگیرید: $N= \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,...\}$

مجموعهٔ اعداد زوج[۴] را تعریف می‌کنیم:

$E= \{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,...\}$

تابع f را به‌صورت روبه‌رو می‌نویسیم:

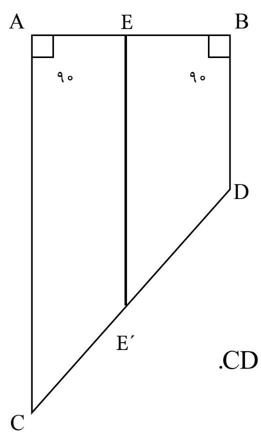
$f(n) = ۲n$

f تابعی ۱-۱ و پوشاست. اما با وجودی که E (مجموعهٔ اعداد زوج) زیر مجموعهٔ اکید N (مجموعهٔ اعداد طبیعی) است، کاردینال (عددهای اصلی) هر دو مجموعه، با هم برابرند، زیرا بین آن‌ها، تابعی ۱-۱ و پوشا برقرار است.

خاصیت ۱-۱ بودن: $f(n) = f(m)$ نتیجه می‌دهد که $۲n = ۲m$ و از آنجا، $n = m$.
خاصیت پوشا بودن: هر عدد زوج تقسیم بر ۲ می‌شود، تا N تشکیل شود.

تعریف:
عدد اصلی (کاردینال) هر مجموعه‌ای که با مجموعهٔ اعداد طبیعی تناظر ۱-۱ داشته باشد (۱-۱ و پوشا باشد)، با کاردینال اعداد طبیعی برابر است.

مثال مجموعه اعداد حقیقی:



از هر نقطه E روی خط AB یک خط بر AB عمود می‌کنیم تا خط CD را در E′ قطع کند. E′ تصویر E است و
$f: AB \to CD$

پس
$f(E)=E'$
در نتیجه f یک تابع ۱-۱ و پوشا است. بنابراین

تناظر ۱-۱ از AB به CD برقرار است، پس کاردینال AB = کاردینال CD.

مثال: تابع $f(x) = ۱/x$ را از $f: [۰, ۱] \to [۱, \infty)$ در نظر بگیرید:

$f(x)= ۱/x$

پس برای هر y، یک x وجود دارد به‌طوری که؛

$x = ۱/y$

در نتیجه،

$$f(x) = ۱/x = \frac{۱}{\frac{۱}{y}} = y$$

پس f پوشاست.
همچنین،

$۱/x = ۱/x'$

که از اینجا نتیجه می‌گیریم؛

$x = x'$

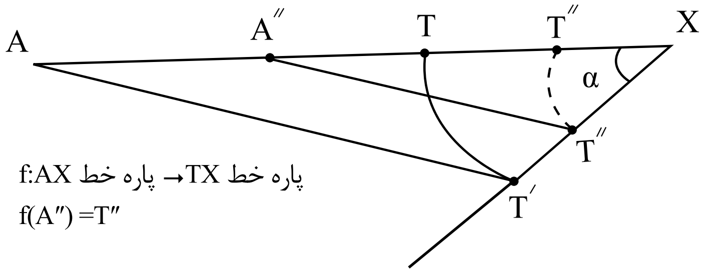
پس f، ۱-۱ هم هست.

برای بهتر فهمیدن این مطلب، روی همان پاره‌خطی که زنون اشاره کرد، یعنی

A ———————— T ———————— X

TX را روی پاره‌خط AX، به مرکز X و یک زاویهٔ حاده، دَوَران می‌دهیم و آن را T′ می‌نامیم. نقطهٔ T′ را به نقطهٔ A وصل می‌کنیم. از هر نقطه مانند A″ روی AX، خطی موازی AT′ رسم می‌کنیم تا آن را در نقطهٔ T″ قطع کند. دوباره، خط XT′ را با دورانی با همان زاویه، به‌جای اولش روی خط AX برمی‌گردانیم.

نقطهٔ ″T، درواقع، تصویر ″A است. این تابع تصویر، تناظر یک به یکی است بین AX و TX. پس کاردینال AX و TX، با هم برابرند.



پس در اینجا ما بین پاره‌خط AX و ′XT تناظر ۱-۱ برقرار کرده‌ایم. یعنی کاردینال AX برابر است با کاردینال TX. برای زنون شبهه از اینجا ایجاد شد که اگرچه نمی‌توانست رسیدن خرگوش به لاک‌پشت را انکار کند، اما با توجه به این که تفکر او یک تفکر متناهی بود، نمی‌توانست قبول کند که کاردینال یک زیرمجموعهٔ اکیدِ یک مجموعه، با کاردینال همان مجموعه، یکی باشد. بنابراین، **تشکیل شدن خط از نقطه** را انکار کرد.

با این وجود، به گفتهٔ هال (۱۹۶۰)، «گالیله قبل از همه، به ماهیت این مغالطه[5] پی برد» (ص. ۵۷). گالیله نشان داد که اگرچه AX و TX از جهت طول برابر نیستند، اما دارای نقاط برابرند که این، نتیجه‌ای محال نیست. پس می‌توان پذیرفت که خرگوش از لاک‌پشت پیشی گرفته است، بدون آن که تشکیل شدن AX و TX را از نقاط، منکر شد. گالیله این امر را ممکن دانست، زیرا نقاط AX و TX، یک **ردهٔ بی‌نهایت**[6] تشکیل می‌دهند.

هال (۱۹۶۰)، رفع شبهه‌ای را که زنون ایجاد کرده بود، با طرح «ردهٔ بی‌نهایت»، به‌صورت زیر بیان کرده است:

«برای آن که با مشکلی روبه‌رو نباشیم، باید مراد خود را از اینکه می‌گوییم دو ردهٔ بی‌نهایت دارای تعداد اجزای برابر هستند، روشن کنیم. نمی‌توانیم اجزا را بشماریم. اما اگر توانستیم نشان دهیم که هر جزیی از یک رده، با یک جزء و تنها یک جزء از ردهٔ دیگر متناظر است، شمارش لزومی ندارد. پس از این می‌توان گفت که میان اجزای دو رده، تناظر یک به یک[7] برقرار است. اگر چنین تناظری برقرار باشد، می‌گویی دو رده، شامل تعداد اجزای برابرند. بر پایهٔ این تعریف، ممکن است یک ردهٔ بی‌نهایت، اجزای بی‌نهایت دیگری را به‌عنوان بخشی از اجزای خود شامل باشد» (صص. ۵۷ و ۵۸).

مثال گالیله: به ازای هر عدد طبیعی، یک عدد مربع و به ازای هر عدد مربع، یک جذر صحیح وجود دارد.

N اعداد طبیعی : ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ...

S مربع اعداد : ۱ ۴ ۹ ۱۶ ۲۵ ...

تابع f از اعداد طبیعی به مربع آن اعداد را، به‌صورت به توان $f(n) = n^2$ تعریف می‌کنیم. مجموعهٔ S، زیر مجموعهٔ اکید N است، حال برای نشان دادن برابری کاردینال این دو، باید نشان دهیم که f، ۱-۱ و پوشاست.

– **شـرط ۱-۱ بودن:** $f(n) = f(m)$ نتیجه می‌دهد که $n^2 = m^2$. پس $n = m$. یعنی شـرط ۱-۱ بودن برقرار است

– **شـرط پوشـا بودن:** برای هر n^2، می‌توان جذر آن را گرفت و آن جذر، یک عدد طبیعی است. پس شرط پوشا بودن برقرار است.

پس کاردینال S برابر است با کاردینال N که الف صفر نامیده می‌شود.

سخن پایانی

زنون، دنیا را متناهی می‌دید. بنابراین، نمی‌توانست تصور کند که یک مجموعه، با زیرمجموعهٔ واقعی خود، هم کاردینال باشد. پس نتیجه گرفت که خط از نقطه تشکیل نشده است. اما بعداً، معلوم شد که پارادوکس زنون نیز مانند بسیاری از پارادوکس‌های دیگر، در واقع پارادوکس نبود! این بدان معناست که به سبب تلاشی که مطرح‌کنندگان پارادوکس‌ها برای دفاع از ادعاهایشان می‌کنند، خواسته یا ناخواسته، باعث پیشرفت ریاضی در قسمت‌های مختلف شده و می‌شوند. انگار که سرشت پارادوکس‌ها این است که ضد خود را تولید کنند! به‌طور نمونه، پارمنیدس که استاد زنون بود، «اعتقاد داشت که جهان تنها از یک شیء تشکیل شده است و تعداد اشیایی که وجود دارند، تنها یکی است» (ص. ۴۳). بدین سبب، «پارمنیدس فکر می‌کرد که هیچ چیز حرکت نمی‌کند، زیرا حرکت بدین معناست که بیش از یک شیء در جهان وجود دارد، یعنی هر چیز، یک محل خاتمه و یک محل شروع دارد. اگرچه ممکن است چنین به‌نظر برسد که چیزی حرکت می‌کند، اما این فقط یک سراب است» (ص. ۴۳). از نظر پارمنیدس، یک شیء، بازهٔ زمانی بی‌نهایت ندارد، اما وجودش بی‌زمان و بی‌تغییر است: نه وجود داشته، نه وجود خواهد داشت، زیرا الان هست، و در کل، یک است (انگلین، ۱۹۹۴، به نقل از بارنس، ۱۹۸۷)

در حقیقت، پارمنیدس نگران بود که پذیرش حرکت، به منزلهٔ نفی تک‌عنصری بودن جهانش تلقی شود! پس شاگرد زنون، برای حفظ مکتب استادش، تمام تلاشش را کرد تا با چهار پارادوکسی که مطرح کرد، نشان دهد که حرکت، سرابی بیش نیست! به گفتهٔ تمپل (۱۹۶۰)، زنون در ریاضی، نمایندهٔ مکتب انتقادی خراب‌کننده است، زیرا با انتقادهایی که به ریاضیات موجود زمان خود وارد کرد، اتفاقاً باعث رشد آن ریاضیات شد، مفاهیم جدیدی خلق شدند و از همه مهم‌تر، باعث خلق مفهوم **اعداد نامتناهی** شد. زنون با تخریب ریاضیات موجود، ریاضیات دوران خود را رشد داد.

تاریخ ریاضی نشان می‌دهد که برای رفع شبهه‌ها و حل و فصل پارادوکس‌ها در هر مرحله، مرزهای ریاضیات فراتر رفته‌اند و باب‌های جدیدی گشوده شده و باز هم، پارادوکس‌های تازه‌ای مطرح خواهند شد! از این نظر، زنون را متعلق به «مکتب خراب‌کننده» نامیده‌اند که پارادوکس‌هایش، آن‌چه را که بود تخریب نمود و به جایش، افق نویی ترسیم کرد.

پی‌نوشت‌ها

1. Pi in the Sky!

مجله‌ای با این عنوان توسط **مؤسسه علوم ریاضی پاسیفیک** منتشر می‌شود.

2. Zeno’s Paradoxes
3. Natural Numbers
4. Even Numbers
5. Fallacy
6. Infinite class
7. One- one correspondence

منابع

۱. تمپل، اریک. بل. (۱۹۳۷). **ریاضی‌دانان نامی**. ترجمه حسن صفاری (۱۳۶۳). مؤسسه انتشارات امیرکبیر.
۲. شهریاری، پرویز. (۱۳۸۰). **فلسفه، اخلاق و ریاضیات**. انتشارات پژوهنده.
۳. گویا، زهرا؛ گویا، مریم؛ ظهوری زنگنه، بیژن؛ حاجی‌بابایی، جواد و جهانی‌پور، روح‌الله. (۱۳۷۴). **ریاضی پایه: دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ علوم انسانی**. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
۴. هال، لویس. و. هلزی. (۱۹۶۰). **تاریخ و فلسفهٔ علم**. ترجمه عبدالحسین آزرنگ (چاپ دوم، ۱۳۶۹). سروش.
۵. یوسف، جورج. گرگیس. (۱۹۹۱). **کاکل طاووس: ریشه‌های غیراروپایی ریاضیات**. ترجمه غلامحسین صدری افشار (۱۳۸۵). شرکت انتشارات علمی و فرهنگی.
6. Anglin, W.S. (1994). **Mathematics: A Concise History and Philosophy**. Springer-Verlag.
7. Kline, Morris. (1985). **Mathematics and the Search for Knowledge**. Oxford University Press.
8. Davis, P. J. & Hersh, R. (1981). **The Mathematical Experience**. Birkhauser.

استفاده از روش مور

در تدریس هندسه ۱

سیدغلامرضا حسینی، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر دبیرستان‌های شهرستان دره‌شهر، ایلام
امیدعلی شهنی کرم‌زاده، دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

هندسه از دیرباز، یار و یاور بشر بوده است. اندازه‌گیری مساحت زمین‌های کشاورزی و پس از آن ساختمان‌سازی، ابزارسازی و الگوبرداری از طبیعت، نمونه‌هایی از کاربرد هندسه در زندگی اجتماعی آدمی هستند. امروزه نیز توجه به هندسه به‌عنوان ابزاری قابل استفاده در زندگی روزمره و وسیلهٔ تفکر، هنوز هم در برنامه‌های آموزشی جایگاه خاص و قابل تصوری دارد.

در این مقاله، ضمن معرفی روش تدریس جدیدی برای هندسه مبتنی بر روش رابرت لی. مور، مثال‌هایی از کاربرد این روش را در تدریس هندسه ۱، ارائه می‌دهیم. همچنین، نشان می‌دهیم که پس از اجرای روش مور، میانگین نمرات امتحانی درس هندسه ۱ دانش‌آموزان افزایش یافت، مهارت آن‌ها در حل مسائل هندسه بیشتر شد و علاقه‌مندی آنان به درس هندسه و مشارکت در کارهای گروهی، افزایش یافت.

کلیدواژه‌ها: روش مور، هندسه ۱، روش تدریس.

حدود بیست سال است که در دورهٔ متوسطهٔ نظری، به تدریس ریاضی مشغول هستم. طی این سال‌ها، دروس مختلفی چون هندسه، ریاضی عمومی، آمار و مدل‌سازی، جبر و احتمال، حساب دیفرانسیل و انتگرال و ریاضی گسسته را در پایه‌های مختلف دبیرستان و پیش‌دانشگاهی، تدریس کرده‌ام.

هندسه ۱ از جمله درس‌های مشترک بین رشته‌های تجربی و ریاضی-فیزیک است که تمام دانش‌آموزان سال دهم این دو رشته، ملزم به گذراندن آن هستند.

تجربه نشان داده است که از نظر دانش‌آموزان، هندسه یک درس مشکل است. تجربه‌های تدریس این درس هم حاکی از آن است که اکثر دانش‌آموزان، پس از اینکه از فهم و درک روابط و قواعد موجود در آن ناامید می‌شوند، از روی اجبار و طوطی‌وار، مطالبی از آن را به‌صورت پراکنده و غیرمرتبط و بیشتر جهت قبولی در امتحان پایانی، حفظ می‌کنند و این درس را پشت‌سر می‌گذارند.

سال‌ها در این فکر بودم که اگر بتوانم هندسه را با روش جدیدی غیر از روش‌های معمول و موجود تدریس کنم، شاید بتوانم این طرز تلقی نسبت به هندسه را تغییر دهم.

روش مور در تدریس ریاضی[1]

بعد از مطالعهٔ دقیق روش تدریس رابرت مور، تصمیم گرفتم از این روش، در تدریس هندسه ۱- سال دوم رشتهٔ ریاضی فیزیک، استفاده کنم. اما توجه داشتم که با وجودی که روش مور، روشی مناسب و بدیع در تدریس ریاضیات دانشگاهی است، اما لازم است برای اجرای آن در آموزش هندسه، موارد زیر را در نظر بگیرم:

۱. این روش تأکید زیادی بر نخبه‌گرایی دارد؛

۲. وقت بسیار زیادی برای مطالعه از معلم و دانش‌آموزان می‌طلبد؛

۳. نمی‌توان در تدریس همهٔ مواد درسی (غیر از دروس زیرمجموعهٔ ریاضی)، از این روش تدریس به‌خوبی استفاده کرد؛

۴. رابرت مور، این روش را برای تدریس توپولوژی در دانشگاه ابداع کرده است و هدف وی از این کار، تربیت محقق ریاضی است. در نتیجه، استفاده از آن برای هر کلاسی توصیه نمی‌شود. در اجرای این روش، اگر معلم یا دانش‌آموزان بی‌انگیزه باشند یا همکاری دوطرفه در این راستا نباشد، کار ناتمام رها می‌شود.

۵. هنگام اجرای این روش، کلاس پر سر و صدا و شلوغ می‌شود و ممکن است موجب آزار و اذیت کلاس‌های دیگر شود.

با این ملاحظات، و پس از نظرخواهی از دانش‌آموزان، تصمیم به اجرای این روش در تدریس هندسه ۱ کردم.

استفاده از روش مور در تدریس هندسه ۱

برای استفاده از این روش، ابتدا از دانش‌آموزان نظرخواهی کردم. گروهی از دانش‌آموزان معتقد بودند که هندسه درس سختی است و باید وقت زیادی را صرف حفظ قضایا کنند. آن‌ها ابراز می‌کردند که حتی پس از حفظ کردن قضیه‌ها، قادر در به‌کار بردن آن‌ها، در مسائل نیستند، و نمی‌توانند قضایا را به‌صورت کاربردی به‌کار برند. مثلاً نمی‌دانند در حل هر مسئله، از کدام قضیه باید استفاده کنند. این در حالی است که در پیش‌گفتار کتاب هندسه ۱ آمده که این اهداف به‌شرطی قابل اجرا و قابل دسترسی خواهند بود که دانش‌آموزان به کشف روابط هندسی تشویق شوند. در طی این فرایند، باید «به آن‌ها فرصت داده شود تا اشتباه

کرده و اشتباهات خود را تصحیح کنند، حدسیه‌سازی کنند و آن‌ها را به نمایش بگذارند، سپس به استدلال در زمینهٔ اعتبار آن‌ها بپردازند تا در نهایت، به قابلیت‌های خویش در حل مسئله‌های پیچیده اعتماد کنند».

لذا روش مور و نحوهٔ مطالعه‌اش در ریاضی، و شعار معروفش را که در یازده کلمه جمع شده است، معرفی کردم که «دانش‌آموزی به بهترین شکل یاد می‌گیرد که کمترین را شنیده باشد». مور معتقد است دانش‌آموزان باید از مطالب مورد تدریس ناآگاه باشند، و معلم شرایط را به‌عنوان زمین نبرد برای رقابت سالم آن‌ها مهیا نماید. همچنین مور، عقیده داشت دانش‌آموزان باید به تولید و خلق ریاضی بپردازند. لذا این روش برای قلب‌های بی‌حال کارساز نیست.

مور معتقد است دانش‌آموزان باید از مطالب مورد تدریس ناآگاه باشند، و معلم شرایط را به‌عنوان زمین نبرد برای رقابت سالم آن‌ها مهیا نماید. همچنین مور، عقیده داشت دانش‌آموزان باید به تولید و خلق ریاضی بپردازند. لذا این روش برای قلب‌های بی‌حال کارساز نیست

برای اجــرای روش، دانش‌آمــوزان را به گروه‌های همسان از لحاظ تعداد و سطح علمی، تقسیم کردم. سه گروه ۶ نفری و دو گروه ۵ نفری تشکیل شد که هر گروه را به اسم یکی از ریاضی‌دانان بزرگ؛ فیثاغورس، تالس، خوارزمی، نیوتن و خواجه نصیرالدین طوسی؛ نام‌گذاری کرده و با مراجعه به کارنامهٔ ســال قبل آن‌ها، برای هر گروه یک دانش‌آموز مســتعد را که از لحاظ درســی از بقیهٔ دانش‌آموزان در سطح بالاتر و بهتری بود، به‌عنوان سرگروه انتخاب نمودم.

برای تدریس هر قســمت، مســئلهٔ مــورد نظر را روی تخته می‌نوشــتم و اطلاعات و مباحث مربوط به آن را کامــلاً توضیح می‌دادم و تأکید می‌کردم که برای فهمیدن آن، از منابع قابل دفاع استفاده کنند. از طرفی تأکید می‌کردم که صورت مسئله را به‌دقت مطالعه کنند و تا آن را دقیق نفهمیده‌اند، به حل آن اقدام نکنند (فهم ســؤال، نصف جواب). ضمناً، دانش‌آموزان آزاد بودند از یک یا چند استراتژی برای حل مسئله‌ها استفاده کنند و پس از حل، روش یا روش‌های حل را دقیقاً بررســی کنند و راه حل‌ها را مرتب و منظم نمایند.

سپس، هر گروه به بحث و تبادل‌نظر دربارهٔ مسئله می‌پرداختند. از آن‌ها می‌خواســتم ابتدا بدون استفاده از مطالــب کتاب، و بدون اســتفاده از نظرات گروه‌های دیگر، به حل مسئله‌ها بپردازند و اگر نتوانستند، آن‌گاه به کتاب درسی مراجعه نمایند.

به‌عبــارت دیگر، آن‌هــا را آرام‌آرام به‌ســمت رقابت صحیح هدایت می‌کردم. این روش باعث شد که گاهی برای یک مسئله، چندین روش حل پیدا شود که ضمن تشویق دانش‌آموزان، به راه‌حل‌های ابتکاری پاداش‌هایی چون تخصیــص نمرهٔ اضافه به نمرات مســتمر هم در نظرگرفته می‌شــد و همین پاداش‌هــای جزئی، باعث رقابت گروه‌ها و آمادگی آن‌ها قبل از شروع درس می‌شد.

در جلسات اول، به‌دلیل مبتدی بودن دانش‌آموزان و کم‌رنــگ بودن زمینهٔ مشــارکت اعضــای گروه‌ها در بحث‌های درسی، روند تدریس به کندی پیش می‌رفت. اما پس از چند جلســه که دانش‌آموزان با نحوهٔ تدریس آشنا شــدند، به‌تدریج روحیهٔ مشارکت در فعالیت‌های فکری در آن‌ها بالا گرفت و پرســش‌های به‌جا و بادقتی از همدیگــر و از من می‌کردند. بــا انجام این فعالیت‌ها، به‌تدریج برای حل مسئله‌های پایان هر بخش، توانمندتر می‌شــدند و از نحوهٔ حل تمرین آن‌ها، شــاهد بودم که مسئله‌ها را به‌خوبی و با دقت‌نظر بیشتری حل می‌کنند.

در فضای کلاس، تلاش و نشاط به چشم می‌خورد و همین موضوع باعث دلگرمی من شــده بــود و مرا وادار می‌کرد تا هر جلســه، موضوع تازه‌ای برای گفتن داشته باشم. از طرفی چون درس ریاضی آن‌ها نیز با من بود، از من می‌خواستند که ریاضی را نیز به‌همین شیوهٔ جدید تدریس کنم.

جمع‌بندی

اجرای این روش، نیرو، انرژی و اطلاعات زیادی را می‌طلبید. لذا من نیز باید از صبر و حوصله و آمادگی درســی بیشــتری برخوردار می‌بودم، بنابراین مطالعهٔ بیشــتر قبل از تدریس الزامی بود. با این‌حال، پس از اجرای طرح جدید، شــاهد تحولات مثبت بسیاری در دانش‌آموزانــم بودم. صبر و حوصلــه و تأمل و قدرت خلاقیت آن‌ها بالا رفته بود و نظر آن‌ها نسبت به درس هندسه و نحوهٔ حل مسائل آن، تغییر کرده بود. نمرات امتحانــی آن‌ها نیز بــه میزان قابل توجهــی افزایش یافته و در کارهای گروهی، مشارکت فعال داشتند. از صحبت‌هایی که با دانش‌آموزان داشتم، دریافتم که؛

– اکثر آنان از روش ارائه شده راضی بودند.

– معتقــد بودند ایــن روش اعتمادبه‌نفس و قدرت خلاقیت را در آن‌ها افزایش داده است.

– بیان کاربردها باعث شده بود تا سریع‌تر و طبیعی‌تر با مسائل هندسه و قضیه‌ها ارتباط برقرار کنند.

– از اینکه فضای کلاس خشــک و بی‌روح نیست، راضی بودند.

– به کار گروهی علاقه‌مند شده بودند.

– بــا مطالعه و آمادگی بیشــتری در کلاس درس حضور می‌یافتند.

– چون تمرین‌ها بین گروه‌ها تقسیم می‌شد، همهٔ اعضای گروه‌ها با مطالعهٔ بیشتر، تمرین مربوط به خود را حل می‌کردند.

– دانش‌آموزانــی که به‌دلیل کم‌رویی، قدرت ارائه و حل تمرین در کلاس را نداشــتند، با اجرای این روش به‌مرور زمان، آمادگی بیشــتری برای این کار کســب کردند.

– بــا ایــن روش، تمــام تمرینــات توســط خود دانش‌آموزان حل می‌شد.

– با اجــرای این روش، هیچ دانش‌آموزی مطلب را یاد نگرفته، از کلاس بیرون نمی‌رفت.

پی‌نوشت

۱. مشخصاً، رابرت مور، این روش را برای تدریس توپولوژی در دانشگاه ابداع کرده است و هدف وی از این کار، تربیت محقق ریاضی است.

دو تجربه از کار گروهی در کلاس درس ریاضی

اکرم هادی‌زاده
دبیر ریاضی دبیرستان‌های قم

اشاره

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

رشد آموزش ریاضی

در این مقاله، بـه دو روایت از دو کلاس درس ریاضی خود می‌پردازم که هر کدام، می‌توانند برای همکاران معلمم، قابل استفاده باشند.

کلیدواژه‌ها: کلاس ریاضـی، تدریس ریاضی، کار گروهی، تدریس هندسه، تبدیلات هندسی

تجربه اول

حدود دوازده سال پیش، در یکی از مدارس شاهد قم، به تدریس در پایهٔ دوم دبیرســتان، رشته ریاضی، اشــتغال داشــتم؛ تدریس دو درس ریاضی و هندسهٔ کلاسی به‌عهدهٔ من بود.

دانش‌آموزان کلاس، از سه سطح ضعیف و متوسط و عالی (از نظر توانایی یادگیری درس ریاضی) تشکیل شده بودند. از آنجا که دو درس ریاضی و هندسه با من بود و در طول هفتــه، من و دانش‌آموزان زمان تقریباً زیادی را در کنار هم بودیم، تصمیم گرفتم برای آنکه کلاس بانشاط باشد و حالت یکنواخت و خسته‌کننده نداشــته باشد، کار گروهی در کلاس انجام دهم. برای ایــن کار، ابتــدا دانش‌آمــوزان را با اختیــار و انتخاب خودشــان به گروه‌های چهار نفری تقســیم کردم، با این شــرط که در ترکیب هرگــروه، هم دانش‌آموزانی باشــند که نیاز به کمک دارند و هم دانش‌آموزانی که می‌توانند به دوستانشــان کمــک کنند. بدین ترتیب،

گروه‌ها تشـکیل شـدند و برای هر گروه، سرگروهی تعیین شد و انتظار از گروه‌ها، توضیح داده شد.

یکی از برنامه‌های هر گروه از این قرار بود که:

مباحثی از کتاب هندسـهٔ یک (هندسهٔ سال دوم دبیرسـتان) را انتخاب و با انتخاب خود دانش‌آموزان، عنـوان دروس را بیـن گروه‌هـا تقسـیم می‌کردم تا هر یـک از گروه‌ها، طبق جـدول زمان‌بندی، عنوان درس خـود را در کلاس، ارائه دهند و در واقع، نقش معلّـم را در کلاس ایفا کنند. جالب اسـت بگویم که هر گروه از بین خودشـان، یک مدرس انتخاب نموده و با همکاری هم، مواد و وسـایل آموزشی را که برای تدریس نیاز داشـتند، آمـاده کرده بودنـد. به‌عنوان مثـال، برای تدریـس مبحث مسـاحت، از مقواهای رنگی، شکل‌های مختلف هندسـی ساخته بودند که به‌صـورت قطعاتی بود که در کنار هم، تشـکیل یک پازل (جورچیـن) می‌دادند! منظور از این کار این بود که بتوانند با کنار هم گذاشـتن قطعات پازل، فرمول مساحت را برای سـطوح مختلف بیابند و آن را برای سـایر دانش‌آموزان، تشـریح نماینـد. در این کلاس، تدریس توسط دانش‌آموزان انجام می‌شد، اما تکمیل و برطرف کردن نقص‌ها، به‌وسیلهٔ من صورت می‌گرفت.

این رونِد تدریس در کلاس ادامه داشـت تا اینکه اواسـط اسـفند ماه، ایدهٔ دیگری به‌نظرم آمد و آن را در کلاس مطرح کردم: به دانش‌آموزان پیشنهاد دادم که چون تعطیلات نوروز را پیش‌رو داریم، بهتر اسـت که به‌جای حل تمرین یا به قول خودشـان «مشق»، یک کار ابتکاری انجام دهند! گفتم: «شـما می‌توانید با نظر و ایدهٔ خودتان، از ریاضی و هندسـه اسـتفاده کنیـد و طرح‌هایـی را کـه بیانگر بعضـی از مفاهیم ریاضی یا هندسـه یـا تلفیقی از هر دو باشـد، روی مقواهای رنگی به اندازهٔ یک کارت پستال معمولی، با رنگ‌های شاد و متنوع (مداد- خودکار- قلم) طراحی کنید. سـپس آن‌هـا را درون جعبه‌هایی که خودتان سـاخته و تزئین کرده‌اید، قرار دهید». بعد گفتم که چون بعـد از تعطیلات نوروز، دوازده اردیبهشـت‌ماه (روز و هفته بزرگداشـت معلّـم) را در پیش‌رو داریم، هر یک از دست‌سازهای خودتان را به‌عنوان هدیه، به هـر یک از دبیران خود کادو دهیـد! امّا این را نیز در نظر داشـته باشید که اولاً، کار باید گروهی باشد، ثانیاً طرحی را که تهیه می‌کنید و هدیه می‌دهید، متناسب با درسی باشـد که دبیرتان تدریس می‌کند یا نقشی باشد که به‌عهده دارد.

دانش‌آمـوزان از ایـن طرح نیز اسـتقبال کردند، جالب است که بگویم، دانش‌آموزان از ذهن خلاق خود استفاده نموده و طرح‌های بسیار شگفت‌انگیز و جالبی را طراحـی نمودنـد؛ طرح‌هایی که مثـلاً، رابطهٔ بین ریاضی و فیزیک یا شـیمی و ریاضی را نشان می‌داد. به‌عنوان مثال، طرح روی یکی از کارت پستال‌ها که به منظور هدیه به دبیر معارف طراحی شـده بود، بیانگر رابطهٔ بین هندسـه و تعیین قبله بـود. هدف از تهیهٔ کارت و ترسیم طرح‌ها و آماده کردن آن‌ها، تقدیمشان بـه تمام معلمان و کارکنانی بود که دانش‌آموزان پایه دوم، با آنان رابطه داشتند.

در اواخـر فروردین ماه، کار دانش‌آموزان به پایان رسید و طرح‌های آن‌ها ملاحظه و نقص‌های آن‌ها برطرف شد. حال همه، منتظر فرا رسیدن هفتهٔ معلّم بودند! در آن هفته، دانش‌آموزان از دبیران و مربیان خود دعوت کردند به کلاس درس بیایند و ضمن قدردانی و سپاس از زحمات آنان، هدایای خودشـان را که نتیجه تلاش دو ماهه‌شان بود، به ایشان تقدیم نمودند.

این کار باعث شـد که در آن سـال، دانش‌آموزان این کلاس، دیگر به هندسه به‌عنوان یک درس خشک و بی‌جـان نظر نکردند و با ذوق و اشـتیاق، به کلاس بیایند. همچنین، احسـاس شادی و نشاط و انگیزه را هنگام تحویل و دریافت هدیه‌ها، در چهره دانش‌آموزان و دبیران و مربیان محترم دبیرسـتان شاهد، نظاره‌گر بودم.

تجربهٔ بالا باعث شـد که در سـال بعـد نیز که با دانش‌آموزان پایهٔ سوم ریاضی دبیرستان نمونهٔ دولتی درس هندسه داشتم، به آنان نیز مشابه این کار عملی را پیشنهاد کنم.

از آنجـا کـه دانش‌آموزان سـال سـوم در کتاب هندسـهٔ خود، با انواع تبدیلات (انتقال ـ تجانس و...) آشنا می‌شوند، از آنان خواستم که در تعطیلات نوروز، اگر به شهرهای تاریخی مسـافرت می‌کنند یا اگر به پارک یا کوه و دشـت و دهی سر می‌زنند، خوب نگاه

کنند، حتّی به نقش‌های قالی‌ها یا تابلوها دقیق شوند و اگـر در هرکدام از آن‌ها هر نـوع تبدیلی یافتند، یا آن را طراحـی کنند و یا از آن عکس بگیرند و بعد، با زیرنویس کامل و شرح دقیق، به عنوان تکلیف، بعد از تعطیلات نوروز تحویل دهند.

در کارهای آنان نیز آثار جالبی را دیدم و توانستم بفهمم که آنان، تا چه اندازه، مفهوم تبدیلات هندسی را یـاد گرفته‌انـد. برای نمونه، یکی از کارها، نقاشـی بسـیار جالبی بود که خود دانش‌آموز روی یک کارت طراحی کرده بود که «انتقال» را نشان می‌داد و انگار، نقشه یک قالی را برایمان تجسّم می‌کرد.

کار دیگر، عکسی بود که از یک پارک گرفته شده بود و نمایانگر «انتقال» ستون‌ها بود.

بنابر نظر «شـارگین» و «پروتاسـوف»، هندسه مجموعـه‌ای از تعریف‌هـا و فرمول‌هـا نیسـت، بلکه هندسـه توانایی دیدن (مشـاهده کردن) تصورکردن و فکـر کردن اسـت و با این باور، دلایـل زیر را برای تدریس و آموزش هندسه برشمرده‌اند:

- هندسـه پدیده‌ای از فرهنگ انسـانی اسـت که با اسـتفاده از آن می‌توان اخـلاق و اصول اخلاقی را در دانش‌آموزان رشد داد.
- هندسه ذهن دانش‌آموزان را برای تحصیلات بالاتر آماده می‌سازد.
- هندسـه حس زیبایی‌شناسـی را در دانش‌آموزان توسعه می‌دهد.
- هندسـه تاریـخ تفکر انسـانی را به خوبی نشـان می‌دهد.

تجربه دوم

حدود ده سـال پیش، در یکـی از مدارس نمونه دولتی قم در پایه سـوم دبیرسـتان، رشـته ریاضی، تدریس دو درس هندسـه و جبر و احتمال را به‌عهده داشـتم، دانش‌آموزان بسـیار پرتلاش و نکته‌سـنج و دارای درک بالایی از ریاضی بودند.

امّا متأسفانه این کلاس، با یک چالش روبه‌رو بود و آن اضطراب دانش‌آموزان هنگام امتحان یا ارزشیابی بـود. در بعضی از آنان، این ترس و اضطراب به‌گونه‌ای بود که آن‌ها را از نوشـتن و جواب دادن به سـؤالات باز می‌داشـت! برای برطرف کردن این چالش، ایده‌ای به‌نظـرم آمد کـه در کلاس اجرا کـردم. آن ایده، در حقیقت نوعی ارزیابی دانش‌آموزان توسـط خودشان بود که به‌صورت زیر، در کلاس اجرا شد.

ابتدا، دانش‌آموزان کلاس را به‌گونه‌ای در گروه‌های چهار نفری تقسـیم کردم که در هر گروه، ترکیبی از دانش‌آموزان متوسـط و عالی باشد. سـپس ایامی را برای برگزاری آزمون انتخاب کـردم و تاریخ روزها را به قید قرعه، بین گروه‌ها تقسیم کردم.

وظیفـهٔ هر گروه ایـن بود که با همـکاری تمام اعضا، از بخشـی از کتاب (هندسـه یا جبر و احتمال) که تعیین می‌کردم، سـؤال‌هایی در سـطح متوسط و دشوار (از نظر دانش‌آموزان) طرح کنند و توجه کنند که لازم اسـت به نسـبتِ مدت زمانِ آزمون، سؤال‌ها هم تشـریحی و هم تستی باشند. در آخر، این آزمون توسـط خود گروه از سـایر دانش‌آموزان و با مراقبت خودشـان، در کلاس انجام می‌شد و در نهایت، گروه طراح سؤال‌ها، تصحیح کنندهٔ سؤال‌ها هم بود.

ارزشـیابی همچنین بود که نمره‌ای که به اعضای گروه مجـری تعلق می‌گرفت، با توجه به نوع سـؤال و نحـوه اجرای آزمـون بود. در حالی که برای سـایر گروه‌هـا، نمرهٔ هر عضو، میانگین نمره‌هایی بود که هر عضو گروه، از ورقه گرفته بود.

لازم به ذکر اسـت که با فاصلهٔ زمانی تقریباً یک ماه و نیم نیز، خودم از تمام کلاس، امتحان هماهنگ می‌گرفتم و نتیجه را با امتحان‌های گروهی مقایسـه می‌کردم. به مرور، متوجه شدم که با این کار، از میزان اضطراب دانش‌آموزان کاسته شده و موفقیت آنان در امتحانات، بیشتر شده است.

کار گروهی تا جایی شکل گرفت که اگر دانش‌آموزی پای تابلو می‌آمد و سؤالی را نمی‌توانست حل کند، گروه می‌توانسـت به کمکش بیاید و او را یاری رساند. بدین صورت، دیگر اضطرابِ آمـدن پایِ تابلو به منظور حل تمرین نیز، در دانش‌آموزان از بین رفت.

و آن سال!

شعار «تلاش گروهی و کار جمعی، یعنی پیروزی جمعی»، تبدیل به عمل شد و تحقق یافت.

چگونه توانستم دانش‌آموزانم را به درس ریاضی علاقه‌مند کنم؟

اعظم کرامت: دبیر ریاضی منطقهٔ سیلوانا، استان آذربایجان غربی

اشاره

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

رشد آموزش ریاضی

چکیده

آنچه در این مقاله می‌خوانید، نظرات دانش‌آموزان نسبت به درس ریاضی قبل از تدریس در پایهٔ دوم راهنمایی (هفتم فعلی)، در سال تحصیلی ۹۲-۱۳۹۱ است. این نظرسنجی باعث طراحی روش تدریسی تازه شد که ویژگی آن، تدریس فعال ریاضی و مشارکت دانش‌آموزان در کلاس بود؛ و در نتیجه، سبب ایجاد فضایی شاد و تغییر نظرات دانش‌آموزان نسبت به درس ریاضی و افزایش چشمگیر نمرات آنان گردید.

کلیدواژه‌ها: درس ریاضی، پایهٔ دوم راهنمایی (هفتم فعلی)، کلاس فعال ریاضی، کلاس شاد

به‌عنـوان معلم ریاضی، همیشـه محیط کلاس را شـاد و زنده و فعال و پویا می‌خواستم و اعتقاد داشتم کـه یکی از دلایـل بی‌علاقگی دانش‌آمـوزان به درس ریاضی، انفعال آن‌ها در کلاس است. با وجود تلاشی که می‌کردم، دانش‌آموزان درکلاس‌های ریاضی مشارکت نمی‌کردند و شـاد نبودند. برای پیدا کردن راه‌حل، در ابتدای سـال تحصیلی ۹۲-۱۳۹۱، از ۲۸ دانش‌آموزی که به آن‌ها در پایهٔ دوم راهنمایی (هفتم فعلی) تدریس می‌کردم، نظرسنجی کردم که نتایج نگران‌کنندهٔ آن، در جدول ۱ آمده است.

نتایج این نظرسنجی نشـان داد که دانش‌آموزان، از درس ریاضـی فراری بوده و علاقـه‌ای به آن ندارند که این امر، خود زمینه‌سـاز دوری‌گزینیِ دانش‌آموزان از ممارسـت و پشـتکار برای یادگیری ریاضی بود. در مجموع، دانش‌آموزان راجع بـه درس ریاضی، بیش از همه، به نکات زیر اشاره کردند:

- درس ریاضی سخت است.
- در آینده، ریاضی به دردمان نمی‌خورد.
- هـر چقدر هم تـلاش کنیم، ریاضـی را خوب یاد نمی‌گیریم.
- استعداد ریاضی ندارم و نمی‌توانم آن را یاد بگیرم.
- ای‌کاش، ریاضی حل مسئله نداشت.
- ریاضی خسته‌کننده است و تنوع ندارد.
- از دورهٔ ابتدایی، ریاضی را خوب یاد نگرفتیم و ضعیف بالا آمدیم.

نقش تدریس در ایجاد علاقه به ریاضی

ابتدا کلاس را به گروه‌های مختلف تقسـیم کردم و چینش کلاس را هم تغییر دادم. آن‌گاه با مشـارکت گروه‌هـا، فعالیت‌هـای گوناگونـی را بـرای تدریس و یادگیری ریاضی طراحی نمودم. برای مثال، با همکاری دانش‌آمـوزان، محیـط کلاس را با نصـب تصویرها و جمله‌هـای مربوط به ریاضی‌دان‌هـای معروف، به یک کلاس شـاد ریاضی تبدیل کردیـم. تختهٔ مخصوصی هم برای نشان دادن مطالب جالب مانند اخبار ریاضی و معماهـای ریاضی در کلاس نصب شـد و قرار بر این شـد که هر هفته، از هر گروه یک نفـر به‌عنوان مدیر ایـن تخته انتخاب شـود تا مطالـب را از دانش‌آموزان گرفتـه و با نظارت معلم، آن‌ها را نصب نماید. سـپس به‌شکل‌های مختلف، شرایطی را برای مشارکت بیشتر آنان فراهم کردم. برای نمونه، بسـته به موضوع درس، از دانش‌آمـوزان می‌خواسـتم تا با وسـایل بازیافتی و کاغذهای باطله، وسـایل کمک‌آموزشی بسازند. سپس آن‌ها را به نامشـان ثبت می‌کـردم تا در تجهیز کارگاه ریاضی، از آن وسایل استفاده کنیم.

جدول ۱: نتایج نظرسنجی از دانش‌آموزان نسبت به درس ریاضی، در ابتدای سال تحصیلی ۹۲-۹۱

سؤالات نظرسنجی	فراوانی جواب‌های مثبت	درصد
درس ریاضی در زندگی‌ام، تأثیر سازنده دارد.	۹	۳۲ درصد
ریاضی سخت و بی‌روح است.	۲۴	۸۶ درصد
با لذت، تکلیف‌های ریاضی را انجام می‌دهم.	۲	۷ درصد
به کار گروهی برای یادگیری ریاضی، علاقه دارم.	۱۲	۴۳ درصد
در کلاس ریاضی، مضطرب هستم.	۲۶	۹۳ درصد
کتاب ریاضی پیچیده است.	۲۶	۹۳ درصد
در آینده، دوسـت دارم در رشـتهٔ ریاضی، ادامه تحصیل بدهم.	۱	۴ درصد
به درس ریاضی، علاقه دارم.	۲	۷ درصد

جدول ۲: نتایج نظرسنجی از دانش‌آموزان
نسبت به درس ریاضی، در پایان سال تحصیلی ۹۲-۹۱

سؤالات نظرسنجی	فراوانی جواب‌های مثبت	درصد
درس ریاضی در زندگی‌ام تأثیر سازنده دارد.	۲۴	۸۶ درصد
ریاضی سخت و بی‌روح است.	۲	۷ درصد
با لذت، تکلیف‌های ریاضی را انجام می‌دهم.	۲۳	۸۲ درصد
به کار گروهی برای یادگیری ریاضی علاقه دارم.	۲۵	۸۹ درصد
در کلاس ریاضی مضطرب هستم.	۰	۰ درصد
کتاب ریاضی پیچیده است.	۱۳	۴۶ درصد
در آینده دوست دارم در رشتهٔ ریاضی ادامه تحصیل بدهم.	۱۰	۳۶ درصد
به درس ریاضی علاقه دارم.	۲۶	۹۳ درصد

این کار، از سوی دانش‌آموزان مورد استقبال بسیار قرار گرفت. علاوه بر این، هر گروه با برنامه‌ریزی خاصی پیش می‌رفت و با توجه به موضوع درس، هر ماه یک روزنامهٔ دیواری تهیه کرده و به دیوار کلاس نصب کردند. هر ماه، مطالب جالب و خواندنی نوشته شد که معرفی ریاضی‌دانان معروف، از آن جمله بود.

مشارکت دانش‌آموزان در فرایند یاددهی- یادگیری کلاس، تأثیر بسیاری در علاقه‌مند کردن آن‌ها به درس ریاضی داشت و نتایج نظرسنجی مجدد در پایان سال تحصیلی، نشان داد که میزان علاقه‌مندی دانش‌آموزان به درس ریاضی، افزایش چشمگیری یافته است. این نتایج، در جدول ۲ آمده است.

نتیجه‌گیری

با توجه به اهمیت درس ریاضی و کاربرد آن در علوم دیگر، آموزش این درس از ویژگی‌های بسیاری برخوردار است. این بررسی نشان داد که ایجاد فضایی شاد، دوستانه و حمایت‌کننده، زمینه‌ساز یک کلاس درس ریاضی فعال و موفق است. روش‌های تدریس فعال ریاضی و تبادل نظر بین گروه‌ها در کلاس، دانش‌آموزان را به‌صورت مستقیم و غیرمستقیم درگیر فرایند یادگیری می‌کند. دانش‌آموزان با مشاهدهٔ کاربرد ریاضی

در زندگی روزانه، انگیزهٔ بیشتری برای یادگیری ریاضی پیدا می‌کنند. تدریس ریاضی هر چقدر ملموس‌تر و کاربردی‌تر باشد، علاقهٔ دانش‌آموزان به یادگیری ریاضی افزون‌تر شده و باعث ایجاد اعتمادبه‌نفس و خودباوری در آن‌ها می‌گردد. این بررسی به این جمع‌بندی رسید که با فعال کردن دانش‌آموزان در کلاس درس ریاضی از طریق جلب مشارکت آن‌ها در فرایند یادگیری، دانش‌آموزان به درس ریاضی علاقه‌مند شدند و میانگین نمرات ریاضی آن‌ها رشد چشمگیری پیدا کرد.

تهیهٔ روزنامه‌دیواری توسط دانش‌آموزان

پیشنهادهای آموزشی به همکاران گرامی

- کلاسی شاد داشته باشیم و با تشویق دانش‌آموزان به مشارکت در فرایند یادگیری ریاضی از شروع سال تحصیلی، اضطراب و ترس را نسبت به درس ریاضی از کلاس دور کنیم و یک فعال ریاضی بسازیم.
- با دانش‌آموزانمان دوست باشیم.
- از دادن تمرین‌ها و مسائل سخت و طولانی و دور از توان دانش‌آموزان پرهیز کنیم.
- از پیشنهاد خرید حل‌المسائل یا کتاب‌های گام به گام که تمام تمرین‌های کتاب درسی در آن‌ها حل شده و آماده است اکیداً خودداری کنیم.
- هیچ وقت به دانش‌آموزان نگوییم که «ریاضی درس سختی است! پس باید آن را جدی بگیرید وگرنه ...!»
- با احترام با دانش‌آموزان برخورد کنیم و در صورت ضعف درسی، با توهین و کم‌بینی، شخصیت آن‌ها را زیر سؤال نبریم.
- از روش‌های فعال تدریس ریاضی در کلاس استفاده کنیم.
- دانش‌آموزان را تشویق به فعالیت‌های ریاضی خارج از کلاس کنیم و خودمان، تکلیف‌های تحقیقی و عملی مناسب در اختیارشان قرار داده و مشوقشان باشیم.
- از کار گروهی در کلاس درس ریاضی استفاده کنیم.

قورباغهٔ پرنده

واقعیتی تلخ یا رؤیایی شیرین!

محسن عسکری
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی اصفهان

کلیدواژه‌ها: برنامه درسی، قورباغه پرنده، کتاب درسی، ریاضی پایه هفتم

هم‌زمان با تغییرات پایه‌های آموزشی به متوسطهٔ دوره اول و دوم، کتاب‌های درسی و از جمله کتاب‌های درسی ریاضی، در حال تغییرند. در ایران هم مانند بسیاری از کشورها، کتاب درسی به‌عنوان اصلی‌ترین منبع آموزشی مورد توجه است و بسیاری از دانش‌آموزان و معلمان، برنامه تدریس و یادگیری‌شان را با توجه به کتاب درسی بنا می‌کنند. من هم به‌عنوان یک معلم ریاضی علاقه‌مند، معمولاً کتاب‌های چاپ جدید پایه‌ها و دوره‌های پایین‌تر را نگاه می‌کنم تا هم با روند تغییرات آشنا شوم و هم تا جایی که ممکن است، خودم را برای آن تغییرها آماده کنم.

اما مسئله اینجاست که به گفته پینگل (۲۰۰۹)، در صورتی می‌توان انتظار مدارسی پویا و مفید را داشت که استانداردهای آموزشی، همگام با توسعهٔ علم تدوین شوند و با توجه به نیازهای واقعی دانش‌آموزان، به روز گردند. هم‌چنین به گفته سایمون (۱۹۹۶)، برای درک مفاهیم ریاضی و آموزش آن‌ها، نباید دانش‌آموزان را عجولانه وارد دنیاهای ذهنی و انتزاعی کنیم. بلکه بهتر است این مفاهیم در ارتباط با محیط زندگی واقعی آن‌ها مطرح شوند و دانش‌آموزان در مفاهیم ریاضی، معناهای مشخص و قابل درک پیدا کنند (نقل شده در گویا و حسن‌پور، ۱۳۹۲).

از طرفی، یوسیسکن (۲۰۱۰) به نقل از گویا (۱۳۹۲)، به برنامه‌ریزان درسی ریاضی توصیه کرده است که لازم است برای اطمینان از درستی کاری که انجام داده‌اند، دلایل قوی

داشته باشند. بنابراین، متوجه می‌شویم که تغییر هر برنامهٔ درسی، نیازمند ظرافت، دانشِ برنامه درسی و انسجام دیدگاهی در هر تیم تألیف دارد.

با این مقدمه، در ادامه نگاهی خواهیم داشت به برخی مطالب کتاب ریاضی پایه هفتم (اول متوسطه) که تابستان امسال (۱۳۹۲) به چاپ رسید. در صفحهٔ ۲ این کتاب، مسئلهٔ شماره ۳ راجع به پرش یک قورباغه روی دیوار یک ساختمان نه متری (یعنی سه طبقه) است. وقتی در ابتدای سال تحصیلی با دانش‌آموزان در حال حل کردن این مسئله بودم، یکی از آن‌ها پرسید: «آقا اجازه! قورباغه روی ساختمان به این بزرگی می‌رود بالا برای چه؟» در این وقت دانش‌آموزان خنده سر دادند. وقتی این موضوع را با همکارانم در میان گذاشتم، آن‌ها هم نظرات مشابهی داشتند و می‌گفتند چرا باید در ابتدای کتاب، چنین مسئله‌ای بیان شود که باعث شود دانش‌آموزان، ریاضی را جدای از زندگی واقعی خود بدانند؟ شاید با کمی تفکر می‌شود سؤالی را به جای آن قرار داد که این‌قدر با دنیای واقعی بیگانه نباشد.

البته موضوع به همین‌جا ختم نمی‌شود! همان‌طور که می‌دانید، به دانش‌آموزان در این پایه، زبان و حروف انگلیسی برای اولین بار تدریس می‌شود. معمولاً اوایل سال، هنوز حتی قادر به نوشتن تمام حروف انگلیسی نیستند. ولی به این قسمت یک سؤال که در فعالیت صفحهٔ ۱۴، ابتدای فصل دوم، بیان شده است دقت کنید:

۱. نقطهٔ A روی محیط دایره حرکت می‌کند. در وضعیت OA زاویهٔ صفر درجه را نشان می‌دهد....

یا مثلاً در فصل سوم، صفحه ۳۰، از دانش‌آموزان خواسته شده که بررسی کنند آیا رابطهٔ $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ بدون اندازه‌گیری درست است یا خیر! ابتدا گمان می‌کردم تنها دانش‌آموزان کلاس من با این‌ها مشکل دارند. ولی پس از جلسه‌ای که با همکارانم داشتم و به مدارسی که به‌عنوان بازدید از طرف اداره می‌رفتم و با معلمان صحبت می‌کردم، تقریباً همهٔ معلمان ریاضی، مشکل من را داشتند. اینکه دانش‌آموزان به هیچ وجه نمی‌توانند با این مفاهیم انتزاعی رابطه برقرار کنند و البته تقصیری هم ندارند! ولی بیان این مفاهیم انتزاعی در این مرحله، نه تنها باعث درک بهتر آن‌ها نمی‌شود، بلکه باعث عقیم شدن ذهن‌های خلاق می‌گردد (گویا، ۱۳۷۵).

البته از این نمونه‌ها که در نظر اول ساده به‌نظر می‌رسد در کتاب ریاضی هفتم به وفور دیده می‌شود. ولی از این‌ها مهم‌تر حدس زدن جملهٔ عمومی در دنباله‌هاست! که حتی بسیاری از دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم رشتهٔ ریاضی (پایه‌های دهم و یازدهم فعلی)، هنوز به خوبی با مفهوم انتزاعی آن خو نگرفته‌اند، ولی در این کتاب آمده است. مثلاً در صفحهٔ ۴۴ این کتاب، بدون هیچ ابزاری از دانش‌آموزان خواسته شده است جملهٔ nام یک دنبالهٔ حسابی را به‌دست آورند!

با توجه به چند مورد از مشاهده‌ها و گفت‌وگوهایی که با همکاران خود داشتم، امیدوارم مؤلفان، برنامه‌ریزان و مسئولان برنامه درسی ریاضی، اندکی با ظرافت و دقت بیشتر اقدام به تغییر کتاب‌های ریاضی بنمایند.

به گفته پینگل (۲۰۰۹)، در صورتی می‌توان انتظار مدارسی پویا و مفید را داشت که استانداردهای آموزشی، همگام با توسعهٔ علم تدوین شوند و با توجه به نیازهای واقعی دانش‌آموزان، به روز گردند. هم‌چنین به گفته سایمون (۱۹۹۶)، برای درک مفاهیم ریاضی و آموزش آن‌ها، نباید دانش‌آموزان را عجولانه وارد دنیاهای ذهنی و انتزاعی کنیم. بلکه بهتر است این مفاهیم در ارتباط با محیط زندگی واقعی آن‌ها مطرح شوند و دانش‌آموزان در مفاهیم ریاضی، معناهای مشخص و قابل درک پیدا کنند

منابع

۱. گویا، زهرا. (۱۳۷۵). **در باب برنامهٔ درسی ریاضیات دبیرستان**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۴۶، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۲. گویا، زهرا. حسن‌پور، مرتضی. (۱۳۹۲). **کتاب تازه تألیف ریاضی ۱ از منظر مدرسان آن**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۱۱۱، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی وزارت آموزش‌وپرورش.

۳. گویا، زهرا. (۱۳۹۲). **ایجاد تعادل در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۱۱۱، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی وزارت آموزش‌وپرورش.

در اشتیاق یادگیری بهتر

گزارشی از اولین دورهٔ خلاقیت و ریاضی در خانهٔ ریاضیات کرمان

مینا جمشیدی، مدیر خانه ریاضیات کرمان، عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی تحصیلات تکمیلی کرمان
زینب امیرشکاری، معاون تربیت مربی خانهٔ ریاضیات کرمان، دانشجوی دکتری ریاضی واحد علوم تحقیقات کرمان

خانه ریاضیات کرمان در تابستان ۹۲، به پیشنهاد و ابتکار مدیر خانه ریاضیات کرمان، دوره‌ای متشکل از فعالیت‌های مختلف جهت رشد تفکر و علاقه‌مندسازی دانش‌آموزان دورهٔ دبستان به ریاضی برگزار نمود. مدت این دوره یک ماه‌ونیم بود که دانش‌آموزان دختر روزهای فرد و دانش‌آموزان پسر روزهای زوج در کارگاه‌های برگزار شده شرکت می‌نمودند. کارگاه‌ها به شیوه‌ای برگزار شد که برای دانش‌آموزان بسیار جذاب بود و آن‌ها با شور و شعف خاصی در خانه ریاضیات حضور پیدا می‌کردند. کارگاه‌های این دوره شامل مفاهیم ریاضی، حل مسئله، اوریگامی، معماها، بازی‌های فکری و مهارتی، داستان‌گویی خلاقانه، مهارت‌های اساسی در زندگی، ساخت‌های ابتکاری و آشنایی با علوم بود. هدف اصلی از برگزاری این کارگاه‌ها، آشنایی دانش‌آموزان با مفاهیم ریاضی، کمک به درک صورت مسئله ریاضی و آشنایی با کاربردهای ریاضی در مسائل روزمره و علوم متناسب با سنشان بود. از آنجا که احساس نیاز به یک موضوع و مفهوم، انگیزه و اشتیاق برای یادگیری آن را بالا می‌برد، در این دورهٔ تابستانی سعی شد این احساس نیاز در دانش‌آموزان ایجاد شود. در ذیل شرح مختصری از کارگاه‌های اجرا شده و چگونگی کمک آن‌ها به آموزش ریاضی آورده شده است.

در بخش **آموزش مفاهیم ریاضی و حل مسئله** سعی شد برخی مفاهیم ریاضی به‌صورت ملموس و به شیوه‌ای که حتی‌الامکان بچه‌ها به ریاضی علاقه‌مند شوند، آموزش داده شود. فعالیت‌ها به صورت بازی یا سرگرمی‌های علمی جذابی طراحی شده بود که بچه‌ها از انجام آن‌ها لذت ببرند. به‌عنوان مثال برای آموزش مفهوم جمع و تفریق عدد ۹۹۹ روی تخته نوشته شد که دانش‌آموزان می‌بایست با انداختن دو تاس، یک عدد می‌ساختند و آن را از ۹۹۹ کم می‌کردند، آن‌گاه هرکس

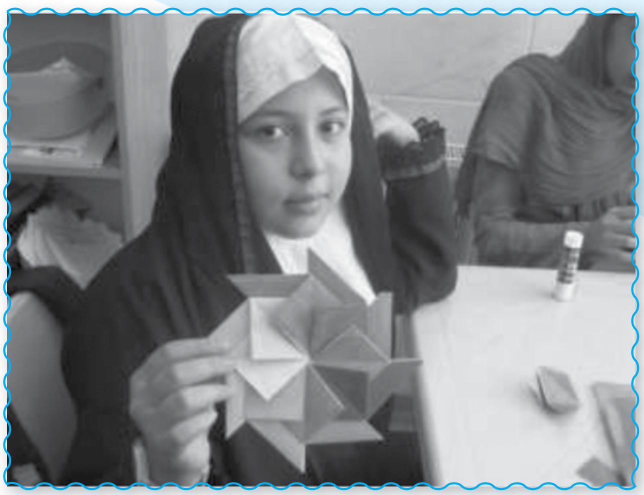
که این عدد را به صفر می‌رساند برندهٔ این فعالیت بود. یا برای آموزش مفهوم مساحت، دانش‌آموزان می‌بایست با استفاده از مقواهایی که در اختیارشان گذاشته شده بود سطح شکل‌هایی را که به آن‌ها داده شده بود با بریدن مربع‌های واحد پر می‌کردند.

همچنین در جلساتی به فعالیت طرح مسئله و یا به طراحی مسئله برای مسابقات ریاضی از سوی دانش‌آموزان پرداخته شد و نیز از آن‌ها خواسته شد که به طراحی مسائلی که به‌طور واقعی و ملموس مشاهده کرده‌اند بپردازند. لازم به ذکر است که اکثر دانش‌آموزان در طرح مسئله با مشکلات فراوان روبه‌رو بودند.

در کارگاه **ساخت‌های ابتکاری** از دانش‌آموزان خواسته شد با وسایلی که در اختیار داشتند به هر شیوه‌ای که دوست دارند وسیله‌ای را که مربی از آن‌ها خواسته بوده بسازند. در روند ساخت، دانش‌آموزان با اندازه‌گیری، جمع و تفریق اعداد، اشکال هندسی و... آشنا می‌شدند. همچنین سعی بر آن بود که از وسایل ساخته شده توسط دانش‌آموزان در کلاس‌های دیگر استفاده شود، به‌عنوان مثال در جلسه‌ای از دانش‌آموزان خواسته شد که ساعت بسازند و در کارگاه بعدی با استفاده از همان ساعت‌هایی که خودشان ساخته بودند به یادگیری ساعت و حل مسائل مربوط به آن پرداختند. همچنین سعی شد برخی وسایل را که مورد نیاز جامعه است، بسازند مثلاً در یکی از کارگاه‌ها از آن‌ها خواسته شد جعبه‌ای برای قرار دادن اشیا خاص بسازند.

در **کارگاه علوم** دانش‌آموزان ابتدا مفاهیم اولیهٔ علوم را می‌آموختند و سپس به ساخت وسیله‌ای مرتبط با آن مفهوم می‌پرداختند تا با کاربردهایی از ریاضی در علوم که متناسب با سنشان بود آشنا شوند. به‌عنوان مثال برای درست کردن ساز دهنی باید به اندازه‌های مناسبی نی‌ها را می‌بریدند و کنار هم قرار می‌دادند. در این فعالیت، آن‌ها بدون اینکه صحبتی از دنبالهٔ حسابی باشد به‌چشم می‌دیدند که طول نی‌ها قسمتی از یک دنبالهٔ حسابی را ایجاد می‌کند.

در **کارگاه اوریگامی** (کاغذ و تا) دانش‌آموزان سعی داشتند با استفاده از آموزش‌های مربی شکل‌هایی را به کمک کاغذ ایجاد کنند. هدف اصلی از برگزاری این کارگاه، آموزش اشکال هندسی و خواص آن‌ها بود و اینکه دانش‌آموزان ببینند چگونه شکل‌های هندسی



کنار هم قرار می‌گیرند. بسیاری از دانش‌آموزان رضایت زیادی از کارگاه اوریگامی داشـــتند و به گفتهٔ والدین آن‌ها برخی از آن‌ها در منزل با درســت کردن اشکال اوریگامی اتاقشان را تزیین کرده بودند.

از آنجا که افزایش اعتمادبه‌نفس و نیز کار گروهی، به یادگیری ریاضی دانش‌آموزان کمک شایانی می‌کند، بر آن شــدیم که جلســاتی تحت عنوان **مهارت‌های اساسی زندگی** برای دانش‌آموزان داشته باشیم و عمدهٔ کار در این جلســات به تقویـت کار گروهی و افزایش اعتمادبه‌نفس اختصاص داشت.

هــدف از برگــزاری **کارگاه معماهــای فکری** این بود که دانش‌آموزان بتوانند به‌مدت طولانی‌تری روی مســائل فکر کنند و ترغیب شوند معماهایی متناسب با سنشــان حل کنند. البته از آنجا که بچه‌ها هنوز به فکر کردن به‌مدت زمان طولانی عادت نداشتند گاهی این کارگاه برایشــان خســته کننده می‌شد که مربی برای رفع این مشــکل بازی‌های فکری در اختیار آن‌ها می‌گذاشت.

از دیگر کارگاه‌های برگزار شده **کارگاه داستان‌گویی خلاقانه** بود. از آنجا که برخی مسائل در ریاضی به حل مســائلی اختصــاص دارد که به صورت داســتان‌های کوتاه بیان می‌شوند و معمولاً دانش‌آموزان در خواندن این مســائل و درک آن‌ها بی‌حوصله‌اند، ســعی شد در ایــن کارگاه رونــدی در پیش گرفته شــود که تمرکز دانش‌آموزان بر آنچه می‌خوانند و می‌شــنوند بیشــتر شود. همچنین در این کارگاه‌ها داستان‌هایی معماگونه به‌صورت نصفــه گفته می‌شــد و دانش‌آموزان موظف بودند که راه‌حل‌هایی برای قهرمان داستان پیدا کنند که به این ترتیب باعث افزایش قدرت تصور و خلاقیت آن‌ها می‌شد.

در طول دوره، دو جلســهٔ اولیا و مربیان برگزار شد که در آن‌ها از نظرات والدین مطلع شدیم و خود اهداف و راهکارهایــی را به آن‌ها یادآوری کردیم. در پایان این دورهٔ تابســتانیِ خلاقیت و ریاضی جشن پایان دوره را برگزار نمودیــم و گزارش کلی آنچه را که در این دوره اتفاق افتاد به والدین ارائه نمودیم.

نامه‌های رسیده

مجله رشـد آموزش ریاضی با دریافت مقاله‌هـا، روایـت معلمـان، دیدگاه‌ها، نقد و بررسـی کتاب از سـوی خوانندگان گرامی، پربارتر خواهد شـد. تا پایان اسـفند ۱۳۹۲، نامه‌هـا و مطالب دوسـتان زیر، به‌دسـت ما رسیده است. ضمن تشـکر از همگی آن‌ها، منتظر دریافت نامه‌های شما هستیم.

- علی اکبری، از دلفان (لرستان)؛
- آسیه اکبری، از دلفان (لرستان)؛
- عباس خورشیدی، از کرج؛
- منیژه کفشدوز ریحان، از کرج؛
- محمدحسن طالبیان، از شهرضا؛
- مهدی ربیعی، از شهرضا؛
- ساناز خادم‌القرانی، از اصفهان؛
- پریسا معمارزاده، از بیجار (کردستان)؛
- فهیمه کلاهدوز، از خراسان رضوی؛
- فرشته سازگار، از تهران؛
- محمدهادی رستمی، از قم؛
- شهریار رضایی نیکو، از خوزستان؛
- میمنت عابدینی بلترک، از بابل؛
- سمیه یونسی خانقاهی، از بابل؛
- فهیمه تقوی، از مازندران؛
- حسین محمدیان، از سردشت (آذربایجان غربی)؛
- افسانه مرادعلیزاده، از کرمان؛
- محمود حقانی، از تهران؛
- غلامرضا حاجی‌حسین‌نژاد، از تهران؛
- محمد نیرو، از تهران.

IN THE NAME OF ALLAH

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning
Publications & Teaching Technology Office

116 Roshd
Mathematics
Education Journal

رشد آموزش ریاضی

vol.31 no.4 2014 ISSN:1606-9226

www.roshdmag.ir
e-mail: riyazi@roshdmag.ir
P. O. Box: Tehran 15875 - 6585

برگ اشتراک مجله‌های رشد

نحوهٔ اشتراک:

شما می‌توانید پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبهٔ سه‌راه آزمایش کد ۳۹۵، در وجه شرکت افست از دو روش زیر، مشترک مجله شوید:

۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: **www.roshdmag.ir** و تکمیل برگهٔ اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی.

۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شدهٔ اشتراک با پست سفارشی (کپی فیش را نزد خود نگه‌دارید).

◆ نام مجلات درخواستی: ....

◆ نام و نام خانوادگی: ....

◆ تاریخ تولد: .... ◆ میزان تحصیلات: ....

◆ تلفن: ....

◆ نشانی کامل پستی: ....

استان: .... شهرستان: .... خیابان: ....

شمارهٔ فیش بانکی: .... مبلغ پرداختی: ....

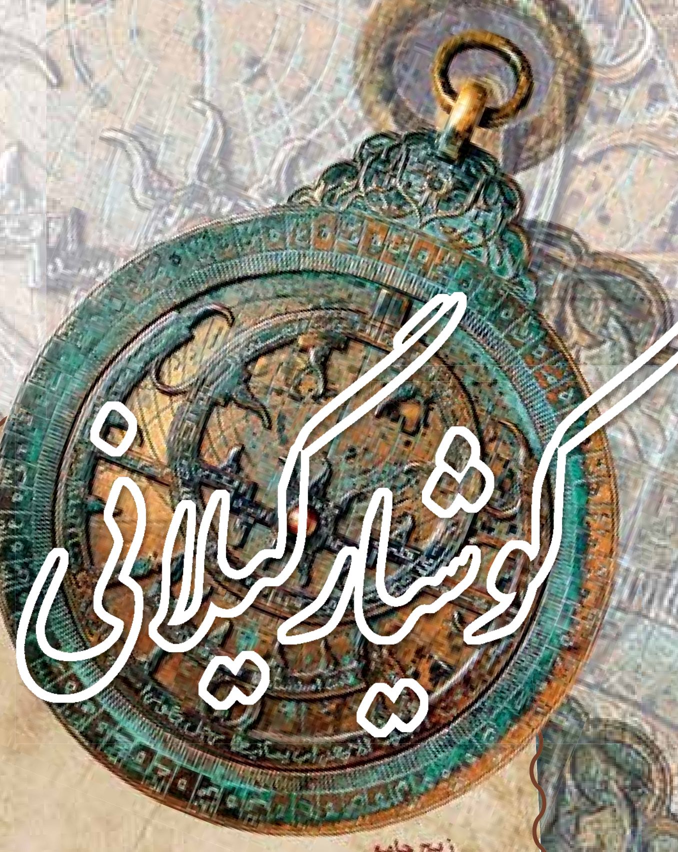
پلاک: .... شمارهٔ پستی: ....

◆ اگر قبلاً مشترک مجله بوده‌اید، شمارهٔ اشتراک خود را بنویسید: ....

امضا:

- **نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۱۶۵۹۵/۱۱۱**
- **وبگاه مجلات رشد: www.roshdmag.ir**
- **اشتراک مجله: ۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۶/۷۷۳۳۵۱۱۰/۷۷۳۳۹۷۱۳-۱۴**

◆ هزینهٔ اشتراک یکساله مجلات عمومی (هشت شماره): ۳۰۰/۰۰۰ ریال
◆ هزینهٔ اشتراک یکساله مجلات تخصصی (چهار شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال



کوشیار گیلانی

اخترشناس و ریاضی‌دان برجسته‌ی ایرانی

در سال ۳۳۲ هجری شمسی در گیلان به دنیا آمد. در آن زمان بزرگترین و آبادترین شهر گیلان لاهیجان بود. بعدها به ری (نزدیک تهران کنونی) رفت و در آن‌جا با دانشمندانی چون ابوریحان بیرونی و ابومحمود خجندی مراوده و مبادله‌ی علمی داشت. پس از آن به گرگان قدیم (نزدیک گنبد کاووس کنونی) رفت و در آن‌جا مورد حمایت قابوس‌بن وشمگیر از پادشاهان آل زیار قرار گرفت و کتاب نجومی‌اش، زیج جامع را نوشت.

او را «کیا کوشیار» نیز می‌نامیدند. کیا لقبی بود که در گیلان و مازندران برای بزرگان و دانشمندان به‌کار می‌رفت. کوشیار در ۳۰ سالگی مقارنه‌ی زحل و مریخ را رصد کرده است. همه‌ی آثار او به زبان عربی، که زبان علمی همگانی در آن عصر بوده، نوشته شده است.

در فروردین ۱۳۶۷ همایش بزرگداشت هزاره‌ی کوشیار در دانشگاه گیلان برگزار شد. در اسفند ۱۳۹۲ نیز همایش کوشیار گیلانی به مناسبت هزار و پنجاهمین سالگرد تولد او در دانشگاه گیلان برگزار شد.

تاکنون شماری از پژوهشگران ایرانی و خارجی به بررسی و مطالعه‌ی آثار و دستاوردهای کوشیار گیلانی پرداخته‌اند و کتاب‌ها و مقالات متعددی در این زمینه به زبان‌های گوناگون منتشر شده است.

امروزه مراکز و نهادهایی در استان گیلان به نام کوشیار نام‌گذاری شده است که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به رصدخانه‌ی کوشیار گیلانی، دبیرستان کوشیار، کتاب‌فروشی کوشیار و موسسه‌ی آموزش عالی کوشیار اشاره کرد.

اصول حساب هندی

یکی از قدیمی‌ترین آثار دوره‌ی اسلامی درباره‌ی عددنویسی دهدهی و روش‌های محاسبه با آن است.
این کتاب که به زبان‌های فارسی، انگلیسی، فرانسه، روسی و عبری ترجمه شده است، در پیدایش و گسترش اصطلاحات حساب نقش مهمی دارد.

زیج بالغ

کوشیار اثری به نام زیج بالغ دارد که تنها فصل کوتاهی از آن برجای مانده است.

مجمل‌الاصول

این کتاب درباره‌ی احکام نجوم یعنی تأثیر موقعیت ماه و خورشید و سیارات و ستارگان بر سرنوشت افراد یا حوادث عالم و نیز تعیین زمان مناسب برای انجام کارهای مختلف است.
امروزه احکام نجوم و پیشگویی‌های مبتنی بر آن از لحاظ علمی مورد قبول نیست. ولی در قرن‌های گذشته علی‌رغم عدم باور به درستی آن از سوی دانشمندان، توجه به آن باعث رونق علم نجوم بود. این کتاب به زبان‌های فارسی، ترکی، انگلیسی و چینی ترجمه شده است.

کوشیار به مثلثات مسطحه و کروی تسلط داشت و نام شکل مغنی به معنای قضیه‌ی بی‌نیاز کننده را برای قضیه‌ی سینوس‌ها برگزید و این قضیه را به‌جای شکل قطاع (قضیه‌ی منلائوس) به‌کار برد که باعث سهولت و کوتاه کردن محاسبات می‌گردید.

زیج جامع

یکی از آثار کوشیار زیج جامع است. زیج به معنی کتابچه‌ی نجومی حاوی جدول‌های عددی و روش‌هایی برای محاسبات نجومی است.
این رساله دارای چهار مقاله است:
۱. روش‌های محاسبات نجومی
۲. جدول‌های کمیت‌های نجومی
۳. توضیح ساختار عالم بر مبنای مدل بطلمیوسی
۴. برهان درستی روش‌های مذکور در مقاله‌ی اول
چندین نسخه‌ی خطی از این رساله برجای مانده است.
مقاله‌ی اول و چهارم این زیج همراه با ترجمه و شرح انگلیسی آن منتشر شده است.
یکی از شاگردان کوشیار به نام علی‌بن احمد نسوی کتابی نوشته که در آن برای روش‌های محاسبات نجومی زیج جامع کوشیار مثال‌های عددی آورده است.

رساله‌ی اسطرلاب

کوشیار رساله‌ای درباره‌ی اسطرلاب دارد. اسطرلاب ابزاری است که برای سنجش زمان، تعیین موقعیت اجرام آسمانی و اوقات شرعی و نیز به عنوان ابزار نقشه برداری به‌کار می‌رفت.
نمونه‌هایی از انواع اسطرلاب امروزه در موزه‌ها نگه‌داری می‌شود. در زمان‌های گذشته دانشمندان و نیز قدرتمندان می‌کوشیدند تا نمونه‌ی به‌روز و کامل‌تری از اسطرلاب در اختیار داشته باشند. چرا که به موازات پیشرفت علم نجوم، انواع جدیدتری از این ابزار نیز ساخته می‌شد و از این رو می‌توان گفت نقش اسطرلاب قابل مقایسه با لپ‌تاپ‌های کنونی است!

این اسطرلاب که ساخته‌ی ابومحمود خجندی از دانشمندان هم‌عصر و معاشر با کوشیار است، هم‌اکنون در موزه‌ای در دوحه (قطر) نگه‌داری می‌شود.

mohammad.bagheri2008@gmail.com
gh.setareh@gmail.com

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد برای رشد

مجلات فصل‌نامهٔ رشد ویژهٔ معلمان، مربیان و مشاوران مدارس متوسطه اول و دوم

www.roshdmag.ir

نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید سلیمی)

تلفن: ۸۸۴۹۰۲۲۸-۰۲۱ نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ -۰۲۱