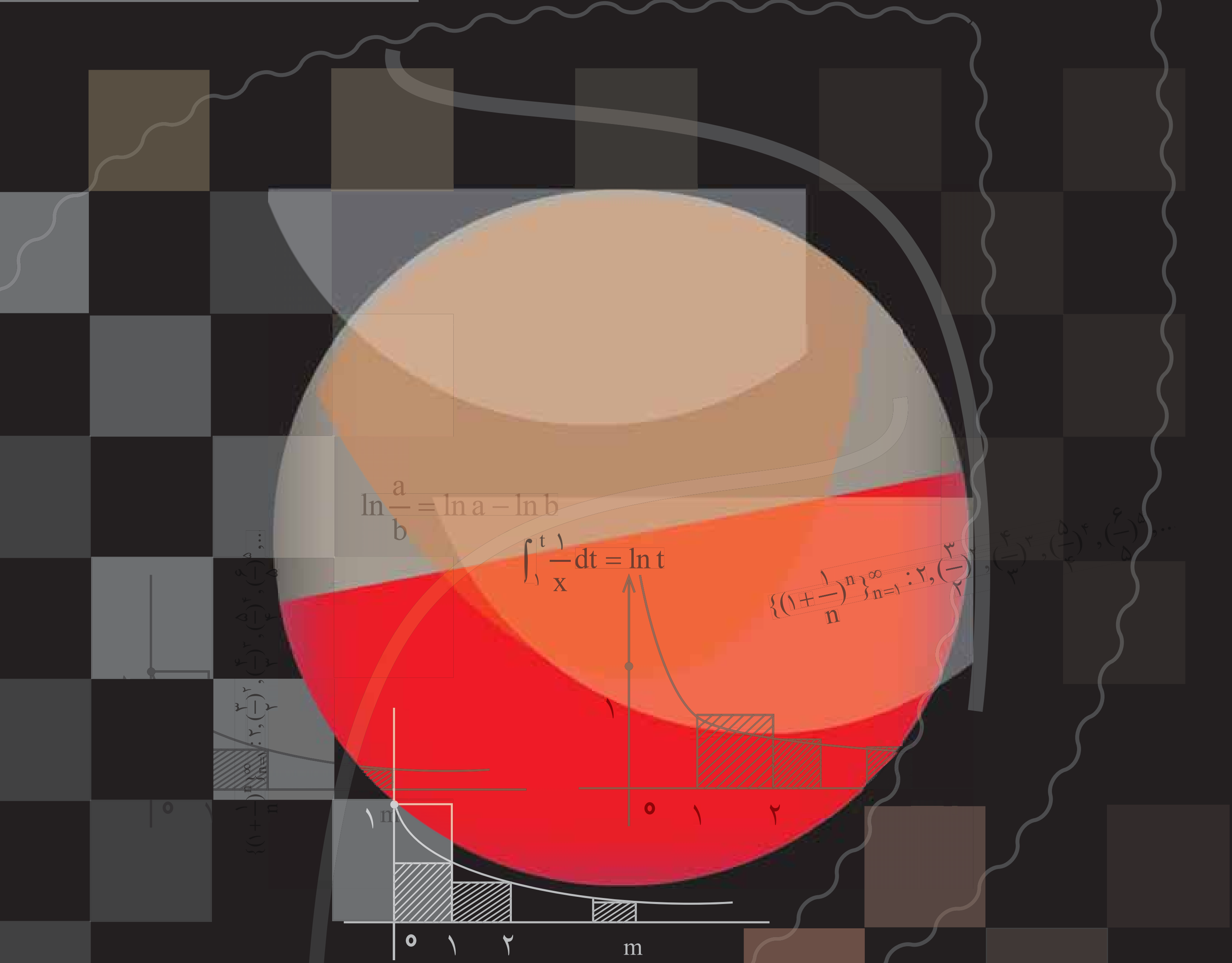
وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش‌وبرنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات وتکنولوژی آموزشی

رشد آموزش ریاضی ۱۱۷

دورهٔ سی ودوم ، شمارهٔ ۱ ، پاییز ۱۳۹۳، ۶۴ صفحه ، ۱۱۰۰۰ ریال

فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی واطلاع‌رسانی

www.roshdmag.ir ISSN: 1606-9226



در بیست و هفتمین کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان، مریم میرزاخانی، اولین زن برنده مدال فیلدز در جهان به عنوان اولین ایرانی، جایزه خود را از اولین رئیس‌جمهور زن کره‌جنوبی، دریافت کرد.

مدال فیلدز به ریاضی‌دانان جوان کمتر از ۴۰ سال تعلق می‌گیرد که تحقیقات برجسته‌ای در ریاضی انجام داده‌اند. این جایزه هر چهار سال یک‌بار توسط «اتحادیه بین‌المللی ریاضی» (IMU) اهدا می‌شود. سال ۱۹۳۶، اولین جایزه به آلفورس اهدا شد. آخرین جایزه در سال ۲۰۱۴ به چهار ریاضی‌دان اهدا شد که مریم میرزاخانی اولین زن و اولین ایرانی برندهٔ این مدال است.

صفحه ۵۶ را بخوانید

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی ۱۱۷

دورهٔ سی و دوم، شمارهٔ ۱، پاییز ۱۳۹۳

فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

● نشانی دفتر مجله: تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶. صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ ● تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴) ● نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ ● وبگاه: www.roshdmag.ir ●
پیام‌نگار: riyazi@roshdmag.ir ● پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۳ ● تلفن پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ ● کد مدیرمسئول: ۱۰۲ ● کد دفتر مجله: ۱۱۳ ● کد امور مشترکین: ۱۱۴ ●
نشانی امور مشترکین: تهران، صندوق پستی: ۱۶۵۹۵/۱۱۱ ● تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ – ۷۷۳۳۶۶۵۵ ● چاپ: شرکت افست (سهامی عام) ● شمارگان: ۷۳۰۰

معنای تحول یافته «کمک‌آموزشی» در عصر فناوری اطلاعات و ارتباطات

زهرا گویا

تکنولوژی، مناسبات انسانی را باز تعریف کرده، «دست‌نیافتنی‌ها» را در دسترس قرار داده و درعوض سهولت و سادگی انتخاب را از بین برده است. شاید در گذشته‌های نه‌چندان دور، می‌شد با اندکی دانش، کمی شهود و قدری انگیزه و علاقه، انتخاب‌های نسبتاً مناسبی داشت. اما هرچه که بوده تمام شده! تکنولوژی آرامش قبلی را برهم زده است! اگر هم بخواهید از مدارِ انتخاب کردن خارج شوید و بگذارید دیگران برایتان انتخاب کنند، دیگر امکان ندارد. شاید بپرسید چرا؟! شاید هم برایتان مهم نباشد و فکر کنید که هرچه پیش آید خوش آید! شاید! نمی‌دانم. اما اگر احیاناً چنین سؤالی ذهن شما را درگیر خود کرده است، بدانید که شما تنها نیستید و از این‌جهت در بین جمع کثیری از دوستانتان قرار دارید.

وقتی بر سر دوراهی سرنوشت‌سازی که تکنولوژی ایجاد کرده است قرار می‌گیریم، ریاضی باز هم چاره‌ساز است! زیرا به ما مهارت‌های استدلال کردن، مقایسه نمودن و انتخاب کردن می‌آموزد؛ مهارت‌هایی که برای استفادهٔ مفید و تعالی‌بخش از تکنولوژی ضروری است. یکی از قوی‌ترین و قانع‌کننده‌ترین دلیل‌ها برای حضور ریاضی در برنامه درسی مدرسه‌ای در عصر فناوری اطلاعات و ارتباطات، توسعه مهارت‌های استدلالی و انتخاب‌گری، و مدیریت کردن بر این همه تنوع مسیر است. تکنولوژی، معناهای جدیدی برای مفاهیم قبلی ایجاد کرده است که توجه به آن‌ها در حوزهٔ ریاضی و آموزش ریاضی، ما را در انتخاب مسیر مناسب برای فعالیت‌های آموزشی یاری می‌دهد. برای روشن‌تر شدن موضوع، به سیر تحول «کمک‌آموزشی» به اختصار، اشاره می‌شود.

در گذشتهٔ نه‌چندان دور، واژهٔ «کمک‌آموزشی» معنایی متفاوت از امروز داشت و این معنا، هم‌چنان در حال تحول و تطور است. اگر بیشتر به عقب برگردیم، به زمانی می‌رسیم که هنوز، ماشین چاپ اختراع نشده و صنعت چاپ، به‌وجود نیامده بود. در نتیجه، نوشتن ـ از هر نوع ـ به قصد ثبت و ضبط اطلاعات، فی‌نفسه ارزشمند و حتی حیاتی بود. این تلاش، باعث گردش علمی، انتشار اطلاعات و حفظ میراث فرهنگیِ تمدن‌های مختلف در جهان می‌شد. در واقع «کاتبان»، مقام رفیعی داشتند و نامشان در تاریخ، ماندگار است.

سپس با پرشی بلند به دوره‌ای توجه می‌کنیم که «جزوه‌نویسی»[1] توسط ریاضی‌دان‌های معروف بعد از رنسانس، تبدیل به مهم‌ترین عامل آموزش و انتقال تجربه و زمینه‌ساز ورود به آموزش‌های رسمی شد. جزوه‌های فراموش نشدنی **هیلبرت** و **فرما** و **کلاین** و دیگران، به تدریج تبدیل به کتاب‌های کلاسیک و ماندگار ریاضی در عصر جدید شدند؛ مانند جزوه‌های **وان‌دِروِردن** که آن‌ها را با حضور در کلاس‌های جبر آرتین نوشته بود و بعدها، تبدیل به معروف‌ترین کتاب‌های جبر مدرن در جهان شد. به دلیل نقش اثرگذار «جزوه» و «جزوه‌گویان»[2]، هنوز هم این واژه در بسیاری کشورهای غربی، به مدرسان دانشگاهی اطلاق می‌شود.

جنبه دیگری از این تلاش، پس از تأسیس نظام آموزش رسمی ایران در حدود ۱۰۰ سال پیش، با عنوان «حل‌المسائل» یا «مجموعه مسائل» تهیه و در دسترس تشنگان آن‌ها قرار گرفت. بزرگانی هم‌چون احمد بیرشک و پرویز شهریاری، در این راه زحمت‌های زیادی کشیدند و بسیاری از دانش‌آموزان مشتاق به‌خصوص در

شهرستان‌ها، به جز استفاده از آثار آنان، امکان یادگیری ریاضی نداشتند. بعد از آن هم که از سال ۱۳۶۴ آزمون سراسری ورود به دانشگاه‌ها فراگیر شد، باز هم این بزرگان، به نوشتن کتاب‌های «تست» و «نکته» و «آموزش کنکور» پرداختند تا به «کمک» دانش‌آموزان مناطق محروم بشتابند. من که خود در سال ۱۳۵۱ دیپلم گرفتم! اولین‌باری که «تست» دیدم، سر جلسه کنکور بود و هاج و واج مانده بودم که چکار کنم، و اگر از این نوع «کمک‌آموزشی»ها استفاده کرده بودم، آن‌قدر شگفت‌زده نمی‌شدم!

همین‌طور که با تاریخ جلو آمدیم، به محدودیت‌های دوران جنگ، بسته شدن مدارس در مناطق جنگ‌زده و تعطیلی کلاس‌ها رسیدیم. در آن زمان، فکر راه‌اندازی مجلات رشد (۱۳۶۳) برای کمک به معلمان ریاضی به وجود آمد و برنامه‌های آموزشیِ تدریس محتوای کتاب‌های ریاضی برای دانش‌آموزان محروم از کلاس درس، طراحی و اجرا شد. اگر خوب و منصفانه به این تحول و تطور تاریخی نگاه کنیم، قدردان تلاش‌های به موقع و سازندهٔ سیاست‌گذاران و تصمیم‌گیرندگان آموزشی می‌شویم. کسانی که با همتشان، نگذاشتند چرخ‌های این آموزش، کند شود یا خدای ناکرده، از حرکت بایستد. در حقیقت، نکته مهم این است که لازم است هر حرکتی، در جغرافیای زمان و مکان خودش دیده شود. در غیر این صورت، به‌راحتی می‌توان همهٔ تلاش‌ها را منکر شد که این کار، غیرمنصفانه، ناآگاهانه و تخریبی است. به‌خصوص مسائلی که به شدت، متأثر از حوادث سیاسی، اجتماعی، اقتصادی و فرهنگی هستند.

در حال حاضر، تکنولوژی امکانات جدیدی به‌وجود آورده که انکارش، مانند انکار روشنایی خورشید است. تکنولوژی، تعریف‌های مختلفِ برنامهٔ درسی، کتاب درسی، محتوا، کمک‌آموزشی و هر آن‌چه را که مربوط به یاددهی و یادگیری است، تغییر داده است و عدم توجه به این‌ها، انرژی‌ها را تلف می‌کند. برای عمیق‌تر شدن در این بحث، تنها به یک نمونه اشاره می‌کنم و باقی را به خوانندگان عزیز می‌سپارم.

در دههٔ اخیر، در ایران مرسوم شد که برای کتاب‌های درسی، کتاب‌های کمکی هم نوشته شود که علت این کار، به صراحت بیان نشده است. برای مثال، یک برنامه، و محصول آن که کتاب درسی باشد، احتیاج به قوام آمدن دارد تا دیگر، به «کمکی» نیاز نداشته باشد. این درحالی است که انواع «کمکی‌های» متنوع و خوب تهیه شده، توسط تکنولوژی در اختیار همگان می‌تواند قرار بگیرد. یکی از همکاران عزیزمان سرکار خانم مریم شاه‌محمدی، وبگاهی را معرفی کرده است که سهولت استفاده از آن، برای معلمان، برنامه‌ریزان و دانش‌آموزان، چشمگیر است. این وبگاه، با روش «پیمانه‌ای»[۳]، تقریباً تمام مباحث ریاضی را از دوره پیش‌دبستانی تا پایان سال اول دانشگاه، آموزش داده است. خودآموزی است که مرحله به مرحله، بعد از معرفی مفهوم، به ایجاد مهارت در درک و فهم آن می‌پردازد، مفهوم را با سایر مفاهیم ریاضی هر پایه ـ ارتباط افقی ـ و در امتداد هم ـ ارتباط عمودی ـ تلفیق می‌کند[۴]؛ تمرین‌های متنوع حل می‌کند، خودآزمایی می‌کند و دانش‌آموز را به مرحله بعد می‌رساند. این وبگاه، «مجانی»[۵] و دسترسی به آن ساده است. مانند جئوجبرا، زبانی ساده دارد و به‌راحتی توسط معلمان و دانش‌آموزان، قابل درک است. تهیه‌کنندگان آن نیز از نظر ریاضی، افرادی موجه و قابل اعتماد هستند.

ان‌شاءالله در شمارهٔ بعدی مجله، یکی از موضوعات ریاضی بحث شده در این وبگاه، که ترجمه شده است، به‌عنوان یک نمونه، آورده می‌شود تا شاید کمکمان کند که از «کمکی»ها، در جای مناسب خودشان استفاده کنیم و اگر لازم بود، برایشان تغییر کاربری ایجاد کنیم. زیرا دانش‌آموزان این عصر و نسل، برای چیزهایی که مجانی به آن‌ها دسترسی دارند، دلیلی برای هزینه کردن نمی‌بینند، اما انتظار دارند که تقاضاهای جدیدشان مورد توجه قرار گیرد و از آن طریق، برای «کمک» به آن‌ها، هزینه شود. در هر حال، نگاه دوباره به مفاهیم جاری و تبیین جدید برای آن‌ها، ضرورتی است که تکنولوژی ایجاد کرده و توجه نکردن به آن، در میان مدت موجب خسران می‌شود. تکنولوژی می‌تواند ـ و می‌باید ـ در خدمت بشر درآید و در این مورد، با کاستن از تولیدات مکتوب غیرضروری، از نابودی درختان و تخریب محیط زیست، جلوگیری کند.

پی‌نوشت‌ها

1. Lecture Note
2. Lecturer
3. Madular
4. Integrated Curriculum
5. Free

استدلال و گفتمان در کلاس درس ریاضی با استفاده از نظریه بازی‌ها

سیدحسن علم‌الهدایی
هیئت علمی دانشگاه فردوسی مشهد
فهیمه کلاهدوز
دانشجوی دکتری ریاضی با گرایش آموزش ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

آموزش‌وپرورش و برنامه‌ریزان ریاضی کشور باید در تنظیم و برنامه‌ریزی محتوای کتاب‌های درسی و برنامه‌های آموزشی به‌گونه‌ای عمل کنند تا شرایط مناسب برای تدریس، ایجاد انگیزه، فهم مطالب و توسعهٔ مهارت‌های تفکر و استدلال دانش‌آموزان، فراهم شود

چکیده

یکی از مهارت‌ها و توانایی‌هایی که در ریاضیات مدرسه‌ای مورد تأکید جامعهٔ آموزش ریاضی است، مهارت استدلال کردن است؛ البته استدلالی که به‌صورت منطقی و نظام‌وار باشد. اغلب محققان و آموزشگران ریاضی، ایجاد فرصت‌های بحث و گفت‌وگو در کلاس درس را در قالب ریاضیات غیررسمی، به‌عنوان یکی از روش‌های مؤثر برای پرورش مهارت استدلالی دانش‌آموزان توصیه می‌نمایند. در این راستا، یکی از فعالیت‌هایی که می‌تواند به‌صورت فردی و گروهی انجام پذیرد و مهارت استدلالی دانش‌آموزان را به‌کار گیرد، مدل‌سازی ریاضی فعالیت‌های روزانه است. در واقع تجربهٔ تدریس محققان، نشان می‌دهد که ورود مبحث «نظریهٔ بازی‌ها[1]» به آموزش ریاضیات مدرسه‌ای، می‌تواند فرصت‌های بحث و گفتمان و استدلال منطقی را در دانش‌آموزان فراهم آورد. در این مقاله، هدف آن است که با برخی از مفاهیم اساسی «نظریهٔ بازی‌ها» و نمونه‌هایی از مدل‌سازی رویدادها در قالب این نظریه آشنا شویم. هم‌چنین، در مورد استفاده از بازی‌های استراتژیک در کلاس درس توضیحاتی ارائه خواهد شد.

کلیدواژه‌ها: نظریهٔ بازی‌ها و استدلال، استدلال ریاضی دانش‌آموزان، گفتمان ریاضی

مقدمه

کوهن[2] (۲۰۰۸) در کتاب «آموزش، برای تفکر[3]»، با بیان سؤالاتی مرتبط با اهداف آموزش مدرسه‌ای، مخاطب را با چالش‌هایی مواجه می‌کند، مانند اینکه کدام مهارت‌های فکری برای دانش‌آموزان ضروری است؟ جهت دست‌یابی به این مهارت‌ها، لازم است دانش‌آموزان با چه فعالیت‌هایی آشنا شوند و چه

دانشی را کسب نمایند؟ چرا برخی از مهارت‌ها، بیش از بقیه اهمیت دارند و آن‌ها را شایستهٔ سرمایه‌گذاری می‌دانیم؟ کوهن در ادامه، بیان می‌کند که اگر به این پرسش‌ها، پاسخ‌های منطقی داده شود و بهترین روش‌ها هم برای تسلط کافی دانش‌آموزان به مهارت‌های مورد نیاز، تعیین گردد؛ باز هم چالش دیگری باقی می‌ماند. این چالش این است که آیا دانش‌آموزان، این مهارت‌ها را آن‌قدر باارزش می‌دانند که با علاقه، به تمرین آن‌ها بپردازند و آیا این مهارت‌ها را در زمان و مکان مناسب به‌کار گرفته و دلیل استفاده از آن‌ها را می‌دانند؟

متخصصان تعلیم‌وتربیت، با تأکید بر اهمیت تفکر اندیشمندانه و منطقی به‌عنوان یکی از مهارت‌های مورد نیاز افراد در زندگی، پرورش آن را یکی از هدف‌های اصلی تعلیم‌وتربیت می‌دانند. بر این اساس، آنان معتقدند که نظام آموزشی، به‌جای انتقال صرف اطلاعات به دانش‌آموزان، باید موقعیت‌های مناسبی را برای پرورش تفکر و توسعهٔ توانایی استدلال منطقی دانش‌آموزان، فراهم آورد (ملکی و حبیبی‌پور، ۱۳۸۵؛ حاجی‌حسینی‌نژاد و بالغی‌زاده، ۱۳۸۹).

با وجود اینکه مدرسه، مکان مناسبی برای پرورش تفکر و مهارت‌های استدلالی دانش‌آموزان است، اما همان‌گونه که آندرسون[۴] و همکاران (۲۰۰۰) بیان می‌نمایند، لازم است مشخص شود که آیا بین آموخته‌های دانش‌آموزان و توانایی آنان در حل مسائل زندگی حال و آینده، ارتباطی وجود دارد یا خیر (نقل شده در کوهن، ۲۰۰۸). لذا آموزش‌وپرورش و برنامه‌ریزان ریاضی کشور باید در تنظیم و برنامه‌ریزی محتوای کتاب‌های درسی و برنامه‌های آموزشی به‌گونه‌ای عمل کنند تا شرایط مناسب برای تدریس، ایجاد انگیزه، فهم مطالب و توسعهٔ مهارت‌های تفکر و استدلال دانش‌آموزان، فراهم شود.

هم‌چنین، میولر[۵] و همکاران (۲۰۱۰) معتقدند که اغلب دانش‌آموزان، موقعی که می‌خواهند تفکراتشان را توضیح دهند و توجیه نمایند، با مشکل مواجه می‌شوند. آن‌ها بیان می‌دارند که اگرچه ممکن است دانش‌آموزان بتوانند برخی از مسائل پیچیده را حل کنند، اما در اغلب موارد، قادر به توجیه راه‌حل‌هایشان نیستند و یا اینکه نمی‌توانند به‌خوبی، فرایند چگونگی رسیدن به جواب را توضیح دهند.

یکی از دلایل این مشکل، می‌تواند تأکید بیش از اندازهٔ معلمان در کلاس درس، بر روی یادگیری حقایق ریاضی، مهارت‌ها و رویه‌های مورد نیاز، تنها برای حل مسائل الگوریتمی و معمولی[۶] باشد. در این صورت، ممکن است توسعهٔ توانایی دانش‌آموزان برای استدلال‌کردن به تعویق بیفتد و تا زمانی که آنان مفاهیم مورد نظر را به‌طور کامل و به‌خوبی نفهمیده باشند، در به‌کارگیری این مفاهیم در استدلال و بحث‌هایشان با مشکل مواجه خواهند بود (میولر و همکاران، ۲۰۱۰). باید توجه نمود که در برخی مواقع، دانش‌آموزان نمی‌توانند شکل رسمی و نمادین استدلال‌های استنتاجی را به‌خوبی درک کنند. در این‌گونه موارد می‌توان برای شروع کار، با استدلال استنتاجی از شکل‌های غیررسمی آن در آموزش استفاده نمود.

از آنجایی‌که فرایند استدلال، اساس کار در ریاضیات است، لذا این فرایند برای یادگیری در ریاضیات مدرسه‌ای نیز، ضروری و مهم است. یاکل و حنّا[۷] (۲۰۰۳) تأکید می‌نمایند که باید برای همهٔ دانش‌آموزان، از همان اوایل تحصیلات در مدارس ابتدایی، محیط حمایتیِ مناسبی برای تأیید یا رد ادعاها ایجاد شود. تحقیقات نشان می‌دهد که تدریس صِرف الگوریتم‌ها، می‌تواند برای توسعهٔ استدلال دانش‌آموزان بی‌فایده و حتی مضر باشد (نقل شده در میولر، ۲۰۰۷).

به‌طور کلی، لازم است که معلم در کلاس درس، شرایطی فراهم آورد تا دانش‌آموزان بتوانند در یک فضای پویا، نظرات خود را بیان نموده و استدلال‌های یکدیگر را مورد نقد و بررسی قرار دهند و چگونگی متقاعد کردن دیگران را بیاموزند. همان‌گونه که کریمی‌فردین‌پور (۱۳۸۵) بیان می‌نماید، گفتمان یک بخش ضروری از ریاضی و جریان یاددهی و یادگیری است و هم‌چنین، وسیله‌ای است برای در میان گذاشتن اندیشه‌ها، عقیده‌ها و شفاف شدن آنچه که می‌دانیم. او در ادامه، بیان می‌دارد که گفتمان، می‌تواند مشاهدات غیررسمی را به‌سوی بحث‌هایی سوق دهد که حالت‌های خاص در مورد راه حل مسئله را، به نتایج عمومی و مجرد رهنمون شود.

براساس تجربه‌ای که نویسندهٔ دوم در کلاس

متخصصان تعلیم‌وتربیت، با تأکید بر اهمیت تفکر اندیشمندانه و منطقی به‌عنوان یکی از مهارت‌های مورد نیاز افراد در زندگی، پرورش آن را یکی از هدف‌های اصلی تعلیم‌وتربیت می‌دانند. بر این اساس، آنان معتقدند که نظام آموزشی، به‌جای انتقال صرف اطلاعات به دانش‌آموزان، باید موقعیت‌های مناسبی را برای پرورش تفکر و توسعهٔ توانایی استدلال منطقی دانش‌آموزان، فراهم آورد

درس خود در دورهٔ دبیرستان داشته، به‌نظر می‌رسد یکی از روش‌هایی کـه می‌تواند توانایی دانش‌آموزان را در اســتدلال منطقــی پرورش دهد، مدل‌ســازی فعالیت‌های مختلف در قالب بازی‌های اســتراتژیک و تحلیــل نتایج این بازی‌ها به‌صــورت فردی و گروهی اســت. بنابراین در این مقاله سعی بر این است که با ارائه مفاهیم اساســی «نظریهٔ بازی‌ها» و مدل‌ســازیِ یک رویداد در قالب بازی‌های استراتژیک، اهمیت این فعالیت‌ها در کلاس درس، مشخص گردد.

ورود نظریهٔ بازی‌ها به دنیای آموزش

نظریــهٔ بازی‌هــا کــه بیــش از نیــم قــرن پیــش بــا مقــالات فــون نیومــن و نَــش[8] پایه‌ریزی شده اســت، شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی اســت که در بســیاری از علوم دیگــر از جمله علوم اجتماعــی، اقتصادی، زیست‌شناســی، مهندســی و غیره، مورد اســتفاده قرار گرفته است. نظریهٔ بازی‌ها تــلاش می‌کند تا رفتار ریاضی حاکم بر یک موقعیت استراتژیک را مدل‌سازی کند. این موقعیت، زمانی پدید می‌آید که موفقیت یک فرد، وابســته به راهبردهایی باشــد که دیگران انتخــاب می‌کنند. در واقع، در یک بازی اســتراتژیک، سود هر بازیکن تنها در گرو رفتار خود او نبوده و متأثر از رفتار یک یا چند بازیکن دیگر نیز هست. هدف نهایی این نظریه، یافتن راه‌برد بهینه برای بازیکنان است (فریور، ۱۳۸۷؛ یگانگی‌دستگردی، ۱۳۸۹؛ عبدلی، ۱۳۹۰). یک بازی شامل مجموعه‌ای از بازیکنــان، مجموعــه‌ای از حرکت‌ها یــا راه‌بردها[9] و نتیجه و مطلوبیت مشــخصی بــرای هر ترکیب از راه‌بردهاســت. پیروزی در هر بازی، تنها تابع شانس نیســت، بلکه قوانین ویژهٔ خــود را دارد و هر بازیکن در طی بازی، سعی می‌کند با به‌کارگیری آن قوانین، خــود را به نقطــهٔ بهینه و بُــردِ بــازی، نزدیک کند (یگانگی‌دستگردی، ۱۳۸۹).

نظریهٔ بازی‌ها تلاش می‌کند تا رفتار ریاضی حاکم بر یک موقعیت استراتژیک را مدل‌سازی کند. این موقعیت، زمانی پدید می‌آید که موفقیت یک فرد، وابسته به راهبردهایی باشد که دیگران انتخاب می‌کنند. در واقع، در یک بازی استراتژیک، سود هر بازیکن تنها در گرو رفتار خود او نبوده و متأثر از رفتار یک یا چند بازیکن دیگر نیز هست. هدف نهایی این نظریه، یافتن راه‌برد بهینه برای بازیکنان است

مفاهیم اصلی در نظریهٔ بازی‌ها

برای تعریف فضای بازی، مشخص کردن مفاهیم و عناصر زیر، ضروری اســت (ازبرن و روبینســتین[10]، ۲۰۱۱؛ یگانگی دســتگردی، ۱۳۸۹، عبدلی،۱۳۹۰، طاهری، ۱۳۹۰)

بازیکنــان[11]: بازیکنــان در اصــل، همــان تصمیم‌گیرنــدگان بازی هســتند. بازیکــن می‌تواند شــخص، شــرکت، دولت و نظایر آن باشــد. یکی از پیش‌فرض‌های مهم در نظریهٔ بازی‌ها، عاقلانه بودن[12] رفتار بازیکنان است. عاقلانه بودن به این معناست که هر بازیکن تنها در پی بیشینه کردن سود خود بوده و می‌داند که چگونه می‌تواند سود خود را بیشینه کند.

استراتژی (عمل)[13]: یک استراتژی، عملی است که بازیکن می‌تواند از مجموعه تصمیمات و اقداماتی که برایش ممکن است، انتخاب کرده و در نوبت خود آن را اجرا نماید.

تابع مطلوبیــت[14] **(ترجیحات)**: ترجیحات یک بازیکــن در اصــل، مشــوق‌های وی بــرای گرفتن یا نگرفتن یک تصمیم و نشــان دهندهٔ نتیجه و ســطح مطلوبیت بازیکن در صــورت گرفتن تصمیم متناظر با آن است.

ترتیب بازی[15]: بدیــن معنی که در هر گامی از بازی، چه بازیگری حرکت می کند.

ساختار اطلاعاتی[16]: منظور این است که در هر لحظه از بازی، هر بازیکن چه اطلاعاتی را می‌تواند از حرکت‌ها و ترجیحات طرف مقابلش، دریافت کند.

خروجی‌هــای بازی[17]: یعنی وقتی بازی به انتها می‌رسد، چه نتایجی به بار می‌آید.

نمونه‌ای از بازی‌های استراتژیک و تحلیل آن‌ها در کلاس درس

معمای زندانی‌ها[18] (ازبرن و مارتین،۲۰۱۱)

بــازی معمــای زندانی‌هــا از بازی‌هــای معروف و پرکاربــرد در نظریــه بازی‌هاســت و بســیاری از فعالیت‌های رقابتی بر اســاس این بازی، مدل‌ســازی می‌شــود. شرح بازی بدین صورت اســت که دو نفر، متهم به شــرکت در یک ســرقت ماشــین دستگیر شده‌اند. پلیس شواهدی دارد که نشان می‌دهد آن دو نفر که همکار نیز هســتند، با اجرای برنامه‌ای، کیف پولی را هم دزدیده‌اند، اما این شــواهد پلیس، سرقت

جدول (۱). استراتژی‌های هر دو بازیکن در هر موقعیت مشخص در بازی معمای زندانی‌ها

بازیکن اول			
اعتراف نکردن	اعتراف کردن		
۰ ۵	۳ ۳	اعتراف کردن	بازیکن دوم
۲ ۲	۵ ۰	اعتراف نکردن	

کیف پول به‌وسیلهٔ آنان را اثبات نمی‌کند. در صورتی سرقت کیف پول توسط هر کدام از این دزدان اثبات می‌شـود که همـکارش، علیه او اعتـراف کند، یعنی بگوید دوســتش کیف پول را دزدیده اسـت. این دو، هر دو جداگانه مورد بازجویی قرار می‌گیرند. طی این بازجویـی، با هریک از آن‌هـا جداگانه به این صورت معامله می‌شود:

اگر دوستت را لو بدهی و او علیه تو اعتراف نکند، تـو آزاد می‌شـوی، ولی او به ۵ سـال حبس محکوم خواهد شـد (۲ سال به‌خاطر سرقت ماشین و ۳ سال به‌خاطر سـرقت کیف پول). اگـر هر دو یکدیگر را لو بدهید، هر دو به ۳ سـال حبس محکوم خواهید شد و ۲سال زندان شـما بخشیده می‌شود. اگر هیچ‌کدام همدیگر را لو ندهید، هر دو ۲سـال به‌خاطر سـرقت ماشین به زندان می‌روید.

در اینجـا از دانش‌آمـوزان می‌خواهیـم که این رویداد را به‌صورت یک بازی در نظر بگیرند و هر کدام از زندانی‌هـا را بازیگر این بازی تصور کنند. سـپس بررسی نمایند که اگر هر کدام از این بازیکنان عاقلانه فکر کند و فقط در فکر منفعت خودش باشـد، شـما پیش‌بینی می‌کنید که هر یک، کدام حالت را انتخاب می‌کند؟ آیـا هر کـدام از زندانی‌ها علیه دوسـتش اعتراف می‌کند یا خیر. از دانش‌آموزان بخواهید تمام حالت‌های ممکن را در یک جدول خلاصه کنند. شما هم می‌توانید هم‌زمان، این جدول را روی تابلو رسـم کنید (جدول ۱).

دانش‌آمـوزان می‌توانند با فرض ثابت بودن بازی هر بازیگر، در مـورد عملکرد رقیبش تصمیم بگیرند و نتیجـه را اعـلام کنند. نتیجهٔ نهایی آن اسـت که پیش‌بینی می‌شـود هر دو زندانی، اعتراف می‌کنند و هر کدام ۳ سال به زندان می‌روند. در اینجا می‌توانیم از دانش‌آمـوزان بخواهیـم که بگوینـد «چرا حالت بهتر را از دسـت می‌دهند، یعنی حالتی که هر دو ۲ سـال به زندان بروند؟». در واقع، هدف آن است که دانش‌آموز بدین گونه اسـتدلال کند که چون هر دو به نفع خود فکر می‌کنند و هر کدام از آن‌ها به دنبال کسـب بهترین نتیجه برای خود، یعنی آزاد شـدن اسـت، و به‌طرف مقابل نیز اعتماد ندارد، دوسـتش را لو می‌دهـد و در نتیجه، هـر دوی زندانی‌ها ضرر می‌کنند. شـاید برای دانش‌آموزان این فرایند جالب باشد که به‌طور شـهودی، به‌نظر می‌رسد باید هر دو اعتـراف نکنند و لذا هر دو زندانی، کمتر ضرر کنند. اما مشـاهده می‌کنند که بر اساس استدلال منطقی، اتفاق دیگری می‌افتد.

بسـیاری از فعالیت‌های رقابتـی روزمره را نیز می‌توان در قالب بازی‌های اسـتراتژیک، مدل‌سازی کـرد و از دانش‌آموزان خواسـت کـه در گروه‌های خـود، در مورد نتایـج بازی بحث کننـد. به‌عنوان مثال، یکـی از فعالیت‌هایی که به‌طـور مکرر با آن مواجه می‌شـویم، حق انتخاب از بیـن چند گزینه اسـت. رویداد را این‌گونه برای دانش‌آموزان شـرح می‌دهیم.

فرض کنید دو نفر با هم دوست هستند و تصمیم دارند چند سـاعتی استراحت کنند، نفر اول پیشنهاد می‌کنـد که برای دیدن فیلم، به سـینما بروند و نفر دوم، تماشای تئاتر را پیشنهاد می‌کند. هر کدام از این دو نفر به اختیار خود، تصمیم می‌گیرد که به سـینما برود یا تماشای تئاتر را انتخاب کند. معلم می‌تواند در ایـن مرحله، به اتفاق دانش‌آموزان و با در نظر گرفتن شـرایط و رابطهٔ دوستی دو نفر، برای بازی قوانینی را طراحی کند. به‌عنوان مثـال، فرض می‌کنیم که اگر هر کدام از این دو نفر به مکان مورد علاقه خود برود، ۱ امتیاز کسـب می‌کند و چنانچه در کنار دوسـتش باشد، ۲ امتیاز کسـب می‌کند. در واقع، بنا را بر این گذاشته‌ایم که درکنار هم بودن برای شخص، مهم‌تر از مـکان مورد علاقهٔ اوسـت. حـال از دانش‌آموزان می‌خواهیـم کـه این رویـداد را در قالـب یک بازی مدل‌سـازی کننـد و عناصر بازی یعنـی بازیکنان و

استراتژی‌های هر کدام از بازیگران را مشخص نمایند و با اســتدلال منطقی، پیش‌بینــی نمایند که اگر هر دو بازیکــن عاقلانه فکر کننــد چه تصمیمی خواهند گرفت؟ جدول ۲، حالت‌های مختلف تصمیم‌گیری هر دو بازیکن را نشان می‌دهد.

جدول (۲). حالت‌های مختلف برای تصمیم‌گیری دو بازیکن در بازی تئاتر – سینما

		بازیکن اول	
		سینما	تئاتر
بازیکن دوم	سینما	۳ ۲	۰ ۰
	تئاتر	۲ ۲	۲ ۳

چنانچه دانش‌آموزان شرایط مسئله را درست بررسی کنند، به این نتیجه خواهند رسید که هر دو بازیکن، یا به سینما می‌روند و یا هر دو، تئاتر را انتخاب می‌کنند. این تصمیم‌گیری معمولاً در زندگی روزمرهٔ ما هم، به شرط عاقلانه فکر کردن، اتفاق می‌افتد.

در ایــن دو مثــال، هدف آن بود که با مدل‌ســازی فعالیت‌های روزمره در قالب بازی‌های استراتژیک، آشنا شــویم و نشــان دهیم که می‌توان با انجــام این نوع از فعالیت‌ها، توانایی استدلالی دانش‌آموزان را به‌کار گرفت.

فعالیت‌هــای رقابتی و اجتماعی ملموس دیگری را نیــز می‌تــوان در قالــب بازی‌هــای اســتراتژیک مدل‌سازی کرد. حتی در بسیاری از بازی‌ها، می‌توان دانش انتزاعی ریاضی دانش‌آموزان را به‌طور مستقیم به‌کار گرفت.چنان‌چه دانش‌آموزان نسبت به این نوع مسائل رغبت نشــان دهند، می‌توان مفاهیم بیشتر و البته قابل فهمی را از این نظریه، برایشــان ارائه داد؛ مفاهیمی هم‌چون تعادل نش[۱۹]، تابع بهترین پاســخ و مفاهیمــی از این قبیل که توانایی اســتدلال کردن دانش‌آمــوز را به‌خوبی به‌کار می‌گیرنــد. وبگاهی که می‌تواند هم برای معلمان و هم برای دانش‌آموزان در این زمینه منبع آموزشــی مفید و مؤثری باشد، وبگاه www.kelasedars.org اســت کــه در آن، گروهی از دانشجویان با همت و اراده عالی، تصمیم گرفته‌اند تا مفاهیم این نظریه را با زبانی ســاده و قابل فهم برای دانش‌آموزان ارائه دهند.

یکی از مهارت‌های مهم در جامعه و به‌ویژه در کلاس درس ریاضی، مهارت استدلال کردن است. البته استدلالی که هدف آموزش ریاضی است، استدلال منطقی است و نکته‌ای که دارای اهمیت است، این است که دانش‌آموز، به ضرورت این استدلال پی ببرد و برای آن ارزش قائل باشد و به‌طور آگاهانه، این نوع استدلال را - هم در فعالیت‌های ریاضی و هم در فعالیت‌های روزمره- انتخاب کند

تجربــهٔ ارائه این بازی‌ها و تحلیل آن‌ها در کلاس درس ریاضــی، البته در ســاعت‌هایی بــا برنامه‌ریزی قبلی، بــرای نویســندهٔ دوم و دانش‌آموزانش در پایهٔ سوم متوسطه رشتهٔ ریاضی رخ داده است. وی شاهد بــوده که دانش‌آموزان، به‌خوبی و هدفمند اســتدلال می‌کنند و ســعی بر متقاعد کردن همکلاسی‌هایشان دارند و این، همان هدف وی از آموزش این نظریه در کلاس درس بوده است.

نتیجه‌گیری

یکــی از مهارت‌های مهــم در جامعه و به‌ویژه در کلاس درس ریاضی، مهارت اســتدلال کردن اســت. البتــه اســتدلالی که هــدف آموزش ریاضی اســت، اســتدلال منطقی اســت و نکته‌ای که دارای اهمیت اســت، این اســت که دانش‌آمــوز، به ضــرورت این استدلال پی ببرد و برای آن ارزش قائل باشد و به‌طور آگاهانــه، این نوع اســتدلال را - هم در فعالیت‌های ریاضــی و هم در فعالیت‌های روزمــره- انتخاب کند. همان‌گونــه که برخــی از تحقیقــات (به‌عنوان مثال، وبر[۲۰]، ۲۰۰۵؛ هارل[۲۱]، ۲۰۰۸؛ میولر و ماهر[۲۲]، ۲۰۰۹؛ برودیــه[۲۳]، ۲۰۱۰) نشــان می‌دهند، ایجــاد فضایی مناســب برای بحــث و گفت‌وگــو در کلاس ریاضی به‌گونه‌ای که قابل کنترل و هدفمند باشــد، می‌تواند در ارتقــای توانایی اســتدلال دانش‌آموزان مؤثر واقع گردد. به گفتهٔ شــونفلد (۱۹۹۴، نقل شــده در غلام آزاد و گویا، ۱۳۸۵) دانش‌آموزان باید در یک فرهنگ ریاضی رشــد کنند کــه در آن گفتمان ، تفکر و قانع کردن، بخش‌هــای مهمی از فعالیت‌های ریاضی آنان باشد. در این صورت است که اثبات‌ها، به‌عنوان بخش طبیعی ریاضیات آن‌ها دیده می شود. همان‌گونه که NCTM[۲۴] (۲۰۰۰) پیشــنهاد می‌کند، معلم می‌تواند در کلاس درس، با بیان سؤالاتی از قبیل اینکه «چرا فکر می‌کنید این درســت اســت؟»، «آیا کســی فکر می‌کند که جواب چیز دیگری است؟»، «چرا این‌گونه فکــر می‌کنید؟»، «آیــا این حدس همواره درســت است؟ چرا؟» و سؤالات مناسب دیگر، به دانش‌آموزان کمــک کند تا بفهمند که تمام احکام و گزاره‌ها، باید با شــواهد کافی تأیید یا رد شــوند. عــلاوه بر این، از دانش‌آموزان خواسته شود که پاسخ‌های خود را هنگام حل مسئله تبیین نمایند و به آن‌ها کمک شود تا اعتبار

و دقت نتایجشـــان را مورد بررســـی قرار دهند. یکی از فعالیت‌هایی که به‌نظر می‌رسد به‌خوبی می‌تواند این فضا را ایجاد کند و شـــرایط را برای استدلال‌های منطقی در ریاضی و حل مســـائل، البته در ابتدا به‌طور غیررسمی، فراهم آورد، تحلیل بازی‌های استراتژیک در قالب نظریهٔ بازی‌هاست. تجربهٔ نویسندهٔ دوم نشان می‌دهد که این موضـــوع، قابلیت ورود به آموزش ریاضـــی را در کلاس درس دارد و می‌تواند به‌طور هدفمند، مهارت استدلالی دانش‌آموزان را به‌کار گیرد. امید اســـت که با تحقیقات بیشتر و عمیق‌تر، شرایط و نحوهٔ استفاده از این فعالیت‌ها در کلاس درس، به‌طور واضح و شفاف مشخص گردد.

پی‌نوشت‌ها

1.Games Theory
2. Kuhn
3. Education for Thinking
4. Anderson
5. Mueller
6. Rutine
7. Yackel & Hanna
8. von Neumann & Nash
9. Strategies
10. Osborne & Rubinstein
11. Players
12. Rational
13. action
14. Payoff Function
15. Order of play
16. Information set
17. Out come
18. Prisoner's Dilemma
19. Nash Equiblibrium
20. Weber
21. Harel
22. Maher
23. Brodie
24. National Council of Teachers of Mathematics: NCTM

منابع

۱. حاجی‌حســـینی‌نژاد، غلامرضا؛ بالغی‌زاده، سوســـن. (۱۳۸۹). **تأثیر آموزش مبتنی بر «تدریس برای فهمیدن» بر برنامه درســـی تجربه شـــدهٔ درس تاریخ هنـــر**، فصلنامهٔ مطالعات برنامه درسی ایران، ۱۷، ۵۵-۳۹.

۲. فریور، مسعود. (۱۳۸۷). **کاربرد نظریهٔ بازی در شبکه‌های بی‌سیم**. برگرفته از وبگاه

۳. عبدلی، قهرمان. (۱۳۹۰). **تئوری بازی‌ها و کاربردهای آن**. جهاد دانشگاهی (واحد تهران).

۴. غلام آزاد، ســـهیلا؛ گویـــا، زهرا. (۱۳۸۵). **نقـــش اثبات در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای**، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، ۸۳، ۱۰-۴.

۵. کریمی‌فردین‌پـــور، یونس. (۱۳۸۵). **اثبات و اســـتدلال در ریاضیات مدرسه‌ای**، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، ۸۳، ۲۱-۱۸. دفتر انتشـــارات کمک‌آموزشی، ســـازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۶. ملکی، حســـن؛ حبیبی‌پور، مجیـــد. (۱۳۸۵). **پرورش تفکر انتقادی هدف اساســـی تعلیم‌وتربیت**، فصلنامهٔ نوآوری‌های آموزشی، ۱۹، ۱۰۸-۹۳.

۷. یگانگی‌دستگردی، وحید. (۱۳۸۹). **تئوری بازی‌ها**. دانشنامهٔ اقتصاد شهر، شماره هشتم، ۱۴۱-۱۳۴.

8. Kuhn, Deanna (2008). *Education for thinking*. Harvard university.

9. Brodie, Karin (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms*, New York: springer, Retrieved May 10, 2011 from http://www.springer.com.

10. Harel, Guershon (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM Mathematics Education*. 40, 487–500

11. Mueller, Mary (2007). A study of the development of reasoning in sixth grade students, Unpublished doctoral dissertation, the state university of new Jersey, United States. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.

12. Mueller, Mary , Maher, Carolyn (2009). Learning to Reason in an Informal Math After-School Program, *Mathematics Education Research Journal,* Vol. 21, No. 3, 7-35.

13. Mueller, M., Yankelewitz, D. & Maher, C. (2010). Rules without reason: Overcoming students' obstacles in learning. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 17(2/3), 307-320.

14. NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Osborne , Martin& Ariel Rubinstein,2011. A course in game theory, MIT press

15. Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. J*ournal of Mathematical Behavior*, 24, 351-360.

16. Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In Kilpatrick, J., Martin, W. G., & Schifter, D. (Eds), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp.227-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

www.kelasedars.org

دربارهٔ اصل تمامیت

(کمال)

اسمعیل بابلیان
عضو هیئت علمی دانشگاه خوارزمی

مقدمه

یکی از اصول مهم، که مجموعه اعداد حقیقی توسط آن مشخص می‌شود، اصل تمامیت[۱] است. این اصل به مفاهیم زیادی مربوط می‌شود، و همین امر سبب می‌شود که مطرح کردن و آموزش آن در دبیرستان با مشکل روبه‌رو باشد. این اصل با مفاهیمی چون مجموعه‌های متناهی[۲]، نامتناهی[۳] و کراندار[۴]، ماکسیمم[۵]، مینیمم[۶]، کران بالا[۷]، کران پایین[۸]، سوپریمم[۹] و اینفیمم[۱۰] یک مجموعه غیرخالی[۱۱]، حد دنباله‌های[۱۲] اعداد و بالاخره حد دنباله‌های یکنوا[۱۳] و کراندار مرتبط است.

در این نوشتار سعی شده است، ضمن ارائهٔ چند تعریف، قضیه و مثالِ مقدماتی ارتباط اصل تمامیت را با این مفاهیم نشان دهیم و تاحدودی موضوع و نحوهٔ آموزش آن را روشن کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم N مجموعهٔ اعداد طبیعی[۱۴] باشد، برای عدد طبیعی k داریم:

$N_k=\{۱,۲,...,k\}$

ضمناً، فرض می‌کنیم R نماد مجموعهٔ اعداد حقیقی[۱۵] و Q نماد اعداد گویا[۱۶] باشد. فعلاً، می‌دانیم که $Q\subset R$ و هدف این است که نشان دهیم Q، به مفهومی که به آن خواهیم پرداخت، کامل نیست و با اصلی که قابل اثبات نیست آن را کامل خواهیم کرد تا R حاصل شود.

کلیدواژه‌ها: اصل تمامیت، کمال، تمامیت

تعریف ۱: مجموعه غیرخالی A را متناهی گوییم در صورتی که عدد طبیعی k یافت شود به قسمی که A با N_k هم‌عدد باشد، و می‌نویسیم $A\approx N_k$؛ یعنی تناظری یک‌به‌یک بین A و N_k برقرار باشد. مجموعهٔ ϕ (تهی) را نیز متناهی می‌گیریم و هر مجموعه که متناهی نباشد نامتناهی نامیده می‌شود.

مثال ۱: مجموعه‌های زیر نمونه‌هایی از مجموعه‌های متناهی و نامتناهی را مشخص می‌کنند:

الف: $A=\{n\in N \mid n<۱۰ ,\ n \text{ عددی اول است}\} \approx N_{۴}$

ب: $B=\{۲k \mid k\in N ,\ k<۱۰۰\} \approx N_{۴۹}$

پ: مجموعهٔ $C=\{\text{اعداد اول کوچک‌تر از } ۱۰۰۰\}$ متناهی است.

ت: مجموعهٔ $D=\{x\in C \mid ۱۰<x<۱۰۰\}$ متناهی است.

ث: مجموعهٔ $E=\{(-۱)^n \mid n\in N\}$ متناهی و دارای دو عضو ۱ و ۱- است.

ج: مجموعهٔ $F=\{\frac{۱}{n} \mid n\in N\}$ متناهی نیست و با N هم‌عدد است.

از این‌ها نتیجه می‌شود که

«هر زیر مجموعه از یک مجموعهٔ متناهی، متناهی است.»

زیرا، ϕ و هر زیرمجموعهٔ ناتهی از N_k متناهی است.

اگر A ناتهی و متناهی باشد کوچک‌ترین عضو آن را مینیمم A و بزرگ‌ترین عضو آن را ماکسیمم A می‌نامیم.

تعریف ۲: اگر $\phi\neq A\subseteq R$، یعنی A زیرمجموعهٔ ناتهی از R باشد، آن‌گاه $u\in R$ را یک کران بالای A نامیم در صورتی که، $\forall x\in A: x\le u$,

به‌علاوه، اگر $u\in A$ آن‌گاه u را ماکسیمم A نامیم.

به همین ترتیب، $l\in R$ را یک کران پایین A نامیم اگر:

$\forall x\in A: l\le x$,

به‌علاوه، اگر $l\in A$ آن‌گاه l را مینیمم A می‌نامیم.

تبصره: کران بالا (پایین) یکتا نیست.

مثال ۲: اگر A بازهٔ $(-۱,۲]$ باشد، هر عدد بزرگ‌تر یا مساوی ۲ یک کران بالای A است. مجموعه کران‌های بالای A بازه $[۲,\infty)$ است. مجموعهٔ کران‌های پایین A نیز $(-\infty,-۱]$ است.

تعریف ۳: $\phi\neq A\subseteq R$ را کراندار نامیم اگر $l,u\in R$ یافت شوند به قسمی که

$\forall x\in A: l\le x\le u$

پس

قضیه ۱: اگر A زیرمجموعه‌ای متناهی از R باشد، A کراندار است (چرا؟).

عکس قضیه ۱ برقرار نیست. به عبارت دیگر اگر A زیرمجموعه‌ای کراندار از R باشد. ممکن است متناهی نباشد. مثلاً اگر

$A=\{\frac{۱}{n}, n\in N\}$,

به سادگی معلوم می‌شود که:

$\forall x\in A: ۰\le x\le ۱$

بنابراین، A کراندار است ولی می‌دانیم که A با N هم‌عدد است و لذا متناهی نیست. همچنین بازهٔ (a,b) که $a,b\in R$ و $a<b$ یک مجموعه کراندار ولی نامتناهی است. به‌علاوه، این مجموعه با R هم‌عدد است.

به مثال‌های زیر با تأمل توجه کنید و تفاوت‌های آن‌ها را با دقت شناسایی کنید.

مثال ۵: فرض کنید

$$C=\{\frac{n}{n+۱} \mid n\in N\}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که:

$\forall x\in C: \frac{۱}{۲}\le x<۱$

هر عدد کوچک‌تر یا مساوی $\frac{۱}{۲}$ یک کران پایین است و هر عدد بزرگ‌تر یا مساوی یک کران بالایی برای C است. C ماکسیمم ندارد ولی مینیمم آن $\frac{۱}{۲}$ است.

مثال ۳: فرض کنید

$$A=\{-\frac{۱}{n} \mid n\in N\}$$

در نتیجه داریم

$\forall x\in A: -۱\le x<۰$,

A عضو ماکسیمم ندارد ولی ۱- مینیمم A است.

آیا $\lim_{n\to\infty}(-\frac{۱}{n})$ با کران بالای A ارتباطی دارد؟

مثال ۴: اگر

$$B=\{\frac{n+۱}{n}|n\in N\}$$

آن‌گاه به‌سادگی می‌توان نشان داد که

$\forall x\in B:\ ۱<x\le ۲,$

مجموعه B دارای مینیمم نیست ولی ماکسیمم آن برابر ۲ است. آیا $\lim_{n\to\infty}\frac{n+۱}{n}$ با کران پایین C ارتباط دارد؟

مثال ۵: اگر $E=\{\frac{(-۱)^n n}{n+۱}|n\in N\}$ آن‌گاه با در نظر گرفتن اعضای مثبت و منفی E داریم:

$\forall x\in E:\ -۱<x<۱$

مجموعه E نه ماکسیمم دارد و نه مینیمم (چرا؟).

مثال ۶: فرض کنید $F=\{(-۱)^n n|\ n\in N\}$. به سادگی می‌توان دریافت که F نه از بالا و نه از پایین کراندار نیست. این مجموعه نه ماکسیمم دارد و نه مینیمم (چرا؟).

مثال ۷: فرض کنید Q^+ مجموعهٔ اعداد گویای مثبت باشد. بدیهی است که Q^+ از بالا کراندار نیست ولی از پایین به صفر کراندار است. Q^+ نه ماکسیمم دارد و نه مینیمم.

تعریف ۴: کوچک‌ترین (بزرگ‌ترین) کران بالای (پایین) مجموعهٔ غیرتهی A سوپریمم (اینفیمم) A نامیده می‌شود.

ویژگی‌های مشخصه سوپریمم، که از تعریف بالا نتیجه می‌شود و در اثبات اینکه عدد u سوپریمم مجموعه A است از آن‌ها استفاده می‌شود، به قرار زیر است:

الف: $\forall x\in A:\ x\le u;$

ب: $\forall \varepsilon>۰\ \exists x\in A:\ u-\varepsilon<x$

ویژگی‌های مشخصه اینفیمم نیز، که در اثبات اینکه عدد l اینفیمم مجموعه A است به‌کار می‌روند، به قرار زیر است:

پ: $\forall x\in A:\ l\le x;$

ت: $\forall \varepsilon>۰:\ x<l+\varepsilon$

برای تعیین سوپریمم یا اینفیمم برخی مجموعه‌ها، به خاصیت ارشمیدسی اعداد نیز نیاز داریم:

قضیهٔ ۲ (خاصیت ارشمیدسی اعداد طبیعی):
به ازای هر $\varepsilon>۰$ عدد طبیعی m هست که

$$\frac{۱}{m}<\varepsilon$$

اثبات این قضیه با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}=۰$ به‌دست می‌آید.

بهتر است مثال‌هایی همانند دو مثال ذیل ارائه شود که شامل اثبات نیز باشد.

مثال ۸: فرض کنید:

$$A=\{\frac{n}{n+۱}|n\in N\},$$

نشان دهید که سوپریمم A برابر یک است.

حل: برای هر x از A، $x<۱$. اینک فرض می‌کنیم $\varepsilon>۰$ دلخواه باشد طبق قضیهٔ ۲، عدد m هست که $\frac{۱}{m}<\varepsilon$ بنابراین:

$$۱-\varepsilon<۱-\frac{۱}{m}=\frac{m-۱}{m}<\frac{m}{m+۱}\in A$$

لذا، بنابر ویژگی‌های مشخصهٔ سوپریمم، سوپریمم A برابر یک است. توجه کنید که سوپریمم A مساوی $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+۱}$ است.

مثال ۹: فرض کنید

$$B=\{\frac{n+۱}{۲n}|n\in N\},$$

نشان دهید که اینفیمم B برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

حل: برای هر x از B، $\frac{۱}{۲}\le x$ و اگر $\varepsilon>۰$ دلخواه باشد بنابر قضیه ۲، عدد طبیعی m هست که $\frac{۱}{m}<۲\varepsilon$
اما می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۲m}<\varepsilon,\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲m}=\frac{m+۱}{۲m}\in B,\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲m}<\frac{۱}{۲}+\varepsilon.$$

یعنی، ویژگی‌های اینفیمم در مورد $\frac{1}{2}$ و اعضای B برقرار است. ضمناً، $\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n}$. اصل تمامیت، تاحدودی، ارتباط تنگاتنگ با حالت کلی اتفاقاتی دارد که در مثال‌های ۸ و ۹ با آن‌ها مواجه شدید. یعنی، مجموعه‌هایی (یا دنباله‌هایی) از اعداد که اینفیمم یا سوپریمم (حد) آن‌ها به آن مجموعه‌ها تعلق ندارد.

البته وقتی مثال‌ها مشکل‌تر می‌شوند اثبات‌ها نیز پیچیده می‌شوند یا اساساً نمی‌توان اثباتی ارائه کرد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۰: فرض کنید

$A=\{x\in Q^+ | x^2<2\}$

A از بالا کراندار است، مثلاً به عدد ۱/۵، و هر عدد بزرگ‌تر از آن. در واقع سوپریمم A عدد اصم $\sqrt{2}$ است که به A تعلق ندارد. می‌توان دنباله‌ای از اعضای A ارائه کرد که حد آن $\sqrt{2}$ باشد، به این طریق:

$a_1=1\ ,\ a_2=1/4,\ a_3=1/41,\dots ,$

a_n = قطع شدهٔ بسط اعشاری $\sqrt{2}$ تا n رقم اعشار

به این ترتیب، همواره $a_n\in A$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

توجه کنید که دنبالهٔ $\{a_n\}$ صعودی و از بالا کراندار است. برای اطلاعات بیشتر در مورد این مثال به [۱ ص ۲۹۷] مراجعه کنید.

مثال ۱۱: فرض کنید

$B=\{x\in Q^+ \mid 5<x^2\}$

B از پایین کراندار است، مثلاً، به عدد ۲ و هر عدد مثبت کوچک‌تر از آن. مجدداً می‌توان دنباله‌ای نزولی از اعداد گویا ساخت که حد آن $\sqrt{5}$ باشد که در ضمن اینفیمم B نیز هست (چگونه؟).

برای حل مشکلاتی که در اثبات وجود سوپریمم (اینفیمم) برای مجموعه‌های کراندار وجود دارد، و در ضمن برای رفع این نقص از اعداد گویا (که برخی زیرمجموعه‌های کراندار آن سوپریمم یا اینفیمم غیرمتعلق به آن دارند) و ساختن مجموعهٔ اعداد حقیقی، اصل تمامیت وضع شده است.

اصل تمامیت: هر زیرمجموعه غیرخالی از اعداد حقیقی که از بالا (پایین) کراندار باشد سوپریمم (اینفیمم) دارد. اگر سوپریمم (اینفیمم) A به A تعلق داشته باشد A ماکسیمم (مینیمم) دارد.

با استفاده از اصل تمامیت می‌توان قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

این قضیه در اثبات وجود حد دنباله‌های یکنوا، بدون دانستن حد آن‌ها، بسیار مفید و حیاتی است.

قضیه ۳: هر دنبالهٔ یکنوا و کراندار از اعداد حقیقی حد دارد. به عبارت دیگر، هر دنبالهٔ صعودی (نزولی) از اعداد حقیقی که از بالا (پایین) کراندار باشد حد دارد.

برهان: بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد شود فرض می‌کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی و از بالا کراندار از اعداد حقیقی باشد. ثابت می‌کنیم اگر

$A=\{a_i \mid i\in N\}$

آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n$ مساوی سوپریمم A است. اولاً چون A غیرخالی و از بالا کراندار است سوپریمم دارد که آن را با α نمایش می‌دهیم. بنابراین، همواره $a_n\leq\alpha$. حال فرض کنید $\varepsilon>0$ دلخواه باشد. چون $\alpha-\varepsilon<\alpha$، بنابر ویژگی (ب) سوپریمم، عضوی از A مانند a_N هست که $\alpha-\varepsilon<a_N$.

چون دنبالهٔ $\{a_n\}$ صعودی است پس اگر $n\geq N$ آن‌گاه $\alpha-\varepsilon<a_N\leq a_n$.

بنابراین، اگر $n\geq N$ آنگاه $|\alpha-a_n|<\varepsilon$ و در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

به هر جهت نباید انتظار داشت که دانش‌آموزان به‌طور عمیق مفاهیم سوپریمم و اینفیمم را درک کنند، لذا بایستی سعی کرد تا حد امکان از اطلاعات آن‌ها در مورد اعداد صحیح و گویا کمک گرفت و این دو مفهوم مهم و کلیدی از آنالیز ریاضی را برای آن‌ها تشریح نمود.

در زیر نمونه‌هایی از دنباله‌های اعداد گویا را ملاحظه می‌کنید که بنابر قضیهٔ ۳ حد دارند و قادریم حد آن‌ها را به‌دست آوریم [۲].

مثال ۱۲: فرض کنید α عددی مثبت باشد و دنباله $\{a_n\}$ با $a_1>0$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+\alpha}{2a_n}, n=1,2,...,$$

آیا این دنباله حد دارد؟

ملاحظه می‌کنیم که:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{\alpha-an^2}{2an},$$

صعودی یا نزولی بودن دنباله به علامت $\alpha-a_n^2$ بستگی دارد. اما داریم:

$$a_{n+1}^2-\alpha=\frac{a_n^4+\alpha^2+2\alpha a_n^2}{4a_n^2}-\alpha=\frac{(a_n^2-\alpha)^2}{4a_n^2}\ge 0,$$

بنابراین، $a_1>0$ هرچه باشد $a_n^2\ge\alpha$ برای $n\ge2$ و در نتیجه

$a_{n+1}-a_n\le 0$, $n\ge2$,

و $\{a_n\}_{n=2}$ نزولی است. ضمناً، همواره $a_n>0$ پس، $\{a_n\}_{n=2}$ نزولی و از پایین به صفر کراندار است. بنابر قضیهٔ ۳، این دنباله حد دارد و به سادگی معلوم می‌شود که $\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{\alpha}$.

مثال ۱۳: فرض کنید $\alpha>0$ عددی حقیقی و ثابت باشد، $x_1>0$ و

$x_{n+1}=2x_n-ax_n^2,\quad n\ge1,$

آیا این دنباله حد دارد؟

ملاحظه می‌کنیم که

$$x_{n+1}-x_n=\alpha x_n(\frac{1}{\alpha}-x_n).$$

بنابراین علامت $\frac{1}{\alpha}-x_n$، صعودی یا نزولی بودن این دنباله را مشخص می‌کند.

اما داریم:

$$x_{n+1}-\frac{1}{\alpha}=2x_n-\alpha x_n^2-\alpha=-\frac{1}{\alpha}(\alpha^2x_n^2-2\alpha x_n+1)$$
$$=-\frac{1}{\alpha}(\alpha x_n-1)^2\le 0$$

یعنی، صرف‌نظر از مقدار x_1 داریم: $x_n\le\frac{1}{\alpha}$ برای $n\ge2$.

بنابراین، همواره $x_{n+1}-x_n\ge0$ و دنبالهٔ $\{x_n\}$ صعودی است و از بالا به $\frac{1}{\alpha}$ کراندار است. پس، دنباله بنا به قضیهٔ ۳ همگراست. با حدگیری نتیجه می‌شود: $\lim x_n=\frac{1}{\alpha}$.

توجه کنید که جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ با اعمال ضرب و تفریق به‌دست می‌آیند، یعنی x_nها تقریب‌هایی از $\frac{1}{\alpha}$، بدون انجام عمل تقسیم، ارائه می‌کنند. مثلاً اگر $\alpha=3$ و $x_1=0/3$، داریم:

$x_2=0/6-0/27=0/33$

$x_2=0/66-0/3267=0/3333$

$x_3=0/33333333$

کاربرد اصلی قضیه ۳ در مثال زیر مشخص می‌شود، گرچه این مثال برای دانش‌آموزان مناسب نیست چون اطلاعی از لگاریتم در مبنای e، عدد نپر[۱۷]، ندارند.

مثال ۱۴: فرض کنید:

$$x_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln(n+1), n\ge1,$$

آیا این دنباله حد دارد؟

حل: ملاحظه می‌کنیم که:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+2)+\ln(n+1)$$
$$=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n+1})$$

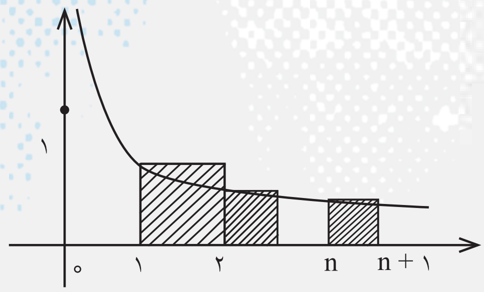
با استفاده از تابع $f(x)=x-\ln(1+x)$ برای $x\ge0$ داریم:

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}\ge0$$

یعنی تابع f صعودی است و چون $f(0)=0$ پس همواره $f(x)\geq 0$. بنابراین:

$$x_{n+1}-x_n>0,$$

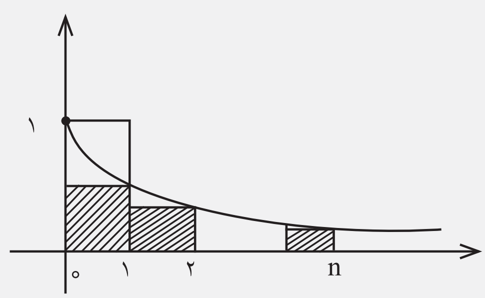
یعنی، $\{x_n\}$ صعودی است. اینک به شکل‌های زیر و نتایج مربوط به آن‌ها توجه کنید.



$$g(x)=\frac{1}{x}$$

$$\int_{1}^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

یعنی همواره $x_n>0$



$$h(x)=\frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}<\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}<\int_{0}^{n}\frac{dx}{1+x}=\ln(1+n)$$

پس همواره

$$x_n=1+[(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})-\ln(1+n)]<1$$

بنابراین، دنبالـه $\{x_n\}$ صعـودی و از بالا کراندار است، لذا، بنابر قضیه ۳ حد دارد. به علاوه چون همواره $x_n>0$ و دنباله صعودی است پس حد آن عددی مثبت اسـت. حد دنباله $\{x_n\}$ با عدد γ نمایش داده می‌شود. عدد γ را **ثابت اویلر**[۱۸] ـ **ماشرونی** نامند و

$$\lim_{x\to\infty} x_n=\gamma=0/577215664901\ldots$$

جالب است بدانید که هنوز ثابت نشده است که γ عددی اصم است. [۲]

پی‌نوشت‌ها

1. Completeness
2. Finite
3. Infinite
4. Bounded
5. Maximum
6. Minimum
7. Upper bound
8. Lower bound
9. Superemum
10. Infimum
11. Nonempty
12. Sequences
13. Monotone
14. Natural
15. Real
16. Rational
17. Nepier
18. Euler-Mascheroni

منابع

۱. مصاحب، غلامحسـین، **«آنالیز ریاضی، جلد اول تئوری اعداد حقیقی»**، مؤسسه انتشـارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۸۱.

۲. بابلیان، اسمعیل، **«مبانی آنالیز عددی»**، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۹۲.

3. Bailey, D. H. **“Numerical Results on the Transcendence of constants π, e , and Euler’s Constant”** math. Comput. 50, 275-281, 1988.

فرایند برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی

بخش نخست

میرزا جلیلی
پیشکسوت ریاضی و عضو هیئت تحریریه مجله

کلیدواژه‌ها: برنامه‌ریزی، تألیف کتب درسی، فرایند

به منظور شکوفا ساختن، بارور نمودن و به ظهور رساندن استعدادهای ذاتی و درونی دانش‌آموزان، نیاز به یک برنامه‌ریزی موجه و مناسب برای تألیف کتب درسی در کشور است. برای نیل به این هدف، توجه به دو نکته زیر ضروری به نظر می‌رسد:

الف. رفع موانع موجود

ب. ایجاد شرایط لازم

الف. منظور از رفع موانع موجود این است که ببینیم در برنامه‌ها و کتب فعلی موجود، چه نواقص و نارسائی‌هایی وجود دارد و معلمان و دانش‌آموزان نسبت به چه قسمت‌هایی از برنامه‌ها و کتاب‌ها ایراد و در آن‌ها مشکل دارند که البته این اطلاعات برای هر کتاب، باید به‌وسیلهٔ کارشناسان دفتر و در طول زمانی که این کتاب‌ها در کلاس تدریس می‌شوند، به مرور و با استفاده از نامه‌های رسیده یا از طریق اینترنت و سایر ابزار ارتباطی تکنولوژی و یا شرکت در جلسات معلمان و گروه‌های آموزشی و کنفرانس‌های ریاضی داخلی، جمع‌آوری و در پوشهٔ خاصی حفظ و نگهداری شود و به موقع و به هنگام تألیف جدید، از آن‌ها استفاده گردد.

ب. ایجاد شرایط لازم؛ یعنی تأسیس نظامی کارآمد و استاندارد شامل انتخاب کارشناسان موجّه، برنامه‌ریزی علمی و منطبق بر موازین بین‌المللی روز، تشکیل شورایی برای این کار و بالاخره گزینش گروه‌های مؤلفان از بین همان افراد برنامه‌ریز.

انتخاب کارشناس موجّه؛ گاهی چنین معمول بود که افرادی به‌طور تصادفی یا با آشنایی با یک مسئول، فقط به‌دلیلی که رشتهٔ تحصیلی آن افراد ریاضی است، به دفتر برنامه‌ریزی و تألیف راه می‌یافتند و ابلاغ کارشناسی می‌گرفتند. آنان، پس از شروع به کار، به مرور زمان و با وارد ساختن ضرر و زیانی گران بر آموزش کشور، تجاربی کسب می‌کردند و تأسف‌بارتر آن‌که وقتی این کارشناس صاحب تجربه می‌شد، گاهی بدون هیچ دلیلی، او را تعویض می‌کردند یا کارشناس، خودش کار بهتری در جایی دیگر به‌دست می‌آورد و از دفتر می‌رفت یا بازنشسته می‌شد.

امروز با توجه به وجود افراد تحصیل‌کرده فراوان در سطح کشور، لازم است در انتخاب کارشناسان دفتر برنامه‌ریزی و تألیف توجه و دقت بیشتری معمول و مرعی گردد؛ به عبارت دیگر، در گزینش باید:

ـ افرادی با بالاترین مدرک تحصیلی پذیرفته شوند؛

ـ این افراد حداقل سابقهٔ ۸ سال تدریس در مدارس داشته باشند و واقعاً به این سابقهٔ تدریس توجه شود؛

ـ تسلط بر یک زبان خارجی از ضروریات کاری آن‌ها است؛

ـ تا حد مقدور، سعی شود افرادی انتخاب شوند که خوش‌فکر، مبتکر، نکته‌سنج و به این شغل واقعاً علاقه‌مند باشند. برای این کار، لازم است سازمان پژوهش یا دفتر برنامه‌ریزی با صدور اطلاعیه‌ای در روزنامه‌های کثیرالانتشار کشور، برای استخدام عده‌ای کارشناس اعلام نیاز کند و شرایط موردنظر نیز ذکر شود. سپس با برگزاری یک آزمون کتبی حساب‌شده و بدون‌نظر و غرض، و در نظر گرفتن اهداف شغلی، دو برابر افراد مورد

نیاز انتخاب شـوند و بعد با مصاحبه، از بین آن‌ها تعداد مورد نیاز پذیرفته شوند.

مراحل و شرایط بعدی: لازم است این کارشناسان، یک دوره کوتاه‌مدت زیر نظر افراد صاحب‌نظر و با تجربه و کارشناسـان با سابقه و قدیمی و دسـت‌اندرکاران و مسئولان دفتر بگذرانند تا به آن‌ها اهمیت وظیفه و انجام کارشـان تذکر داده شود و روشـن گردد که سازمان و دفتر، از آن‌ها چه توقع و انتظاری دارد. همچنین تبیین شود که نتیجه کارشـان چه تأثیر مهمی در سرنوشت نوجوانان و دانش‌آموزان آینده کشور خواهد داشت.

ـ پس از نشستن پشت میز کارشناسی، با توجه به وظایف مهم و مسئولیت سـنگین کاریشان برای آنان، حقوقی در سطح دانشگاه در نظر گرفته شود.

ـ لازم است به پیشنهادها و نظرات آنان توجه شده و به ایشـان احترام گذاشته شـود تا نسبت به کارشان، اعتمادبه‌نفس پیدا کنند؛

ـ در کار برنامه‌ریزی و تألیف، آن‌ها همیشـه حرف اوّل را بزنند؛

ـ این کارشناسان به‌عنوان صاحبان اصلی جلسات، اعم از برنامه‌ریزی یا تألیف شناخته شوند؛

ـ این کارشناسـان، کارهای مربوطـه را بین خود تقسیم کنند، مثلاً یکی مسئول کتب هندسه، دیگری کتاب‌های جبر، سومی کتاب‌های آمار و احتمال، ... یا هر تقسیم دیگری که مسئولیت کاری‌شان اقتضا می‌کند؛

ـ هر کارشـناس برای هر کتاب تحت‌نظر خود یک پوشـه و پرونده خاص در نظر بگیـرد تا تمام نظرات و پیشـنهادات رسیده یا جمع‌آوری شـده مربوط به آن کتاب تـا زمانی کـه آن کتاب‌ها در مـدارس تدریس می‌شوند، در آن پوشه حفظ و نگهداری شود؛

ـ بند اخیر، مانع اطلاع و نظارت آن کارشـناس بر سـایر کتب نمی‌گردد؛ به عبارت دیگر، کارشـناس هر درس باید به همهٔ مطالب مربوط به آن درس و درس‌های آن حوزه که در مدارس تدریس می‌شود، اطلاع و تسلط داشته باشد، چه وقتی یک کارشناس برای اطلاع از نظر معلمین به استان‌ها سفر می‌کند یا در جلسات گروه‌های آموزشی یا خانه‌های ریاضیات شرکت می‌کنند، از او از تمام کتب درسی سؤال می‌شود.

ـ لازم اسـت کارشناسان هفته‌ای ۶ تا ۸ ساعت در مدارس تدریس داشته باشند، یا مثل بعضی از کشورهای غربی، هر ۴ سال یک بار کارشناس به مدرسه منتقل شود و یک سـال تمام‌وقت در آنجا تدریس کند تا همیشه با محیط آموزشی مدرسه‌ای آشنا بوده و از نظرات معلمین و اولیا و دانش‌آموزان، آگاهی داشته باشد؛

ـ کارشناسـان به‌طور ادواری و پراکنـده و نوبتی، در جلسـات گروه‌های آموزشی تهران و شهرستان‌ها و هم‌چنین جلسات خانه‌های ریاضیات یا انجمن‌های خانه و مدرسه (مثل بعضی از کشورهای غربی) شرکت کنند و بحث‌های مطرح‌شده را ضبط کنند تا از آن‌ها در جلسات برنامه‌ریزی و تألیف استفاده شود؛

ـ هر کارشناس، اقلاً سالی یک بار در کنفرانس‌های بین‌المللی ریاضی که در جهان برگزار می‌شـود شرکت نمایـد تا به اطلاعات و نظرات مفیـد و به‌روز در زمینه آمـوزش ریاضی، به‌طور زنده و ملموس اطلاع حاصل و آگاهی کسب کند؛

ـ در این سـفرها، بودجه‌ای در اختیار داشته باشند تا بتوانند کتاب‌های درسـی به‌روز کشورهای پیشرفته یا کشورهایی مثل چین، هند، روسیه، آفریقای جنوبی، برزیل و ترکیه را که به زبان انگلیسی هستند تهیه نمایند و همراه بیاورند؛

ـ لازم به یادآوری است که تهیه این کتب از طریق تماس با وزارت امور خارجه و از طریق سفارت‌خانه‌های ایران در آن کشـورها نیز، قابل ابتیاع و تهیه است و در گذشته، این کار صورت گرفته است؛

ـ هر ۲ یا ۳ سـال یک بار، **کارشـناس مسـئول گروه به‌طور ادواری**، از بین کارشناسان گروه و در بین خودشـان انتخاب گردد تا جوابگوی سؤالات مسئولین دفتر باشـد و در ضمن، بر حُسن جریان کارها در گروه نظارت دقیق داشته باشد؛

ـ انتخاب کارشناس پاره‌وقت موضوعیت ندارد و باید از گزینش آن‌ها پرهیز شود.

شورای برنامه‌ریزی

برای کار برنامه‌ریزی در هر رشته درسی، نیاز به یک شورای برنامه‌ریزی است؛

نحوهٔ تشکیل شورای برنامه‌ریزی درسی

ـ بـرای برنامه‌ریزی در هر رشـته درسـی، نیاز به تشکیل یک شورای برنامه‌ریزی در دفتر است؛

ـ اعضای شـورای برنامه‌ریزی در دوره‌های مختلف تحصیلی مثل دبستان، سه سـاله اوّل دبیرستان و سه سـاله آخر آن، ممکن اسـت متفاوت باشند ولی دارای عضوهای مشترک باشند؛

ـ این شوراها، لازم است حداقل هفته‌ای یک بار در دفتر برنامه‌ریزی تشکیل گردد؛

ـ اعضای شـورای برنامه‌ریزی از هیئت کارشناسان دفتـر، اعضای هیئت علمی دانشـگاه‌ها، اعضای کانون

آموزش و برنامه‌ریزی، فرد یا افرادی از دفتر آموزش متوسطه و ضمن خدمت وزارت‌خانه و معلمین و دبیران مدارس تشکیل می‌شود؛

ـ اگر شورای برنامه‌ریزی در سه مقطع متفاوت تشکیل شود، لازم است دو ماه یک بار، یک جلسه مشترک داشته باشند تا از پیشرفت کارهای هم اطلاع حاصل نمایند و تنظیم ریز مواد، پیوستگی داشته باشد؛

ـ در گذشته، کارشناسان بیشتر به برنامه‌ریزی آموزش متوسطه توجه داشتند و به برنامه‌ریزی و تألیف کتب ابتدایی کمتر التفات می‌نمودند که البته این کار درستی نبوده است. باید برنامه‌ریزی جدید در هر سه دوره (یا دو مقطع)، هم‌زمان تشکیل گردد؛

ـ شرکت ادواری معاون آموزش دفتر برنامه‌ریزی، مدیر یک مدرسه[1] دولتی، رئیس انجمن خانه و مدرسه[2]، مسئول یک گروه آموزشی یا رئیس خانه ریاضیات، به غنی ساختن شورا کمک خواهد کرد و شورا را در مسیر صحیح خود قرار خواهد داد؛

ـ در انتخاب هیئت علمی دانشگاه‌ها، لازم است از هر دانشگاه یک نفر، از رشته‌های مختلف ریاضی، با توجه به علاقه و سوابق تدریس آن‌ها در مدارس، قبل از شروع کار دانشگاهی، در نظر گرفته شود. در شوراهای قبلی از دانشگاه تربیت معلم ۲ یا ۳ نفر انتخاب می‌شدند؛

ـ اگر یک فردی دانشگاهی، پس از انتخاب شدن، دو یا سه ماه کار کرد و متوجه شد که چندان علاقه‌ای به این کار ندارد، بهتر است استعفا بدهد. در گذشته این اتفاق روی داده است.

ـ برای انتخاب دبیر یا معلم، می‌توان بخشنامه‌ای در این مورد به مدارس فرستاد و از بین داوطلبین با انجام یک امتحان کتبی و مصاحبه افراد علاقه‌مند و موجّه را شناسایی و برگزید؛

ـ به‌طور کلی سعی شود اعضای شورا صاحب‌نظر، فعّال، مبتکر، نوآور و اندیشمند باشند و واقعاً به این کار علاقه نشان دهند؛

ـ مطالعه و بررسی برنامه‌های به‌روز کشورهای دیگر از کارهای اولیه و ضروری این شوراست؛ که در این زمینه شورا می‌تواند به سرکمیسیون‌هایی تقسیم شده هر سرکمیسیون مسئولیت مطالعه برنامه‌های به‌روز یکی دو کشور را عهده‌دار شود و نتیجه مطالعات خود را به ترتیب نوبت در شورای اصلی مطرح و در مورد آن به بحث و گفت‌وگو بپردازند؛ ارائه مدارک آنچه مطرح می‌کنند یا می‌گویند نیز لازم است؛

ـ حق‌الزحمه، یعنی مبلغ پرداختی دانشگاهیان در ساعاتی که در شورا شرکت می‌کنند یا در سرکمیسیون‌ها تحقیق می‌نمایند باید برابر حق‌التدریس آن‌ها در دانشگاه تعیین شود؛

منظور از رفع موانع موجود این است که ببینیم در برنامه‌ها و کتب فعلی موجود، چه نواقص و نارسائی‌هایی وجود دارد و معلمان و دانش‌آموزان نسبت به چه قسمت‌هایی از برنامه‌ها و کتاب‌ها ایراد و در آن‌ها مشکل دارند

ـ باز تأکید شود اگر کار برنامه‌ریزی در سه مقطع (یا ۲ مقطع) با هم شروع شود، این شوراها حتماً باید عضو مشترک داشته و سه شورا در تماس دائم باشند؛

ـ ترتیبی اتخاذ شود که اعضای این شوراها بتوانند در شوراهای برنامه‌ریزی کشورهای غربی یا سایر کشورهای پیشرفته شرکت کنند و اطلاعات به‌روز کسب نمایند؛ شرکت برنامه‌ریزان ایرانی در سال ۱۳۶۳ در شورای برنامه‌ریزی کشور ژاپن ایده‌های جدیدی به ما آموخت؛

ـ در شوراهای برنامه‌ریزی باید ایده‌ها، هدف‌ها مطالب درسی، ترتیب و سطح آن‌ها در هر مقطع مورد بحث واقع شود؛ هم‌چنین، نحوهٔ ارائه متن درس، نوع مثال‌ها، تمرینات و آزمون‌ها مطرح و روشن گردد؛

ـ بر خلاف سنّت گذشته تعداد ساعات تدریس هفتگی هر درس، با توجه به اهمیت آن درس باید از طرف همین شورا تعیین گردد؛

ـ تعیین حداقل و حداکثر صفحات هر درسی که ساعات تدریس هفتگی آن قطعی و تصویب می‌شود، تعیین و روشن گردد. تجربه‌های گذشته نشان داده است که برای هر ساعت درس باید بین ۵۰ تا ۶۰ صفحه در نظر گرفته شود؛ مثلاً، تعداد صفحات درسی با ۳ ساعت تدریس در هفته بین ۱۵۰ تا ۱۸۰ صفحه تعیین گردد؛

ـ نوشتن یک کتاب حجیم برای درسی با تدریس مثلاً ۲ ساعت در هفته، مشکلات فراوانی به بار خواهد آورد؛ از جمله ممکن است مسئولین نزدیکی‌های آخر سال، با صدور بخشنامه‌ای مجبور شوند صفحات یا بخشی از کتاب را حذف یا به کلاس بالاتر منتقل کنند؛ در گذشته این اتفاق روی داده است و موضوعی در کتاب حذف شده ولی تمرینات مربوط به آن در کتاب باقی مانده است.

ـ پس از تنظیم برنامه با دقت و مراقبت‌های ذکر شده و تصویب آن در شورای برنامه‌ریزی، باید آن را تکثیر کنند و به‌صورت بخشنامه به مدارس بفرستند تا معلمان و دبیران پس از مطالعه آن در فاصلهٔ زمانی تعیین شده، نظرات و پیشنهادهای کتبی خود را مستقیماً یا از طریق گروه‌های آموزشی به دفتر برنامه‌ریزی ارسال دارند و این پیشنهادها در شورا مطرح و از نظرات مفید و موجّه رسیده در تصحیح و تکمیل برنامه استفاده شود؛

شروع کار تألیف؛ تألیف وقتی آغاز می‌شود که مراحل برنامه‌ریزی به‌طور تمام و کمال پایان یافته باشد.

در این هنگام همان شورای برنامه‌ریزی کار تألیف را شروع خواهد کرد؛ یعنی، اعضای سرکمیسیون‌های آن شورا باز مطالعهٔ کتب درسی به‌روز کشورهای مختلف جهان را عهده‌دار شوند، مثلاً، اگر منظور تنظیم چندجمله‌ای‌ها، اتحادها و کاربرد آن‌ها یا تابع، رسم و کاردبردش، ...، برای سال اوّل دبیرستان باشد باید نحوه آغاز و ادامه مطالب همراه با مثال‌ها، کاربرد، کار در کلاس، قسمت‌های «خود را بیازمایید»، تمرینات در کتب مختلف جهان مورد مطالعه قرار گیرد و از میان آن‌ها از بهترین شیوه که به فرهنگ کشور ما نزدیک‌تر است اُلگو گرفته شود، سپس روی آن‌ها چند جلسه بحث شده مطلب خوب پخته و روشن گردد؛ آن‌گاه یک هیئت مؤلف رسماً معرفی و کار تألیف آن کتاب را آغاز کنند.

در گذشته گاهی مؤلف یک کتاب از کشور خاصی را انتخاب کرده متن آن را عیناً سطر به سطر و مثال به مثال ترجمه و به‌عنوان تألیف جدید ارائه می‌داد که البته این کار درستی نبود؛ چه آن کتاب برای دانش‌آموزانی با پیش‌اطلاعات خاص خود و فرهنگ و نظام آموزشی ویژه‌ای تألیف شده بود یا بعضی از مؤلفان دوست داشتند همان سیستم و مطالبی که خود در مدارس پشت سر گذاشته بودند پیاده کنند و فکر می‌کردند که چون خودشان آن مطالب را با آن شیوه خوب یاد گرفته‌اند، امروز نیز می‌تواند مفید باشد که البته این هم فکر درستی نبوده و برگشت به عقب بود. به همین دلایل، در گذشته گاهی اوقات اتفاق افتاده است که کتاب‌های جدیدالتألیف درست زمانی که کتاب‌ها باید به مدارس برود متوجه شده‌اند که این کتب مشکلاتی دارد و آن‌ها را به انبار فرستاده‌اند تا تبدیل به کاغذ باطله شود.

تا مؤلفین واجدالشرایط انتخاب نشوند و منابع بین‌المللی به‌روز در اختیار آنان نباشد و روی تألیف وقت گذاشته نشود و شرایط لازم دیگر برای پیاده شدن کتاب فراهم نگردد مسلماً یک کتاب جدیدالتألیف مفید و مناسب و کارساز نخواهیم داشت.

منظور از شرایط لازم دیگر این است که:

ـ قبل از فرستادن کتاب برای چاپ، کتاب به‌وسیلهٔ خود مؤلفین چندین بار مرور شود؛ به عبارت دیگر از هر نوع عجله و شتابزدگی پرهیز گردد؛

ـ قبل از چاپ کتاب جدید، کتاب به‌وسیلهٔ چند نفر صاحب‌نظر (افراد صاحب تألیف و شناخته شده) یا دبیران با سابقه مورد مطالعه قرار بگیرد و از نظرات و پیشنهادات مفیدشان استفاده شود؛

ـ اگر مقدور باشد کتاب یک سال به‌طور آزمایشی در چند مدرسه و زیر نظر مؤلفین، تدریس شود تا مشکلات آن دقیقاً بررسی گردد؛

ـ کتابی که بدین ترتیب تألیف می‌شود باید سه سال بدون هیچ تغییری (جز اغلاط چاپی) یا دستخوردگی تدریس گردد (مثل کشورهای غربی)؛

ـ کتاب معلم صفحه به صفحه، همزمان و همراه با کتاب دانش‌آموز نوشته شود، چه در گذشته رسم بوده است که کتاب معلم بعداً و حتی به‌وسیلهٔ افراد دیگری غیر از مؤلفین تألیف می‌یافت!

ـ همهٔ معلمین کشور، به شکل و صورتی در کلاس‌های بازآموزی شرکت کنند؛ یعنی یا مستقیماً زیرنظر مؤلفین یا زیر نظر کسانی که توسط مؤلفین برای این کار تربیت شده‌اند، دوره ببینند؛

ـ پس از آغاز تدریس رسمی کتب جدید در مدارس، لازم است کارشناسان دفتر یا اگر مقدور است مؤلفین دیگر، مرتب به مدارس در تهران و شهرستان‌ها سرکشی نمایند و حتی سر کلاس‌ها بنشینند و از نحوهٔ پیشرفت کار تدریس آگاهی حاصل نمایند و به نظرات و پیشنهادهای مفید معلمین توجه نموده آن‌ها را در تألیفات بعدی مورد استفاده قرار دهند. هم‌چنین شرکت در جلسات گروه‌های آموزشی یا خانهٔ ریاضیات نیز نباید فراموش شود؛

ـ به محض این‌که کار تألیف کتب جدید تمام شد، همان شورای برنامه‌ریزی با تغییرات و جابه‌جایی‌های جزئی بلافاصله کار برنامه‌ریزی جدید را شروع کند، به عبارت دیگر، شورای برنامه‌ریزی کشور هیچ‌وقت نباید تعطیل شود و برای ۵ سال بعد شروع به کار و طرح برنامه نماید (در بیشتر کشورهای غربی هر ۵ سال یک بار کتاب‌ها عوض می‌شود)

نکته مشهودی که معمولاً در هر برنامه‌ریزی ذکر می‌شود این است که ما بدانیم:

۱. قبلاً کجا بودیم؛

۲. حالا کجا هستیم؛

۳. در آینده می‌خواهیم کجا باشیم؛

با حسن‌نیّت و مدیریت و توجهی که مسئولان و کارشناسان دفتر برنامه‌ریزی دارند، آنچه در صفحات قبل گذشت مربوط به بند (۳) بالا می‌گردد، یعنی ما باید به مرور در این راستا حرکت کنیم و کارمان مثل کار کشورهای پیشرفته جهان باشد. در شمارهٔ بعد، در دنباله این مقاله، راجع‌به کتب درسی قبل از تأسیس دفتر برنامه‌ریزی و تألیف و هم‌چنین تجربهٔ داشتن کتب درسی خاص هر استان و مطالب دیگری بحث خواهد شد. ان‌شاءالله

پی‌نوشت

۱ و ۲. در کشورهای غربی چنین معمول است.

پارادایم نوین در آموزش ریاضی

نظریهٔ هوش‌های چندگانه در فرایند یاددهی- یادگیری ریاضی

محمد نیرو
دبیر مدارس تهران و دانشجوی دکتری برنامه‌ریزی درسی دانشگاه خوارزمی

مقدمه

نگارنده با بیش از بیست سال معلمی در درس ریاضی، هر سال با برخی دانش‌آموزان ساعی مواجه بوده است که با وجود سعی زیاد، نتایج شایان توجهی را کسب نمی‌کنند. این موضوع به‌ویژه با فرض تدریسِ به ظاهر خوب‌نگرش و دلسوزی فراوان و تحسین همکاران، بیشتر تعجب برانگیز بود. هم‌چنین در پاسخ به سؤال دانش‌آموزی که به خوبی نیاموخته بود، آن مطلب را مجدداً با همان سیاق، تکرار کرده و حداکثر مثالی مشابه، برای بهتر فهمیدن آن به‌کار می‌برد. عدم یادگیری دانش‌آموز پس از این مراحل را، دلالت بر کمبود تلاش درخور، کاستی استعداد و یا ناصوابی هدایت تحصیلی وی تلقی می‌کرد. چه بسیار عوارض روانی، رفتاری، انگیزشی و خانوادگی در حال و آینده، با چنین ناکامی‌ها و برچسب‌هایی متوجه دانش‌آموز می‌شد.

آشنایی با نظریه هوش‌های چندگانه[1] گاردنر، منجر به جلب نظر و رفع نیاز نگارنده شد. کاربست آن در تدریس، و انجام پژوهشی در این خصوص، نگرشی نو را در امر یاددهی برای او به ارمغان آورد. چرا که رویکرد سنتی برای آموزش، به فعّال کردن هوش‌های منطقی ـ ریاضی و کلامی ـ زبانی دانش‌آموزان اکتفا می‌کند. با این روش، تنها دانش‌آموزانی که از هوش منطقی ـ ریاضی و کلامی ـ زبانی بالایی برخوردارند می‌توانند به خوبی بیاموزند. درحالی‌که طبق یافته‌های تحقیقی، تنها ۲۵ درصد دانش‌آموزان، از این دو هوش، در سطح بالایی برخوردارند. اما با طراحی فعالیت‌هایی که سایر هوش‌های چندگانه را در برمی‌گیرد، می‌توان به بقیه دانش‌آموزان کمک کرد تا آن‌ها نیز، شاهد پیشرفت تحصیلی خود، به‌ویژه در درس ریاضی باشند.

کلیدواژه‌ها: هوش چندگانه، پارادایم، آموزش ریاضی، فرایند یاددهی- یادگیری ریاضی

هوش‌های چندگانه

هــوش عامل مهــم و وجه تمایز انســان با ســایر موجودات زنده، در تلاش برای ســازگار شدن با محیط است.

هاوارد گاردنر[۲] روان‌شناس معاصر، با طرح این معنا که هوش دارای انواع، اشــکال و مظاهر گوناگون است، و تأکید بر این واقعیت که انســان‌ها، دارای هوش‌های متفاوت هستند، مبدأ تحرکات نظری و عملی گسترده‌ای در بعضی نظام‌های آموزشــی در جهان شد که با تکیه بر مفهوم هوش‌هــای چندگانه، در جهت ایجاد تنوع و گوناگونی برنامه‌های آموزشی خود گام برداشته‌اند.

گاردنر، برای نخســتین بار در سال ۱۹۸۳، با انتشار کتابی با عنــوان «چارچوب‌های ذهن: نظریه هوش‌های چندگانــه»[۳] با تعریفی از هوش، مبنــی بر آن‌که هوش، توانایــی خلق محصول مؤثر، یا خدمــت باارزش در یک فرهنگ است، با به چالش کشیدن تبیین مرسوم از هوش، هشت گونهٔ مختلف هوش را مقوله‌بندی کرد. این مقولات عبارت‌اند از: هوش «کلامی ـ زبانی»[۴]، هوش «منطقی ـ ریاضی»[۵]، هــوش «بصری ـ مکانی»[۶]، هوش «حرکتی ـ جسمانی»[۷]، هوش «موسیقیایی»[۸]، هوش «میان‌فردی»[۹]، هوش «درون‌فردی»[۱۰]، و هوش «طبیعت‌گرا»[۱۱].

نظریهٔ گاردنر الزاماً به هشت هوش یا هشت توانایی محدود نمی‌شــود. او معتقد اســت که احتمالاً بیش از هشــت هوش وجود دارد و در یکی از آثار خود، هوش «معنوی»[۱۲] و هوش «وجودی (هستی‌گرایانه)»[۱۳] را نیز مطرح کرده است. منظور او از طرح این هوش‌ها اذعان به وجود «توانایی‌های اندیشــیدن دربارهٔ پرســش‌های بزرگ مربوط به معنای زندگی اســت». در واقع گاردنر ایــن هوش‌ها را به معنای توانایی‌های مختلف بالقوه یا بالفعل انسان شناسایی کرده است.

توصیف هوش‌های چندگانه در افراد

● **هوش‌هــای کلامی ــ زبانــی**: این نوع هوش یعنی توانایی استفاده از کلمات و زبان.

افرادی که دارای این هوش‌اند، مهارت‌های شنیداری تکامل یافته‌ای دارند و معمولاً ســخنوران برجسته‌ای هستند. آن‌ها به جای تصاویر، با کلمات فکر می‌کنند. برخی مهارت‌های آن‌ها شامل موارد زیر می‌شود: گوش دادن، حرف زدن، قصه‌گویــی، توضیح دادن، تدریس، اســتفاده از طنز، درک قالب و معنی کلمه‌ها، یادآوری اطلاعــات و قانع کردن دیگــران به پذیرفتن نقطه‌نظر آن‌ها.

● **هوش منطقی ــ ریاضی:** یعنی توانایی استفاده از استدلال، منطق و اعداد.

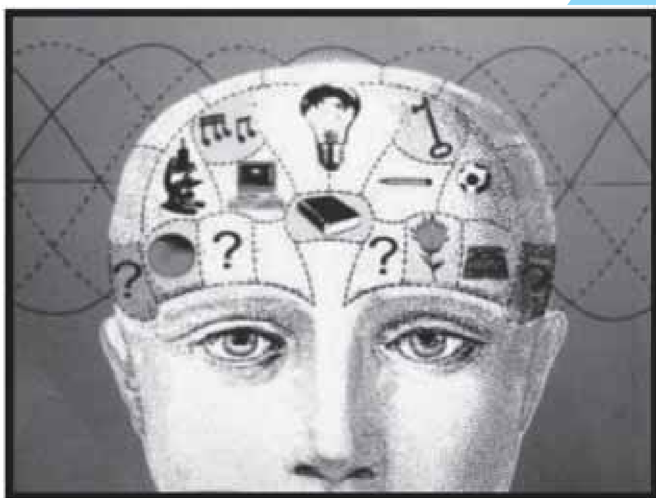
این افراد، به‌صورت مفهومی و با استفاده از الگوهای عددی و منطقــی فکر می‌کنند و از ایــن طریق، بین اطلاعات مختلــف، رابطه برقرار می‌کنند. آن‌ها همواره در مــورد دنیــای اطرافشــان کنجکاوند، ســؤال‌های زیادی می‌پرسند و دوست دارند آزمایش کنند. برخی مهارت‌های آن‌ها شامل این موارد می‌شود: مسئله حل کردن، تقسیم‌بندی و طبقه‌بندی اطلاعات، کار کردن با مفاهیم انتزاعی و درک رابطه‌های آن‌ها با یکدیگر، به‌کار بردن زنجیره طولانی از استدلال‌ها برای پیشرفت، انجام آزمایش‌های کنترل شده، سؤال کردن و کنجکاوی در پدیده‌های طبیعی، انجام محاســبات پیچیده ریاضی و کار کردن با شکل‌های هندسی.

● **هوش بصری ــ مکانی**: توانایی درک درست جهان به‌صورت مکانی ـ بصری و ایجاد تغییر در این ادراک.

کســانی که دارای این نوع هوش‌اند، گرایش دارند که با تصاویر فکر کنند و برای به‌دست آوردن اطلاعات نیاز دارند یک تصویر ذهنی روشن ایجاد کنند. آن‌ها با نگاه کردن به نقشه‌ها، نمودارها، تصویرها و فیلم، بهتر یاد می‌گیرند. برخی از مهارت‌های آن‌ها شــامل موارد زیر اســت: ســاختن جورچین، خواندن، نوشتن، درک نمودارها و شکل‌ها، حس جهت‌شناسی خوب، طراحی، نقاشــی، ساختن اســتعاره‌های تصویری مثل هنرهای تجسمی.

● **هوش حرکتی ــ جسمانی** مهارت به‌کارگیری بدن برای بیان افکار و احساســات و سهولت در به‌کارگیری دست‌ها برای ایجاد یا تغییر در اشیاء.

افراد دارای این هوش، مطالب خودشان را از طریق حرکت بیان می‌کنند. آن‌ها درک خوبی از حس تعادل و هماهنگی دست و چشم دارند. برخی مهارت‌های آن‌ها شــامل هماهنگی بدنی، ورزش، استفاده از به اصطلاح زبان بدن[۱۴]، صنایع‌دستی، هنرپیشگی، تقلید حرکات، استفاده از دست‌هایشان برای ساختن یا خلق کردن و ابراز احساسات از طریق بدن است.



● **هـوش موسـیقیایی:** این نـوع هوش یعنی توانایی تولید و درک موسیقی.

ایـن یادگیرنده‌ها متمایل به موسـیقی بـوده و با اسـتفاده از صداهـا، وزن‌ها و الگوهای موسـیقی فکر می‌کنند و موسـیقی را می‌فهمند. خیلی از این افراد، بسیار به صداهای محیطی (مانند صدای زنگ، صدای جیرجیرک و چکه کردن آب) حسـاس هستند. برخی مهارت‌هـای آن‌ها شـامل آواز خواندن، سـوت زدن، نواختن آلات موسـیقی، تشـخیص الگوهای آهنگین، آهنگ‌سـازی، به یاد آوردن ملودی‌ها و درک ساختار و وزن موسیقی است.

● **هـوش میان‌فردی:** توانایـی درک، ارتباط، فهم و تمایـز حالات روحـی، مقاصد، انگیزه‌ها و احساسـات دیگران.

چنین هوشی، به انسان‌ها کمک می‌کند تا از نقطه نظر دیگران، به مسائل بیندیشند و بفهمند آن‌ها چگونه می‌اندیشند و احسـاس می‌کنند. آنان معمولاً، توانایی خارق‌العاده‌ای در درک احساسـات، مقاصد و انگیزه‌ها دارند و سازمان دهنده‌های خوبی هستند. علاقه‌مند به همکاری هسـتند و از مهارت‌های کلامی مانند حرف زدن و مهارت‌هـای غیرکلامی مثل تماس چشـمی و حرکات بدن با دیگـران ارتباط برقرار می‌کنند. برخی مهارت‌هـای آن‌ها شـامل دیدن مسـائل از نقطه نظر دیگران، خوب گوش کردن، همدلی، درکِ احساسـات دیگران، مشورت، همکاری با گروه، توجه به تفاوت‌های روحی و احساسـی افراد، رابطه برقـرار کردن از طریق کلامی و غیرکلامی، و برقراری روابط مثبت با سایرین است.

● **هوش درون فردی:** توانایی درک خود و آگاه بودن از حالت‌های درونی خویش و توانایی انجام عملِ مناسب مبتنی بر آن درک و آگاهی.

این هـوش، به افراد کمک می‌کند تا احساسـات درونـی، رویاها، روابط با دیگـران و نقاط ضعف و قوت خود را بهتر درک کنند. برخی مهارت‌های آن‌ها شامل موارد زیر می‌شـود: تشخیص نقاط ضعف و قوت خود، درک و بررسـی خویش، آگاهی از احساسـات درونی، تمایـلات و رویاها، ارزیابی الگوهای فکری خود و درک نقش خود در روابط با دیگران.

● **هـوش طبیعت‌گرا:** مهارت در شـناخت گونه‌های مختلف گیاهان و جانوران و محیط فردی از پدیده‌های طبیعی گرفته تا اشکال غیرزنده.

ایـن افـراد، از طریق طبیعت الگـو می‌گیرند و به باغبانی و بازی با حیوانات اهلی و جستوجو در طبیعت علاقه‌مندند. برخی مهارت‌های آن‌ها شـامل تشخیص گونه‌های گیاهی و حیوانی و سـایر گونه‌های طبیعی، شناسـایی دیگر گونه‌های مشـابه و درک شباهت‌ها و تفاوت‌های آن گونه‌ها با هم است.

ایـن نظریه مدعی اسـت کـه تمام افـراد (به‌جز برخی موارد نادر) با سـبک‌های مختلف از هوش‌های گوناگـون بهره‌مندند، هر چند که برای هر یک از افراد، به‌گونه‌ای خاص بروز می‌یابد. هم‌چنین، با وجودی که ممکن اسـت بعضی‌ها، نقص‌ها و مشکلاتشان را ذاتی تصور کننـد، اما گاردنر معتقد اسـت چنان‌چه فرد از آموزش خوب برخوردار شـود، قـادر خواهد بود تا حد زیادی، تمام هشـت مقوله هوشی خود را تا حد بالایی از عملکرد، توسـعه دهد. از سوی دیگر، گاردنر جز در مواردی نادر، معتقد است که در انسان‌ها، هیچ هوشی به تنهایـی، وجود ندارد و هر یـک از آن‌ها، همواره بر یکدیگر تأثیـر می‌گذارند. وی مثـال می‌زند که مثلاً، کودکی که مشغول بازی با توپ است، برای شوت زدن نیازمند هوش حرکتی جسـمانی برای دویدن، گرفتن و زدن توپ اسـت، هوش مکانـی برای تعیین جهت و پیش‌بینی محل افتادن توپ و هوش زبانی و میان‌فردی بـرای تخمین موفقیت در درگیری‌هـای جریان بازی

است. در نظریهٔ هوش‌های چندگانه مقوله‌های هوشی صرفاً جهت بررسی ویژگی‌های اصلی و بهره‌مندی از آن‌ها به‌طور مستقل، فرض می‌شوند. این نظریه بر تنوع فراوانی روش‌هایی تأکید می‌کند که با آن‌ها، افراد می‌توانند استعدادهای خود را در حوزه‌های هوش‌های مختلف نشان دهند. از نظر گاردنر، ویژگی استانداردی مانند بهرهٔ هوشی (IQ) برای نشان دادن اینکه فردی در زمینهٔ خاصی هوشمند است، وجود ندارد. مثلاً فردی ممکن است قادر به خواندن نباشد، اما از هوش زبانی بالایی برخوردار بوده و قادر باشد داستان‌های خاص بگوید یا واژگان زیادی را بداند.

نظریهٔ هوش‌های چندگانه در فرایند یاددهی ـ یادگیری

معمولاً در کلاس‌های سنتی، با دانش‌آموزان به‌صورت یک گروه هم‌توان برخورد می‌شود. به آن‌ها تمرینات مشابهی داده می‌شود و انتظار می‌رود در زمان یکسان، جواب مشابهی تولید شود. از دانش‌آموزان انتظار می‌رود طی یک زمان محدود و یکسان، دانش ارائه شده به‌وسیلهٔ معلم را فرا گیرند، اکثراً از دانش رسمی با استفاده از زبان و تحلیل منطقی- ریاضی استفاده می‌شود، و دانش‌آموزان به‌وسیلهٔ روش‌های محدود و آزمون‌های مکرر، مورد ارزیابی قرار می‌گیرند و بهترین نمره به دانش‌آموزی اختصاص داده می‌شود که بالاترین توانایی را برای محفوظات دارد.

نظریهٔ هوش‌های چندگانه، در واقع پارادایم جدیدی است که دست‌اندرکاران تعلیم‌وتربیت را با افقی جدید و در نتیجه برنامه‌ها و سیاست‌های اجرایی متفاوتی روبه‌رو می‌سازد.

این نظریه، شیوه‌های جدیدی را برای افراد متفاوت فراهم می‌کند تا اینکه آن‌ها، فرصت‌هایی را برای یادگیری از طریق شیوه‌هایی که مناسب آن‌هاست به‌دست آورند. گاردنر، شیوه‌هایی را پایه‌گذاری کرده است که در جریان آموزش، اهمیت بیشتری به فرد می‌دهند و به نیازهای آموزشی‌شان اهمیت می‌دهند.

از نظر گاردنر، هوش‌های چندگانه می‌تواند نقش زیادی در یادگیری و آموزش دانش‌آموزان داشته باشد. آگاهی از نظریهٔ هوش‌های چندگانه، معلمان را برمی‌انگیزد تا روش‌های متفاوتی برای کمک به همهٔ دانش‌آموزان کلاسشان بیابند. به اعتقاد گاردنر، اساس نظریهٔ هوش‌های چندگانه، محترم شمردن تفاوت‌های افراد، تنوع فراوان روش‌های یادگیری، شیوه‌های ارزیابی این روش‌ها و اثرات مثبت توجه به این تفاوت‌هاست.

این نظریه برخلاف انتظار گاردنر، بیشتر مورد توجه آموزشگران و دست‌اندرکاران تعلیم‌وتربیت قرار گرفت تا روان‌سنج‌ها. کارشناسان تعلیم‌وتربیت تلاش کرده‌اند تا از این نظریه، به‌صورت کاربردی استفاده کنند و برنامه‌های آموزشی را بر اساس آن پایه‌ریزی کنند، به‌طوری که اکنون مدارس بسیاری در سراسر دنیا، مبتنی بر این نظریه، تأسیس شده‌اند (مدارس MI) که فراگیران را بر اساس نظریهٔ هوش‌های چندگانه، آموزش می‌دهند.

بهترین روش ایجاد برنامهٔ درسی مبتنی بر هوش‌های چندگانه، اندیشیدن به راه‌های متنوع ارائهٔ درس‌ها با استفاده از انواع هوش است. برای این منظور، به‌عنوان نمونه می‌توان به شیوهٔ زیر عمل کرد.

نگارنده، در کارگاه‌های متعددی که برای همکاران خود در زمینهٔ آشنایی با هوش‌های چندگانه برگزار کرده است، اغلب با این سؤال مواجه بوده که زمان محدود اختصاص یافته برای هر یک از مفاهیم کتاب، چگونه اقتضای هشت روش یاددهی را می‌کند؟ اما ضرورت ندارد که هر یک از این هوش‌ها، به‌طور مجزا در تدریس، در نظر گرفته شوند، بلکه با استفاده از روش‌های تلفیقی، می‌توان به جنبه‌های گوناگون هوش پرداخت تا هر یک از دانش‌آموزان، بتوانند بیاموزند و به تقویت سایر هوش‌های خود بپردازند.

جدول ۱

زبانی- کلامی	● چگونه می‌توان از گفتار و نوشتار استفاده کرد؟
منطقی- ریاضی	● چگونه مهارت‌های عددی محاسباتی را به بحث ارتباط دهم؟
مکانی- بصری	● چگونه از تصویر، رنگ و تجسم استفاده کنم؟
حرکتی- جسمانی	● چه‌طور از حرکات بدنی استفاده کنم؟
موسیقیایی	● چگونه در قالب موزون و آهنگین می‌توان به این موضوع پرداخت؟
میان‌فردی	● چه کنم تا فراگیران با هم مشارکت کنند؟
درون‌فردی	● چگونه احساسات یا خاطرات را زنده کنم؟
طبیعت‌گرا	● چگونه موضوع را به طبیعت ارتباط دهم؟
وجودی	● چگونه می‌توان موضوع را به نظم هستی ربط داد؟

این نظریه در حوزهٔ گسترده‌ای با زمینه‌های آموزشی مختلف قابل اجراست؛ از محیط‌های بسیار سنتی، جایی که معلمان زمان زیادی را صرف سخن گفتن می‌کنند تا محیط‌های باز، یا جایی که دانش‌آموزان در بخش اعظم جریان یادگیری سهیم‌اند حتی شیوهٔ تدریس سنتی سخنرانی را می‌توان با استفاده از روش‌هایی انجام داد که موجب برانگیخته شدن هوش‌های هشت‌گانه افراد شود. آموزگاری که بر تدریس به شیوهٔ موزون تأکید دارد (موسیقیایی)، برای روشن شدن مطلب، به کشیدن تصاویر روی تخته اقدام می‌کند (مکانی)، در حین صحبت از حرکات نمایشی استفاده می‌کند (حرکتی- جسمانی)، در بین صحبت‌هایش مکث می‌کند تا دانش‌آموزان فرصت تأمل داشته باشند (درون‌فردی)، سؤالاتی می‌پرسد که دانش‌آموزان را سر ذوق آورد (میان‌فردی)، و در صحبت‌هایش از منابع طبیعی استفاده می‌کند (طبیعت‌گرا)؛ وی در حقیقت، اصول نظریهٔ هوش‌های چندگانه را با روش سنتی، در هم آمیخته است.

کاربرد هوش‌های چندگانه گاردنر که در تجربهٔ زیر آمده، علاوه بر تسهیل و تعمیق یادگیری، در یادگیری دانش‌آموزان تأثیرخلاقی داشت.

آموزش مبحث توان با استفاده از هوش‌های چندگانه

نگارنده در یکی از مدارس دولتی تهران، به‌منظور انجام پژوهشی مداخله‌ای با استفاده از هوش‌های چندگانه در آموزش ریاضی (مبحث توان)، از الگوی زیر برای آموزش ۸۰ نفر دانش‌آموزان اول دبیرستان استفاده کرد.

ابتدا اهداف کلی و جزئی درس و مفهوم توان و قوانین آن به‌صورت کلامی *(هوش زبانی- کلامی)* بیان و مثال‌هایی از آن حل شد *(هوش منطقی- ریاضی)*. ضمن آنکه در نگارش بر روی تختهٔ گچی، مطالب به‌صورت طبقه‌بندی شده *(هوش طبیعت‌گرایی)* و با استفاده از رنگ‌ها و اشکال مختلف، به‌طورمنظم صورت پذیرفت *(هوش بصری- مکانی)*. پس از این مرحله، تکلیف‌هایی به دانش‌آموزان برای منزل داده شد و خواسته شد به طرح سؤالاتی از توان بپردازند که در زندگی فردی‌شان، با آن‌ها مواجه بوده‌اند *(هوش درون‌فردی)*. مثلاً «اگر در کتابخانهٔ اتاقم ۳ ردیف و هر ردیف ۳ قسمت و در هر قسمت ۳ کتاب موجود باشد، در کتابخانهٔ من چند کتاب موجود است» که جواب 3^3 می‌شود. در ادامه، تمام تمرین‌ها در کلاس، برای دانش‌آموزان رفع اشکال شد و در حین کار، از دانش‌آموزان برای حل سؤالات استفاده شد *(هوش میان‌فردی)*.

در آغاز تدریس و در این مرحله، پس از بیان کلی مفهوم توان، از مثال پارادوکسیکال استفاده شد *(هوش منطقی- ریاضی)* که صبغهٔ تاریخی دارد (هوش وجودی). از جمله اینکه زنون در ۳۰۰ سال پیش از میلاد، این سؤال را طرح کرده بود که:

اگر تیراندازی تیری را از فاصله‌ای به سمت هدف پرتاب کند، پس از طی نیمی از مسیر، فاصلهٔ تیر تا هدف $\frac{1}{2}$ برابر فاصلهٔ اولیه و پس از طی نیمی از باقیماندهٔ مسیر، فاصلهٔ تیر تا هدف $(\frac{1}{2})^2$ برابر فاصلهٔ اولیه و این امر ادامه می‌یابد تا در مرحلهٔ nام فاصلهٔ تیر تا هدف $(\frac{1}{2})^n$ برابر فاصلهٔ اولیه خواهد شد و از آنجا که $\frac{1}{2}$ به هر توانی برسد هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، لذا این فاصله صفر نشده و به این ترتیب هیچ‌گاه تیر به هدف نخواهد خورد!

در ضمن، مثال‌هایی برای نشان دادن بُعد و اندازهٔ توان‌های ۱۰ مطرح شد. از جمله تخمین زمان نگارش اعداد از ۱ تا 10^6(یک میلیون) *(هوش منطقی- ریاضی)* که برخلاف اظهارات اولیهٔ دانش‌آموزان، با استفاده از ماشین‌حساب *(هوش حرکتی- جسمانی)* به بیش از ۱۱ شبانه‌روز رسیدند! همین‌طور با تا کردن کاغذ توسط ایشان (هوش حرکتی- جسمانی) که با هر بار تا کردن آن، تعداد لایه‌های کاغذ، دو برابر قبل و توانی از ۲ شده و با استفاده از ماشین حساب ملاحظه کردند که با فرض دانستن ضخامت اولیهٔ کاغذ، می‌توان ضخامت کاغذ تا شده هر مرحله را سنجید *(هوش منطقی- ریاضی)* و متعجبانه به ضخامت حدود ۱۰۰ متر بعد از ۲۰ مرحله رسیدند! البته امکان تا کردن بعد از ۷ یا ۸ مرحله نبود! این‌ها کمک کرد که تخمین تعداد اتم‌های هستی که بنا بر فرضیه‌ای حدود 10^{75} است را بهتر درک کنند. هم‌چنین به نحوهٔ تکثیر سلول‌ها اشاره شد *(هوش طبیعت‌گرایی)* که آن نیز در هر مرحله توانی از ۲ می‌شود. در ادامه، با استفاده از بازی یک مرغ دارم! *(هوش میان‌فردی)* *(هوش طبیعت‌گرایی)(هوش زبانی- کلامی)* نیز، مفهوم توان تمرین شد. به این صورت که اگر هر مرغی روزی سه تخم بگذارد و سپس هر

خلاصهٔ روش‌های یاددهی-یادگیری مبتنی بر هوش‌های چندگانه

مقولات هوشی	فعالیت‌های آموزشی (نمونه)	منابع آموزشی مناسب (نمونه)	شیوه‌های آموزشی	مهارت‌های معلم	نمونه‌ای از فعالیت‌ها برای شروع درس
زبانی- کلامی	سخنرانی، مباحثه، بازی با کلمات، داستان‌سرایی، نوشتن خاطرات	کتاب، ضبط صوت، ماشین تحریر، نوارهای صوتی	خواندن، نوشتن، صحبت کردن و گوش کردن	آموزش از طریق سخنرانی، قصه و ...	نوشتن کلمات طولانی روی تخته
منطقی- ریاضی	معما، حل مسئله، تجربیات علمی، محاسبات ذهنی، بازی با اعداد	ماشین حساب، بازی‌های منطقی	کمّی‌ساز، تفکر دقیق، آزمایش	سقراطی، استقرایی	طرح پارادوکس
مکانی- بصری	بازی تخیلی، تجسم، نقشهٔ ذهنی، فعالیت‌های هنری	نمودار، نقشه، ویدئو، موضوعات هنری	دیدن، کشیدن، تجسم، رنگ‌آمیزی، نقشهٔ ذهنی	نقشهٔ ذهنی	تصاویر غیرطبیعی
حرکتی- جسمانی	یادگیری‌های عملی، نمایش، فعالیت‌های لمسی	تجهیزات ورزشی، ابزارهای تولید	ساختن، نمایش دادن، لمس کردن، حرکات ورزشی	استفاده از مهارت‌های غیرکلامی و بدنی	آوردن یک وسیلهٔ عجیب
موسیقیایی	یادگیری موزون، ضربه زدن، استفاده از موسیقی	ضبط صوت، نوارهای صوتی، ابزار موسیقی	آواز خواندن، ضربه زدن، گوش دادن	استفاده از صوت و صورت موزون	نواختن موسیقی
میان‌فردی	یادگیری مشارکتی	بازی‌های گروهی	آموزش دادن، همکاری کردن، برقراری ارتباط	ارتباط فعال و مؤثر با فراگیران	دو به دو با هم کار کنید
درون‌فردی	آموزش فردی، مطالعهٔ مستقل	یادداشت‌های روزانه	ارتباط دادن آن با زندگی شخصی خود	بیان احساس	چشمان خود را ببندید و فکر کنید به ...
طبیعت‌گرا	مطالعهٔ طبیعت	گیاهان، جانوران، ابزارهای گیاه‌شناسی و جانورشناسی	ارتباط دادن با موجودات زنده و طبیعت	ارتباط دادن موضوعات با پدیده‌های طبیعی	آوردن یک گیاه یا جانور به کلاس
وجودی	بحث در مورد نظم هستی	کتاب‌های مذهبی- فلسفی	بحث و مطالعه مذاهب و سنن فرهنگی مذهبی	شناخت آیین و مقررات مذهبی	خواندن شعرهای فلسفی و مذهبی

تخم پس از بیســت روز یک مرغ شود! و این سیر ادامه یابد، پس از یک ســال چند مرغ خواهیم داشت؟ که با موضوع ســلول از این حیث متفاوت است که توان‌های قبلی نیز باید به این مجموع افزوده شود.

در ضمن با اســتفاده از حرکات دســت و عبور در میان دانش‌آمــوزان و در مقابل تخته *(هوش حرکتی- جســمانی)* و بعضاً با استفاده از اشــعار مرتبط (هوش موسیقایی) سعی در جذابیت و یادگیری بیشتر خواهد شد.

به‌منظور پرداختن بیشتر به سایر جنبه‌های هوشی دانش‌آموزان، بخشــی از جلســات در خارج از کلاس و در ســالن مطالعات، ســایت کامپیوتر و محوطهٔ حیاط به‌صورت‌های زیر برگزار گردید.

● بــرای درک بهتر توان‌های ۱۰و پیوند آن با هســتی و طبیعت، مجموعه اســلایدی کــه در آن از فواصل با توان‌هــای ۱۰ از یک برگ درخــت از (10^{-12} تا 10^{23}) به همراه موسیقی پس‌زمینه تهیه شده بود، به نمایش گذاشته شد. دانش‌آموزان علاوه بر فهم بُعد این اعداد، با طبیعت و عظمت هستی و هستی‌آفرین آشناتر شدند. *(هــوش طبیعت‌گرایی) (هوش بصری- مکانی) (هوش موسیقایی) (هوش وجودی).*

در ادامــه، دانش‌آموزان ضمن آشــنایی با نرم‌افزار ریاضی ۱ تهیه شده در دفتر تکنولوژی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشــی، به یــادآوری و تعمیق مفاهیم توان توســط تمرین‌های عملی و انیمیشن‌های جذاب و کارگاه‌هــای رایانــه‌ای در قالب گروه‌های ســه نفری پرداختند. *(هــوش بصری- مکانی)(هــوش منطقی- ریاضی) (هوش میان‌فردی)*

در نوبتی دیگر از جریان آموزش، دانش‌آموزان در فضای طبیعی محوطهٔ مدرسه برده شده و با استفاده از درختان و چوب‌های موجود، برایشــان این پرسش طرح شد که «برای ساخت یک دیوار چوبی با ارتفاع خــاص، و با تخمین قطر درخت، چند بار باید درخت برش خورده و تکه‌ها روی یکدیگر قرارگرفته و دوباره برش بخورد؟»

دانش‌آمــوزان در قالــب گروه‌هــای ســه نفری، به محاســبه در همان مکان مشــغول شدند *(هوش طبیعت‌گرایی)(هــوش منطقــی- ریاضــی) (هوش میان‌فردی) (هوش حرکتی- جسمانی)*. هم‌چنین بر روی موزاییک‌های داخــل حیاط، با گچ یک صفحهٔ شــطرنجی ترسیم شد *(هوش بصری- مکانی)* و یک دانــهٔ گندم در خانــهٔ اول و ۲ دانه در خانهٔ دوم و ۴ دانه در خانهٔ ســوم و به‌همین ترتیب با توان‌هایی از ۲ در چند خانه دیگر دانهٔ گندم گذاشته شد *(هوش طبیعت‌گرایی)*؛ ســپس به داســتان مبدع شطرنج و اهدای آن به حاکم هندوســتان اشاره شد که مبدع شــطرنج در ازای آن، از حاکــم چنیــن مطالبه کرد که «یــک دانهٔ گندم را در خانــهٔ اول و در هر خانه به تعداد دو برابر دانه‌هــای خانهٔ قبل و تا خانهٔ آخر (خانــهٔ ۶۴) در نظر گرفته و به وی داده شــود». از دانش‌آمــوزان در قالب گروه‌ها خواســته شــد که با توجه بــه وزن تقریبــی یک دانهٔ گنــدم و با کمک ماشین حســاب، مقدار گندمی که باید حاکم هدیه نماید را محاســبه نمایند. *(هوش منطقی- ریاضی) (هــوش میان‌فردی) (هــوش حرکتی- جســمانی)* دانش‌آمــوزان باور نمی‌کردند که حاکــم باید تولید سال‌ها گندم روی کرهٔ زمین را به وی هدیه نماید! و لذا دســتور قتلش را صادر کرد! در هر دو مورد فوق، توان‌های عدد ۲ موردنظر بود.

در نوبت‌هایــی دیگر در ســالن مطالعه مدرســه، تمرین‌های مکتوبی به ایشــان داده شد و دانش‌آموزان به‌صورت گروهــی، به مباحثه با یکدیگر و حل جمعی آن‌ها پرداختند. ضمن اینکه معلم در میان گروه‌ها نیز، به رفع اشکال و هدایتگری ایشان پرداخت.

هم‌زمان با برگزاری دورهٔ آموزش ریاضی، در تعامل با دبیران شــیمی و فیزیک، خواسته شــد در این ایام، موضوع اعداد و توان را در مباحث خود بگنجانند. به این صورت که دبیر شیمی به تعداد مولکول‌های یک مول از ماده که برابر عدد آووگادرو یعنی $6/02 \times 10^{23}$ است پرداخته و دبیر فیزیک به بیان واحدهای توان‌های بزرگ و کوچک از جمله: کیلو، مگا، گیگا و دسی، میلی و غیره از جمله به سال نوری برای واحد طول که عبارت است از مســافت طی شده با سرعت نور (۳۰۰ هزار کیلومتر در ثانیه) به مدت یک ســال که آن را به‌صورت توانی از ۱۰ تبدیل می‌کنند، بپردازد.

جمع‌بندی

افزایش دانش و آگاهی معلمان از راه‌های متنوع پــردازش اطلاعــات دانش‌آمــوزان، و فراهم آوردن فرصت‌هایی برای طراحی روش‌های تدریس مبتنی

بر هوش‌های چندگانه می‌تواند گامی مؤثر در جهت دســتیابی به اهداف متعالی آموزشــی باشد. جهت تحقق این امر، علاوه بر اینکه نظام آموزش‌وپرورش فعلی باید حمایت لازم را داشــته باشد؛ معلمان نیز باید تســلط کامل و عمیق بــه موضوع مورد آموزش داشــته و از این موضــوع که راه‌های زیــادی برای یادگیــری دانش‌آموزان وجــود دارد، آگاه بوده و در طراحی روش‌های نوین، جهت خلق تجربه‌هایی که موفقیت طولانــی مدت دانش‌آموزان را در یادگیری تضمین‌می‌کنند،کوشــاباشــند.

طیف وســیع نیازهــای یادگیــری دانش‌آموزان امروز، نیازمند وجود معلمانی اســت که بســیاری از راهبردهــای مختلف را بــرای تطبیق نیازهای متنوع دانش‌آموزان بشناسند و جهت دستیابی به این دانش بکوشــند که دانش‌آمــوزان چگونه یــاد می‌گیرند و روش‌های موفق در تدریس و سنجش مؤثر یادگیری دانش‌آموزان کدامند.

آنچــه از نظریه گاردنر برمی‌آید این اســت که هر کس چون یک منشور منحصر به فرد، می‌تواند از پرتو هــوش عمومی، طیفی یکتا از هوش‌هــای گوناگون را بــه منصه ظهور بگذارد. گاهی اوقــات هوش‌های افراد قابل مشــاهده و آشکار هســتند و گاهی نیز قابل دید نیستند و منتظر فعال شدن یا شناخته شدن هستند. در اینجاست که لازم است روش‌های متفاوت و متنوع و در عین حال منســجمی از برنامه‌های آموزشی ارائه داد تا همهٔ دانش‌آموزان بتوانند انواع هوش‌های خود را متجلی کنند. چرا که هر کس به نســبت‌های مختلف، تمام هوش‌ها را داراست.

نظام آموزش‌وپرورش می‌تواند با توجه به هوش‌های چندگانه و مجزا بودن آنان از هم، فرصت‌ها و امکانات متعددی را فراهم سازد تا دانش‌آموزان، خلاقیت‌های خود را بارز کنند. نگه داشتن دانش‌آموزان در شرایطی که فقط یک یا دو هوش، قابلیت بروز داشته باشند، از ظهور ســایر توانمندی‌های بالقوهٔ دانش‌آموزان خواهد کاســت. توجه به توانایی‌های اختصاصــی افراد و نیز توجه به ایــن نکته که اندازه‌گیری ایــن توانایی‌ها، با یک آزمون ساده و در یک زمان محدود قابل سنجش نیست، می‌تواند بستری را برای همهٔ دانش‌آموزان مهیا کند تا توانایی‌ها و اســتعدادهای خود را بشناســند و در راســتای این توانایی‌ها به پیشرفت و موفقیت خود کمک کنند.

پی‌نوشت‌ها

1. Multiple Intelligences
2.Howard Gardner
3. Frames of Mind: The Theory of Multiple intelligences (MI)
4. Verbal-Linguistic Intelligence
5. Logical-Mathematical Intelligence
6. Visual-Spatial Intelligence
7. Bodily-kinesthetic Intelligence
8. Musical Intelligence
9. Interpersonal Intelligence
10. Intrapersonal Intelligence
11. Naturalistic Intelligence
12. Spiritual Intelligence
13. Existential Intelligence
14. Body Language

منابع

۱. آذرفــر، فاطمــه (۱۳۸۶). **ســنجش و کاربــرد هوش‌هــای چندگانه در مدرسه و خانه**، مشهد: نشر مؤسسهٔ فرهنگی، هنری و انتشاراتی ضریح آفتاب

۲. آرمســترانگ، تومــاس (۱۳۹۰). **هوش‌هــای چندگانــه در کلاس‌های درس**، ترجمهٔ مهشید صفری، تهران: انتشارات مدرسه.

۳. ســیف، علی‌اکبر (۱۳۸۹). **روان‌شناســی پرورشــی نوین: روان‌شناسی یادگیری و آموزش**، تهران: نشر دوران

۴. مهرمحمدی، محمــود (۱۳۸۵). **نظریهٔ هوش‌های چندگانه و دلالت‌هــای آن بــرای برنامهٔ درســی و آمــوزش**، فصلنامهٔ تعلیم‌وتربیت، شمارهٔ ۸۸.

۵. نیرو، محمد؛ حاجی‌حســین‌نژاد، غلامرضــا و حقانی، محمود (۱۳۹۰). **تأثیر آمــوزش مبتنی بر نظریهٔ هوش‌های چندگانه گاردنر بر پیشــرفت تحصیلــی ریاضی دانش‌آمــوزان اول دبیرســتان**، فصلنامهٔ رهبری و مدیریت آموزشــی، سال پنجم، شمارهٔ ۲.

6. Teele, S. (2002). ***Rainbows of Intelligence: Exploring How Students Learn***. California: sage publications company.

دو مفهوم کلیدی ریاضی دورهٔ ابتدایی
الگوریتم و سنجش برای یادگیری

مترجم: محمدحسام قاسمی
کارشناس ارشد ریاضی و دبیر ریاضی
شهرستان شهریار

کلیدواژه‌ها: روش محاسبهٔ غیررسمی، محاسبات ذهنی، یادگیری طوطی‌وار، یادگیری مهارت، سنجش برای تدریس، خطاها.

معرفی مفهوم الگوریتم

الگوریتم، یک فرآیند استاندارد و مرحله به مرحله برای حل مسائل است که به نوع مسائل وابسته است و اگر این مراحل به دقت دنبال شوند، به حل مسئله منتهی خواهند شد. اما مفهوم الگوریتم در ریاضیات ابتدایی، بیشتر به یک رشته عملیات استاندارد، نوشتنی و معین اطلاق می‌شود که در آن‌ها، دو یا چند عدد به‌کار رفته باشد، مانند «روش تجزیه برای تفریق»[۱] یا «روش ضرب طولانی»[۲].

شاید جدی‌ترین نقدی که بر آموزش الگوریتم‌های رسمی وارد می‌باشد، وقت‌گیر بودن آموزش و پیچیدگی اجرای آن‌ها باشد

توضیح و بحث

هر چند روش‌های ذهنی و غیررسمی زیادی وجود دارد که بعضاً کار با آن‌ها آسان‌تر و سریع‌تر است، اما این روش‌ها عمدتاً جامع نیستند و به نوع اعداد به‌کار رفته در مسئله وابسته هستند. لذا از این نظر، یادگیری برخی از الگوریتم‌های رسمی برای انجام محاسباتی که نیاز است قبل از پایان دورهٔ ابتدایی و بدون استفاده از ماشین حساب انجام شوند، می‌تواند مزایای متعددی را برای دانش‌آموزان به همراه داشته باشد. برای مثال، عملیاتی هم‌چون

۴۳۵+۹۶۴، ۴۳۶-۸۰۵، ۳۸×۶۴ و ۶۴۸÷۲۴

نمونه‌هایی از این نوع محاسبات هستند که برای حل آن‌ها، دانستن حداقل یک الگوریتم رسمی مفید است. مهم‌ترین مزیتی که در آموزش الگوریتم‌های رسمی وجود دارد، این است که دانش‌آموزان حداقل یک روش آماده برای حل مسئله‌ای که با آن روبه‌رو می‌شوند در اختیار دارند و می‌توانند فوراً و بدون در نظر گرفتن نوع اعداد به‌کار رفته در مسئله، از آن کمک بگیرند. شاید جدی‌ترین نقدی که بر آموزش الگوریتم‌های رسمی وارد می‌باشد، وقت‌گیر بودن آموزش و پیچیدگی اجرای آن‌ها باشد، در حالی که می‌توان به کمک یک ماشین‌حساب ساده و ارزان‌قیمت، با دقت بالاتری به جواب رسید و صرف وقت را نیز به حداقل رساند. اَسکیو[۳] (۲۰۰۱، ص. ۱۱۳) معتقد است که با وجود اینکه ماشین‌حساب وسیله‌ای مناسب است که بیشتر بزرگسالان به استفاده از آن عادت دارند، اما به دلایل مختلف، هنوز هم روش‌های قلم و کاغذی[۴] در برنامه‌های درسی پابرجا هستند که البته، «دلایل سیاسی آن، بیشتر از دلایل آموزشی آن است»!

دانش‌آموزان در دورهٔ ابتدایی، معمولاً هنگام استفاده از الگوریتم‌ها، مرتکب خطاهای زیادی می‌شوند. برخی از این خطاها به‌دلیل وجود الگوهای عمودی است که در ساختار بیشتر الگوریتم‌ها مشاهده می‌شود، برای مثال، دانش‌آموزان موقع استفاده از تفریق به روش تجزیه و هنگامی که یک عدد را مستقیماً زیر عدد دیگر می‌نویسند، ممکن است دچار خطاهایی شوند که ناشی از الگوی عمودی این روش است. فی‌یوسِن[5] (۲۰۰۴)، عدم درک صحیح از ارزش مکانی ارقام یک عدد را، دلیل بروز خطا در الگوریتم‌هایی با ساختار عمودی می‌داند و معتقد است که «بسیاری از تحقیقات، نشان‌دهندهٔ این واقعیت است که کودکان، هنگام کار با اعداد چند رقمی، درک صحیحی از ارزش مکانی ارقام ندارند». مثلاً هنگامی که عدد ۲۶۸ زیر ۳۸۷ نوشته می‌شود تا با آن جمع شود، دانش‌آموز عدد ۲۶۸ را به‌صورت «دو، شش، هشت» می‌بیند و دیگر توجهی ندارد که ۲ نشانهٔ ۲۰۰ و ۶ نشانهٔ ۶۰ است. در نتیجه، ممکن است بعضی از کودکان، پاسخ ۵۱۴۱۵ را برای این جمع بنویسند (۱۵ = ۷+۸، ۱۴ = ۸+۶، ۵=۳+۲). به اعتقاد فی‌یوسن در چنین مواردی، این الگوی عمودی الگوریتم است که دانش‌آموزان را به انجام عملیات سه رقمی به‌صورت دو مجموعه با ارقام مجزا، تشویق می‌کند.

آموزش یک روش الگوریتمی، باعث می‌شود دانش‌آموزان به سادگی یک محاسبه را به شکل مکتوب انجام دهند. به عبارت دیگر، برای این کار، آن‌ها می‌توانند به‌راحتی به یادگیری حافظه‌ای و طوطی‌وار خود تکیه کنند و دیگر توجهی به درک مفهومی این مسئلهٔ پیش روی خود نداشته باشند. در الگوریتم تفریق، یک خطای معمول و همیشگی رخ می‌دهد و آن هنگامی است که یکی از ارقامِ عدد کوچک‌تر، صفر باشد (برای مثال ۳۰۲-۷۲۴). در این حالت، دانش‌آموز-به اشتباه-مشابه حالتی عمل می‌کند که رقم صفر در عدد بزرگ‌تر وجود دارد، چون طبق عادت یاد گرفته است که در مواجهه با رقم صفر، آن را به‌صورت یک بستهٔ ده‌تایی در نظر بگیرد و در نتیجه به شرط لازم در استفاده از این الگوریتم، یعنی قرار داشتن رقم صفر در عدد بالاتر، توجه کافی نشان نمی‌دهد (رزنیک[6]، ۱۹۸۲).

اتفاق معمول اما نه‌چندان خوش‌آیندی که ممکن است در اثر تأکید بر تدریس الگوریتم‌ها رخ دهد، آن است که دانش‌آموزان تصور کنند روش مناسب و پذیرفتنی برای انجام یک محاسبه، فقط همان الگوریتم رسمی است که در مدرسه آموخته‌اند (احتمالاً رفتار معلم یا والدین در ایجاد چنین تصوری، نقش پررنگی دارد). برای مثال، یک کودک ۹ ساله به سختی می‌تواند با استفاده از الگوریتم تجزیه، عدد ۱۹۸ را از ۲۰۲ کم کند و این در حالی است که او به‌راحتی می‌تواند این کار را به‌صورت ذهنی و با شمارش از ۱۹۸ تا ۲۰۲ انجام دهد. برای نمونه، نویسندگان این کتاب، چند محاسبه با اعداد دو رقمی را برای حل در اختیار تعدادی دانش‌آموز ۱۱ ساله قرار دادند. اتفاق جالبی که رخ داد این بود که بیشتر دانش‌آموزان، در انجام یکی از محاسبات یعنی محاسبهٔ حاصل‌ضرب ۲۰ در ۱۰، مرتکب اشتباه شدند. حتی پس از اینکه فهمیدند پاسخ صحیح ۲۰۰ است، باز به الگوریتم رسمی که به کار بسته بودند، رجوع کردند تا اشکال خود را بیابند و برخی نیز به دنبال یک الگوریتم دیگر برای محاسبهٔ مجدد بودند. آنان با وجودی که می‌دانستند پاسخ صحیح ۲۰۰ است و شکی در آن نداشتند، اما تصور می‌کردند این پاسخ زمانی پذیرفتنی است که در نتیجهٔ استفاده از یک الگوریتم مشخص حاصل شده باشد و این کار، فقط پاسخگوی انتظاری است که از آن‌ها می‌رود!

بنابراین، معلمان مدارس ابتدایی هنگام آموزش و ارائه یک الگوریتم خاص، نباید به‌گونه‌ای رفتار کنند که باعث ایجاد این تصور در ذهن دانش‌آموز گردد که فقط آن الگوریتم خاص، می‌تواند روش مناسبی برای حل این نوع معادله‌ها باشد، از طرف دیگر، بیش از اندازه و زودتر از موعد بر روش‌های ذهنی و غیررسمی تأکید نکنند، زیرا باعث می‌شود که دانش‌آموز، روش‌های ذهنی و غیررسمی را جایگزین الگوریتم‌های رسمی کند در حالی که یادگیری الگوریتم‌های رسمی، مفید است.

برنامهٔ درسی ملی انگلستان ویلز (DfEE, 1999 a)[7]، تدریس الگوریتم‌های رسمی را به معلمان ابتدایی توصیه می‌کند، ولی هرگز آن را تجویز نمی‌کند. هم‌چنین، استراتژی ملی سواد عددی (DfEE, 1999 b)، با تأکید بر روش‌های ذهنی و غیررسمی، بیان می‌کند که نباید از کودکان ۹ ساله انتظار داشته باشیم که برای هر محاسبه، تنها یک الگوریتم مناسب بلد باشند و فقط از آن استفاده کنند. این کمیته، در راستای اثبات ادعای خود، مثال‌هایی از جمع به‌صورت ستونی و تفریق به‌روش تجزیه، ذکر نمود که به کمک روش‌های ذهنی و غیررسمی و به‌صورت ساده‌تری حل می‌شدند. بعداً استراتژی ملیِ بازبینی شده برای مدارس ابتدایی در انگلستان، توصیه کرد که «معلمان سعی کنند حتماً الگوریتم‌های رسمی را در مدارس ابتدایی آموزش دهند

استراتژی ملی سواد عددی با تأکید بر روش‌های ذهنی و غیررسمی، بیان می‌کند که نباید از کودکان ۹ ساله انتظار داشته باشیم که برای هر محاسبه، تنها یک الگوریتم مناسب بلد باشند و فقط از آن استفاده کنند

تا بتوان از امتیاز ویژهٔ روش‌های مکتوب و استاندارد که همان عمومی بودن و قابل اتکا بودن آن‌هاست، استفاده کرد.»

مثال‌های عملی

در ادامهٔ بحث، دو گام عملی مهم در آموزش الگوریتم‌ها مطرح شده است که یکی برقراری رابطه و دیگری انتخاب الگوریتم است. این دو گام، مبتنی بر این فرضیه هستند که الگوریتم‌ها را باید توأم با درک و فهم کافی از مسئله و در جهت روشن شدن هرچه بیشتر مباحث آموزش داد. این دو گام را در مورد روش شبکه‌ای ضرب به‌طور عملی، به‌کار خواهیم گرفت.

دو گام عملی مهم در آموزش الگوریتم‌ها مطرح شده است که یکی برقراری رابطه و دیگری انتخاب الگوریتم است. این دو گام، مبتنی بر این فرضیه هستند که الگوریتم‌ها را باید توأم با درک و فهم کافی از مسئله و در جهت روشن شدن هرچه بیشتر مباحث آموزش داد. این دو گام را در مورد روش شبکه‌ای ضرب به‌طور عملی، به‌کار خواهیم گرفت

برقراری رابطه

برای مقابله با تمایل دانش‌آموزان به یادگیری طوطی‌وار و حافظه‌ای الگوریتم‌ها، معلمان ابتدایی باید زمانی را نیز برای کمک به درک فرآیند الگوریتم توسط دانش‌آموزان در نظر بگیرند. این امر، معمولاً با برقراری رابطهٔ مستقیم بین دست‌ورزی نمادها، زبان مربوطه و اشیا یا تصویرهای ملموس انجام می‌شود. مثلاً، برای انجام الگوریتم تفریق به کمک تجزیه مثل ۲۶۹- ۴۳۵، معلم می‌تواند از یک سکهٔ ۴ پوندی به‌عنوان نماد چهارصد در ۴۳۵، سه سکهٔ ده‌پنی به‌جای نماد سی و از یک سکهٔ ۵پنی نیز به‌عنوان یکان ۵ استفاده کند. بعد نشان دهد که به‌جای یکان ۹ در ۲۶۹، باید از ۹ پنی استفاده کند، اما چون فقط ۵ تا از این سکه‌ها داریم، بنابراین یکی از سه سکهٔ ده‌پنی را انتخاب و آن را در قالب ۱۰ واحد یک پنی استفاده می‌کنیم. حال ۱۵ پنی داریم و دیگر به ۹ پنی نیازی نیست. سپس باید مشکل مشابه برای ۶ تا ده‌تایی را حل کنیم و به همین ترتیب، ادامه دهیم. در نتیجه، با استفاده از یک زبان مناسب (تبدیل یک ده‌تایی به ۱۰ تا یکی) و برقراری روابطی بین نمادهای درون معادله و دست‌ورزی با سکه‌ها، دانش‌آموز می‌تواند به آسانی، درکی از فرآیند آن الگوریتم داشته باشد.

انتخاب الگوریتم

معلمان ابتدایی باید آگاه باشند که ممکن است چندین الگوریتم برای حل یک معادله یا انجام یک محاسبه وجود داشته باشد و در انتخاب یک الگوریتم مناسب، لازم است به دو اصل مهم توجه کرد: الف) یک الگوریتم باید بتواند به دانش‌آموز در درک فرآیند پیش روی وی، کمک کند و یادگیری آن الگوریتم نه به‌صورت طوطی‌وار، بلکه همراه با درک و فهم باشد، ب) یک الگوریتم باید از بعد پیچیدگی و مهارت‌های لازم و داشتن پیش‌نیاز، متناسب با توانایی دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی باشد. برای نمونه، در مقایسهٔ دو الگوریتم تقسیم‌های متوالی[۸] و تفریق‌های مکرر، هایلوک (۲۰۰۶، صص ۱۰۱ تا ۱۰۳)، آموزش الگوریتم تقسیم طولانی را نامتناسب با میزان دانش و توانایی دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی تشخیص می‌دهد. او توضیح می‌دهد این نامناسب بودن به این دلیل است که اولاً آموزش مفهومی این روش بسیار سخت است و ثانیاً شامل مهارت‌هایی است که دانش‌آموزان این ردهٔ سنی هنوز آن‌ها را کسب نکرده‌اند یا کمتر قادر به درک آن‌ها هستند. اما در مقابل، از استفاده از الگوریتم تفریق‌های مکرر دفاع می‌کند. البته روش تفریق‌های مکرر از سوی گروه Dutch TAL[۹] نیز برای آموزش در مدارس ابتدایی، پذیرفته و توصیه شده است.

الگوریتم شبکه‌ای برای ضرب

بسیاری از معلمان مدارس ابتدایی در انگلستان از روش شبکه‌ای برای ضرب استفاده می‌کنند. از نظر آن‌ها این روش قابل فهم‌تر و در دسترس‌تر از روش قدیمی یعنی روش ضرب طولانی است. هرچند استراتژی سواد عددی[۱۰] (DfEE, 1999 b: 67)، این روش را تحت عنوان یک روش غیررسمی برای ضرب دسته‌بندی می‌کند، اما روش الگوریتم شبکه‌ای در بسیاری از جنبه‌ها، به یک الگوریتم رسمی و استاندارد شبیه است. شکل ۱، محاسبهٔ ۳۸×۶۴ را به هر دو روش نشان می‌دهد. در روش ضرب طولانی، حاصل ضرب طی سه مرحله به‌دست می‌آید؛ دو مرحلهٔ اول جایگاه خاص خود را دارند: ۳۰×۶۴ و

	۶۰	۴	
۳۰	۱۸۰۰	۱۲۰	
۸	۴۸۰	۳۲	
	۲۲۸۰	+ ۱۵۲	= ۲۴۳۲

$$\begin{array}{rl} ۶۴ & \\ \times\ ۳۸ & \\ \hline ۱۹۲۰ & (۶۴ \times ۳۰) \\ ۵۱۲ & (۶۴ \times ۸) \\ \hline ۲۴۳۲ & (۶۴ \times ۳۸) \\ \hline \end{array}$$

شکل ۱: الگوریتم ضرب طولانی و شبکه ای ضرب برای یافتن حاصل ۶۴×۳۸

۸×۶۴، در مرحلهٔ سوم، حاصل دو مرحلهٔ قبلی را با یکدیگر جمع می‌شوند. در روش شبکه‌ای، تعداد مراحل

بیشتر است، ولی در عین حال، انجام هر کدام از مراحل آسان‌تر است، این مراحل شامل محاسبهٔ: ۶۰×۳۰، ۸×۶۰، ۳۰×۴، ۸×۴ و در پایان، جمع کردن همهٔ مقادیر موجود در شبکه‌هاست.

برای ایجاد رابطه و آموزش مفهومی الگوریتم شبکه‌ای، این الگوریتم را می‌توان با مثالی که در آن، مساحت یک ناحیهٔ مستطیلی شکل به ابعاد ۶۴ واحد در ۳۸ واحد خواسته شده است، همراه ساخت. با تقسیم کردن کل ناحیه مستطیلی به چهار ناحیهٔ کوچک‌تر، و جمع مساحت این چهار ناحیه با هم، می‌توان مساحت کل را به‌دست آورد. در این صورت است که فهم و درک دقیق‌تری از فرآیند ضرب حاصل خواهد شد. استراتژی ملی بازبینی شده برای مدارس ابتدایی[11] (DfES, 2006 a: 48-50)[12] تدریس الگوریتم شبکه‌ای را توصیه می‌کند اما نه به‌عنوان یک الگوریتم جامع و مناسب برای همهٔ ضرب‌ها، بلکه قائل به تدریس آن یک گام، بعد از تدریس الگوریتم ضرب طولانی است.

مطالعهٔ بیشتر

توصیه می‌شود فصل «محاسبه‌های ستونی و الگوریتم‌ها» نوشتهٔ تریفرز[13] و همکاران، در رابطه با پروژهٔ TAL در هلند، را مطالعه فرمایید (فن‌دل هیول، فن هیوزن، ۲۰۰۱)[14]. اَسکیو در فصلی با عنوان «سیاست، اجرا و اصول در تدریس حساب: چه چیزی دلیل تفاوت‌هاست؟» در کتابِ گِیتس (۲۰۰۱)، تحلیلی جامع و کارآمد از تفاوت‌های بین روش‌های محاسباتی مبتنی بر استراتژی (معمولاً استراتژی‌های غیررسمی) و روش‌های مبتنی بر فرآیند (الگوریتمی) ارائه کرده است. هم‌چنین فی‌یوسن در فصلی با عنوان «اهداف و استانداردهای پیش‌دبستانی تا پایهٔ دوم» نظرات جالبی را دربارهٔ الگوریتم‌های موجود در جمع و تفریق که مختص دانش‌آموزان حداکثر هفت ساله در ایالات متحده است، مطرح کرده است. وی همچنین، به مطالعه و نقد توصیه‌های استراتژی ملی برای مدارس ابتدایی (DfES, 2006 a) که از طریق وبگاه (www.standards.dfes.gov.uk/primary/mathematics) قابل دسترسی است، پرداخته است.

معرفی مفهوم سنجش برای یادگیری[15]

گروه اصلاح سنجش[16] (۲۰۰۲)، «سنجش برای یادگیری» را چنین تعریف می‌کند: «فرایند جست‌وجو و تفسیرِ شاخص‌ها و شواهد جمع‌آوری شده برای ارزیابی و تشخیص آنکه دانش‌آموزان در کجای مسیر یادگیری قرار گرفته‌اند، تا کجا باید پیش بروند و در جهت یادگیری چقدر خوب عمل کرده‌اند. ارزیابی دانش‌آموز - هم توسط معلم و هم توسط خودش- سنجش برای یادگیری اطلاق می‌شود». موضوع سنجش، به‌طور کلی همهٔ روش‌هایی را شامل است که افراد جهت کسب اطلاع از کیفیت، کمیت و سطح دانش و یادگیری خود یا دیگران، به‌کار می‌گیرند تا پس از کسب اطلاعات لازم، بتوانند به کمک این شواهد، در مورد آن بخش از مسیر یادگیری که طی شده است، قضاوت و برای ادامهٔ مسیر برنامه‌ریزی کنند. اما «سنجش برای یادگیری»، به‌عنوان بخشی از آن، بیشتر بر مشارکت فعال دانش‌آموزان در ارزیابی خود به‌عنوان یک ابزار کارآمد و یک جزء ذاتی از فرایند یادگیری، تأکید دارد.

توضیح و بحث

سنجش می‌تواند به دو صورت **تراکمی**[17] یا **سازنده**[18] باشد. سنجش **تراکمی** جایی است که هدف، داوری و نتیجه‌گیری کلی دربارهٔ یادگیری دانش‌آموزان است و عمدتاً برای گزارش دادن در مورد تحقق اهداف در پایان یک دورهٔ آموزشی استفاده می‌شود. سنجش **سازنده** جایی است که هدف، جمع‌آوری اطلاعات دربارهٔ یادگیری دانش‌آموزان برای ساخت، تثبیت یا بازسازی روش تدریس اتخاذ شده در جهت ارتقای کیفیت یادگیری به‌کار می‌رود. سنجش یادگیری دانش‌آموزان می‌تواند با دو منظور؛ یکی ارزیابی اهداف آموزشی کوتاه‌مدت[19] (در مورد یک یا چند درس خاص)، یا اهداف میان‌مدت[20] (برای یک بازهٔ زمانی طولانی‌تر) اجرا شود. اجرای سنجش‌های کوتاه‌مدت، آسان‌تر است و در آن، اهداف نیز خاص‌تر هستند، مثلاً حتی می‌توانند در قالب یک پرسش مثل این باشند که «دانش‌آموزان تا جمعه وقت دارند مشخص کنند کدام یک از اعداد صحیح کمتر از ۱۰۰، عدد اول هستند؟». در حالی که سنجش اهداف میان‌مدت سخت‌تر است، به این دلیل که معمولاً در متن آن‌ها، از زبان عمومی‌تری استفاده می‌شود و طبیعی است که ارزیابی مقاصد عمومی‌تر، دشوارتر است. برای مثال، وقتی به‌عنوان هدف ارزشیابی، می‌گوییم که «دانش‌آموزان آن‌قدر توانمند شوند که در هنگام مواجهه با مسائل بتوانند از اطلاعات و مهارت‌های ریاضی خود، مانند مهارت حل مسئله و مهارت تحقیق کردن، به‌خوبی استفاده کنند»، نمونه‌ای از هدف میان‌مدت است که تا حدودی عمومی بیان شده است، لذا سنجش آن سخت‌تر است.

استراتژی ملیِ بازبینی شده برای مدارس ابتدایی در انگلستان، توصیه کرد که «معلمان سعی کنند حتماً الگوریتم‌های رسمی را در مدارس ابتدایی آموزش دهند تا بتوان از امتیاز ویژهٔ روش‌های مکتوب و استاندارد که همان عمومی بودن و قابل اتکا بودن آن‌هاست، استفاده کرد»

در ســـال‌های اخیر در انگلســـتان، علاقهٔ فراوانی به «ســـنجش برای یادگیری» به‌وجود آمده است و تقریباً همـــگان، به‌جای «ســـنجش یادگیری» بر «ســـنجش برای یادگیری» تأکید می‌کنند و معتقدند نقش اصلی سنجش، ســـازندگی آن است و این نقش، باید به‌عنوان یـــک ابزار مؤثر برای ارتقای یادگیـــری، مورد توجه قرار گیرد. کارکرد نقش ســـازندگی ســـنجش، به این معنی اســـت که در سنجش **سازنده**، باید خط‌مشی و جهت اهداف از حول آموزش معلمان، ارتقای ســـطح دانش و طراحی طرح درس‌های بهتر، به‌سمت تمرکز بیشتر بر دانش‌آمـــوز و کمک به او برای کســـب توانایی اصلاح و توسعهٔ یادگیری خود، تغییر یابد. گروه اصلاح سنجش، طی مطالعاتی نشان می‌دهد که چگونه سنجش می‌تواند بخشی از فرایند یادگیری باشد و دانش‌آموزان را در درک و فهم اهداف یادگیری و حضور فعال‌تر در روند ارزشیابی یادگیری خود، دخیل کند و یاری و تشـــویق نماید. این گروه، شواهدی به‌دست آورد که نشان می‌داد هر زمانی که دانش‌آموزان فعالانه در روند سنجش خود مشارکت کنند، یادگیـــری آن‌ها افزایش می‌یابد و بهتر می‌توانند در پیشـــرفت یادگیری خود سهیم باشند. (گروه اصلاح سنجش، ۱۹۹۹).

به‌طور کلی، می‌توان برای «سنجش برای یادگیری»، سه هدف اصلی در نظر گرفت:

۱. تربیت دانش‌آموزانی با توانایی بررسی پیشرفت خود در مسیر تحقق اهداف یادگیری.

۲. تشویق دانش‌آموزان برای انجام بهترین‌ها.

۳. تربیـــت دانش‌آمـــوزان به‌عنـــوان یادگیرندگانی مستقل همراه با مهارت‌های خودارزیابی[۲۱].

ریاضی دارای ماهیتی اســـت که کاربـــرد این ایده (ســـنجش برای یادگیری) در آن، بسیار مناسب به‌نظر می‌رسد، زیرا بیشـــتر مفاهیم ریاضی را می‌توان به‌طور واضح و صریح تعریف کرد و خصوصیات آن‌ها را مشخص کرد. لذا ســـنجش اهدافِ مفاهیم ریاضی، از موضوعاتی که از تعریف نسبی یا عمومی‌تری برخوردارند، آسان‌تر است. بنابراین، دانش‌آموزان با توجه به صراحت اهداف، سریع‌تر متوجه می‌شوند که چه چیزی را باید یاد بگیرند و قضاوت کنند که آن چیز را یاد گرفته‌اند یا خیر. با این حال، در به‌کارگیری «سنجش برای یادگیری» در مورد ریاضی، باید محتاط بود، زیرا بیم آن می‌رود که به‌دلیل مشکل بودن سنجش سطوح بالاتر یادگیری در ریاضی مانند فهمیدن، حل مســـئله، ابتـــکار و اجرای خلاقانه، تمایل معلمان و دانش‌آموزان بیشـــتر به‌سمت سنجش جنبه‌های سطح پایین و آسان‌تر ریاضی مانند دانش و مهارت‌ها، نوشتن و اجرای سریع محاسبات که سنجش آن‌ها آسان‌تر است، سوق یابد. نیس[۲۲] (۲۰۰۳) با هشدار در مورد این خطر، بیان می‌کند که «آنچه که در آموزش پیش‌بینی شود ولی سنجش نشود، خیلی زود از دیده‌ها محو شده و اهمیت خود را از دست می‌دهد».

در انتخاب یک الگوریتم مناسب، لازم است به دو اصل مهم توجه کرد: الف) یک الگوریتم باید بتواند به دانش‌آموز در درک فرآیند پیش روی وی، کمک کند و یادگیری آن الگوریتم نه به‌صورت طوطی‌وار، بلکه همراه با درک و فهم باشد، ب) یک الگوریتم باید از بعد پیچیدگی و مهارت‌های لازم و داشتن پیش‌نیاز، متناسب با توانایی دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی باشد

مثال‌های عملی

معلمـــان دورهٔ ابتدایی که از روش «ســـنجش برای یادگیری» اســـتفاده می‌کنند، می‌بایســـت به نکات زیر توجه داشته باشند:

۱. اهداف و مقاصد هر درس را با دانش‌آموزانشـــان در میان بگذارند؛

۲. اطمینـــان یابند که دانش‌آمـــوزان این اهداف و مقاصد را به‌خوبی فهمیده‌اند؛

۳. بـــه دانش‌آموزان خـــود توضیح دهند که چگونه می‌توانند متوجه شـــوند که به اهداف دست یافته‌اند یا خیر؛

۴. زمـــان کافی در اختیار دانش‌آموزان قرار دهند تا دربارهٔ معیارهایی که برای سنجش خود به‌کار می‌برند، بحـــث کنند، هم‌چنیـــن، از یک زبان قابـــل درک برای دانش‌آموزان اســـتفاده کنند و مثال‌هایی تهیه کنند که نشان دهند منظور از موفقیت و نیل به اهداف، چیست؛

۵. با استفاده از ابزارهای مختلف، فرصت‌هایی را برای ســـنجش در کلاس درس خود فراهم کنند تا به کمک ایـــن فرصت‌ها، هم خود در جریان پیشـــرفت یادگیری دانش‌آموزان قرار گیرند و هم دانش‌آموزان؛

۶. دانش‌آموزانی تربیت کنند که مســـتقلاً بتوانند مشخص کنند که به چه چیزهایی دست یافته‌اند و نقاط ضعف خود را شناسایی و برطرف کنند و به‌طور کلی، از عهدهٔ بررسی و ارزیابی خود برآیند.

در ادامه، برای هدف آموزشـــی[۲۳] که قبلاً عنوان شد یعنی: «دانش‌آموزان تا جمعه وقت دارند که مشـــخص کننـــد که کـــدام یک از اعـــداد صحیح کمتـــر از ۱۰۰، عدد اول هســـتند؟»، یک مثال عملـــی ارائه می‌کنیم و توضیح خواهیم داد که چگونه معلمان، می‌توانند برای دانش‌آموزان ۱۰ و ۱۱ سالهٔ خود، از ایدهٔ «سنجش برای یادگیری» استفاده کنند.

در ابتدای آخرین جلســـه مربـــوط به آموزش اعداد اول، هدف رفتاری فوق در کلاس مطرح می‌شود و برای آگاهـــی از اینکه دانش‌آمـــوزان، نکات و مفاهیم کلیدی مربوط به اعداد اول را فهمیده‌اند یا خیر، از روش پرسش

اســتفاده می‌کنیم. مفاهیم کلیدی مرتبط در این مورد خاص می‌تواند شــامل «عدد صحیح»، «کمتر از ۱۰۰» و «عدد اول» باشد و برای نمونه پرسش مطرح شده نیز می‌تواند «چه هنگام درمی‌یابید که به جواب (عدد اول کمتر از صد) دســت یافته‌اید یا خیر؟» باشد. سنجش برای یادگیری، در قالب پرســش کتبی نیز امکان‌پذیر اســت. مثلاً معلم برای شــروع، چند عدد کمتر از ۱۰۰ را روی تخته می‌نویســد و از دانش‌آمــوزان می‌خواهد که مشــخص کنند کدام یک اول است و کدام یک اول نیست، سپس کلاس را برای پاسخ دادن به یک برگهٔ ده سؤالی آماده می‌کند و از آن‌ها می‌خواهد که حداقل به هشت مورد از آن‌ها، پاسخ صحیح بدهند.

پس از آموزش مفاهیم اصلی درس، فعالیت‌های گروهی برای تعیین اعداد اول آغاز می‌شــود و معلم در ابتدا، میزان مشارکت و عملکرد انفرادی هر یک از دانش‌آموزان را می‌سنجد. در ۱۰ دقیقهٔ آخر کلاس، دانش‌آمــوزانِ هر گروه، پاســخ‌های خود را به‌صورت شــفاهی در کلاس مطرح و به اشــتراک می‌گذارند. معلم به اعضای هر گروه فرصت می‌دهد که در مورد درست یا غلط بودن پاسخ‌های گروه‌های دیگر بحث کنند. معلم می‌تواند گهگاهی با نیم‌نگاه به پاســخ‌ها و مباحث گروه‌ها، با لحنی پرسشــی، در بحث آن‌ها مداخلــه کند. برای مثال، بپرســد کــه «بچه‌ها! چرا خیلــی از شــماها ۹۱ را عدد اول معرفــی کرده‌اید؟ فکر نمی‌کنید که شــاید اشتباه کرده‌اید؟». این‌گونه مداخلات بجــا از جانب معلم، به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا اشتباهاتی را که در بحث‌های میان‌گروهی و بین‌گروهــی متوجــه آن‌هــا نشــده‌اند، بــه کمک معلمشان کشف کنند. در پایین برگهٔ هر دانش‌آموز، از او خواسته می‌شود تا خلاصه‌ای از چگونگی یافتن پاسخ برای ســؤالات را توضیح دهد و بنویسد که آیا به اهداف دست یافته است یا خیر، اگر پاسخ «خیر» اســت، توضیح دهد که کجا و با چه مشــکلی مواجه بوده اســت و در نهایت، مشخص کند که چه چیزی دربــارهٔ یادگیری خود، یــاد گرفته اســت. در پایان ســنجش، معلم برگه‌ها را جمع‌آوری می‌کند و حین تصحیح آن‌ها، مشخص می‌کند که هر دانش‌آموز، به چه چیزی دســت یافته اســت و دربارهٔ اشتباهات یا مشکلاتی که با آن روبه‌رو بوده است، صحبت می‌کند و بــرای چیره شــدن بر آن مشــکلات، دانش‌آموز را راهنمایی می‌کند.

مطالعهٔ بیشتر

بِلَک[۲۴] (۲۰۰۲)، کار مفید در مورد ســنجش برای یادگیری ارائه کرده است. کتاب مفید دیگری نیز دربارهٔ مسائل عمومی در سنجش برای یادگیری و آموزش در دورهٔ ابتدایی وجود دارد که توســط بریگــز[۲۵] (۲۰۰۳) نوشته شده است. حَفیس[۲۶]، یک فصل کاربردی با عنوان «استفاده از سنجش برای توسعهٔ آموزش و یادگیری»، در تامســون (۲۰۰۳) ارائه کرده اســت کــه در آن، به تشریح فعالیت‌ها و نظرات گروه اصلاح سنجش در رابطه با یادگیری ریاضی پرداخته است. برای مطالعهٔ دقیق‌ترِ موضوعات وابسته به سنجش در ریاضی و تحلیل اهداف سنجش در ســه بُعد دانش‌آموز، معلم و نظام آموزشی، می‌توانید به فصلی با عنوان «سنجش در آموزش ریاضی و اثرات آن» از نیس (۱۹۹۳) رجوع کنید.

پی‌نوشت‌ها

1. Decomposition for Subtraction
2. Long Multiplication
3.Askew
4. Paper-and-Pencil Procedures
5. Fuson
6. Resnick
۷. ایــن عبــارت مخفــف Departement for Education and Employment با نام فارســی ادارهٔ آموزش و اســتخدام انگلستان می‌باشد و همچنین شمارهٔ سال در کنار حروف a یا b به تاریخ یا نوع سند منتشر شده از جانب آن اداره اشاره دارد.
8. Long Division
۹. نــام این گــروه از عبــارت هلنــدی Tussendoelen Annex Leerlijne با معنای فارسی «ضمیمه‌ای برای اهداف برنامهٔ درسی» گرفته شده است.
10. Numeracy strategy
11. Revised National Strategy for Primary School
۱۲. این عبــارت مخفــف Departement for Education and Skills با نام فارســی ادارهٔ آموزش مهارت انگلســتان می‌باشــد و همچنین شمارهٔ ســال در کنار حروف a یا b به تاریخ یا نوع سند منتشر شده از جانب آن اداره اشاره دارد.
13. Treffers
14. Van den Heuvel-Panhuizen
15. Assessment for Learning
16. Assessment Reform Group, Retreieved from www.qca.org.uk
17. Summative
18. Formative
19. Short-term Objectives
20. Medium-term Goals
21. Self-assessment
22. Niss
23. Specific Objective
24. Black
25. Briggs
26. Hafees

کاربرد عدد ۲ در ضرب و تقسیم دو عدد با یکدیگر

عین‌الله رحمانی
دانشجوی دکتری منطق ریاضی و دبیر دبیرستان‌های تاکستان

ریاضی‌دانان دورهٔ میانه در ضرب و تقسیم دو عدد به یکدیگر از عدد ۲ استفاده می‌کردند. (قربانی، ۱۷۳) حال سؤال اساسی آن است که طرح این موضوع چه ضرورتی دارد. ضرورت این موضوع به دو دلیل است. ۱. استفاده از خواص اعداد (مانند ۲) در ضرب و تقسیم دو عدد به یکدیگر در ترکیبیات، و ۲. به‌کارگیری عدد ۲ توسط ریاضی‌دانان مصر باستان در ضرب و تقسیم دو عدد به یکدیگر؛ به‌عنوان مثال، ضرب عدد ۲۷ در عدد ۱۳۲

۱۳۲	۰/۱
۲۶۴	۰/۲
۵۲۸	۴
۱۰۵۶	۰/۸
۲۱۱۲	۰/۱۶

هر یک از اعداد ستون سمت راست دو برابر عدد قبلی است و اعداد ستون سمت چپ توان‌های ۲ کوچک‌تر از ۲۷ هستند. مجموع اعداد ستون سمت چپ که پشت آن‌ها خط موربّی رسم شده برابر ۲۷ است. اگر اعداد مقابل این توان‌ها را که با خط مورب مشخص شده‌اند با هم جمع کنیم برابر حاصل‌ضرب عدد ۲۷ در ۱۳۲ است.

در آثار ریاضی‌دانان دورهٔ میانه اصول مختلفی در ضرب و تقسیم اعداد با استفاده از خواص اعداد مشاهده می‌شود. به‌کارگیری جذب و کعب و یا به توان رساندن دو و سه اعداد ریشهٔ چینی دارد که توسط خواجه نصیرالدین طوسی در دورهٔ میانه بسیار زیاد به‌کار برده شده است (مدرس رضوی، ۴۳۲)

منابع

۱. قربانی، ابوالقاسم، **زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دوره اسلامی**، مرکز نشر دانشگاهی
۲. مدرس رضوی، محمدتقی، **احوال و آثار خواجه نصیرالدین طوسی**، انتشارات اساطیر، چاپ دوم، ۱۳۷۰ هـ.ش.

نقش تشویق در ایجاد انگیزه

سارا جامی، دبیر ریاضی و هنر مدارس راهنمایی شهرستان تایباد

اشاره

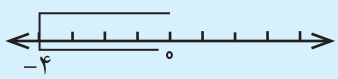
به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

رشد آموزش ریاضی

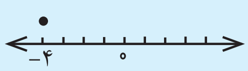
آن‌گونه که تجربه اندک من در کار معلمی بر من معلوم ساخته است یک تدریس خوب تنها چیزی نیست که بر نتیجه کار معلمی تأثیرگذار است و صد البته که خوانندگان این مجله این مطلب را بهتر از من می‌دانند. زمانی من بر خلاف رشته تحصیلی‌ام در روستایی به تدریس ریاضی پرداختم که چون کسی را داشتم که برای تدریس هر مبحث راهنمایی‌ام می‌نمود توقع داشتم این تدریس بازده خوبی در کلاسم داشته باشد. اما اندک زمانی بیش نگذشت که دریافتم عده‌ای از دانش‌آموزان مطلب را چه ساده و چه مشکل نمی‌خواهند یاد بگیرند. در اینجا می‌خواهم صحبت از دانش‌آموزی کنم که هیچ حوصله درس و مدرسه نداشت و او را یکی از دردسرهای کلاس می‌پنداشتم. دو ماه از سال تحصیلی گذشته بود و من به واسطه تازه کار بودنم بیشتر از سایرین اصرار و انرژی داشتم تا بر تعداد درس‌خوان‌های کلاس بیفزایم لذا وقت اضافه‌ای را برای کلاس ریاضی در نظر گرفتم و اعلام کردم که در این کلاس اضافه بر سازمان، مطالب کتاب از اول مرور و تدریس دوباره شده و پس از دو جلسه که مطالب مرور شد امتحانی برگزار خواهد شد و دانش‌آموزانی که نمره بالاتر از ۱۳ بگیرند با هماهنگی دفتر مدرسه یکی از جلسات ریاضی را به جای کلاس، به ورزش خواهند پرداخت. این روش از آن زمان تا کنون همیشه برای کلاس‌های من نتیجه بخش بوده است و من در اولین جلسهٔ آن کلاس جبرانی ریاضی، مطلب جالبی را مشاهده کردم. اولین درس پایه سوم راهنمایی اعداد اول و مرکب بود که آن را دوباره تدریس و تذکر دادم برای اعداد بزرگی که نمی‌توانیم ضربی ذهنی را برای تشخیص اول یا مرکب بودن آن‌ها پیدا کنیم تقسیم کردن آن عدد به ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و . . . نتیجه بخش خواهد بود. دانش‌آموز بی‌حوصله‌ای که ذکرش رفت این بار به شوق ورزش حواسش را کمی جمع کرده بود و به من گوش می‌داد. پس از توضیحات لازم از دانش‌آموزان خواستم تعیین کنند اعدادی که به آن‌ها می‌دهم اول است یا مرکب. اولین عددی که گفتم ۶۳ بود که دانش‌آموزان فوراً گفتند مرکب زیرا: $9\times7=63$ سپس عدد ۲۰۳ را مطرح کردم. این بار دست‌ها به سمت کاغذ و قلم‌ها رفت تا آن را به ۲، ۳، ۵ و . . . تقسیم کنند. اما هنوز دست‌ها به قلم‌ها نرسیده بود که همان دانش‌آموز بی‌حوصله گفت: مرکب است. با اخم گفتم: جواب الکی ندین، اول حساب

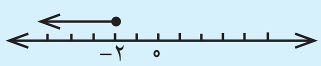
کنین بعد جواب بدین. گفت: مرکبه چون ۲۹ ضربدر ۷ می‌شه ۲۰۳. از جوابش تعجب کردم چون خودم بدون اینکه قادر به محاسبه ذهنی آن باشم قبلاً جواب آن را با تقسیم روی کاغذ به‌دست آورده بودم، چگونه او به این سرعت به جواب دست یافت؟! پرسیدم چطور حساب کردی؟ با لبخند گفت: مگه ۳۰ ضربدر ۷ نمی‌شه ۲۱۰؟! گفتم بله. گفت: خب ۷ تا ازش کم کنین می‌شه ۲۰۳. پس ۲۰۳ می‌شه ۲۹ ضربدر ۷. از این استدلال ساده و در عین حال هوشمندانه به وجد آمدم و صدها آفرین و احسنت به این فکر زیبا نثار کردم و گفتم ببین خدا عجب ذهن و فکر خلاق و قشنگی به تو عطا کرده و تو این هوش را بی‌استفاده گذاشته‌ای و آفرین به تو و سپس به ادامه کلاس و درس پرداختم. این تشویق و تحسین اثر خوبی روی او گذاشت و سعی می‌کرد مطالب را بیشتر دنبال کند و کمتر شیطنت می‌کرد تا در ادامه درس به قسمت نوشتن مجموعه اعداد به زبان ریاضی رسیدیم. مجموعه $\{x|x\in Z, x>-۴\}$ را نوشته و با توضیحات کامل آن را به شکل $\{-۳, -۲, -۱, ...\}$ نوشتم. می‌دانستم که عده کسانی که با این درس مشکل دارند زیاد است و توقع نداشتم همگی با یک توضیح آن را یاد بگیرند. محوری مانند شکل مقابل رسم کردم و به آن‌ها نشان دادم که چگونه اعداد بزرگ‌تر از ۴- را پیدا کرده و به عنوان جواب یادداشت کنند.

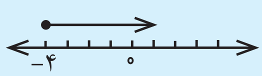


همگی گوش می‌دادند اما وقتی تمرین مشابهی برای حل دادم عده زیادی در حل تمرین تازه درماندند.

اعصابم خورد شده بود و هر بار تمرین جدیدی را با توضیح کامل حل می‌کردم، اما فایده نداشت. رو به بچه‌ها کردم و گفتم بابا این که چیزی نیست محور جلوتان است و اعداد را از روی آن پیدا می‌کنید و می‌نویسید این که دیگر کاری ندارد. دانش‌آموز بی‌حوصله ما دستش را بالا برد و گفت: اجازه! ما بیایم یک روش آسون بگیم که همه یاد بگیرن؟ هر چند عقیده پیدا کرده بودم که شخص هوشمندی است اما گمان نمی‌کردم بتواند چیز جالبی بگوید با تردید اجازه دادم پای تخته بیاید. نگاهی به اولین تمرین حل شده انداخت و نوشت $x<-۴$ بعد به بچه‌ها گفت: به علامت بین ۴ و x نگاه کنید و بعد نوشت $>$. گفت ببینید من باهاش چه‌جوری فلش درست می‌کنم:

⟵ حالا روی محور ۴- رو پیدا می‌کنم:  و

از آنجا فلشی را که به‌دست آورده‌ام رسم می‌کنم. 

خب بچه‌ها اعدادی که فلش نشون می‌ده بگین. بچه‌ها گفتن ۳- و ۲- و ۱- و.... بعد تمرین مقابل را از روی تخته پیدا کرد: $\{x \mid x\in Z , x<-۲\}$. گفت: اگه باهاش فلش درست کنیم اینجوری می‌شه: ⟵ حالا روی محور اجرا می‌کنیم: 

خب حالا بگین: بچه‌ها گفتن: ۳- و ۴- و ۵- و ... . و رفت سر جایش نشست. یکی دو تمرین دادم و همگی بچه‌ها درست حل کردند به بچه‌ها نادرست بودن استفاده از چنین روش‌هایی را تذکر دادم و گفتم که اگر سؤال به شکل $-2>x$ نوشته شود این روش جواب نمی‌دهد. فوراً بلند شد و گفت: خب هر وقت اینجوری بود همه را برعکس می‌کنیم تا به شکل $x<-2$ بشود و همیشه x در سمت چپ و عدد ما در سمت راست قرار بگیرد و مسئله درست حل شود. گفتم حق با توست در آن صورت تمرین به جواب درست می‌رسد اما چنین روشی که طوطی‌وار و بدون درک کامل از مسئله انجام شود به درد کلاس ریاضی که هدف آن تقویت درک و اندیشه است نمی‌خورد. اما از اینکه توانستی روشی را هر چند نامناسب اختراع کنی به تو آفرین می‌گویم. فکری که توانایی داشته باشد چنین روشی را خلق کند اگر بیشتر تلاش کند و به جای حواس پرتی و شیطنت در راه مثبت به‌کار گرفته شود حتماً می‌تواند روش‌های درست و بسیار جالب و کارآمد خلق کند مثل روشـــی که برای عدد ۲۰۳ خلق کردی. آفرین به تو و خوش به حالت که چنین اســـتعداد و فکـــری داری و مرا باهوش بالایت متعجب کردی. این تعریف و تحسین دوم در ادامه تعاریفی که در مسئله ۲۰۳ از او کرده بودم این بار دیگر کاملاً او را به وجد آورد و هدفش را عوض کرد. حالا دیگر او به خاطر گرفتن نمره ۱۳ و ورزش کردن حواسش را جمع نمی‌کرد بلکه فقط تلاش می‌کرد در هر درسی که من مرور می‌کنم روش جدیدی را اختراع کند تا توجه و تحسین مرا جلب کند و من هم از خدا خواسته به هر خلاقیتی که به خرج می‌داد توجه کرده و او را تشویق می‌کردم. از آن امتحان او نمره ۱۸ گرفت و ورزش کرد اما اشتیاق و علاقه‌اش به درس و کلاس، دیگر از بین نرفت و تا آخر سال به خلق روش‌های جالبش ادامه داد و بارها مرا با فکر خلاقش شگفت‌زده کرد. این شگفت‌زدگی برای من همواره با سؤالاتی همراه بوده است:

اولاً: چگونه و چرا چنین هوشی بالاتر از متوسط با چیزهای ساده‌ای همچون آفرین و احســـنت به وجد می‌آید و تحت تأثیر قرار می‌گیرد در حالی که انتظار می‌رود برای تحریک چنین هوش‌هایی روش‌های دشوارتری مورد نیاز باشد.

ثانیاً: چند تا از این هوش‌های بالا در میان دانش‌آموزان ما وجود دارند که ما از آن بی‌خبریم و حتی همان روش ساده تحسین و توجه را هم از آن‌ها مضایقه کرده و آن‌ها را برای استفاده از هوششان و ارائه خلاقیت تهییج و تحریک نمی‌کنیم؟

ثالثـــاً: آیا در میان دانش‌آموزان ما افراد خلاق و باهوشـــی وجود دارند که با روش تحسین و توجه تحریک نشده و احتیاج به روش‌های دیگری دارند که ما از آن غافلیم و آن هوش را با غفلت خود به هرز می‌دهیم؟

رابعاً: یک معلم که دوره آموزش معلمی را گذرانده چرا هیچ دوره آموزشی برای کشف چنین استعدادهایی را نمی‌گذراند تا بتواند از هدر رفتن این استعدادها جلوگیری کند؟

ای کاش روزی می‌رسید تا یکایک استعدادهای دانش‌آموزان ما آشکار می‌شد و این بهره‌های بالای هوشی ضایع نمی‌شدند. به امید چنین روزی.

مامان معلم!

قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

اشاره

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

رشد آموزش ریاضی

در یکی از سال‌ها، بعد از برگزاری آزمون هندسه ۱، مادر یکی از دانش‌آموزان از نمره پسر خود می‌پرسید و روی آن خیلی هم تأکید داشت. وقتی علت را پرسیدم، جواب جالبی داشت. می‌گفت «در اصل می‌خواهم نمرهٔ خودم را بدانم. چون من همهٔ کتاب و مسئله‌ها را خوانده‌ام و برای پسرم توضیح داده‌ام.» این مادر به‌راستی یک مامان معلم است. مامان معلم‌ها هم می‌توانند مفید باشند هم مضر. به‌عنوان نمونه یکی از همکاران خاطره‌ای از مامان معلمی از اقوام خود تعریف می‌کرد. مادر دو فرزند داشته یکی خردسال و دیگری دبستانی. بچهٔ بزرگ‌تر به مامان میگه «مامان تو مشق‌ها رو بنویس من از بچه نگه‌داری می‌کنم.» به‌راستی برای این دانش‌آموز مشق نوشتن تبدیل به یک کار خانوادگی شده است که نتیجه مامان معلمی از نوع مضر آن است.

این سال‌ها وقتی به هر خانه‌ای که دانش‌آموزی دبستانی دارند وارد می‌شوی با صحنه‌ای آشنا مواجه می‌شوی. «مادری که به فرزند خود درس می‌دهد.» این امر در درس ریاضی بیشتر انجام می‌شود و مزایا و معایب خود را نیز بیشتر نشان می‌دهد. در برخی موارد کار مامان معلمی به دوران راهنمایی و دبیرستان

هم کشـــیده می‌شود که مورد آن در بالا ذکر شد. به هر حال چه ما معلم‌ها بخواهیم و چه نخواهیم پدیدهٔ مامان معلمی وجــود دارد و باید فکری کرد که این آموزش‌ها بهتر و مفیدتر باشد و کمک کار معلم و مدرسه باشد نه اینکه برای معلم مانع ایجاد کند. این پدیده در دهه‌های قبل مثل دوران دانش‌آموزی بیشـــتر ما معلم‌ها خیلی کمتر دیده می‌شد. چون بیشتر خانواده‌ها از سواد چندانی برخوردار نبودند و همچنین خانواده‌ها تعداد بیشـــتری فرزند داشـــتند و کارها هم بیشتر دستی و توسط مادر انجام می‌شد و مادر وقتی برای این کارها نداشت.

اما در ســال جــاری (۹۱- ۹۲) نگارنــده تجربه‌ای به‌دســت آورد که بیان آن خالی از لطف نیست. انجمن اولیا و مربیان دبستان آزادگان سمنان با هم‌فکری مدیر مدرسه به این نتیجه رسیده بودند که به‌منظور کمک به دانش‌آموزان کلاس ششم، اقدام به برگزاری کارگاه‌هایی بــرای اولیا کنند. با توجه به این کــه در درس ریاضی دانش‌آموزان مشکلات بیشـــتری داشتند، ابتدا کارگاه ریاضی پیشنهاد شــد. به این جهت از بنده دعوت شد کــه کارگاهی برای اولیا برگــزار کنم و آن‌ها را با کتاب و روش‌های حل مســئله آشــنا ســازم. چون هنوز کار آزمایشـــی بود تصمیم بر این شد که کارگاه فقط برای اولیای یکی از کلاس‌های ششم باشد. تصور من این بود که کار بســیار مشکل است و نمی‌شود با پدر و مادرها ریاضی کار کرد و مســئله برای خودم خیلی روشـــن و امیدوارکننده نبود.

باتوجه به اینکه فرزند خودم در کلاس ششم درس می‌خواند من از جریان اطلاع داشتم و با کتاب ریاضی ششم آشــنا بودم. با این شرایط چند مسئله مرتبط با کتاب را که جالب هم باشند انتخاب کردم و به کلاس رفتــم. هدفی که برای خودم در نظــر گرفته بودم این بود که هر کســی دست‌کم خودش یک مسئله را حل کند تا به شکل عملی با موضوع درگیر شود. تعداد اولیا شرکت‌کننده بیســت نفر بود که فقط یک نفر از آن‌ها مرد بود و همه هم از افراد معمولی شهر بودند. کلاس را با این مسئله شروع کردیم.

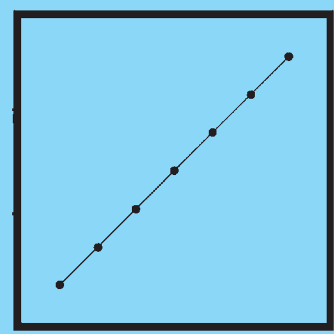
مسئله۱: یک اسکناس ۵۰۰ تومانی را به چند روش می‌توان با سکه‌های ۲۰۰، ۱۰۰ و ۵۰ تومان خرد کرد؟

بعضـــی از اولیا به هیچ‌وجه حاضر به حل مســئله نبودند و اصلاً نمی‌خواســتند فکــر کنند. یکی از آن‌ها می‌گفت که از ریاضی متنفر اســت و پسرش هم هیچ علاقه‌ای به ریاضی نــدارد. برخی هم به جواب نزدیک شده بودند که با راهنمایی من و تشکیل جدول نظام‌دار به جواب رســیدند. در بین آن‌ها چند نفر هم بودند که خیلی جالب پیگیر بودند و مسئله را حل می‌کردند. اما مادری هم بود از ظاهرش معلوم بود که سال‌هاست که اصلاً وقتی برای چنین کارهایی نداشـــته ولی خیلی با ذوق و شوق کار می‌کرد. با حل این مسئله که تقریباً ده دقیقه طول کشید از اولیا پرسیدم که شما توقع دارید که فرزندتان جواب مسئله را در چه مدتی بدهد؟ همه جواب دادند که خیلی سریع. با توجه به اینکه خودشان بعد از ده دقیقه مسئله را حل کرده بودند، اولین نتیجه را برای همراهی فرزندان در منزل به‌دســت آوردیم که «برای حل یک مســئله وقت کافــی در نظر بگیریم و توقع نداشته باشیم که فرزندمان خیلی سریع مثل بلبل جواب را بدهد.» همچنین در این مسئله روش تشکیل جدول نظام‌دار و اهمیت آن نیز بیان شده است و بیشتر اولیا به جدول زیر دست پیدا کرده بودند.

۵۰	۱۰۰	۲۰۰
۰	۱	۲
۲	۰	۲
۰	۳	۱
۲	۲	۱
۴	۱	۱
۶	۰	۱
۰	۵	۰
۲	۴	۰
۴	۳	۰
۶	۲	۰
۸	۱	۰
۱۰	۰	۰

در مدتـــی کــه مســئله دوم طــرح می‌شــد در صحبت‌های اولیا متوجه این موضوع شدم که فرزندان اولیایی که نسبت به ریاضی دید خوبی ندارند در درس مشکل بیشتری دارند و برعکس. بنابراین دومین نتیجه هم این بود. «اگر ریاضی را دوست ندارید، از این موضوع به فرزند خود چیزی نگویید»

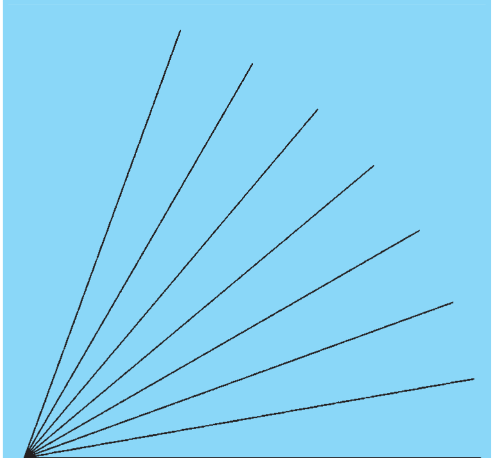
مسئله۲: در شکل ۱ چند پاره‌خط وجود دارد؟



شکل ۱

این مسئله از کتاب کلاس ششم است و چند نفر خیلی خوب و منطقی به آن جواب دادند و ما نتیجه دیگری نیز گرفتیم که «همه می‌توانند مسئله حل کنند فقط باید تلاش کنند.» و اینکه «کسی نمی‌تواند به فرزند خود کمک نکند.»

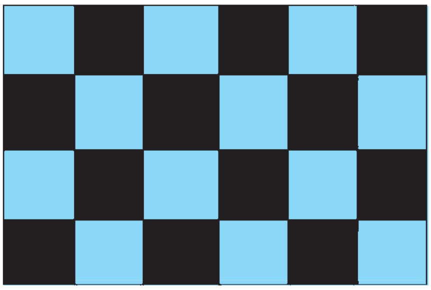
مسئله۳: در شکل ۲ چند زاویه تند وجود دارد؟



شکل ۲

این مسئله هم از کتاب ریاضی ششم دبستان است و جالب اینکه اولیا مسئله را خیلی راحت حل کردند و بیشتر آن‌ها به این موضوع که این مسئله همان مسئلهٔ قبلی است پی برده بودند. به عبارتی از راهبرد مسئله‌های مرتبط استفاده کرده بودند. به اینجا که رسیدیم فهمیدم که اشتباه می‌کردم و پدر مادرها هم با وجود همه مشکلات و درگیری‌های زندگی، مشکلی برای یادگیری و حل مسئله ندارند و کار امیدوارکننده است. به این دلیل مسئله‌ای سخت‌تر طرح کردم.

مسئله ۴: در شکل۳ چند مربع وجود دارد.



شکل ۳

نکته جالب توجه این بود که بعضی از اولیا خیلی سریع جواب را یکی دو واحد اشتباه به‌دست آورده بودند. سپس با کمی راهنمایی و تشکیل جدول نظام‌دار تعداد مستطیل‌ها را هم حساب کردند. در این مرحله بسیاری از افراد اعتماد به نفس بسیار خوبی برای حل مسئله پیدا کرده بودند. می‌توان گفت که هدف کلاس برآورده شد بود و کار امیدوارکننده بود.

در پایان جلسه مدیر از اولیا نظرخواهی کرده بود و ظاهراً اولیا راضی بودند و می‌خواستند که جلسات ادامه پیدا کند. یکی دو هفته بعد مدیر مدرسه تماس گرفتند و برنامهٔ جلسه بعد را هماهنگ کردیم. اما این دفعه از اولیا بیشتر کلاس‌ها دعوت کرده بودند. همچنین برنامه در یک سالن بزرگ‌تر برگزار می‌شد که دارای امکانات نمایش هم بود. ما توقع داشتیم که حداکثر ۵۰ نفر در برنامه شرکت کنند. ولی در حدود ۲۰۰ نفر شرکت کرده بودند که از این بین فقط ۱۱ نفر مرد بودند. چون بیشتر شرکت‌کنندگان جدید بودند، ما همان برنامه قبلی را اجرا کردیم. البته اداره این تعداد شرکت‌کننده خیلی سخت بود و اجازه نمی‌داد که به همهٔ افراد سرکشی کرد. ولی با این حال افراد زیادی بودند که در بحث شرکت کرده و مسئله‌ها را حل می‌کردند. پدرها خیلی سخت تن به کار می‌دادند. یکی از پدرها می‌گفت «اصلاً چرا باید مسئله را حل کنیم. وقتی شما بالاخره جواب را می‌گویید.»

در این جلسه تعدادی از اولیا معترض بودند. مثلاً یکی می‌گفت: «این مسئله‌ها اصلا مسئلهٔ ریاضی نیستند، این‌ها بازی و سرگرمی است». یا اینکه چرا کتاب‌ها تغییر می‌کند؟ چرا نظام ۶-۳-۳ اجرا می‌شود؟ و باز هم گله از پدرها که به بچه‌ها توجه نمی‌کنند و بی‌خیال هستند. یکی از مادرها می‌گفت که آقای ما به هیچ‌وجه در جلسات مدرسه شرکت نمی‌کند و من هم امروز یواشکی آمده‌ام، چون به من هم اجازهٔ شرکت نمی‌دهد. به هر حال هر دانش‌آموزی مشکلات خاص خودش را دارد.

حل مسئله در آموزش ریاضی: روندها و پیشرفت‌های اخیر

نویسنده: میخائیل ووسکوگلو[1]، دانشگاه پالرمو، ایتالیا
مترجم: زهرا صباغ زاده فیروزآبادی، کارشناسی ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی

اشاره
در حالی که مطالعات حل مسئله[2]، اساساً بر روی توضیح فرآیند حل مسئله متمرکز می‌شد، بیشتر مشاهدات اخیر بر شناخت خصوصیات حل‌کنندهٔ مسئله متمرکز شده است که به حل موفقیت‌آمیز مسئله کمک می‌کند.
هدف از مقالهٔ حاضر، بحث دربارهٔ جریان اخیر فرآیند حل مســئله در آموزش ریاضی است.

مقدمه
از زمانی کـه آموزش ریاضی به‌طـور غیرمنتظره به‌عنوان علمی مجزا مطرح شد تاکنون، «حل مسئله» به یکی از مؤلفه‌های آموزش ریاضی تبدیل شده است.
به‌نظر شونفیلد[3] (۱۹۸۳) یک مسئله زمانی مسئله اســت که شــما ندانید چگونه به حــل آن اقدام کنید. مســئله‌ای که شما را به شــگفتی نیندازد و به‌راحتی توسط رویه‌های معمولی یا مشابه حل شود (مهم نیست چقدر سخت باشد) یک تمرین است؛ مسئله نیست.
در مقالهٔ اخیر (ووســکوگلو،۲۰۰۷) نقش مســئله برای یادگیری ریاضی بررســی شــده است. در آنجا به بازبینی ســیر تکامل حل مســئله از زمانــی که پولیا[4] (۱۹۴۵-۱۹۶۳) اولیــن ایــده‌اش را درباره این موضوع مطرح کرد تا دهه ۱۹۹۰ پرداخته شده است.
تاریخچهٔ اجمالی این جریان به شرح زیر است:
دهـــهٔ ۱۹۷۰: آموزش ریاضی به‌طور غیرمنتظره‌ای به‌عنوان یک علم مجزا (روش‌های تحقیق اکثراً آماری بودند) و علم‌شــناختی (نظریه‌هــای یادگیری و غیره) مطرح شد.
دههٔ ۱۹۸۰: توضیح چارچوب فرایند حل مسئله و دلایلی برای موفقیت یا شکست در حل مسئله؛ به‌عنوان مثال ببینید: شونفیلد (۱۹۸۵،۱۹۸۰) ، لستر و گاروفالو و کرال[5] (۱۹۸۹) و غیره.
دهه۱۹۹۰: ارائهٔ مدل‌هایــی از تدریس کاربرد حل مسئله، به‌عنوان مثال تدریس به شیوهٔ ساختارگرایی[6]؛ ببینید: جاورسکی[7] ۲۰۰۶ و ووسکوگلو ۲۰۰۷، شونفیلد ۲۰۰۲ و غیره)
هــدف ما در این مقاله بحــث در مورد جریان اخیر فرآیند حل مسئله در آموزش ریاضی است.

کلیدواژه‌ها: حل مســئله، آموزش ریاضی، منابع، کنترل، استراتژی، رهیافت.

تمایلات اخیر در حل مسئله: تمرکز بر حل‌کنندهٔ مسئله

در حالــی که در آغاز کار حل مســئله، اساســاً بر روی توضیح فرآیند حل مســئله تمرکز می‌شد، بیشتر مشاهدات اخیر بر شناخت خصوصیات حل‌کنندهٔ مسئله متمرکز شده است؛ خصوصیاتی که به حل موفقیت‌آمیز مسئله کمک می‌کند.
شونفیلد (۱۹۸۵) در کتابش با عنوان «حل مسئله ریاضــی[8]» بــه چارچوبی برای تحلیــل اینکه چگونه و چرا افراد هنگامی که به حل مســئله می‌پردازند موفق می‌شوند (یا نمی‌شوند) اشــاره کرده است. او استدلال می‌کند که چهار عامل برای فهم کیفیت و موفقیت در تلاش‌های حل مسئله لازم و کافی است:

۱. پایه دانش؛
۲. استراتژی‌های حل مسئله (راهیاب‌ها)[۹]؛
۳. کنترل: مراقبت[۱۰]، خودنظم‌دهی[۱۱] یا فراشناخت[۱۲]؛
۴. باورها و اعمالی که از آن باورها ناشی می‌شود.

اکثر مطالعات اخیر نشان می‌دهد که برنامه‌ریزی و مراقبت یک وجه تمایز کلیدی در موفقیت حل مسئله می‌باشد و تأثیر دیگر ابعاد مؤثر مانند باورها، نگرش‌ها و هیجانات آشکار گردیده است (شونفیلد، ۱۹۹۲، دفرانکو[۱۳]، ۱۹۹۶، کارلسون[۱۴]، ۱۹۹۹ و دیگر).

لستر (۱۹۹۴) نتیجهٔ موافقی را ذکر کرد که عملکرد حل مسئله به‌عنوان تابعی از چندین عامل مستقل مانند دانش، کنترل، باورها و زمینه‌های اجتماعی-فرهنگی آشکار می‌گردد. او مشخص می‌کند که مسئله‌حل‌کن‌های «خوب» ریاضی مالک دانش زیادی هستند که بین دانش و نقشه‌های گران‌بهایشان به خوبی رابطه برقرار می‌کنند. آن‌ها به‌طور منظم مراقبت می‌کنند و تلاش‌های حل مسئله‌شان را نظم می‌بخشند و به فکر تولید حل‌های زیبا می‌باشند.

امروزه همه توافق دارند که حل مسئله به سختی تابعی از متغیرهای گوناگون یک تکلیف نیست، بلکه به‌عنوان مشخصاتی از حل‌کننده مسئله است. جیگر و گالبریت[۱۵] (۱۹۹۸) ادعا کرده‌اند که بین یادگیرنده و یک مسئله رابطه‌ای برقرار است که حائز اهمیت می‌باشد. مسئله یک رشته از انتزاعات نیست. مسئله حل‌کن‌های خوب ریاضی در طول حل مسئله از خود انعطاف نشان می‌دهند و به سمت استفاده از فرآیندهای محتوا محور قوی به جای استفادهٔ صرف از راهیاب‌های عمومی حرکت می‌کنند. آن‌ها هم‌چنین در سطح بالایی از خودآگاهی نقاط قوت و ضعفشان را ظاهر و بر ساختار و روابط تأکید شده در مسئله تمرکز می‌کنند (استیلمن[۱۶] و گالبریت، ۱۹۹۸).

کارلسون و بلوم[۱۷] (۲۰۰۵) با استفاده از آثار زیاد مرتبط با حل مسئله، طبقه‌بندی وسیعی از ویژگی‌های عمده حل مسئله را که به موفقیت در حل مسئله مربوط می‌شود، ترسیم کرده‌اند. ابعاد این طبقه‌بندی عبارت‌اند از:

منابع: درک ذهنی، دانش، حقایق و رویه‌های استفاده شده در طول حل مسئله؛

کنترل: شامل حل و اجرای منابع و استراتژی‌هایی است که به‌خوبی تعیین می‌کند کدام یک از حقایق، تکنیک‌ها و استراتژی‌های به کار برده شده، کارایی بهتری دارند؛ به‌عنوان مثال برنامه‌ریزی، مراقبت، تصمیم‌گیری و فعالیت‌های فراشناختی آگاهانه و غیره؛

روش‌ها: استراتژی‌های عمومی که هنگام کار با مسئله استفاده می‌شود مانند ساختن حکم و ایده‌های جدید، اجرای محاسبات و دسترسی به منابع؛

راهیاب‌ها: اکثر رویه‌ها و شیوه‌های خاصی که به هنگام کار با مسئله به کار گرفته می‌شود مانند رعایت تناسب[۱۸]، استفاده از نمودار یا جدول، جست‌وجو در مثال‌های معکوس[۱۹]، تغییر مسئله داده شده با یک مسئله ساده‌تر و غیره؛

اثرگذاری: شامل نگرش‌ها (رضایت، ایجاد انگیزه، علاقه)، باورها (اعتماد به نفس، غرور، پافشاری و غیره)، احساسات (لذت، ناامیدی، بی‌حوصلگی و غیره) و ارزش‌ها/ اخلاق (کمال و خصوصیت ریاضیات).

کارلسون و بلوم برای جمع‌آوری داده‌ها، رفتارهای ۱۲ مسئله حل‌کن مجرب از بین ریاضیدان‌ها را، هنگامی که آن‌ها بر روی ۴ مسئله ریاضی کار می‌کردند، مورد مشاهده قرار دادند. تحلیل اولیه داده‌ها نشان داد که طبقه‌بندی آن‌ها به مشخص کردن تعدادی از رفتارهای بحرانی، که توسط ریاضیدانان در طول مطالعه‌شان نمایش می‌دادند، محدود شده است. سپس آن‌ها دوباره داده‌ها را با به کارگیری شیوهٔ اساسی تکنیک‌های کدباز[۲۰] تحلیل کردند (استراس و کربین[۲۱]، ۱۹۹۰).

نتایج چارچوب چند بعدی حل مسئله[۲۲] (MPS) چهار مرحله دارد: **جهت‌یابی، برنامه‌ریزی، عملی کردن** و **بازبینی**(این‌ها مراحل اصلی هستند که ریاضیدان‌ها در هنگام حل مسئله در جهت آن حرکت می‌کردند). مشاهده شده است که ریاضیدان‌ها ابتدا با فضای مسئله آشنا می‌شوند و سپس چرخهٔ برنامه‌ریزی، عملی کردن و بازبینی را در حین حل مسئله تکرار می‌کنند. بنابراین چارچوب به دو چرخه (چرخه برگشت و چرخه رفت) خلاصه می‌شود، که هر کدام از آن‌ها شامل سه مرحله برنامه‌ریزی، عملی کردن و بازبینی از ۴ مرحله است. هم‌چنین مشاهده شده است که با در نظر گرفتن شیوه‌های مختلف حل در طول مرحلهٔ برنامه‌ریزی از فرآیند حل مسئله، ریاضیدان‌ها در زمان‌هایی به زیرچرخهٔ حدس[۲۳]- تصویرسازی- ارزیابی(پذیرفتن/ ردکردن) می‌پرداختند. این زیرچرخه برای کارلسون و بلوم، با مشاهدهٔ ریاضیدان‌ها و گوش دادن به توضیحات شفاهی‌شان که چگونه آن‌ها یک حل را تصویرسازی و در ذهنشان اجرا می‌کردند، بدیهی شد. بنابراین، جدا از دو چرخه اصلی، زیرچرخهٔ بالا که به مرحله برنامه‌ریزی مرتبط می‌باشد، در چارچوب گنجانده شد.

کارایی ریاضیدان‌ها در تصمیم‌گیری‌های برتر که منجر به مسیرهای سازنده می‌شود به توانایی‌های آن‌ها در ارتباط دادن خوب دانش، راهیاب‌ها و حقایق به‌یکدیگر برمی‌گردد که این ذخیرهٔ بزرگی برایشان است، همان‌طور که آن‌ها به خوبی توانایی مدیریت واکنش‌های هیجانی‌شان را دارند. دانشِ مفهومیِ به هم متصلِ خوبِ ریاضیدان‌ها به‌طور ویژه به‌عنوان یک صفت اساسی در تصمیم‌گیری مؤثر و اجرای کلی فرآیند حل مسئله ظاهر می‌شود.

نظریهٔ رفتارِ هدف-محور[۲۴] برای حل مسئله

همان‌طور که در بخش قبل دیدیم، شونفیلد (۱۹۸۵a) چارچوبی را برای تحلیل فرآیند حل مسئله پیشنهاد کرد. اما این فقط یک چارچوب است، نه یک نظریه که به‌طور قاطع بیان کند چگونه و چرا چیزها با هم مناسب‌اند و به عبارت دیگر چرا افراد در طول فرآیند حل مسئله انتخاب‌های متفاوتی دارند. در ۲۰ سال بعد شونفیلد به ساخت یک شیوه نظری کار کرده است که تمام موارد بالا را توضیح داده و نتایجی به‌دست آورده است که بیان می‌کند حل یک مسئله به‌خوبی انجام فعالیت‌های بشری دیگر است؛ مانند پختن، تدریس یک درس و حتی تشریح مغز(!) که همگی نمونه‌هایی از رفتار هدف-محور هستند (شونفیلد، ۲۰۰۷).

مطابق مشاهدات شونفیلد، حوزهٔ ایده‌ال برای توسعهٔ چنین شیوهٔ نظری فرآیند تدریس یک درس می‌باشد که فعالیت حل مسئلهٔ هدف محورِ پویاست: معلم با دانش و اهداف آشکار وارد کلاس می‌شود. بعضی اوقات اداره یک درس آسان است، شخص آنچه را که برنامه‌ریزی شده است می‌پذیرد، اما بعضی اوقات این کار آسان نیست و معلم باید همان‌جا مطلب طراحی شده را با موقعیت متناسب سازد. در واقع، اکثر مردم در چنین مواقعی این‌طور عمل می‌کنند. آن‌ها اغلب دانش‌محور و معمولی هستند، اما گاهی اوقات همان‌جا به‌دنبال تصمیم‌های فوری می‌گردند. به گفتهٔ شونفیلد این رفتار هدف محور «اقدام در لحظه» توسط یک نظریه‌پرداز می‌تواند بدین صورت توضیح داده و مدل‌سازی شود: دانش، اهداف، جهت‌یابی و تشخیص موقعیت و تصمیم‌گیری، به بیان واضح‌تر:

دانش: مسلماً دانش اساس تمام رفتارهای شایسته است. اگرچه مهم‌ترین شکل دانش، سازمان‌دهی و دسترسی به آن است. بیشترین رفتار معمولی براساس دارایی شخصی «بسته‌های دانش» است که به‌عنوان نقشهٔ مفهومی (یا اسناد، چارچوب) شناخته می‌شود. برای مثال، اگر شما تشخیص دهید که یک مسئله ریاضی، مسئله ماکزیمم- می‌نیمم است بلافاصله می‌دانید که باید مشتق تابع را به دست آورید و آن را مساوی صفر قرار دهید و غیره.

اهداف: بسیاری از رفتارهای بشری را می‌توان به‌عنوان هدف محور در نظر گرفت، به عبارت دیگر، ما اقدام می‌کنیم زیرا می‌خواهیم به سمت بعضی از چیزها پیشرفت کنیم. اگر ما بر روی حل یک مسئله کار کنیم هدف صوری پیشروی به سمت پاسخ مسئله می‌باشد. اغلب طرحی را بنا می‌کنیم که زیرهدف‌هایی دارد. ما به سمت زیرهدف‌ها، حال یا پیشرفت به سمت آن‌ها (حرکت به سمت زیر هدف بعدی) یا یافتن جایگزینی دیگر کار می‌کنیم. بنابراین پیشرفت در یک مسئله می‌تواند به‌عنوان پایه‌ریزی و پیشروی به سوی تحقق یک سری از اهداف باشد.

جهت‌یابی و تشخیص موقعیت: تعمیم باورها شامل ارزش‌ها (به‌عنوان مثال مسئله از نوع ریاضیات محض یا کاربردی؟)، امیال و غیره. باورها رفتار را شکل می‌دهند، برای مثال شخصی که عقیده دارد مسائل کلامی[۲۵] ریاضی صرفاً داستان‌هایی در پوشش تمرین‌های محاسباتی هستند در جواب تعداد اتوبوس‌های خواسته شده در یک مسئله به جای ۳۲ خواهد نوشت: باقی‌مانده ۳۱ بر ۱۲.

تصمیم‌گیری: تصمیم‌گیری بسیاری از افراد به‌عنوان توانایی مدل‌سازیِ محاسباتِ مقادیرِ قابلِ پیش‌بینی تعبیر می‌شود که در آن کمیت‌ها ارزش‌های ذهنی[۲۶] هستند که توسط اشخاص تعیین می‌شوند. به‌عنوان مثال همه می‌دانیم که تصمیم خرید یک بلیط بخت آزمایی در اصطلاحات ریاضی تصمیم بدی است، زیرا ارزش پیش‌بینی شده (که مساوی احتمال بردن ارزش واقعی X به قیمت بلیط جایزه) منفی است. اما از نظر یک شخص عادی قیمت بلیط کم و ارزش جایزه (برای یک زندگی ساده) زیاد می‌باشد. بنابراین ارزش پیش‌بینی شده که در این مورد مساوی با احتمال بردن ارزش ذهنی X به قیمت ذهنی بلیط جایزه می‌باشد، مثبت است. این مثال توجیه می‌کند که چرا افراد مختلف تصمیم‌های متفاوتی خواهند گرفت، زیرا ارزش‌های ذهنی آن‌ها متفاوت می‌باشد.

بار دیگر شما متوجه جهت‌یابی‌های شخصی شدید. شونفیلد استدلال می‌کند که شما می‌توانید ببینید چگونه اهداف و نتایج شخصی در اولویت قرار می‌گیرند،

تصمیم‌گیری بسیاری از افراد به‌عنوان توانایی مدل‌سازیِ محاسباتِ مقادیرِ قابلِ پیش‌بینی تعبیر می‌شود که در آن کمیت‌ها ارزش‌های ذهنی هستند که توسط اشخاص تعیین می‌شوند

سپس می‌توانید روال ممکن آن را مدل‌سازی کنید. بنابراین اهمیت این شیوه نظری برای حل مسئله این است، فهم این که «چگونه چیزها کار می‌کنند» می‌تواند به پیشرفت تمرین کمک کند. در حقیقت، هنگامی که شما بفهمید مهارت انجام بعضی از کارها چگونه می‌باشد، شما می‌توانید به دیگران کمک کنید تا آن را با موفقیت انجام دهند.

بحث و نتایج

همان‌طور که دیدیم طبقه‌بندی وسیعی توسط کارلسون و بلوم برای حل مسئله توسعه داده شده است که برای مشخص کردن جزئیات رفتارهای یک مسئله حل‌کن (ریاضیدان) در مطالعه‌شان کافی نبود. برای این منظور، براساس واکنش‌های ۱۲ ریاضیدان در طول فرآیند حل چهار مسئلهٔ داده شده، آن‌ها چارچوب حل مسئله چند بعدی (MPS) را ایجاد کردند که چرخه‌ای طبیعی از فرآیند حل مسئله را نشان می‌دهد.

این چارچوب مسلماً برای مسئله حل‌کن‌های مبتدی به همین ترتیب اتفاق نخواهد افتاد. در حقیقت، هر چند مطالعات زیادی خصوصیات مسئله حل‌کن‌های مبتدی و ماهر را مشاهده و مقایسه کرده است (مانند لش و آکرسترم[۲۷]، ۱۹۸۲ و شونفیلد ۱۹۸۵، ۱۹۸۹ و گیگر و گالبریت، ۱۹۹۸، استیلمن و گالبریت، ۱۹۹۸ و غیره) هنوز جنبه‌های زیادی از فرآیند حل مسئله آشکار نشده است. برای مثال، در حالی که آثار ادبی مؤید این مطلب است که کنترل و فراشناخت برای موفقیت در حل مسئله مهم هستند، اطلاعات زیادی نیاز است تا بفهمیم که چگونه این رفتارها در طول حل مسئله ظاهر می‌شوند و چگونه آن‌ها بر روی دیگر ویژگی‌های حل مسئله (منابع، راهیاب‌ها، اثر و غیره) که در فرآیند حل مسئله تأثیر داشته و گزارش شده‌اند اثر می‌گذارد.

موضوع جالب دیگر تلاش برای مقایسهٔ کارشناسانه اهمیت مدل شونفیلد (۱۹۸۰) با چارچوب MPS می‌باشد. در واقع شباهت‌های زیادی بین پنج مرحله شونفیلد و چهار مرحلهٔ چارچوب MPS وجود دارد. مرحله تحلیل مسئله با مرحلهٔ جهت‌یابی و تشخیص موقعیت، مرحلهٔ توضیح و طراحی با مرحلهٔ برنامه‌ریزی، مرحله اجرا با مرحله عملی کردن و سرانجام مرحلهٔ بازبینی با مرحلهٔ ارزشیابی متناظر می‌شود. به عقیده من به راستی مدل شونفیلد نسبت به آن چه که داده شده مزیت‌های زیادی دارد. برای هر مرحله، فهرستی از راهیاب‌های ممکن وجود دارد که می‌تواند در جهت موفقیت استفاده شود و بنابراین به نظر می‌رسد از لحاظ عملی مفیدتر باشد.

ما باید بعضی از نظرات را برای نظریه رفتار هدف‌محور در حل مسئله بپذیریم. بدون شک قبول داریم که از طریق این نظریه شخص به فهم بهتری از این که «چگونه چیزها کار می‌کنند» برای حل مسئله می‌رسد. به هر حال، معلم در جهت استفاده از این نظریه به پیشرفت تمرین، در ابتدا جهت‌یابی دانش‌آموزانش را می‌فهمد و سپس سعی می‌کند چیزی را که مانع کارایی حل مسئله شده است، با پرداختن مناسب به هر مورد از فعالیتش، تغییر دهد. برای مثال، اگر یک دانش‌آموز عقیده دارد که مهم‌ترین چیز برای حل مسئله فرمول‌های حفظی یا تکنیک‌ها هستند، او در مسئلهٔ داده شده سعی خواهد کرد تا آن را بیشتر به‌وسیله تکنیک‌های اخیری که یاد گرفته است حل کند. بنابراین در این مورد معلم باید مسائلی به او بدهد که نیاز به بعضی حرکت‌های اضافی در جهت حل آن باشد. با این وجود عقیدهٔ قوی من این است که فهم جهت‌یابی‌های دانش‌آموزان وظیفه مشکلی است که جدا از تمرین‌های زیاد معلمان، وقت زیادی می‌گیرد، که این امر اغلب در عمل اتفاق نمی‌افتد (زیرا معلم ۳۰ یا بیشتر دانش‌آموز دارد). به هر حال، تا زمانی که جهت‌یابی‌های دانش‌آموزان معمولاً متفاوت است، فعالیت‌های مناسبی برای هر مورد پرداخته شده و این تکلیف معلم را خیلی سخت می‌کند.

به‌طور قطع، هر چند نظریه رفتار هدف محور برای حل مسئله ابزار مفیدی برای محققان آموزش ریاضی است اما به نظر می‌رسد برای کاربردهای عملی دبیران ریاضی بسیار سخت باشد.

شونفیلد (۲۰۰۷) می‌پذیرد که هر چند نظریه‌اش می‌تواند به پیشرفت عمل کمک کند، ولی تضمین نمی‌کند که منجر به هر بهبودی خواهد شد. به‌علاوه او عقیده دارد که، هر چند ۴۰ سال یا بیشتر از زمانی که هر دو علوم شناخت و آموزش ریاضی با هم آمیخته شده‌اند، یک منظره تماشایی از پیشرفت ساخته شده است، اما به کار بیشتری نیاز است و او دربارهٔ طرح «صد ساله» صحبت می‌کند. ذهن پیچیده‌تر از جسم است، بنابراین در مقایسه با تحول در امر طبابت باید بپذیریم که پیشرفت در آموزش ریاضی با گذشت زمان زیاد، تحقق خواهد یافت.

پی‌نوشت‌ها

1. Michael Voskoglou

2. Problem solving
3. Schoenfeld
4. Polya
5. Lester, Galofalo & Kroll
6. Cunstructivist
7. Jaworski
8. Mathematical Problem Solving
9. Heuristics
10. Monitoring
11. Self-regulation
12. Metacognition
13. DeFranco
14. Carlson
15. Geiger & Galbraith
16. Stillman
17. Bloom
18. Observing symmetries
19. Counter examples
20. Open coding
21. Strauss & Corbin
22. Multidimensional problem solving framework
23. Conjecture
24. Goal - directed
25. Word problems
26. Subjective values
27. Lesh & Akerstorm

منابع

1. Carlson M. P. , 1999, The mathematical behavior of six successful mathematics graduate students: Influences leading to mathematical success, Educational studies in Mathematics, 40, 237-258.

2. Carlson M. P. & Bloom I., 2005, Thy cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework, Educational studies in Mathematics, 58,45-75.

3. De Bellis V. A. & Goldin G. A., 1997, The affective domain in mathematical problem – solving, in E. Pehkomen (ed.), Proceed. Of the 21st Conf. of the international group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, 209- 216.

4. DeFranco T. C., 1996, A perspective on mathematical problem-solving expertise based on the performances of male Ph.D. mathematicians, Research in Collegiate Mathematics, II Vol. 6, 195-213, American Mathematical Association, Providence, RL

5. Geiger V. & Galbraith P. , 1998, Developing a diagnostic framework for evaluating student approaches to applied mathematics problems, Int. J. Math.Educ. Sci. Techn., 29,533- 559.

6. Jaworski B. , 2006, Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching, J. of Mathematics Teacher Education, 9, 187- 211

7. Lesh R. & Akerstrom M. , 1982, Applied problem solving: Priorities for mathematics education research, in F. K. Lester & J. Garofalo (eds), Mathematical Problem Solving: Issues in Research, 117-129, Franklin Institute Press, Filadelphia.

8. Lester F. K., Garofalo J. & Kroll D. L., 1989, Self-confidence,interest, beliefs and metacognition: Key influences on problem-solving behavior, in D. B. Mcleod & V. M. Adams (eds), Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective, 75-88, Springer-Verlag, New York.

9. Lester F. K., 1994, Musings about mathematical problem solving research: 1970- 1994,,J. for Research in Mathematics Education, 25, 660-675.

10. Schoenfeld A. ,1980, Teaching Problem Solving skills, Amer. Math. Monthly, 87, 794-805.

11. Schoenfeld A. ,1983, The wild, wild, wild, wild, wild world of problem solving: A review of sorts, For the Learning of Mathematics, 3, 40-47.

12. Schoenfeld A., 1985a, Mathematical problem solving, Orlando, FL: Academic Presss

13. Schoenfeld A. , 1985b, Problem solving in context (s), in E. A. Silver (Ed.), The teaching and Assessing of Mathematical Problem-Solving, Vol. 3, Reston, VA.

14. Schoenfeld A. , 1989, Explorations of students' mathematical beliefs and behavior, J. for Research in Mathematics Education, 20, 338-355.

15. Schoenfeld A., 1992, Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sensemaking in mathematics, in D. A. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning, 334-370, Macmillan Publishing Company, New York.

16. Schoenfeld A., 2002, A highly interactive discourse structure, in J. Brophy (Ed.), Social Constructivist Teaching: Its Affordances and Constraints (Vol. 9 of the series Advances in Research on Teaching), 131-170, New York : Elsevier

17. Schoenfeld A., 2007, Problem solving, teaching, and more: Toward a theory of goal-directed behavior, Proceed. CIEAEM 59, 48-52, Dobogok Hungary, 2007.

18. Stillman G. A. & Galbraith P. , 1998, Applying mathematics with real world connections: Metacognitive characteristics of secondary students, Educ. Studies in Mathematics, 96, 157-189.

19. Strauss, A. L. & Corbin J. M. , 1990, Basics of Qualitative Research : Grounded Theory, Procedures and Techniques, Stage Publications, Newbury Park.

20. Voskoglou M., 2007a, Formalism and Intuition in Mathematics: The role of the problem, Quaderni di Ricerca in Didactica, 7, 113-120.

21. Voskoglou M., 2007b, The role of the teacher for the learning of mathematics, Proceed. CIEAEM 59, 278-283, Dobogoko-Hungary.

ریاضیات زنده

کاربردهایی ملموس و زیبا از اشکال هندسی در زندگی واقعی

حسن ملکی، دانشجوی دکترای هندسه، گرایش سیستم‌های دینامیکی، خانهٔ ریاضیات کرمان
حسین ملکی، کارشناس ارشد جبر، خانهٔ ریاضیات کرمان

چکیده

تعاریف، ویژگی‌ها و فرمول‌های ریاضی مربوط به محیط و مساحت اشکال هندسی معروف از قبیل مثلث، مربع و دایره را اغلب دانش‌آموزان می‌دانند اما کمتر با کاربردهای شگفت‌انگیز و مهم این اشکال در دنیای واقعی، طبیعت و علوم دیگر آشنایی دارند. در صورت تحقق، این آشنایی می‌تواند سرآغاز یک تحرک فکری و فعالیت علمی در دانش‌آموزان باشد تا دانش ریاضی خود را عمق بخشند، آن را به‌گونه‌ای کاربردی فرا بگیرند، در حل مسائل جهان پیرامونشان از آن استفاده کنند و در پایان، از یادگیری ریاضی لذت ببرند. در این مقاله با آوردن مثال‌های مناسب و زیبا از منابع مختلف هندسه، در جست‌وجوی نشان دادن ارتباطی ملموس بین هندسه و مسائل دنیای واقعی هستیم تا از این طریق درک و یادگیری هندسه برای دانش‌آموزان لذت‌بخش و بامعنا شود. این مقاله ثمره یک کارگروه دو روزه در سومین جشنوارهٔ خانه ریاضیات کرمان است که برای چهار گروه از دانش‌آموزان اول و دوم دبیرستان در دههٔ ریاضیات ارائه شد. هدف کارگاه، معرفی اشکال هندسی به‌گونه‌ای کاربردی و ملموس، یافتن کاربردهای آن‌ها در طبیعت و زندگی واقعی و بالا بردن مهارت دانش‌آموزان در به‌کارگیری هندسه برای حل مسائل دنیای پیرامونشان بود. روش انجام کارگاه، به‌صورت گروهی و مشارکت فعال بود. تلاش شد مفاهیم مجرد با مثال‌های کاربردی از دنیای واقعی معرفی شوند. نظرسنجی انجام شده از شرکت کنندگان، تأثیر مثبت و عمیق استفاده از مسائل دنیای واقعی برای تدریس آموزش مفاهیم هندسی اولیه را نشان می‌دهد.

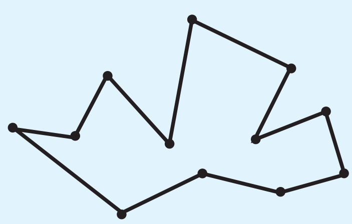
کلیدواژه‌ها: کاربرد ریاضیات، مثلث، دایره، شش‌ضلعی منتظم، مثلث رولو

مقدمه

در بیانیهٔ «در باب برنامهٔ درسی ریاضیات دبیرستان» که یکی از سندهای معتبر تاریخی در آموزش ریاضی است و به امضای ۷۵ نفر از ریاضی‌دانان جهان رسیده است [۱]، در باب برنامهٔ درسی دورهٔ دبیرستان چنین آمده است: «معرفی مفاهیم جدید بدون داشتن زمینهٔ قبلی کافی در خصوص حقیقت‌های ملموس، معرفی مفاهیم مجرد در زمانی که هنوز تجربه‌ای از تجرید وجود ندارد یا عجله در معرفی کردن مفاهیم بدون کاربردهای ملموسی که بتوانند دانش‌آموزان را به تحرک فکری و فعالیت وادارند بدتر از بی‌حاصلی آن است. در واقع، صورت‌گرایی زودرس ممکن است به عقیم کردن یادگیری ریاضی منجر شود. معرفی زودرس انتزاع، به‌ویژه با مقاومت ذهن‌های نقاد و کنجکاو روبه‌رو می‌شود؛ ذهن‌هایی که قبل از پذیرش انتزاع، خیلی دوست دارند بدانند که این تجرید بر چه اساسی استوار است و چگونه می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد... . ریاضی ابزار اساسی و زبان علوم است. جدا کردن ریاضیات از علوم دیگر، موجب فقدان و گم شدن مهم‌ترین انگیزه‌ها، زیبایی‌ها و محرک‌های ریاضیات می‌شود.» این قسمت از بیانیهٔ مذکور، اهمیت موضوع و آسیب‌های مرتبط را به روشنی بیان کرده و کسانی که با آموزش ریاضی در دبیرستان سر و کار دارند، نمی‌توانند این موضوع را کم‌اهمیت بپندارند. **عقیم شدن یادگیری ریاضی** در دانش‌آموزانی که در آینده احتیاج حیاتی به تفکر ریاضی و استفاده از آن در حل مسائل زندگی روزمره دارند به تنهایی می‌تواند محرک ما برای اندیشیدن در زمینهٔ آموزش مفاهیم ریاضی باشد. ما در این مقاله، تلاش داریم اشکال هندسی را با این نگاه معرفی کنیم. برای این منظور، از بین اشکال هندسی معروف، **مثلث، دایره، شش‌ضلعی منتظم** و همچنین شکل هندسی دیگری به‌نام **مثلث رولو**[1] را برای بحث و مطالعه انتخاب کرده‌ایم. در هر مورد با طرح چند سؤال از دنیای واقعی بحث را آغاز می‌کنیم و سپس با استفاده از خواص و ویژگی شکل مورد نظر را بررسی و سپس به سؤالات می‌پردازیم. اطلاعات مورد نیاز در سراسر مقاله، تعاریف اولیه اشکال هندسی و رابطه‌های محیط و مساحت آن‌هاست. این مقاله ثمرهٔ یک کارگاه دو روزه در سومین جشنوارهٔ خانهٔ ریاضیات کرمان است که برای چهار گروه از دانش‌آموزان اول و دوم دبیرستان در دههٔ ریاضیات ارائه شد. همان‌گونه که انتظار می‌رفت بازخورد دانش‌آموزان در پایان کارگاه مثبت بود. آن‌ها بیان می‌کردند که اگر کلاس‌های ریاضی هم به این شکل ارتباط مستقیمی با محیط پیرامونشان داشته باشند آن‌ها بسیار راحت‌تر و بهتر ریاضی را درک می‌کنند و یاد می‌گیرند. آن‌ها بیان می‌کردند که انتظار نداشته‌اند ریاضی بدین سان جذاب و کاربردی باشد. آن‌ها از مثال‌های واقعی از کار طبیعت، که با ریاضی می‌توان آن‌ها را بهتر فهمید، به وجد آمده بودند. براساس این کارگاه، یک مقاله در قالب پوستر تحت عنوان «محتوای درسی و نگرش دانش‌آموزان» در کنفرانس ریاضی سمنان ارائه شده است.

مثلث

در نظر بگیرید که شما می‌خواهید مساحت زمینی به شکل (۱) را محاسبه کنید و تنها وسیلهٔ اندازه‌گیری موجود، متری است که با آن می‌توانید اندازهٔ اضلاع آن زمین و همچنین فاصله بین رئوس چندضلعی را اندازه بگیرید. شما برای حل این مسئله چه راه حلی پیشنهاد می‌کنید؟



شکل ۱. زمین موردنظر

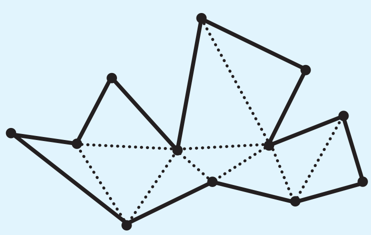
همهٔ ما با مثلث و ویژگی‌های آن کم و بیش آشنایی داریم و می‌دانیم که با معلوم بودن یک ارتفاع h و قاعدهٔ نظیرش a، مساحت مثلث از رابطهٔ $S = \frac{1}{2} ha$ به‌دست می‌آید. اما آن حالتی را در نظر بگیرید که اندازهٔ هیچ کدام از ارتفاع‌های مثلث در دست نباشد و فقط اندازهٔ اضلاع مثلث را داشته باشیم. در مسائل کاربردی مهندسی و معماری واقعی این اتفاق بسیار می‌افتد و استفاده از فرمول بالا با مشکلاتی همراه است. در عمل و در مقیاس بزرگ، در مثلث‌هایی که فقط طول اضلاع را داریم، یافتن پای عمود روی

قاعده، برای محاسبهٔ اندازهٔ ارتفاع بسیار دشوار و زمان‌بر است. بنابراین سؤال را دوباره بیان می‌کنیم: مساحت مثلث با معلوم بودن طول اضلاع آن چگونه محاسبه می‌شود؟

جالب است بدانید که یونانیان حدود ۲۰۰۰ سال پیش با این سؤال مواجه شدند. آن‌ها توانسته بودند این سؤال را به دقیق‌ترین شکل ممکن و با کمترین امکانات حل کنند. راه حل آن‌ها کاربرد عملی و محاسباتی داشته و دارد. آن‌ها مسئله را با استفاده از فرمول معروف **هرون**[۲] حل می‌کردند. فرمولی زیبا که برای استفاده از آن نیازی به زوایای داخلی مثلث و یا رسم ارتفاع نیست، فقط داشتن طول اضلاع برای محاسبهٔ مساحت کافی است: اگر P نصف محیط مثلث باشد، مساحت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}\,,\; P=\frac{a+b+c}{۲}$$

این مقدمه چه ارتباطی به سؤال ابتدایی این قسمت دارد؟ **هر چندضلعی را می‌توان با رسم خطوط راست بین رئوس آن، به مثلث‌های مجزا افراز کرد. این کار را مثلث‌بندی چندضلعی می‌گویند.** مثلاً در مثال بالا، زمین پس از مثلث‌بندی به شکل (۲) درمی‌آید و ما می‌توانیم با به‌دست آوردن طول اضلاع هر کدام از مثلث‌ها، مساحت هر مثلث و در نهایت مساحت کل شکل را به‌دست آوریم.

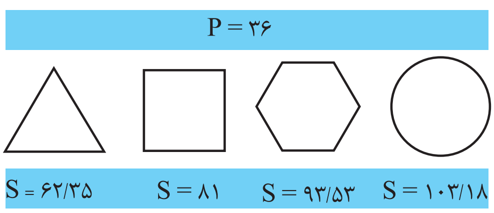


شکل ۲. زمین مثلث‌بندی شده

در این قسمت، سؤال‌های بیشتری نیز می‌توان مطرح کرد. برای مثال اثبات فرمول هرون بر اساس مقدمات اولیه و استفاده از هندسهٔ اقلیدسی چگونه است؟ برای مثلث چه خاصیت‌های دیگری می‌توان یافت که در زندگی روزمره به درد بخورد؟ مثلث در هنر و معماری چه معانی و خواصی دارد؟

دایره

بحث را با چند سؤال آغاز می‌کنیم: **چرا لوله‌های انتقال آب، نفت و گاز مقطع دایره‌ای شکل دارند؟ این انتخاب چه دلیل ریاضی می‌تواند داشته باشد؟ فرض کنید طنابی به طول ۳۶ متر در اختیار داشته باشید و همچنین اجازه داشته باشید که با آن مقداری از یک زمین کشاورزی را برای خود حصارکشی کنید. برای اینکه مقدار زمین بیشتری را تصاحب کنید چه شکل هندسی را برای حصارکشی انتخاب می‌کنید؟ از بین مثلث، مربع، شش‌ضلعی منتظم و دایره کدام یک را انتخاب می‌کنید؟** این دو سؤال ما را به خاصیت عجیبی از دایره می‌رساند که در طبیعت و صنعت بسیار پرکاربرد و حیاتی است. اگر با طناب ۳۶ متری مثلث، مربع و شش‌ضلعی منتظم بسازیم، از آنجا که در این اشکال، طول اضلاع برابر است، طول ضلع هر کدام به‌ترتیب، ۱۲، ۹ و ۶ متر خواهد بود. اگر دایره بسازیم، شعاع دایره ۵/۷۳ متر خواهد شد. با استفاده از این اعداد و فرمول‌های مساحت، شکل (۳) را داریم:



شکل ۳. مقایسه مساحت شکل‌ها با محیط برابر

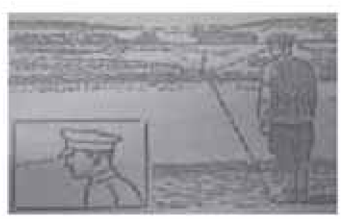
همان‌گونه که در شکل (۳) دیده می‌شود در بین چهار شکلی که محیط یکسان دارند، دایره بیشترین مساحت را دارد. قضیه مشهور زیر حالت کلی این مطلب است که همان خاصیت عجیب و پر رمز و راز دایره را بیان می‌کند:

قضیهٔ برابر محیطی [۲] در بین منحنی‌های بسته با محیط ثابت، دایره بیشترین مساحت را دارد.

حال به سؤال لوله‌های انتقال آب، نفت و گاز برمی‌گردیم. مقطع همهٔ این لوله‌ها به‌صورت دایره است. به‌عبارت بهتر لوله‌ها استوانه‌ای شکل هستند! با کمک قضیهٔ برابر محیطی، می‌توانیم دلیل این انتخاب را بدانیم. یکی از فاکتورهای اساسی برای طراحی چنین لوله‌هایی این است که با **مقدار معین**

و ثابتی از مواد اولیه، لوله‌هایی طراحی شود که بتواند بیشترین مقدار آب یا گاز را عبور دهد. بنابر قضیهٔ بالا، شکل دایره مناسب‌ترین شکل برای این کار می‌باشد. برای انتخاب شکل زمین کشاورزی نیز به‌همین دلیل ما باید برای بیشترین استفاده از طول طناب، شکل دایره را انتخاب کنیم. قضیهٔ بالا همچنین دلیل عدم انتخاب شکل‌های نامنظم و ناآشنا برای زمین کشاورزی را روشن می‌کند. به‌علاوه روند زیاد شدن مساحت از مثلث به مربع، از مربع به شش‌ضلعی منتظم و از شش‌ضلعی منتظم به دایره کاملاً بامعنا و مهم است که در جلوتر به آن اشاره می‌کنیم.

اکنون با طرح سؤال دیگری به خاصیت دیگری از دایره می‌پردازیم. فرض کنید یک سرباز که کلاهی لبه‌دار بر سر دارد، در کنار رودخانه‌ای ایستاده است. او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را بدون عبور از آن، به‌صورت خوبی تقریب بزند؟! در اینجا با خاصیت اولیه و ذاتی دایره روبه‌رو هستیم. **دایره مجموعه نقاطی است که از یک نقطهٔ ثابت به یک فاصله باشند.** چگونه از این تعریف می‌توانیم برای تقریب زدن عرض رودخانه استفاده کنیم؟ می‌دانیم همهٔ شعاع‌های دایره با هم برابرند. پس با در نظر گرفتن سرباز به‌عنوان مرکز دایره، و عرض رودخانه به‌عنوان یکی از شعاع‌های دایره مسئله به راحتی قابل حل می‌شود. اینجا کلاه لبه‌دار برای بالا بردن دقت و راحتی کار به کمک سرباز می‌آید. سرباز می‌تواند در حالتی که سرش ثابت است، کلاه را به‌گونه‌ای روی سر خود بگذارد که لبهٔ کلاه افق دید او را دقیقاً روی لبهٔ آن طرف رودخانه محدود کند. (شکل ۴) سپس در همان حال بدون خارج کردن سر از راستایش، به‌سمت عقب بچرخد (به‌سمتی که بتواند در آن جهت حرکت کند) و مکانی که افق دید او می‌باشد

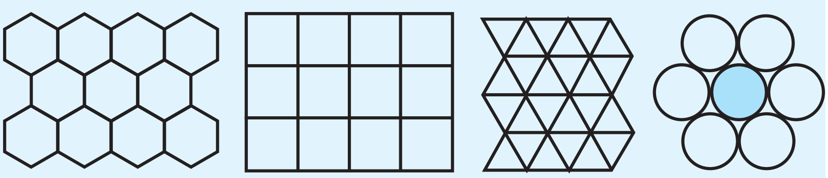


شکل ۴. چگونگی محاسبهٔ فاصلهٔ عرض رودخانه

را در نظر بگیرد. فاصلهٔ سرباز تا آن نقطه یکی دیگر از شعاع‌های آن دایرهٔ فرضی است که سرباز در مرکز آن قرار داشت. حال به راحتی با متر کردن و یا قدم کردن، فاصلهٔ عرض رودخانه با تقریب خوبی به‌دست می‌آید. [۳]

شش‌ضلعی منتظم[۳]

اگر کندوی زنبور عسل را دیده باشید، می‌بینید که زنبور با چه مهارت فوق‌العاده‌ای کندوی عسل خود را از قرار دادن شش‌ضلعی‌های منتظم کنار یکدیگر درست کرده است. چرا زنبور عسل از بین همهٔ شکل‌های هندسی، شش‌ضلعی منتظم را برای ساختن کندو انتخاب می‌کند؟ برای پرداختن به این سؤال، ابتدا به سراغ **کاشی‌کاری**[۴] می‌رویم. یکی از موضوعات جالب و کاربردی که هم جنبهٔ هنری دارد و هم با مفاهیم ریاضی ارتباط دارد، بحث کاشی‌کاری یک سطح هموار است. کاشی‌کاری یک سطح صاف به‌وسیله یک شکل هندسی یعنی پوشاندن آن سطح به‌وسیلهٔ آن شکل به‌طوری‌که تمام سطح پوشیده شود و شکل‌ها همپوشانی نداشته باشند. یک سؤال طبیعی که در ابتدا مطرح می‌شود این است که با کدام یک از اشکال هندسی می‌توان یک صفحه را کاشی‌کاری کرد؟ خود این سؤال سرآغاز سؤالات و بحث‌های جالب و زیبایی خواهد بود.



شکل ۵. کاشی‌کاری

با اندکی بررسی می‌توان فهمید که شش‌ضلعی هم یکی از شکل‌هایی است که در کنار مثلث و مربع قابلیت کاشی‌کاری صفحه را دارد. از طرفی با توجه به شکل (۵) مشخص است که دایره این توانایی را ندارد، چرا که قسمت‌هایی از صفحه پوشیده نمی‌شود. به‌عنوان قضیه‌ای زیبا و با کمک خاصیت‌های هندسی می‌توان اثبات کرد که **تنها چندضلعی‌هایی که می‌توانند صفحه را کاشی‌کاری کنند، مثلث، مربع و شش‌ضلعی منتظم می‌باشند!** (چگونگی اثبات این قضیه در نوع خود سؤال جالب و زیبایی

است.) حال به این سؤال اصلی برمی‌گردیم: چرا زنبور عسل برای درســت کردن کندوی خود از شکل‌های دیگــری چــون دایــره، مربع، مثلــث و ... اســتفاده نمی‌کند؟ چگونه می‌توانیم دلایل مناســبی برای این انتخــاب طبیعت بیاوریم؟ شــاید ذکــر چند نکته به ادامهٔ بحث کمک کند: طبیعت همیشه بهینه‌ترین و بــه صرفه‌ترین راه را انتخاب می‌کند، راهی که در آن کمترین اسراف صورت می‌گیرد. با این اوصاف، بیایید خود را جای زنبورهای ســازنده بگذاریم و به ساختن کندوی عســل فکر کنیم. ما حتماً می‌خواهیم با یک مقــدار معین موم (مادهٔ اولیه برای ســاختن کندوی عســل)، کندو را به‌شکلی بسازیم که بیشترین مقدار عســل را در خود جــای دهد. از طرف دیگر شــکلی را بایــد انتخاب کنیم که قابلیت کاشــی‌کاری کردن صفحه را داشته باشــد. به علاوه استحکام ساختمان کندو نیز برای ما مهم خواهد بود. با توجه به این سه دلیل، به این نتیجه می‌رسیم که دایره گزینهٔ مناسبی برای انتخاب نیســت، چون نمی‌توان با آن ســطح را پوشاند و بین خانه‌های کندو فضا ایجاد می‌شود. پس به سراغ مثلث، مربع و شش‌ضلعی منتظم می‌رویم.

از طرفی، بر اســاس مطالبی که در قسمت دایره گفته شــد، برای به‌دست آوردن بیشترین مساحت با مقدار معینی موم، بهتر اســت شکل انتخابی به دایره نزدیک‌تر باشد. پس مثلث نیز گزینهٔ مناسبی نخواهد بود. از طرف دیگر برای اســتحکام بیشــتر، مربع نیز گزینهٔ خوبی نیست زیرا اگر در راستای اضلاع نیرویی وارد شود ممکن است سبب از هم پاشیدن ساختمان کندو شود. اما شش‌ضلعی منتظم به طرز عجیبی، هر سه خاصیت مورد نظر را دارد. **پاپوس اسکندرانی**، ریاضیدان و اخترشــناس یونانی قرن چهارم میلادی به‌خوبی به این مطلب اشــاره کرده اســت: «زنبوران به‌خاطر پیش‌اندیشی هندسی، می‌دانند که با هزینهٔ مصالــح برابر، شــش‌ضلعی منتظم از مثلــث و مربع بزرگ‌تر اســت و عســل بیشــتری را جای می‌دهد». بــرای اطلاعات دقیق به [۴] صفحــات ۱۲۷ تا ۱۲۹ رجوع کنید.

مثلث رولو

در این قســمت نیز با چند ســؤال بحــث را آغاز می‌کنیم. آیا تا به حال فکر کرده‌اید که چرا شکل در قابلمه‌ها و یا درپوش راه آب فاضلاب‌ها، غالباً دایره‌ای شــکل هســتند؟ به‌جای دایره از چه شــکل دیگری می‌توان در چرخ ماشــین یا دوچرخه اســتفاده کرد؟ چگونه می‌توان مته‌ای طراحی کرد که به‌جای دایره، مربع سوراخ کند؟!

تعریف ۱ فرض کنیــد دو خط موازی در جهتی مشخص، یک شکل هندسی را به‌طور کامل دربرگرفته باشــند. فاصلهٔ این دو خط موازی را **پهنای** شکل در جهت خطوط داده شده می‌گویند.

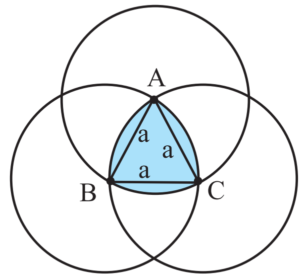
با این تعریف می‌توانیم پهنای اشــکال هندســی معــروف مانند مثلث، مربع و دایــره را در جهت‌های متفاوت به‌دســت آوریم. ایــن ویژگی جالب دایره که پهنای یکســانی در تمام جهات دارد (برخلاف مربع)، ما را به تعریف زیر راهنمایی می‌کند.

تعریف ۲ یک شکل هندسی را **پهنا ثابت** گوییم هرگاه پهنا یا عرض آن در تمام جهات یکســان باشد. این عدد یکتا را **پهنای شک** می‌نامیم.

برای مثال پهنای ثابت یک دایره به شعاع r برابر است با طول قطر آن یعنی ۲r و پهنای مربعی به ضلع a در راســتای یکی از قطرهایش، $\sqrt{a}$ و در راســتای اضلاعش a می‌باشد.

ســؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا به‌غیر از دایره، شکل پهنا ثابت دیگری وجود دارد؟ تا مدت‌هــای مدیدی باور بر این بود کــه دایره تنها شــکل با پهنای ثابت است اما در واقع این‌گونه نبود. به‌غیر از دایره، بی‌نهایت شــکل با پهنای ثابت وجود دارد (؟!). ســاده‌ترین شــکل با پهنای ثابت که دایره نیســت **مثلث رولو** نام دارد. اگرچه این شــکل برای بعضی ریاضی‌دانان شــناخته شــده بود ولی فرانتس رولو (Franz Reuleaux) ریاضیدان و مهندس آلمانی (۱۹۰۵ -۱۸۲۹) اولین کسی بود که متوجه شد این شکل با پهنای ثابت است. [۵]

طریقهٔ رســم: برای ترســیم، ابتــدا یک مثلث متســاوی‌الاضلاع به‌نــام ABC با طول ضلع a رســم می‌کنیم. ســپس به مرکز رأس A و شعاع a دایره‌ای می‌زنیم که B و C به‌وسیلهٔ کمان به هم وصل شوند. همین کار را برای رئوس دیگر انجام می‌دهیم. شکل حاصل از اتصال کمان‌ها، **مثلث رولو** نام دارد. (شکل ۶) بــا ایده گرفتن از همین روش، برای n ضلعی‌های منتظــم با n فرد نیز می‌توان شــکل‌های با پهنا ثابت دیگری رسم کرد (؟)



شکل ۶. مثلث رولو

تبصره: قابل ذکر است که استفاده از چندضلعی‌های منتظم تنها روش ترسیم شکل‌های با پهنای ثابت نیست و روش‌های متفاوت دیگری نیز وجود دارد که این خود مسئلهٔ هندسی جذابی است. از طرف دیگر، شاید این طور به‌نظر برسد که تمام شکل‌های با پهنای ثابت مانند مثلث رولو، از تعدادی کمان تشکیل شده‌اند که هر یک قسمتی از یک دایره هستند. اما چنین نیست! شکل‌های با پهنای ثابتی وجود دارند که هیچ قسمتی از آن‌ها، هر چند کوچک، کمانی از دایره نیست! [۵]

با محاسبه به آسانی درمی‌یابیم که محیط یک مثلث رولو با پهنای a و دایره‌ای با پهنای a (به این معنی است که قطر دایره a است) یکسان هستند. محیط هر دو برابر با πa است. این تساوی محیط‌ها، اتفاقی نیست.

قضیهٔ باربیه [۵] همهٔ شکل‌های با پهنای ثابت a، محیطی برابر πa دارند.

یکی از ویژگی‌های جالب مثلث رولو (و دیگر شکل‌های با پهنای ثابت)، قابلیت چرخش آن در یک مربع است. این ویژگی تنها متعلق به شکل‌های پهنا ثابت است و دیگر شکل‌ها همچون مثلث این قابلیت را ندارند. هری واتس (Harry Watts) از این ایده برای طراحی مته‌ای استفاده کرد که به‌جای دایره، مربع سوراخ می‌کند! مثلث رولو کاربردهای جالب و شگفت‌انگیز دیگری نیز در صنعت دارد که برای اطلاعات بیشتر می‌توان به [۵] رجوع کرد. حال اگر به سؤال‌هایی ابتدایی بازگردیم پاسخ‌های آن‌ها روشن است، شکل درهای قابلمه‌ها و درپوش‌های راه آب و فاضلاب، برای جلوگیری از افتادن دَر به داخل، باید شکل‌هایی پهنا ثابت همچون دایره و مثلث رولو باشند. با این حال، در کاربردهای مشابه به‌خاطر هزینهٔ کمتر، دایره کاربرد وسیع‌تری پیدا کرده است.

همان‌گونه که دیده شد، مثلث رولو یکی از شکل‌های جذاب و شگفت‌انگیز ریاضی است که سؤال‌ها و معماهای جالبی به‌وجود می‌آورد و می‌توان با استفاده از آن هر کلاس هندسه را جذاب‌تر و مفیدتر کرد. از طرف دیگر، شایان توجه است مفهوم پهنا و اشکال با پهنای ثابت در بعد سه و برای احجام نیز قابل بحث و پیگیری است.

نتیجه‌گیری

در آموزش مفاهیم هندسی دبیرستان برای رسیدن به‌نوعی از تدریس که هم دانش‌آموزان را نسبت به ریاضی بی‌علاقه نکند و هم آن‌ها را در به‌کارگیری ریاضی در زندگی روزمره برای حل مسائل واقعی ترغیب کند، گریزی از برقراری ارتباط بین ریاضی و دنیای بیرون نداریم. آموزش مفاهیم هندسی بهتر است با مسائل مرتبط واقعی شروع شود. قضایا و خاصیت‌های به‌ظاهر مجرد، کاربردی و عینی نشان داده شوند. هیچ قضیه یا خاصیتی تدریس نشود مگر اینکه مسئله‌ای کاربردی با آن حل شود. منابع [۲، ۳، ۴، ۵] و کتاب ارزشمندِ «آموزش هنر حل مسئله» [۶] دارای مثال‌های فراوان و بی‌نظیری، برای معلمین علاقه‌مند به این زمینه می‌باشند.

پی‌نوشت‌ها

1. Reuleaux Triangle
2. Heron
3. Hexagon
4. Tilling or Tessellation

منابع

۱. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۱۰۶، سال دوازدهم.
۲. هانسبرگر، ر، (۱۳۷۱)، **ابتکارهایی در ریاضیات**، ترجمهٔ سیامک کاظمی، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی.
۳. پرلمان، ی، (۱۳۴۷)، **سرگرمی‌های هندسه**، ترجمهٔ پرویز شهریاری، چاپ اول، انتشارات خوارزمی.
۴. پاپاس، ت، (۱۳۸۸)، **افسون ریاضیات**، ترجمهٔ عباس‌علی کتیرایی، چاپ اول، انتشارات مازیار.
۵. اسمارت، ج، ا، (۱۳۷۳)، **هندسه‌های جدید**، ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور، چاپ اول، انتشارات مدرسه.
۶. تابش، حاج‌بابایی، رستگار، (۱۳۸۰)، **آموزش هنر حل مسئله**، چاپ اول، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

اثبات‌هایی بدون کلام توسط منحنی جادویی

عزیزه احمدی
کارشناس ارشد ریاضی و دبیر ریاضی استان زنجان

اشاره
در این مقاله، اثبات‌هایی ساده برای روابط لگاریتمی تابع lnx ارائه می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها: اثبات بدون کلام، منحنی جادویی، اثبات

مقدمه

قبل از هر مقدمه‌ای، توجه شما را به متن زیر از صفحهٔ ۴۶ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال تازه‌تألیف دوره متوسطه [۳]، که خود، مقدمه‌ای برای این مقاله است، جلب می‌کنیم:

دنباله زیر را در نظر می‌گیریم

$$\{(۱+\frac{۱}{n})^n\}_{n=۱}^{\infty}: ۲, (\frac{۳}{۲})^۲, (\frac{۴}{۳})^۳, (\frac{۵}{۴})^۴, (\frac{۶}{۵})^۵, ...$$

این دنباله هم به لحاظ کاربردی و هم از جنبه نظری، اهمیت فوق‌العاده دارد. چرا؟

ثابت می‌شود این دنباله همگراست و هرگاه حد آن را e بنامیم، یعنی

$$e = \lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n$$

عدد حقیقی e به‌صورت طبیعی، در بیشتر پدیده‌های خلقت ظاهر می‌شود.

به نظر من، جای یک چرای دیگر در این متن خالی است. چرا حدی که به اذعان مؤلفان این کتاب درسی، کاربردی و با اهمیت بوده و اساس بعضی از برهان‌ها درهمین کتاب (برای مثال مشتق تابع نمایی طبیعی در صفحه ۱۶۲) است، اثبات نشده است؟ اگر دانش‌آموزی بپرسد چرا مقدار این حد برابر عدد گنگ e است، چه جوابی می‌توان به او داد؟ برخلاف کتاب قبلی حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره متوسطه [۲] که از کنار این مسئله می‌گذشت، این کتاب تازه‌تألیف، در صفحات ۴۷ تا ۵۰، سعی کرده تا با اثبات صعودی و از بالا کراندار بودن دنباله $\{(۱+\frac{۱}{n})^n\}_{n=۱}^{\infty}$، همگرایی آن را نتیجه بگیرد و تقریبی برای جواب حد ارائه کند، اما هنوز توجیهی برای مقدار دقیق حد ندارد. این خیلی عالی است که مؤلفان این

کتاب درسی، سعی دارند جای خالی این حد مهم را در کتاب‌های درسی پر کنند، ولی به‌نظر من، روشی پیچیده برای حل مشکل برگزیده شده است. راه آسان حل این مشکل، استفاده از تعریف زیر از لگاریتم طبیعی است:

$$\int_{1}^{t} \frac{1}{x} dt = \ln t \quad (1)$$

متأســفانه این تعریف گرانقدر، از کتاب حســاب دیفرانسیل و انتگرال تازه‌تألیف، حذف شده است!

در زیر با استفاده از رابطه فوق، برهان‌هایی ساده برای مقدار دقیق حد اشاره شده و نیز روابط لگاریتم طبیعی ارائه خواهیم کرد.

اثبات روابط لگاریتم طبیعی

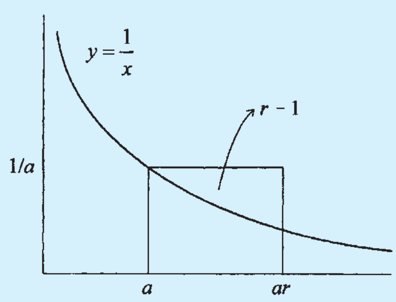
منحنی $y = \frac{1}{x}$ را در دامنه اعداد حقیقی مثبت در نظر بگیرید. دانش‌آموزان با نمودار این تابع در کتاب حسابان تازه‌تألیف [۴] آشنا شده‌اند. توضیحات باقیمانده راجع به این تابع نیز، در حساب دیفرانسیل و انتگرال تازه‌تألیف به کرات در بخش‌های حد، مجانب، مشتق، رسم نمودار توابع، انتگرال معین و بسیاری از تمرینات و فعالیت‌ها آمده است. به کمک این منحنی جادویی، اثباتی برای روابط زیر که در آن a و b اعداد حقیقی مثبت هســتند، ارائه خواهیم کرد. قابل ذکر است که اگرچه در اثبات این روابط، از شرط $b \geq a > 1$ استفاده شده است، ولی برهان ما برای هر عدد حقیقی مثبت، قابل تکرار است.

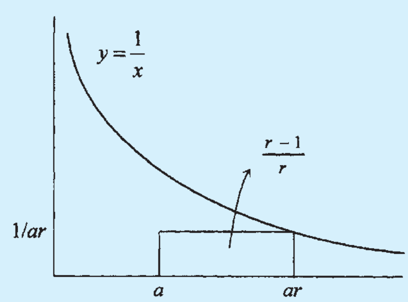
$$\ln ab = \ln a + \ln b \quad (2)$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad (3)$$

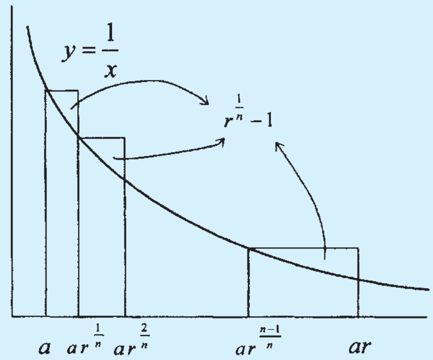
$$\ln a^{p} = p \times \ln a \quad (4)$$

فرض کنید a و r اعداد حقیقی مثبت باشند. اگر مستطیل‌های ریمان بالا و پائین را در بازه [a,ar] به نمودار $y = \frac{1}{x}$ اضافه کنیم، نمودارهای زیر را داریم:





همان‌طور که مشــاهده می‌کنید، در این بازه، مســاحت یک مستطیل ریمان بالا $r-1$ و مساحت یک مستطیل ریمان پائین $\frac{r-1}{r}$ است. مشابه این رابطه، روی هر بازه حقیقیِ واجد این شرط که انتهای بازه از ضرب ابتدای بازه در یک ضریب ثابت به‌دست آمده باشد، برقرار اســت. حال بازه [a,ar] را به n بازه جزء طوری افراز کنید که شــرط بالا برای هر بازه جزء، هم‌چنان برقرار باشد. در نمودار صفحه بعد، این اتفاق افتاده است.



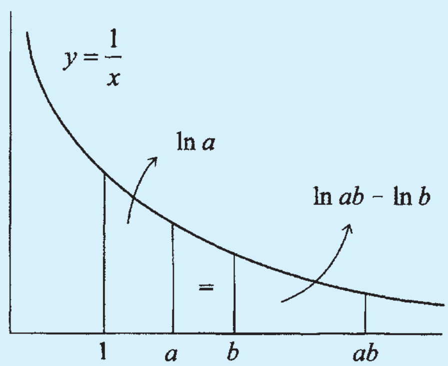
در نمودار فوق، طول بلندترین بازه جزء را Δx_n می‌نامیم. داریم:

$$\Delta x_n = ar - ar^{\frac{n-۱}{n}} = ar^{\frac{n-۱}{n}}(r^{\frac{۱}{n}}-۱).$$

با میل دادن n به سمت بی‌نهایت، Δx_n به صفر میل می‌کند و حد مجموع ریمان بالا، برابر ســطح زیر نمودار خواهد شد. پس چون مســاحت هر مستطیل در نمودار فوق، برابر $r^{\frac{۱}{n}}-۱$ است، مساحت تحت نمودار $y=\frac{۱}{x}$، محدود به بازه [a,ar] برابر است با

$$\lim_{n\to\infty} n\times(r^{\frac{۱}{n}}-۱)=\lim_{n\to\infty}\frac{r^{\frac{۱}{n}}-۱}{\frac{۱}{n}}=\lim_{n\to\infty} r^{\frac{۱}{n}}\ln r=\ln r$$

از این محاســبات نتیجه می‌شود که مســاحت ناحیه محصور به نمودار $y=\frac{۱}{x}$ و بازۀ [a,ar]، به مقدار a بســتگی نداشــته و برابر lnr اســت. اینک آماده‌ایم به کمک نمودار زیر، برهانی برای رابطه (۲) ارائه کنیم.

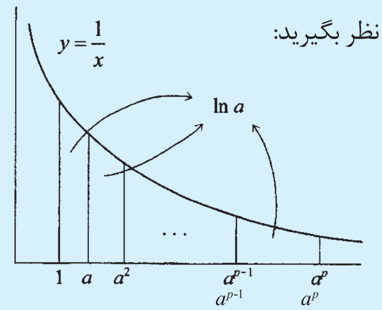


ابتــدا دقت کنید که بنابر نتیجه بالا، مســاحت تحت نمــودار $y=\frac{۱}{x}$، محدود به بازه [b,ab] برابر lna است و به مقدار b بستگی ندارد. از طرفی به کمک رابطه (۱)، این مساحت برابر lnab−lnb است. پس lnab−lnb=lna. یعنی رابطه (۲) برقرار است.

رابطه (۳) نیز به آسانی و با استفاده از رابطه (۲) اثبات می‌شود:

$$\ln a=\ln(\frac{a}{b}.b)=\ln\frac{a}{b}+\ln b\Rightarrow \ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}\cdot$$

برای اثبات رابطه (۴)، نمودار زیر را در نظر بگیرید:



همان‌طور که در نمودار فوق دیده می‌شود، مساحت تحت نمودار در بازه $[۱,a^p]$، به p ناحیه با مســاحت‌های مســاوی lna تقسیم شده اســت. یعنی مساحت ناحیه موردنظر p×lna است. از طرفی بنابر رابطه (۱)، مساحت تحت نمودار در بازه $[۱,a^p]$ برابر $\ln a^p$ است. پس

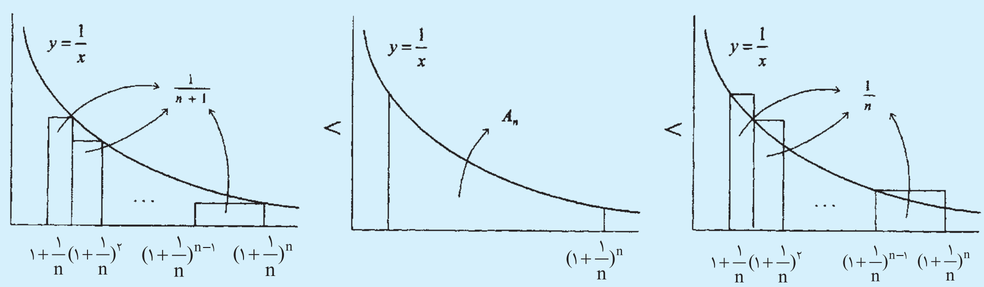
$$\ln a^p = p\times \ln a$$

برهانی ساده برای مقدار دقیق حد

اینک نشان خواهیم داد:

$$\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n = e \quad (۵)$$

به نمودارهای زیر توجه کنید:



همان‌طور که در این نمودارها مشاهده می‌شود، $\frac{n}{n+۱} < A_n < ۱$. با گرفتن حد در بی‌نهایت از طرفین و اســتفاده از قضیه فشردگی، نتیجه می‌شود $\lim_{n\to\infty} A_n = ۱$. پس در نتیجه

$$۱=\lim\int_۱^{(۱+\frac{۱}{n})^n}\frac{۱}{x}dx=\lim \ln(۱+\frac{۱}{n})^n=\ln\lim(۱+\frac{۱}{n})^n$$

در نتیجه، چون $\ln\lim(۱+\frac{۱}{n})^n$ مساوی ۱ شد، به‌طور معادل، $e=\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n$.

منابع

1. Warren Page. (2002). Proofs without words under the magic curve, *The coll. Math. Journal*., Vol. **33**, 42-46.

۲. دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲، چاپ سیزدهم، ۱۳۸۶.

۳. دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش‌دانشگاهی، چاپ اول، ۱۳۹۱.

۴. دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، حسابان، چاپ اول، ۱۳۹۰.

مریم میرزاخانی؛ اولین زن برنده مدال فیلدز در جهان

پیام دکتر حسن روحانی، رئیس جمهوری اسلامی ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

خانم پروفسور مریم میرزاخانی

کسب برترین جایزه ریاضیات در جهان را به شما تبریک می‌گویم. امروز ایرانیان می‌توانند به خود ببالند که اولین زن برنده جایزه «فیلدز»، هم‌وطن آنان است؛ آری باید که شایستگان بر صدر نشینند و قدر ببینند. همه ایرانیان در هر کجای جهان، سرمایه‌های ملی این مرز و بوم هستند و من به نمایندگی از ملت ایران، تلاش‌های علمی شما را ارج می‌نهم .

امیدوارم زندگی‌تان، همواره سرشار از شادکامی و موفقیت باشد.

۲۲ مرداد ۱۳۹۳

چه تقارن زیبایی! اولین زن برندهٔ مدال فیلدز، جایزه‌اش را از دست اولین رئیس‌جمهور زن کره جنوبی گرفت!

اشاره

مریم میرزاخانی، «اولین» ایرانی است که «اولین» جایزهٔ فیلدز را به عنوان یک زن، از دست «اولین» رئیس جمهور زن در کشور کره جنوبی خانم پارک گوئِن‌-هــای (Park Geun-hye) دریافت نمود. تقارن این ســه «اولین»، اتفاق بی‌نظیری است. آن‌چه در پی می‌آید، بخش‌هایی از «گزارش استانفورد» (Bjorn Carey, Stanford Report) در تاریخ ۱۲ آگوســت ۲۰۱۴ است که در رابطه با خانم دکتر مریم میرزاخانی تهیه شــده اســت. آموزنده و غرورآفرین اســت و بدین سبب، به خوانندگان عزیز تقدیم می‌شود.

زهرا گویا- سردبیر

بخش‌هایی از گزارش

در مجموع، بهترین توصیف کارهای مریم میرزاخانی، ریاضیات محض اســت، بدین معنا که وی، مفاهیم کامــلاً انتزاعیِ طبیعت را مطالعه می‌کند که ممکن است کاربرد بلافاصله آشکاری، نداشته باشند.

به قول رالف کوهِن (Ralph Cohen) - استاد ریاضی و معاون دانشکده علوم و علوم انسانی دانشگاه استانفورد، «البته، قالب اوقات، تحقیق در ایــن حوزه‌ها، کاربردهای غیرمنتظره دارد، اما انگیزهٔ ریاضی‌دان‌هایی مانند مریم برای تحقیق، این چیزها نیســت. در عوض، انگیزهٔ آن‌ها، درکِ هرچه عمیق‌ترِ این ســاختارهای ریاضیِ پایه‌ای است». وی در ادامه، افزوده اســت که «کارهای مریم، حقیقتاً یک مثال برجسته از تحقیق مبتنی بر کنجکاوی (curiosity-driven research) است».

در بخــش دیگری از این گزارش گفته شــده که «اگرچه به دلیل آن کــه نتایج تحقیقات مریم میرزاخانی، بــرای نظریه میدان کوانتومی آگاهی‌بخش است، می‌تواند بر فیزیکِ نظری در مورد چگونگی به وجود آمدن جهان و هم‌چنین، در مهندسی و علومِ مواد، تأثیرگذار باشد. در درون ریاضی، دلالت‌هایی برای مطالعهٔ اعداد اول و رمزنگاری دارد» و اضافه شده که «با وجود وسعت کاربردهای تحقیقات میرزاخانی، وی اظهار کرده اســت که از ریاضیات محض، به خاطر ظرافت و دیرپایی سؤال‌هایی که در جستجوی آن‌هاست، لذت می‌برد.»

نکتــه جالب دیگــری که در این گــزارش آمده، نظــر میرزاخانی در مورد «اثبات» اســت. او در پاسخ به این سؤال که رویکردش به تولید اثبات‌های جدید چیست، گفته است که «من یک دستورالعمل خاص ندارم و این دلیلی است که چرا تحقیق، هم چالش‌برانگیز و هم جذاب است. مثل این است که در جنگلی گم شده باشید و تلاش کنید تا از هر دانشی که می‌توانید، استفاده کنید تا به ترفندهای جدید برسید و با کمی شانس، ممکن است راهی برای خروج بیابید».

پیام تبریک شهیندخت مولاوردی معاون رییس جمهور در امور زنان و خانواده به میرزاخانی، برندهٔ برترین جایزهٔ ریاضیات در جهان

خانم مریم میرزاخانی

با کسب برترین جایزه رشته ریاضیات توسط سرکار عالی، بار دیگر برگ زرین دیگری از کتاب افتخارات زنان توانمند و بلند همت ایرانی ورق خورد. مفتخرم به نمایندگی از زنان و دختران ایرانی، دریافت این

نشان علمی را که نشان از شایستگی و قابلیت شما دارد، تبریک عرض نموده و موفقیت روزافزونتان را در خدمت به بشـــریت و هموطنانتان، از خداونـــد متعال مســـئلت نماید. مام میهن بـــه فرزندان فرهیخته و اندیشمندی چون شما می‌بالد.

مریم‌میرزاخانی، رؤیای بسیاری از دانشجویان ریاضی را محقق کرد!

مترجم: شیوا زمانی، دانشیار دانشگاه صنعتی شریف

مقدمهٔ مترجم

مریم میرزاخانی پیشـــرفت‌های ناب و فوق‌العاده‌ای در هندســـه و سیستم‌های دینامیکی داشته اســـت. کار او، روی رویه‌های ریمان و فضاهای مدول، چند دیســـیپلین ریاضی– هندسه هذلولوی، آنالیز مختلط، توپولوژی و دینامیک- را به هم پیوند داده اســـت و بر همهٔ آن‌ها، تأثیرگذار بوده است. میرزاخانی به خاطر نتایج پیشروی خود در هندسهٔ هذلولوی شناخته شد و آخرین کارهای وی، موجب پیشرفت بزرگی در سیستم‌های دینامیکی شده است.

میرزاخانی رؤیای بســـیاری از جوانانی را که رشتهٔ ریاضی را برای تحصیلات دانشـــگاهی خود انتخاب می‌کنند، محقق کرد و موفق به دریافت نشان فیلدز شـــد. او اولین زنی است که این جایزهٔ ارزشمند را کـــه بـــه عنوان نوبل ریاضیات شـــناخته شـــده و از ۱۹۳۶، تنها به ریاضی‌دانان تأثیرگذار زیر ۴۰ سال اهدا می‌شود، دریافت کرده است. مریم میرزاخانی، دانش آموختهٔ دورهٔ کارشناســـی ریاضی از دانشگاه صنعتی شـــریف است و دکترای خود را در ســـال ۲۰۰۴، از دانشگاه هاروارد گرفته است. میرزاخانی درحال حاضر، استاد ریاضی دانشگاه اســـتانفورد است. پس از دریافت جایزهٔ کِلی، «مؤسسهٔ ریاضیات کِلی» مصاحبه‌ای با مریم میرزاخانی انجام داد که مجلهٔ گاردین با کسب اجازه از مؤسســـهٔ کِلی، مجدداً این مصاحبه را در شمارهٔ ۱۳ آگوست ۲۰۱۴ خود، چاپ کرد که در این‌جا، ترجمهٔ آن را تقدیم خوانندگان مجلهٔ رشـــد آموزش ریاضی می‌کنم. البته طبیعی اســـت که تا زمان انتشار این شمارهٔ مجله، ترجمه این مصاحبه در نشریات متعدد دیگری توسط افراد مختلف، به چاپ رسیده باشد.

◻ اولین خاطرهٔ شما از ریاضی چیست؟

وقتی بچه بودم، می‌خواســـتم نویسنده شوم. هیجان انگیزترین اوقاتم، زمان‌هایی بود که کتاب‌های داســـتانی می‌خواندم. من تا سال آخر دبیرســـتان، هیچ وقت فکر نمی‌کردم که ریاضیات را ادامه دهم. ما سه خواهر و برادر هستیم. والدین من همواره مشوق و پشتیبانمان بودنـــد. آن چـــه برای آن‌ها بیش از همه اهمیت داشـــت، این بود که حرفه‌ای داشته باشیم که ما را راضی کند و برایمان بامعنا باشد، ولی چندان به موفقیت و دستاوردهای آن، اهمیتی نمی‌دادند.

از خیلی جهات، محیط خانواده‌ام بی‌نظیر بود، اگر چه آن زمان‌ها، مصادف بود با دوران سخت جنگ ایران و عراق. برادر بزرگ من کسی بود که به‌طور کلی، مرا به علم علاقه‌مند کرد. او عادت داشت مطالبی را که در مدرسه یاد می‌گرفت، برای من بازگو کند. اولین خاطرهٔ من از ریاضیات، احتمالاً به زمانی برمی‌گردد که برادرم در مورد مسئلهٔ جمع کردن اعداد ۱ تا ۱۰۰ با من صحبت کرد. فکر می‌کنم او در یک مجلهٔ علمی معروف، در مورد این که گاوس چه‌طور این مسئله را حل کرده بود، مطلبی خوانده بود. راه حل این مسئله برای من مسحورکننده بود. این اولین باری بود که من از یک حل زیبا لذت می‌بردم، اگر چه خودم آن را پیدا نکرده بودم.

◻ چه تجربه‌ها و کدام افراد، تأثیر به‌خصوصی روی آموزش ریاضی شما داشته‌اند؟

من از جهات بسیاری خوش شانس بودم. وقتی مدرسهٔ ابتدایی را تمام کردم، جنگ هم تمام شد. اگر من ۱۰ سال زودتر به دنیا می‌آمدم، نمی‌توانســـتم فرصت‌های عالی را که نصیبم شد، داشته باشم. من به مدرسهٔ بســـیار خوبی در ایران- مدرســـه فرزانگان- رفتم و در آن‌جا، معلمان عالی داشتم. در هفتهٔ اول دورهٔ راهنمایی، با دوستم رویا بهشتی آشنا شدم. برای دوستی کسی که با شما علایق مشترکی داشته باشد و به شما کمک کند تا همیشه انگیزه داشته باشید، نمی‌توان ارزشی تعیین کرد.

علاوه بر این، مدرســـهٔ ما نزدیک خیابانی پر از کتاب‌فروشی بود. یادم هست که چه‌قدر راه رفتن در این خیابانِ شلوغ و رفتن به کتاب فروشـــی‌ها، برایمان هیجان‌انگیز بود. معمولاً، رسم نبود آن‌طوری که مردم در این جا، به کتاب فروشی‌ها می‌روند و کتاب ها را ورق می‌زنند، نمی توانستیم مانند این‌جا، در کتاب فروشی‌ها کتاب‌ها را ورق بزنیم و آن‌ها را در یک نگاه، ســـبک و ســـنگین کنیم. این بود که با خرید کوله‌باری از کتاب‌هایی که به تصادف انتخاب می‌کردیم، گردشـــمان را به پایان می‌رساندیم! مدیر مدرسهٔ ما، خانمی با اراده‌ای بسیار قوی بود که تمام تلاش خود را می‌کرد تا ما هم، همان امکاناتی را داشـــته باشـــیم که مدارس پسرانه داشتند. بعدها، درگیر شدنم با المپیادهای ریاضی، موجب شد روی مسائل سخت‌تری فکر کنم که به عنوان یک نوجـــوان، از این چالش لذت می‌بـــردم. اما مهم‌تر از همه این که بعداً، ریاضی‌دانانِ تأثیرگذار و دوستان بسیاری بودند که آن‌ها را در دانشگاه شـــریف ملاقات کردم. هر قدر بیشـــتر روی ریاضی وقت می‌گذاشتم، هیجان‌زده‌تر می‌شدم.

◻ در مورد تفاوت‌هـــای آموزش ریاضی در ایران و امریکا، توضیح دهید.

برای من سخت است که نظر خود را در پاسخ به این سؤال بگویم، چـــون تنها تعداد کمی از دانشـــگاه‌ها را از نزدیک دیـــده‌ام و در مورد آموزش ریاضی در دبیرستان‌های آمریکا هم، اطلاع کمی دارم. اما باید بگویم که نظام آموزشـــی ایران طوری نیســـت که مردم این‌جا تصور می‌کنند. به عنوان یک دانشجوی تحصیلات تکمیلی در هاروارد، من مجبور بودم بارها و بارها توضیح دهم که اگر چه زن بوده‌ام، اما مجاز بوده‌ام وارد دانشگاه شوم. درست است که در ایران، مدارس دخترانه و پسرانه تا پایان دبیرستان، جدا است، اما این امر، مانع حضور هم‌زمان آن‌ها در فعالیت‌های علمی مثل المپیادها و اردوهای تابستانی نیست.

البته تفاوت‌های بسیاری هم وجود دارد، مانند این‌که در ایران، شما رشتهٔ اصلی خود را قبل از ورود به دبیرستان انتخاب می‌کنید، و بعد از پایان دبیرستان، یک امتحان سراسری هم برای ورود به دانشگاه‌ها وجود دارد. هم‌چنین، حداقل در دبیرستانی که من بودم، بیشتر بر حل

در بیست و هفتمین کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان، مریم میرزاخانی، اولین زن برنده مدال فیلدز در جهان به عنوان اولین ایرانی، جایزه خود را از اولین رئیس‌جمهور زن کره‌جنوبی، دریافت کرد.

مسئله تمرکز می‌کردیم تا گذراندن دروس پیشرفته.

❐ چه چیزی شما را به مسئله‌ای که مطالعه کردید، جذب کرد؟

وقتی وارد هاروارد شدم، پیش زمینهٔ کاری‌ام، بیشتر ترکیبیات و جبر بود. من همیشه از آنالیز مختلط لذت می‌بردم، اما چیز زیادی از آن نمی‌دانستم. وقتی به گذشته نگاه می‌کنم، می‌بینم که هیچ سرنخی نداشتم. من نیاز به یادگیری مطالب زیادی داشتم که اغلب دانشجویان کارشناسی دانشگاه‌های خوب این‌جا، آن‌ها را می‌دانند.

برای همین، شروع کردم به شرکت در سمینارهای غیررسمی که کورت مک مولن برنامه‌ریزی کرده بود. خوب بیشتر وقت‌ها، حتی یک کلمه از آن‌چه که سخنران می‌گفت، نمی‌فهمیدم. اما ارزش برخی از نکاتی را که کورت می‌گفت، درک می‌کردم. من مسحور این می‌شدم که وی، چگونه می‌تواند مطالب را این قدر ساده و زیبا ارائه کند. پس شروع کردم به این که به‌طور منظم، از او سؤال بپرسم و در مورد مسائلی که از این بحث‌های روشنگرانه بیرون می‌آمد، فکر کنم.

تشویق‌های او ارزشمند بودند. کار کردن با کورت، تأثیر عمیقی بر من داشت، اگر چه الآن آرزو می‌کنم که ای کاش، بیشتر از او چیز یاد می‌گرفتم. هرچند وقتی فارغ التحصیل شدم، فهرست بلند بالایی از ایده‌های خام داشتم که می‌خواستم آن‌ها را کشف و بررسی کنم.

❐ تحقیق خود را به زبانی ساده توضیح دهید. آیا تحقیق شما کاربردهایی هم در زمینه‌های دیگر دارد؟

بیشتر مسائلی که روی آن‌ها کار می‌کنم، به ساختارهای هندسی روی رویه ها و تغییر شکل آن‌ها مربوط می‌شود. من به‌خصوص، به فهمیدن رویه‌های هذلولوی علاقه‌مندم. گاهی اوقات، خواص یک رویهٔ هذلولوی مشخص را می‌توان با مطالعهٔ فضای مُدولی که تمام ساختارهای هذلولوی را روی یک رویهٔ توپولوژیک داده شده پارامتری‌سازی می‌کند، بهتر فهمید. این فضاهای مُدول، خودشان هندسه‌ای غنی دارند و به صورت‌های طبیعی و مهمی در هندسهٔ جبری، هندسهٔ هذلولوی و هندسهٔ دیفرانسیل، ظاهر می‌شوند. رابطه‌هایی هم با فیزیک نظری، توپولوژی و ترکیبیات دارند. من این موضوع را که بتوان به مسئله‌ای، از چشم‌اندازهای متفاوت نگاه کرد و از راه‌های مختلف به آن نزدیک شد، مبهوت‌کننده‌می‌یابم.

❐ چه چیزی را بیش از همه، با اجر یا مولد می‌دانید؟

البته، با اجرترین قسمت، همان لحظهٔ «آها» است، هیجان کشف و لذت فهمیدن چیزی جدید، احساسِ بودن در قلهٔ یک تپه و داشتن چشم‌اندازی روشن. اما بیشتر اوقات، ریاضی کار کردن برای من ، مانند یک راهپیمایی طولانی است که در آن، هیچ ردّ پا یا خط پایانی، به چشم نمی‌آید.

من بحث‌های ریاضی را با همکاران خود که پیش زمینه‌های متفاوتی در ریاضی دارند، یکی از مولدترین راه‌های پیشرفت می‌دانم.

❐ برای افرادی که می‌خواهند در مورد ریاضی- آن چه هست، نقشی که در جامعه داشته است، و مانند این ها - بیشتر بدانند، چه توصیه‌ای دارید؟

این، سؤال سختی است. من فکر نمی‌کنم که لازم باشد همه ریاضی‌دان شوند، اما معتقدم که بسیاری از دانش‌آموزان، به ریاضی فرصتی واقعی نمی‌دهند. من چند سالی در دورهٔ راهنمایی، عملکرد ضعیفی در ریاضی داشتم، فقط به این دلیل که چون علاقه‌ای به فکر کردن در مورد آن نداشتم. می‌توانم ببینم که بدون داشتن هیجان، ممکن است ریاضیات بیهوده و سرد به نظر برسد. زیبایی ریاضیات، تنها برای افرادی ظاهرمی‌شود که صبورانه، آن را دنبال می‌کنند.

پیام رئیس انجمن ریاضی ایران

سرکار خانم پروفسور میرزاخانی

با سلام

انتخاب شما به عنوان یکی از برندگان جایزه فیلدز، باعث شادی و شعف مردم ایران و احساس غرور ملی در جامعه علمی و ریاضی کشور شد. این‌که نام کشور عزیزمان ایران در بین ۲۰ کشور فیلدزی ثبت شده، افتخاری است که با دستان توانمند و فکر خلاق شما به عینیت رسیده‌است. اجازه می‌خواهم از طرف خود و جامعه ریاضی کشور، این پیروزی بزرگ را به سرکارعلیه تبریک و تهنیت عرض نموده و موفقیت شما را در ادامه پژوهش‌های علمی، از درگاه احدیت تمنا نمایم.

محمدعلی‌دهقان

پیام وزیر علوم، تحقیقات و فناوری

انتخاب دانشمند برجسته و ریاضیدان شاخص ایرانی سرکارخانم دکتر مریم میرزاخانی به عنوان نخستین چهره ریاضی زن دریافت‌کننده مدال فیلدز، باعث مباهات همه ایرانیان به‌ویژه جامعه دانشگاهی کشور و نمادی از پویایی و شکوفایی علمی ایران عزیز در عرصه بین‌المللی است. در جهان بدونِ مرز علم، درخشش هر ایرانی افتخار بزرگی برای ایران و برای ذخیره دانش بشری محسوب می‌شود. اینجانب ضمن ابراز خرسندی از این رویداد علمی مبارک، برای سرکار خانم دکتر میرزاخانی، همکار و هموطن افتخار آفرین از درگاه خداوند منان توفیق روزافزون آرزومندم.

۲۵ مرداد ۱۳۹۳

دربارۀ موفقیت کسب مدال فیلدز توسط پروفسور میرزاخانی

علیرضا بحرینی، دانشیار دانشگاه صنعتی شریف

کَلِمَةً طَيِّبَةً كَشَجَرَةٍ طَيِّبَةٍ أَصْلُهَا ثَابِتٌ وَ فَرْعُهَا فِي السَّمَاءِ، تُؤتِي أُكُلَهَا كُلَّ حِينٍ بِإِذْنِ رَبِّهَا (سوره مبارکه ابراهیم آیه ۲۴)

کلمه طیبه مانند درخت پاکیزه‌ای اسـت که ریشه آن ثابت، و شاخه آن در آسمان است، هر زمان میوه خود را به اذن پروردگارش می‌دهد.

آشــنایی من با خانم مریم میرزاخانی، به دوران اردوی المپیاد ریاضی ســال ۱۳۷۲ در دانشگاه صنعتی‌شـریف برمی‌گردد. در آن ســال، بنده دانش‌آموز ســال چهارم و ایشان، دانش‌آموز سال سوم دبیرستان بودند. شـاید تنها اشاره به برجستگی و توانایی کم‌نظیر حل مســئله ایشــان در دوران المپیاد و دانشــگاه، برای بیان نبوغ علمــی وی،کافی نباشــد. همهٔ ما کم و بیــش می‌دانیم که حضور اســتعدادهایی از این دســت، هر ســاله در تیم‌هــای المپیادهای کشورهای مختلف جهان از جمله تیم‌های کشور خودمان، ناممکن و دور از انتظار نیست.

توصیف اهمیت کســب مدال فیلدز توســط خانم میرزاخانی، شــاید برای افراد خارج از حوزه ریاضیات، چندان ســاده نباشد. در دنیای ریاضیات، کشــف و اثبات هر قضیه بنیادی، شــاید سال‌ها، ذهن برجســته‌ترین ریاضی‌دانان را به خود مشــغول می‌دارد. نکته شگفت‌آور آن است که کشف چنین حقایق علمیِ به ظاهر مجرد و ذهنی، حداقل بر اساس آنچه تا کنون تأیید شده، ارتباط تنگاتنگی بــا دنیای خارج و قوانیــن حاکم بر آن دارد و گاه ســال‌ها بعد، به نظریه‌های انقلابی در فیزیک یا شاخه‌های دیگر منجر می‌شود.

آیهٔ ۲۴ از سورهٔ مبارکهٔ ابراهیم در قرآن مجید، که ممکن است تفســیرهای دیگری هم داشته باشــد، با عمیق‌ترین محتوای علوم تجربــی که بخش مهمــی از آن در دنیای امروز، در قالب ریاضیات در اختیارمان است، مرتبط است:

کَلِمَةً طَيِّبَةً كَشَجَرَةٍ طَيِّبَةٍ أَصْلُهَا ثَابِتٌ وَ فَرْعُهَا فِي السَّمَاءِ، تُؤتِي أُكُلَهَا كُلَّ حِينٍ بِإِذْنِ رَبِّهَا (سوره مبارکه ابراهیم آیه ۲۴)

کلمه طیبه مانند درخت پاکیزه‌ای اسـت که ریشه آن ثابت، و شاخه آن در آسمان است، هر زمان میوه خود را به اذن پروردگارش می‌دهد.

از ایــن‌رو، درک درســت و عمیــق قضایای علمــی را نه تنها نمی‌توان کاری ســاده دانســت، بلکه برای آن نیز، نمی‌توان سقفی قائل شد.

شاید به خاطر همین موضوع است که با نگاهی به درخت تناور ریاضی‌دانان برجســته تاریخ معاصر (اعم از دارندگان مدال فیلدز یا سایر ریاضی‌دانان برجسته)، نوعی رابطه تنگاتنگ از جنس استاد و شــاگردی بین آن‌ها، به‌روشنی قابل مشاهده است. روشن است که عکس این حقیقت، به هیچ وجه درست نیست.

برنــارد ریمان (۱۸۲۶-۱۸۶۶) ریاضی‌دان شــهیر آلمانی، در طول عمر کوتاه خود، توانســت نقش چشم‌گیری در آنالیز، نظریه اعداد، و هندســه دیفرانسیل ایفا کند. ریمان که آلبرت اینشتین، وی را دارای شــهودی پیامبرگونــه توصیفش کــرده، به معرفی و مطالعه رویه‌هایی مجهز به ســاختاری اضافــی پرداخته که امروز به رویه‌های ریمانی مشــهور هســتند. این حوزه شــگفت‌انگیز از ریاضیــات، تا کنون به پدید آمدن و توسـعه شــاخه‌های مختلف ریاضــی از جمله توپولوژی، آنالیز و هندســه مختلط و هندســه جبــری منجر شــده و در چند دهه اخیر، در نظریه ریســمان در فیزیکِ نظری، نقش منحصربه‌فرد و چشــمگیری ایفا کرده است. این اشــیای ریاضی را در واقع، می‌توان جایگزین مفهوم کلاسیک ذرات توصیــف کرد کــه در مقیاس بســیار کوچک‌تری، این‌گونه دیده می‌شوند. ادوارد ویتن- فیزیک‌دان برجسته معاصر که خود، یکی از برندگان مدال فیلدز اســت- با الهام از شهود فیزیکی خود در نظریــه گرانش کوانتومی در ابتــدای دهه ۹۰، به صورت‌بندی حدســی پرداخت که علاوه بر فیزیک، از دیــد ریاضی هم دارای اهمیت فراوان بود. ماکســیم کانتســویچ - یکی دیگر از برندگانِ مدال فیلدز، توانست اولین اثبات دقیق ریاضی را برای این حدس ارائه دهد و مریم میرزاخانی در رسالهٔ دکتری خود، با ارائه اثباتی هندسی برای آن حدس، راه جدیدی برای موضوع بسیار دشوار و عمیق مطالعه فضای حاصل از خانواده رویه‌های ریمانی، باز کرد.

به گفته کرت مک‌مولن- اســتاد راهنمای خانم میرزاخانی- یکی دیگــر از توانایی‌های بی‌نظیر این دانشــمند جوان، برقراری ارتباط بین حوزه‌های به ظاهر کاملاً غیرمرتبطی از ریاضیات است کــه برای نمونه، می‌توان به اســتفاده از تکنیک‌هایی از دینامیک زمین‌لرزه برای مســئله‌ای حل‌نشدنی از ساختار هندسه هذلولویِ رویه‌های ریمانی، استفاده از هندسه فضای رویه‌های ریمانی برای حل مسائل باز ، دشوار و دیرپایی درحوزه سیستم‌های دینامیکی و چندین دستاورد بزرگ دیگر اشاره نمودکه هر یک، منجر به باز شدن راه‌های تحقیقاتی نوینی در این شاخه‌ها گشته‌اند.

اگــر به رقابــت تنگاتنگ بین ریاضی‌دانانِ بســیار برجســته کشــورهای بــزرگ دنیا با ســابقه چند صد ســاله توجــه کنیم، جایزه اعطا شــده به پروفسور میرزاخانی، و ارزش آن که بالاترین جایــزه در یکــی از دشــوارترین حوزه‌هــای علمی اســت، قدر و قیمتــی مضاعــف می‌یابد. به اعتقاد بنده، این دســتاورد بزرگ را نمی‌توان به چیزی جز نبوغ شــخصی ایشــان کــه توانایی یافتن مســیر و جهتِ درست فراگیری ریاضیات و ظرفیت بهره بردن از محیط‌های علمیِ مناســبی که در آن‌ها قرار گرفته، نســبت داد. هر چند، نقش بنیانگذاران المپیاد ریاضی در ایران که به کشــف و تربیت اســتعدادهای کم‌نظیری چون مریم میرزاخانی انجامیده و شاید برخی اســتادان دانشگاه شریف که ممکن است در یافتن مســیرهای درست توســط وی نقشــی ایفا کرده باشند، شایسته تقدیر و ستایش است.

برندگان جایزه‌های ICMI در سال ۲۰۱۳

افسانه مرادعلیزاده، دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید باهنر و مدرس خانه ریاضیات کرمان

نشان فیلیکس کلاین

برندۀ مدال فیلیکس کلاین برای سال ۲۰۱۳، میشل آرتیگ، استاد دانشکدۀ ریاضی دانشگاه پاریس در فرانسه است که در سیزدهمین کنگرۀ بین‌المللی آموزش ریاضی (ICME13) که در سال ۲۰۱۶، شهر هامبورگ واقع در آلمان برگزار می‌شود، به وی اعطا خواهد شد.

این جایزه، به پاس بیش از سی‌سال فعالیت‌های پژوهشی و توسعه‌ای، دستاوردهای تحقیقی برجسته و اثرگذار، و خدمات بی‌نظیر میشل آرتیگ در سطح بین‌المللی، در حوزۀ آموزش ریاضی و توسعه آن، به او تعلق گرفته است. پژوهش‌های آرتیگ ابتدا در حوزۀ ریاضی و به تدریج در اواسط سال ۱۹۷۰، به سمت آموزش ریاضی متمایل شد. او را می‌توان به عنوان یک شخصیت برجسته در توسعه و تقویت مسیرهای جدید در پژوهش در حوزه‌های گوناگون آموزش ریاضی از جمله، تفکر پیشرفته ریاضی، نقش تکنولوژی در فرایند یاددهی- یادگیری ریاضی، توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی، تبیین نظریه‌های آموزش ریاضی و ابداع روش‌شناختی‌های جدید و ایجاد چارچوب‌های نظری نوین در پژوهش‌های آموزش ریاضی شناخت. نظریۀ میشل آرتیگ در مورد استفاده از تکنولوژی و بسط آن در یادگیری ریاضی، دارای ارزش قابل توجهی است.

از پژوهش‌های آرتیگ در سطح بین‌المللی، می‌توان به انتشار بیش از ۱۰۰ مقاله و کتاب و حدود ۴۰ سخنرانی در داخل و خارج از فرانسه، طی ۵ سال گذشته، اشاره کرد. او همچنین، در سال ۱۳۸۷، سخنران افتتاحیۀ هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران در شهرکرد بود.

مشخصه اصلی پژوهش‌های میشل آرتیگ، توجه به تفکر عمیق ریاضی و معرفت‌شناختی است. این جهت‌گیری بازتابی، با توانایی قابل‌توجه او برای ساختن پلی بین موضوعات گوناگون و شناسایی دستورالعمل‌های پربار برای پژوهش، روشن‌کردن و بحث در مورد دیدگاه‌های متفاوت و سرانجام غنی‌سازی چارچوب‌های نظری و ایجاد همکاری در حوزه آموزش ریاضی، سازگار است.

از جمله کارهای برجسته آرتیگ، می‌توان به رهبری قوی او در کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی (ICMI) و نقش اصلی وی در همکاری‌های بین‌المللی در برنامه‌های این کمیسیون و تبیین استراتژی‌های کارامد برای جلب همکاری در کشورهای در حال توسعه اشاره کرد. همچنین، روابط بین‌المللی با یونسکو به سرپرستی او، برای «اتحادیه بین‌المللی ریاضیات» (IMU) و کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی (ICMI)، منجر به تدوین سند «چالش‌ها در آموزش ریاضیات پایه‌ای» شد که به زبان‌های مختلف،

به چاپ رسید. همچنین، میشل به‌عنوان مأمور رابط کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی برای توسعه و راه‌اندازی ظرفیت‌ها و شبکه از برنامه‌ها انتخاب شد. همکاری و فعالیت‌های بین‌المللی او، فراتر از کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی است و می‌توان از او به‌عنوان مشاور پروژه‌های اروپایی فیبوناچی[1] و پریماس[2] با همکاری در توسعه برنامه‌ها با کمک پژوهشگران در اسپانیا، برزیل، کلمبیا و آرژانتین که در محدوده زمانی معین صورت گرفته است، یاد کرد. در سطح ملی، او در مؤسسه ملی تحقیقات (آموزشی) پداگوژیکی در کمیسیون فرانسه برای تدریس ریاضی (کمیسیون فرعی منطقه کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی) و در دانشگاه خود، مشغول به فعالیت بوده است. از خدمات دیگر میشل به جامعه بین‌المللی، به سردبیری **مجلهٔ بین‌المللی کامپیوتر برای یادگیری ریاضی** برای چند سال و سردبیری **دانش‌نامهٔ آموزش ریاضی** و عضویت در هیئت تحریریهٔ چندین مجله پژوهشی معتبر اشاره نمود.

میشل آرتیگ، دکتری خود را در منطق ریاضی در سال ۱۹۷۲ از دانشگاه پاریس کسب کرد و درجهٔ دکترای علوم دولتی خود را در ۱۹۸۴ و واجد شرایط بودن در پژوهش را در سال ۱۹۸۷ از دانشگاه پاریس گرفت. در طول سال‌های ۱۹۹۱-۱۹۷۰، او به‌عنوان مربی و سپس استاد در دانشگاه پاریس، مشغول به فعالیت بود. در سال ۱۹۹۱، استاد مؤسسه تربیت معلم (IUFM) در ریمز شد و تا ۱۹۹۹ در آنجا باقی ماند. همچنین، به‌عنوان مسئول آموزش معلمان ریاضی دبیرستانی انتخاب شد. در ۱۹۹۹، آرتیگ به گروه ریاضی دانشگاه دیدرو پاریس به‌عنوان استاد تمام رفت و رئیس مؤسسهٔ پژوهش در تدریس ریاضیات شد و در نهایت، در سپتامبر ۲۰۱۰ به‌عنوان استاد ممتاز، بازنشسته شد.

هنگامی که میشل آرتیگ به دانشگاه پاریس پیوست، او یکی از اولین اعضای مؤسسه پژوهش در تدریس ریاضیات (IREM) بود که علاقه‌مند به توسعهٔ نظریهٔ موقعیت‌های آموزشی بود و برای رسالهٔ دکتری خود در علوم دولتی، اولین مطالعه را، در مهندسی آموزشی در مدرسه‌های عادی انجام داد. او دریافت که کلاس درس به‌عنوان یک نظام پویا با جریان مدل‌های ضمنی با تکرارپذیری در موقعیت‌های آموزشی، مبارزه می‌کند، بنابراین، اشتیاق او برای نظریه‌پردازی در این زمینه، بیشتر شد. زمانی که علایق تحقیقی او به‌سمت ادغام ابزار دیجیتالی برای یادگیری ریاضیات متوسطه و دانشگاهی تغییر کرد، میشل و تیم تحقیقی‌اش، درباره ایجاد یک چارچوب که از «جدا کردن فن و مفهوم» سنتی جلوگیری می‌کند، فعالیت کرد.

برخی از آثار منتشر شدهٔ میشل آرتیگ عبارت‌اند از: مقاله کلاسیک جدید در استفاده از ابزارهای دیجیتالی در آموزش ریاضی، یادگیری ریاضی در محیط CAS: ایجاد بازتاب درباره ابزار و دیالکتیک بین کار فنی و مفهومی (۲۰۰۲)، مقاله اصلی در مهندسی آموزشی، (۱۹۸۹)، مقاله معرفت‌شناسی آموزشی، (۱۹۹۰) و مطلبی دربارهٔ آموزش و یادگیری در سطح دانشگاه، که چگونه می‌توانیم پژوهش آموزشی را در سطح دانشگاهی یاد بگیریم؟ (۲۰۰۱)، علاوه بر این مقالات، او بر فعالیت بیش از ۴۸ دانشجوی دکتری نظارت داشته است و نظارت بر پژوهش‌ها و تربیت چندین پژوهشگر جوان، مخصوصاً در کشورهای در حال توسعه، در کارنامه وی می‌درخشد. به‌طور خلاصه، میشل آرتیگ با توجه به شایستگی‌های خود مفتخر به دریافت جایزه فیلیکس‌کلاین برای سال ۲۰۱۳ شده است.

نشان هانس فرودنتال

نشان هانس فرودنتال برای سال ۲۰۱۳، به فردریک لونگ[3] از دانشگاه هنگ‌کنگ اعطا می‌شود.

این نشان به پاس پژوهش‌های مربوط به مطالعات تطبیقی در آموزش ریاضی و تأثیرات فرهنگ بر یاددهی و یادگیری ریاضی، به پروفسور فردریک کی.اِس. لونگ از دانشگاه هنگ‌کنگ، تعلق گرفته است. موضوعاتی که او در سطح بین‌المللی مطرح کرده شامل: استفاده از چشم‌انداز میراث فرهنگ مکتب کنفوسیوس در پیشرفت ریاضیات دانش‌آموزان شرق آسیاست که در مطالعات بین‌المللی همچون انجمن بین‌المللی ارزیابی پیشرفت تحصیلی[4](IEA) و روند مطالعه بین‌المللی ریاضیات و علوم و برنامه سازمان همکاری اقتصادی و توسعه[5] (OECD) برای ارزیابی بین‌المللی دانش‌آموزان، توضیح داده شده است. تحقیقات او به گسترش استفاده از چشم‌اندازهای فرهنگی مشابه که ویژگی‌های تدریس کلاس در شرق آسیا را توضیح می‌دهد و اخیراً به تفاوت‌های موجود در مورد دانش معلمان در شرق آسیا و کشورهای غربی می‌پردازد. تحقیقات لونگ به‌طور قابل توجهی، به چشم‌اندازهای فرهنگی آموزش ریاضی کمک می‌کند و چارچوبی را برای درک رابطه بین فرهنگ و آموزش ریاضی ایجاد می‌کند.

فعالیت‌های تحقیقاتی و حرفه‌ای فردریک لونگ، تأثیر مهمی بر سیاست‌ها و شیوه‌های آموزش ریاضی در کشورهای شرق آسیا و فراتر از آن داشته است. او فردِ محوری در ترویج درک معلمان ریاضی در منطقه شرق آسیا و دیگر نقاط جهان بوده است، به عنوان مثال، همکاری او در سیزدهمین مطالعه کمیسیون

بین‌المللی تدریس ریاضی[۶] (ICMI Study13) در مورد «آموزش ریاضیات در سنت‌های مختلف فرهنگی: مطالعه تطبیقی شرق آسیا و غرب» و انتشار پژوهش‌های متعدد در مطالعات تطبیقی از شرق آسیا و غرب، چشمگیر است. در منطقه شرق آسیا، او مسئول سازماندهی برگزاری کنفرانس منطقه‌ای شرق آسیا در آموزش ریاضی بوده و روابط میان افراد را در بسیاری از طرح‌های همکاری در بین محققان آموزش ریاضی در شرق آسیا و غرب، فراهم کرده است. از فردریک لونگ به عنوان سخنران اصلی در کنفرانس‌های آموزش ریاضی در منطقه و سراسر جهان، دعوت شده است. او همچنین، عضو تیم تحریریه دومین و سومین دانش‌نامه بین‌المللی آموزش ریاضی بوده است.

فردریک لونگ مدرک کارشناسی ریاضی خود را در سال ۱۹۷۷ و مدرک کارشناسی ارشد خود را در سنجش و ارزیابی در سال ۱۹۸۴ از دانشگاه هنگ‌کنگ، و مدرک دکتری آموزش ریاضی را در سال ۱۹۹۲ از دانشگاه لندن اخذ کرده است. از سال ۱۹۷۷ تا سال ۱۹۸۲، لونگ به تدریس ریاضیات دبیرستان پرداخت. سپس به درجه مدرسی در دانشگاه هنگ‌کنگ در سال ۱۹۸۲، مدرس ارشد در سال ۱۹۹۲، و استادی در سال ۲۰۰۶ ارتقا یافت. به فردریک لونگ، جایزه بزرگ‌ترین پژوهشگر فولبرایت در سال ۲۰۰۳ برای تحقیق در دانشگاه کالیفرنیا- لوس آنجلس[۷] (UCLA) اهدا شد و از دانشکده آموزش در دانشگاه هنگ‌کنگ، دو جایزه پژوهشگر برجسته در سال ۲۰۰۶ و جایزه استاد راهنمای پژوهشگر برجسته در سال ۲۰۰۸، به او تعلق گرفت.

در اوایل کار علمی خود، علاقه‌مند به مطالعات تطبیقی آموزش ریاضی بود. پایان‌نامه کارشناسی ارشد خود را که بخشی از آن در مجله مطالعات آموزشی در ریاضی (۱۹۸۷) منتشر شد، به مقایسه برنامه درسی ریاضی در گوانگجو و هنگ‌کنگ پرداخته بود. با این علاقه، تحقیقات خود را در دوره دکتری توسعه داد که به مقایسه برنامه درسی ریاضی در چین، هنگ‌کنگ، و انگلستان می‌پردازد. در ۱۹۹۰، فردریک لونگ در سومین مطالعه بین‌المللی ریاضیات و علوم[۸] (TIMSS) به‌عنوان محقق اصلی و ملی، در تحقیقات هماهنگ برای هنگ‌کنگ شرکت کرد. او چارچوب مناسبی برای تفسیر عملکرد بهتر کشورهای شرق آسیا در سومین مطالعه بین‌المللی ریاضیات و علوم، و توجیه فرهنگی مناسبی با استفاده از پژوهش دکترای خود، ارائه کرد. این چارچوب، توضیحی در مورد کشورهای شرق آسیا آمده است که به‌عنوان مبنایی برای توضیح در مورد هویت آموزش ریاضی است که در بسیاری از اسناد ارائه شده، بیان شده است که از جمله، می‌توان به **در جست‌وجوی هویت شرق آسیا در آموزش ریاضی** (۲۰۰۱) اشاره نمود.

پژوهش فردریک لونگ، تکامل یافته مطالعه تطبیقی توسعه دانش‌آموزان در ریاضی است که به مطالعه تطبیقی تدریس ریاضی در کشورهای مختلف می‌پردازد و نشان می‌دهد که برای گسترش نقش فرهنگ بر پیشرفت ریاضی، به تفسیر نتایج حاصل از مطالعات کلاس درس نیازمند است. انتشار اولیه بازتاب این جهت‌گیری‌ها، در مقاله سال ۱۹۹۵ او بود که به کلاس درس ریاضی در پکن، هنگ‌کنگ و لندن می‌پردازد. سپس در دو مطالعه ویدئویی بین‌المللی کلاس درس درگیر می‌شود که مطالعه ویدئویی سومین مطالعه بین‌المللی ریاضیات و علوم ۱۹۹۹ و مطالعه چشم‌انداز یادگیرندگان، منجر به توسعه عمیق‌تری از چشم‌انداز فرهنگی شده است. او بیشتر در مورد ویژگی‌های میراث فرهنگی مکتب کنفوسیوس در رابطه با آموزش و یادگیری ریاضی می‌پردازد که در ارائه‌های علمی خود در سال ۲۰۱۲ و در میزگرد عمومی ICME-12 ، به آن پرداخته است. سهم قابل توجه پژوهش‌های فردریک لونگ، شامل ۲۱ پروژه تحقیقی و بیش از ۶۰ کتاب، بخش‌هایی از کتاب، و مقالات در مجلات علمی- پژوهشی است.

کارهای فردریک لونگ، دریچه جدیدی به دیدن تفاوت در پیشرفت ریاضی و شیوه‌های کلاس درس از دیدگاه فرهنگ باز کرده است. دستاورد برجسته او در پژوهش، گواهی بر شایستگی فردریک لونگ برای دریافت مدال هانس فرودنتال برای سال ۲۰۱۳ است.

پی‌نوشت‌ها

1.Fibonacci
2. PRIMAS
3. Frederick koon shing LEUNG
4. The International Association for the Evaluation of Educational Achievement
5. The Organisation for Economic Co- operation and Development
6. ICMI study 13
7. University of California, Los Angeles
8. Third International Mathematics and Science Study

منابع

1. http://www.mathunion.org/icmi.
تاریخ بازیابی ۲۸ November ۲۰۱۳.
2. http://www.lar.univ-paris-diderot.fr/user/103.
تاریخ بازیابی ۲۸ November ۲۰۱۳.
3.http://web.edu.hku.hk/academic_staff.php?staffId=fredericklEung.
تاریخ بازیابی۲۸November ۲۰۱۳.

نامه‌های رسیده

مجله رشد آموزش ریاضی با دریافت مقاله‌ها، روایت معلمان، دیدگاه‌ها، نقد و بررسی کتاب از سوی خوانندگان گرامی، پربارتر خواهد شد. تا پایان تیر ۱۳۹۳، نامه‌ها و مطالب دوستان زیر، به‌دست ما رسیده است. ضمن تشکر از همگی آن‌ها، منتظر دریافت نامه‌های شما هستیم.

- سیده کبری مصطفوی، از گلستان؛
- مصیب خلخالی، از زنجان؛
- مریم شاه‌محمدی، از تهران؛
- رضوان خیرخواهان، از تهران؛
- آذر پورنگ، از زنجان؛
- غلام حسین انتصاری فومنی، از زنجان؛
- مجتبی سلیمی، از کردستان؛
- اشرف صفابخش‌چکوسری، از گیلان؛
- حمید دافعی، از زنجان؛
- محسن فرخی، از خراسان جنوبی؛
- محمد شیرچیان، از اصفهان؛
- فرهاد غلامی، از ایلام؛
- فرزانه حیدرزاده، از مازندران؛
- فرشاد نقی یاسوری، از قزوین.

IN THE NAME OF ALLAH

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning
Publications & Teaching Technology Office

117 Roshd
Mathematics
Education Journal

رشد آموزش ریاضی

vol.32 no.1 2014 ISSN:1606-9226

www.roshdmag.ir
e-mail: riyazi@roshdmag.ir
P. O. Box: Tehran 15875 - 6585

اِما کاستلنوو معلم ریاضی
۱۹۱۳-۲۰۱۴

اِما کاستلنوو[1] در ۱۹۱۳ در شهر رم به دنیا آمد و در آوریل ۲۰۱۴ در همین شهر درگذشت. زندگی طولانی و موفق او می‌تواند کتابی را پر کند، امّا در اینجا می‌خواهیم تنها به بخش کوچکی از فعالیت‌های او در CEIEAM [2] اشاره کنیم.

ماجرای او به‌عنوان یک معلم ـ پژوهشگر در عرصهٔ آموزش ریاضی در ۱۹۴۶ آغاز شد، با مقالهٔ «روش شهودی تدریس هندسه به دورهٔ اول دبیرستان[3]» جایی که می‌توان ایده‌های اولیهٔ او را که بعدها در کتاب درسی «هندسهٔ شهودی[4]» (۱۹۴۹) توسعه پیدا کرد دید. این کتاب درسی بود که فرصت همکاری او را با CEIEAM فراهم کرد، به گفتهٔ خود او: «در ۱۹۵۱ گتنیو[5] که او را قبلاً ندیده بودم، با من تماس گرفت. او فقط کتاب درسی هندسهٔ دورهٔ اول دبیرستان مرا دیده بود و متوجه شده بود که ما اهداف مشترک مهمی را دنبال می‌کنیم. گتنیو با من در مورد CEIEAM صحبت کرد و پیشنها کرد که عضو کمیسیون بشوم. من بسیار علاقه‌مند شدم، اما اولین بار در ۱۹۵۴ بود که فرصتی دست داد تا در یک گردهمایی CEIEAM شرکت کنم.

من از همان جلسهٔ اول تحت تأثیر محیط دوستانه و خوشایند آن جا قرار گرفتم، استادان دانشگاه، معلمان دبیرستان‌ها، ریاضیدانان و پژوهشگران علوم تربیتی با یکدیگر احساس برابری می‌کردند و با اشتیاقی که مسری بود کار می‌کردند...»

تِم یازدهمین گردهمایی CEIEAM در ۱۹۵۸ «مواد درسی» بود و اِما به این مناسبت روشی را برای تدریس مقاطع مخروطی به دانش‌آموزان دورهٔ اول دبیرستان ارائه داد، در کلاس درس او دانش‌آموزان مدرسهٔ ایتالیایی مادرید نیز شرکت داشتند.

پس از این گردهمایی در ۱۹۵۸، CEIEAM کتابی را با گردآوری مقاله‌هایی از متخصصین پیشـرو آموزش ریاضی منتشر کرد با عنوان «مطالب ریاضی برای تدریس[6]» که در آن مقالهٔ اِما کاستلنوو با عنوان «شیء و فعالیت در تدریس هندسهٔ شهودی[7]» نیز دیده می‌شد. این کتاب به زبان‌های بسیاری از جمله ایتالیایی ترجمه شد.

پس از آن اِما بیشتر فعالیت خود را در CEIEAM متمرکز کرد. او معلمان را از سراسر دنیا به کنفرانس‌های جـذاب خود می‌کشـید و در این میان معلمان جوان انگیزه‌های قوی بـرای آزمودن موضوعات و روش‌های جدید پیدا می‌کردند. اِما منشــاء و مبدع فعالیت بسیاری در CEIEAM بود از جمله نوشتن کتاب «تعلیم ریاضیات[8]» در ۱۹۶۳، کتاب‌های درسی او که هنوز در دبیرستان‌های ایتالیا تدریس می‌شود و نمایشگاه‌هایی که او چندین بار توسط دانش‌آموزان ایتالیایی و آفریقایی ترتیب داد و در آن دانش‌آموزان موضوعات ریاضی را برای بازدیدکنندگان توضیح می‌دادند.

پی‌نوشت‌ها

1. Emma Castelnuovo
2. The international commission for the study and improvement of Mathematics teaching

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد برای رشد

مجلات فصل‌نامهٔ رشد ویژهٔ معلمان، مربیان و مشاوران مدارس متوسطه اول و دوم

www.roshdmag.ir

نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید سلیمی)

تلفن: ۰۲۱-۸۸۴۹۰۲۲۸   نمابر: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۷۸