

# ریاضی

ISSN: 1735-4951



وزارت آموزش و پرورش  
سازمان پژوهش و پژوههای پژوهشی  
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

دوره بیست و هفتم

شماره ۱۰۹

فروردین ۱۳۹۷

صفحه ۴۸

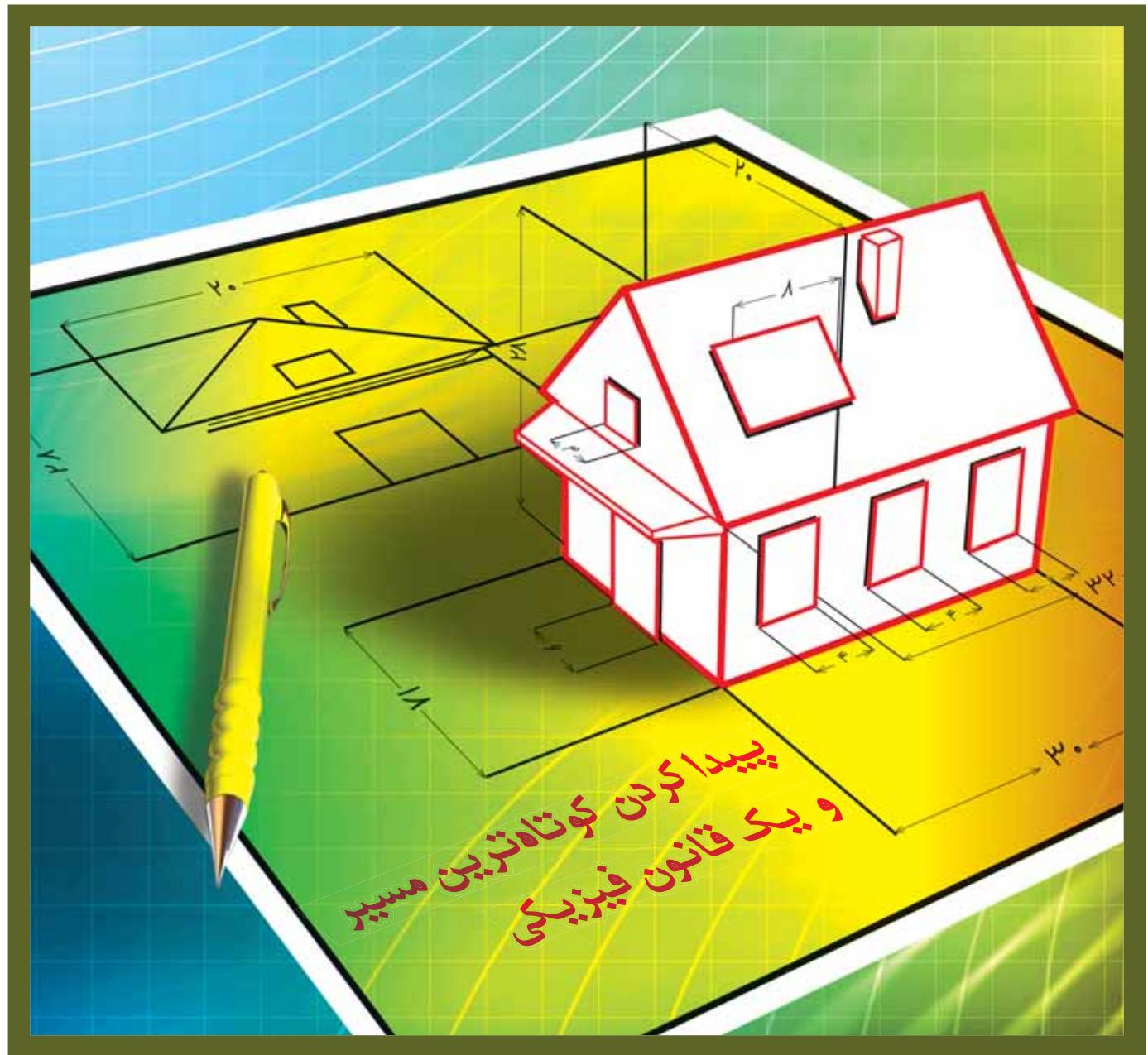
۱۱۰۰۰ ریال

رشد

V

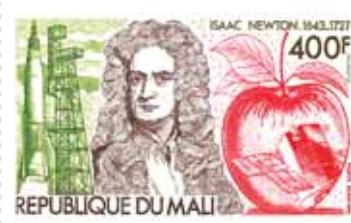
ماهانامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی  
برای دانش‌آموزان دوره متوسطه ۲

www.roshdmag.ir  
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶



تاریخ‌های پالیندروم در سال‌های چهار رقمی  
قعنیهٔ پیک در حالت‌های خاص  
اثبات هندسی رابطهٔ هرون  
فرهاد کوچولو و دوستانش در اردی نتیری  
کاربرد ریاضیات دبیرستان در اقتصاد

# آیزاک نیوتن



«آلبومریاضیات» ستونی در مجله ریاضی رشد برهان دوره دوم متواتر است که به معرفی و ارائه تمثیلهای یادبود، اسکناس‌ها و مدال‌ها، تندیس‌ها، سردیس‌ها، بناهای یادبود... که به افتخار ریاضی‌دانان ایران و جهان منتشر و ساخته شده‌اند، می‌پردازد. هدف آن آگاه ساختن ریاضی‌آموزان و ریاضی‌ورزان با جایگاه پراهمیت ریاضیات و ریاضی‌دان‌ها به روش غیرریاضیاتی و کاربردی در زندگی روزانه انسان‌هاست. در هر شماره، به منظور آشنایی خوانندگان با ریاضی‌دان مورد نظر به ارائه سطرهایی درباره‌وى پردازیم و سپس موضوع اصلی مقاله، یعنی آلبوم ریاضیات را در بی‌معی آوریم.

مجسمه آیزاک نیوتن  
در موزه تاریخ طبیعی  
دانشگاه آکسفورد



آیزاک نیوتن، ریاضی‌دان،  
اخترشناس، فیزیک‌دان و فیلسوف  
بی‌بدیل انگلیسی است که به  
عقیده بسیاری از کارشناسان صاحب  
بزرگ‌ترین فکر و ذهن علمی در طول  
تاریخ بشریت است. نیوتن با بنیان‌گذاری  
قوانین حرکت اجسام، قانون جهانی گرانش،  
حساب دیفرانسیل و انتگرال، و همچنین ارائه  
برهان‌های ریاضی برای اثبات قوانین حرکت  
سیاره‌ای کپلر، بر روند پیشرفت تحولاتی که  
در آن روزگار به انقلاب علمی در اروپا شهرت  
یافت، تأثیرات عمیق و شگرفی گذاشت.

۱. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۵۹ در لهستان
۲. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۵۷ در فرانسه
۳. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۷۷ در جمهوری مالی
۴. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۸۷ در شاهزادنشین موناکو
۵. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۷۷ در جمهوری بنین



ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی  
برای دانش‌آموزان دوره متوسطه ۲

## رشد

# ریاضی

- دوره بیست و هفتم
- شماره پی‌درپی ۱۰۹
- فروردین ۱۳۹۷
- شماره ۷
- صفحه ۴۸
- ۱۱۰۰ ریال



وزارت آموزش و پرورش  
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی  
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی  
شرکت‌اسلت

مدیر مسئول: محمد ناصری

سودبیرون: حمیدرضا امیری

هیئت تحریریه:

محمد هاشم رستمی  
دکتر ابراهیم روحانی  
میرشهرام صدر  
هوشنگ شرقی  
سید محمد رضا هاشمی موسوی  
غلامرضا یاسی پور

دکتر محزم زاد ابردموسی  
حسین نامی سعی

حسین کریمی

محمود اووزنی  
احسان یارمحمدی  
ازاده فرزان

مدیر داخلي: هوشنگ شرقی  
ویراستار ادبی: بهروز راستانی  
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غذانی  
تصویرگر: میثم موسوی

وبگاه:  
[www.roshdmag.ir](http://www.roshdmag.ir)

پیام‌نگار:  
[Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir](mailto:Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir)  
نشانی وبلاگ مجله:  
<http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2>

پیام‌گیر نشریات رشد:

۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۸۲  
پیامک:

۰۳۰۰۸۹۹۵۰۶  
roshdmag :

شانی دفترچه‌له:  
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن دفتر مجرمه:  
۰۲۱ - ۸۸۴۹۰۲۳۴

شانی امور مشترکین:  
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱

تلفن امور مشترکین:  
۰۲۱ - ۸۸۶۶۷۳۰۸

شمارگان:  
۰۷۵۰۰ تنسخه

## خوانندگان رشد برها



شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و  
مطلوب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات  
رشد به نشانی زیر بررسی‌ید:  
• نشانی: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵-۹۵۶۷  
• تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

ریاضی لذت‌بخش در کلاس خاتم جمی‌سیدی (بخش ۳: بیشترین مساحت با محیط مفروض) / آن‌هایتا کمیجانی ۳

حرف، اول  
استفاده بهینه از زمان تدریس / سردبیر ۲

### آموزشی

تاریخ‌های پالیندروم در سال‌های چهار رقمی / عباس قلعه‌پور اقدم ۶

پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر و یک قانون فیزیکی / سیمین افروزان ۱۴

کاربرد ریاضیات دبیرستان در اقتصاد / جابر مختاری دهقدادی ۱۸

پای تخته / دکتر محزم زاد ابردموسی ۲۶

قضیهٔ پیک در حالت‌های خاص / خشایار کاویانپور ۳۰

اثبات هندسی رابطهٔ هرون / مراد کرمی شهرمندی ۳۳

ریاضیات در چند دقیقه / ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور ۳۴

چند مسئله از حد در زمینه‌های گوناگون / دکتر محزم زاد ابردموسی ۳۶

مسائل برای حل ۴۰

### ریاضیات در سینمای جهان

سرزمین ستاره‌ها: ابونصر محمد فارابی - گام به‌سوی آگاهی و دوراندیشی / احسان یارمحمدی ۱۰

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی ۲۴

مجموعه‌ها / حمیدرضا امیری

### گفت و گو

گفت‌و‌گوی مجله ریاضی رشد برها با محمد کاظم فقیه خراسانی - ریاضیات خواندنی نیست! / محمدرضا امیری ۱۶

### ایستگاه‌اندیشه و ادب ریاضی

فرهاد کوچولو و دوستانش در اردوی تفریحی عید نوروز / هوشنگ شرقی ۱۳

ایستگاه اول: سن پدربرزگ کاوه! ۱۳

ایستگاه دوم: سن پدربرزگ بابک! - وصیت عجیب پدربرزگ مازیار! ۲۲

ایستگاه سوم: وصیت پدربرزگ شهریار! ۲۹

ایستگاه چهارم: وصیت پدربرزگ جمشیدا! ۳۹

ایستگاه پنجم: پدربرزگ بدین و نوہ فضول! ۴۵

پرسش‌های پیکار‌جوا ۴۴ - ۳۲ - ۱۷ - ۱۵ - ۹

### پاسخ‌ها

راهنمای حل مسائل ۴۲

پاسخ پرسش‌های پیکار‌جوا ۴۶

پاسخ معماهای ایستگاه‌اندیشه و ادب ریاضی ۴۷

مجله رشد برها متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:  
○ نگاش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث ریاضی در کتاب‌ها)  
○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان  
○ طرح معماهای ریاضی نگارش یا ترجمه مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر با مدرسه شما... .

• مجله در حق، اصلاح، حذف و اضافه مقاله‌ها ازد است. • مقاله‌های دریافتی، باشد خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.  
• مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. • استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها با مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ منعی ندارد.  
• مقالاتی که از طریق پیام‌برگ مجله ارسال می‌نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید. • در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوارگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمایید.

## استفاده بینه از زمان تدریس

زمان تدریس در کلاس های درس ریاضی معمولاً از ۷۵ تا حد کثر ۹۰ دقیقه برای هر جلسه در نوسان است. پند سال قبل پژوهشی توسط متخصصان هوژه های گوناگون اینام شده بود تا زمان مفید یادگیری در سینم و ووهای تمهیلی متفاوت را مشخص کنند. این پژوهش نشان دارد، برای دوره ۶۰ متوسطه، یعنی پایه های ۱۰ و ۱۱، بهترین بازه زمانی که یادگیری در آن ماندگاری بیشتری دارد، از (قایق اولیه کلاس تا حد کثر ۵۰ دقیقه بعد است. بنابراین اگر این پژوهش را ملاک قرار دهیم، در کلاس ریاضی با میانگین حدود ۸۰ دقیقه، بین ۲۰ تا ۳۰ دقیقه (اشن آموزان آپه را یاد می کنند (اگر یاد بگیرند)، فیلی زود از دست می گیرند) با معنی اتلاف از زمان است. با توجه به معنی اتلاف از زمان و زمان است.

(قیچه ابتدای کلاس حد کثر توجه و تمرين خود را به کار برد و پناهه ساعت کلاس درس ریاضی شما در همان ۵۰ دقیقه ایک ساعت بیشتر است از (بیرون مفترم خواهش کنید که در ۲۰ الی ۳۰ دقیقه پایانی هر جلسه رفع اشکال و طرح مسائل عمومی تر پیروز، تا شما بتوانید حد کثر استفاده را از زمان ضفور در کلاس درس ببریم و با این روش و براساس نتایج این پژوهش زمان ماندگاری مطالعی را که یاد می کنید افزایش داده و از اتلاف از زمان بگیرید.

این روش برای مطالعه شما در منزل نیز قابل اجرا می باشد؛ یعنی شما در منزل نیز سعی کنید زمانی را که برای مطالعه یک موضوع درس اختصاصی می گذیرید حد کثر ۵۰ دقیقه باشد و بعد از آن یک استراحت کوتاه (اشته باشید تا برای زمان مطالعه بعدی آماده شویم.

همبرخان امیری  
سربر

# ریاضی لذت‌بخش

## در کلاس خانم جمشیدی

### بخش ۲ بیشترین مساحت با محیط مفروض

اشاره

کلاس‌هایش را دوست دارم. خانم جمشیدی را می‌گوییم، دبیر ریاضی‌مان. تفاوت کلاس‌های ریاضی خانم جمشیدی با بقیه کلاس‌هاییمان این است که مطالب ریاضی را با روشنی جذاب و سرگرم‌کننده درس می‌دهد. به علاوه، به ما اجازه می‌دهد روی مسائل خوب فکر کنیم و نظراتمان را بیان کنیم.

اوایل از روش تدریس او تعجب می‌کردیم و متوجه نمی‌شدیم که در حال درس دادن است. روش او بسیار جدید و متفاوت بود. حتی گاهی فکر می‌کردیم در حال صحبت کردن معمولی هستیم. از ریاضی خشک و دست‌نیافافتنی خبری نبود و مسائل حل نشدنی جای خود را با مسائل واقعی حل شدنی عوض کرده بودند. بعد از مدتی متوجه شدیم؛ بیشتر از هر کلاس ریاضی دیگری در کلاس خانم جمشیدی «ریاضی» یاد می‌گیریم: «ریاضی لذت‌بخش!» به همین خاطر تصمیم گرفتم کلاس‌های ریاضی‌مان و تمام صحبت‌های ردوبل شده بین بچه‌های کلاس با دبیر خلاقمان، خانم جمشیدی را مکتوب کنم و با دیگران سهیم شوم. مطمئن هستم شما هم از این مطالب لذت می‌برید.



آناهیتا کمیجانی  
دبیر ریاضی رودهن

#### جلسه دوم: شنبه ۲۰ آبان ۱۳۹۶

امروز می‌خواهم جلسه دوم «ریاضی لذت‌بخش» و صحبت‌هاییمان را در آن جلسه با شما سهیم شوم. امیدوارم شما هم مانند ما عمیقاً این مطالب را یاد بگیرید و از آن لذت ببرید.

\*\*\*

**خانم جمشیدی** مطابق معمول با لبخندی وارد کلاس شد. پس از سلام و احوال‌پرسی گفت: «امروز می‌خواهیم به یک کشاورز کمک کنیم». ما با تعجب به یکدیگر نگاه کردیم. خانم جمشیدی ادامه داد: «اگر یک کشاورز بخواهد حصاری مستطیلی با استفاده از ۴۰۰ متر نرده درست کند، طول و عرض آن چقدر باید باشد؟»

من سریع گفتم: «یک مربع با ابعاد ۱۰۰ متر و مساحت ۱۰۰۰۰ متر مربع! اما آیا این

دهیم چه می‌شود؟

من گفتم: «در این صورت عرض باید  $a-x$  باشد تا محیط  $4a-4x$  شود». باران هم حرف مرا تکمیل کرد و گفت: «پس مساحت هم  $(a-x)(a-x)$  یا همان  $a^2-x^2$  می‌شود». مهتاب گفت: «یعنی از  $a^2$  کمتر می‌شود، مگر اینکه  $x=0$  بشود و هر چقدر  $x$  بزرگ‌تر باشد، مساحت کوچک‌تر می‌شود.»

موضوعی به نظر من رسید: «حتی اگر  $x$  منفی باشد؟ البته منطقی نیست که  $x$  منفی باشد، چون ما  $a+x$  را طول مستطیل گرفتیم.»

خانم جمشیدی حرف مرا تأیید کرد و گفت: «بله و در هر حالتی با  $x$  منفی هم  $a^2$  همچنان مثبت می‌شود. مربع، مستطیلی است با بیشترین مساحت به ازای محیط مفروض.

بهترین حالت است؟»

مهتاب هم فکری کرد و گفت: «او باید مستطیلی به ابعاد ۱۵۰ متر در ۵۰ متر بسازد. البته مساحت زمینش در این حالت فقط ۷۵۰۰ متر مربع می‌شود.»

باران هم گفت: «اگر ابعاد ۱۰۰ متر در ۹۹ متر باشند، چطور؟ مساحت هم ۹۹۹۹ متر مربع می‌شود.»

مهتاب گفت: «به نظر می‌آید مربع بزرگ‌ترین مساحت را دارد و مستطیل‌های دیگر مساحت‌های کوچک‌تری دارند. اما چطور می‌شود این را ثابت کرد؟» خانم جمشیدی با نگاهی مهربان گفت: «بیایید محیط را  $4a$  بنامیم به جای  $400$  متر. این طوری حالتی کلی را در نظر گرفته‌ایم. پس اگر زمین یک مربع بود، اضلاع آن  $a$  می‌شد. حالا اگر به جای طول،  $a+x$  قرار

پس حاصل ضرب بزرگ‌تر می‌شود». خانم جمشیدی هم گفت: «دقیقاً همین طور است و اگر  $lh$  افزایش پیدا کند، حاصل ضرب همه عددها چه می‌شود؟» مهتاب جواب داد: «آن هم افزایش پیدا می‌کند، البته در صورتی که حاصل ضرب بقیه عددها مثبت باشد».

خانم جمشیدی ادامه داد: «درست است و به همین دلیل هم ما تأکید می‌کنیم که عددهای مربوطه همه مثبت باشند. بنابراین بازدیدیک کردن عددهای انتهایی  $a$  و  $h$  به طرف هم به ازای یک مقدار مساوی، یکی از آن‌ها را مساوی  $a$  به دست می‌آوریم و بعد دست نگه می‌داریم». باران گفت: «پس حالا عدد غیر  $a$  یک کمتر داریم».

مهتاب که فکرش مشغول شده بود، پرسید: «پس حالا ممکن است همه عددها با  $a$  مساوی باشند یا نه، دوباره این روند را با کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عددها ادامه می‌دهیم؟»

خانم جمشیدی جواب داد: «دقیقاً! و عددها دیگر آن عددهای دفعه قبل نیستند. در هر مرحله حاصل ضرب بیشتر می‌شود و با اولین عددی که مساوی  $a$  بشود هم روند را متوقف می‌کنیم».

من هم همین طور نتیجه‌گیری کردم: «پس بالاخره همه عددها مساوی  $a$  می‌شوند و حاصل ضرب هم می‌شود  $a^n$  که بزرگ‌ترین حاصل ضرب است. پس ثابت شد!»

خانم جمشیدی گفت: «بله، این اثبات متعلق به پروفسور پولیاست و برای حل مسائل ماکزیمم‌سازی به کار می‌رود. مثلاً فرض کنید شما می‌خواهید یک جعبه مکعب مستطیل شکل را طراحی کنید که بیشترین حجم را داشته باشد و مساحت آن عدد مشخصی باشد.

جعبه باید چه شکلی باشد؟»

باران گفت: «حدس می‌زنم باید مکعب باشد، اما چطور می‌شود ثابت کرد؟» خانم جمشیدی در جواب باران گفت:



مساوی  $a$  باشند، پس حاصل ضربشان  $a^n$  است».

خانم جمشیدی ادامه داد: «درست است. حال اگر عددها مساوی نباشند، حداقل یک عدد کمتر از  $a$  و حداقل یک عدد بیشتر از  $a$  هست، به شرطی که  $a$  میانگین آن‌ها باشد. فرض کنیم کوچک‌ترین عدد را  $1$  و بزرگ‌ترین عدد را  $n$  بنامیم. اگر  $1$  را بزرگ‌تر و به همان میزان  $h$  را کوچک‌تر کنیم، حاصل ضرب  $lh$  چه می‌شود؟»

من گفت: «شبیه ساختن یک مستطیل با محیط ثابت است که تقریباً مربع باشد.

به زبان ریاضی، اگر دو متغیر، مجموع ثابت داشته باشند، بیشترین مقدار

حاصل ضرب آن‌ها وقتی به دست می‌آید که مقادیر آن‌ها مساوی باشد».

مهتاب پرسید: «برای بیش از دو عدد هم این موضوع صادق است؟»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «بله، اگر همه عددها مثبت باشند، فرض کنید شما عدد دارید با حاصل جمع  $na$  که  $a$  میانگین آن‌هاست. اگر همه عددها مساوی آن باشند،

حاصل ضرب آن‌ها چقدر می‌شود؟»

باران متفکرانه گفت: «همه عددها باید

«بسیار خب، ابعاد را  $l$  و  $w$  و  $h$  می‌نامیم.

مساحت جانی و حجم چقدر می‌شود؟»

مهتاب گفت: «حجم  $l \cdot w \cdot h$  می‌شود و

مساحت جانی هم  $2lw + 2lh + 2wh$  است.»

خانم جمشیدی گفت: «درست است و

چون مساحت جانی ثابت است، پس مقدار

مقدار  $lw + lh + wh$  هم ثابت است. حالا اگر سه

مقدار  $l, w, h$  را به جای اینکه با هم

جمع کنیم، در هم ضرب کنیم، چی به دست

می‌آید؟»

من گفتم: «می‌شود  $l^2w^2h^2$  که مربع

حجم است.»

مهتاب هم ادامه داد: «چه جالب شد!

پس اگر مقدارهای  $l, w$  و  $h$  را مساوی

فرض کنیم، مربع حجم بیشترین مقدار

خودش را اختیار می‌کند و بنابراین حجم هم

بیشترین مقدار خودش را دارد.»

خانم جمشیدی گفت: «پس باید طول،

عرض و ارتفاع را مساوی فرض کنید و یک

مربع به دست می‌آید.»

باران گفت: «یک سؤال درباره مسئله

کشاورز دارم که می‌خواست یک حصار

مستطیلی درست کند. حصار هر شکلی

می‌تواند باشد یا نه فقط مستطیل؟

می‌تواند شکل دیگری داشته باشد با مساحتی

بزرگ‌تر از مربع؟»

من گفتم: «فکر می‌کنم باید دایره‌ای

شکل باشد! اما حدس می‌زنم اثباتش سخت

باشد.»

خانم جمشیدی گفت: «درواقع با آنچه

که قبل انجام داده‌اید، خیلی سخت نیست.

حداقل نشان داده‌اید هر شکلی که دایره

نیست، می‌تواند با یک متغیر به شکلی تبدیل

شود که مساحت بیشتری با محیط مشابه

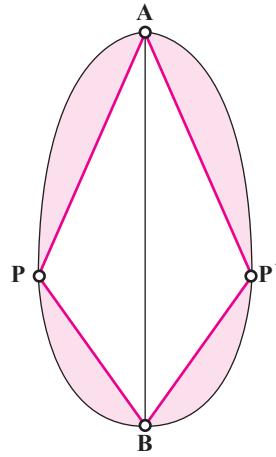
داشته باشد. فرض کنید کل طول حصار را

$L$  بنامیم، از نقطه دلخواه  $A$  شروع می‌کنیم

و فاصله  $\frac{1}{2}L$  را طی می‌کنیم تا به نقطه  $B$

بررسیم. حال یک خط مستقیم  $AB$  تصور

کنید و دو طرف حصار را در نظر بگیرید.



خانم جمشیدی نگاهی به من کرد و گفت: «حالا تصور کنید قسمت‌های هاشور خورده در شکل از تخته سه‌لا ساخته شده‌اند و در نقاط  $A, P, B$  و  $P'$  آزادانه به هم متصل‌اند، با فضای خالی  $APBP'$  که شما می‌توانید، با قاعده  $AB$  را به طرف هم بکشید یا از هم جدا کنید.»

مهتاب گفت: «پس مساحت تخته سه‌لا ثابت می‌ماند، ولی مساحت داخلی تغییر می‌کند.»

خانم جمشیدی جواب داد: «و قسمت داخلی از دو مثلث همنهشت  $APB$  و  $AP'B$  تشکیل شده است.»

بهار پرسید: «در هر مثلث دو ضلع ثابت است، ولی زاویه‌های رأس‌های  $P$  و  $P'$  می‌توانند تغییر کنند، درست است؟»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «بله، حال شما چطور می‌توانید از مساحت مثلث استفاده کنید؟»

باران گفت: « $AP$  را به عنوان قاعده می‌گیریم و ارتفاع را از رأس  $B$  بر  $AP$  عمود می‌کنیم.»

مهتاب گفت: «ارتفاع ممکن است کوتاه‌تر از  $BP$  باشد، مگر وقتی که زاویه  $P$  قائمه باشد، یعنی اگر زاویه  $P$  قائمه نباشد، با حرکت دادن نقطه‌ها به طرف هم یا دور کردن نقطه‌ها از هم کاری می‌کنیم تا زاویه  $P$  قائمه بشود و این حرکت مساحت هر مثلث را افزایش می‌دهد.»

خانم جمشیدی هم نتیجه‌گیری پایانی را با لبخند گفت: «دقیقاً همین طور است که می‌گویی و این یعنی کل مساحت داخلی منحنی بدون تغییر محیط افزایش پیدا می‌کند و این موضوع نشان می‌دهد که منحنی‌های غیردایره هرگز مساحت ماکزیمم را به ازای محیط مفروض ندارند.»

\*\*\*

امیدوارم که از حل این مسئله زیبا لذت برده باشید.



Abbas Qalhe-Pour Aghdam  
دبير رياضي اروميه

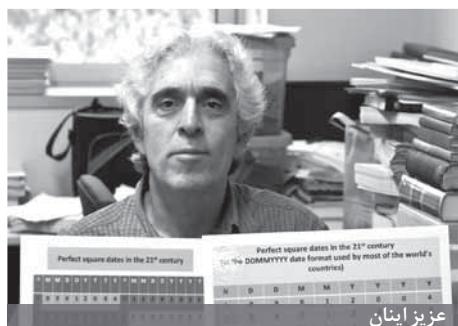
# تاریخ‌های پالیندروم در سال‌های چهار رقمی

مقدمه

## نمایش تاریخ میلادی

نمایش تاریخ سال‌های چهار رقمی در اغلب کشورهای دنیا با فرمت DD/MM/YYYY (یا: DD-MM-YYYY و یا: DD.MM.YYYY) انجام می‌پذیرد که در آن دو رقم اول (DD)، عدد روز (D) حرف اول (Day)، دو رقم بعدی (MM) عدد ماه (M) حرف اول (Month) و چهار رقم آخر (YYYY) عدد سال (Y) حرف اول (Year) را نشان می‌دهند. (ایالات متحده آمریکا از جمله محدود کشورهایی است که از مدل MM/DD/YYYY استفاده می‌کند که درواقع مکان ماه و روز جایه‌جا شده است).

اگر ممیزهای (/. ./. یا -) بین رقم‌ها را حذف کنیم، تاریخ مربوط به یک شبانه‌روز در سال‌های چهار رقمی، یک دنباله عددی هشت رقمی به فرم DDMMYYYY خواهد بود. مثلاً تاریخ‌های هیجدهم مارس دو هزار و پانزده و پنجم دسامبر ۱۹۹۷ به ترتیب با ۱۵۰۳۲۰ و ۰۵۱۲۱۹۹۷ نمایش داده می‌شوند. روز تولد مارتین گاردنر<sup>۱</sup> مشهورترین ریاضی دان آمریکایی قرن بیستم که در زمینه معماهای ریاضی کار می‌کرد، بیست و یکم اکتبر هزار و نهصد و چهارده است که بهصورت ۲۱۱۰۱۹۱۴ خواهد بود.



واژه انگلیسی «Palindrome» (پالیندروم) که معادل فارسی آن «واروخته» یا «قلب مستوی» است، به کلمه‌ها، جمله‌ها یا عده‌های اطلاق می‌شود که مقلوبشان با خودشان یکی است. یعنی از دو طرف (راست به چپ و چپ به راست) دقیقاً به یک شکل خوانده می‌شوند. بهتر است در فارسی آن‌ها را «خودمقلوب» بنامیم. نمونه‌هایی از کلمه‌های خودمقلوب عبارت‌اند از: «گرگ، رادر، شیپش، مادام».<sup>۲</sup>

نمونه‌هایی از عده‌های خودمقلوب عبارت‌اند از: «۲۲، ۳۴۳، ۸۷۷۸، ۲۰۱۳۳۱۰۲».

تعداد عده‌های پالیندروم زیاد نیست. با اصل شمارش به راحتی مشخص می‌شود که به ترتیب ۹ و ۹۰ عدد دورقمی و سرهرقمی خودمقلوب وجود دارد. این فراوانی به‌طور نسبی با بالا رفتن تعداد ارقام کاهش می‌یابد.

از آنجا که نمایش تاریخ ایام به سیله یک سلسه از عده‌ها صورت می‌پذیرد، در این مقاله موضوع تاریخ‌های خودمقلوب سال‌های چهار رقمی، به عنوان زیرمجموعه‌ای از عده‌های هشت‌رقمی، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بخش اول که ترجمه و تشریح است، این موضوع را در تاریخ میلادی مورد بررسی قرار می‌دهد و در ادامه تاریخ‌های خودمقلوب هجری خورشیدی مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در اینجا به عنوان یادآوری، ماههای میلادی را به ترتیب با ذکر تعداد روزها می‌آوریم:

۱. زانویه (۳۱ روز): ۲. فوریه (۲۸ روز) و در سال‌های کبیسه ۲۹ روز؛ ۳. مارس (۳۱ روز)؛ ۴. آوریل (۳۰ روز)؛ ۵. مه (۳۱ روز)؛ ۶. ژوئن (۳۰ روز)؛ ۷. ژوئیه (۳۱ روز)؛ ۸. اوت (۳۱ روز)؛ ۹. سپتامبر (۳۰ روز)؛ ۱۰. اکتبر (۳۱ روز)؛ ۱۱. نوامبر (۳۰ روز)؛ ۱۲. دسامبر (۳۱ روز)

**کلیدواژه‌ها:** پالیندروم، عزیز اینان، تقویم میلادی، تقویم خورشیدی، اصل شمارش

## معرفی نویسنده

عزیز اینان، متولد ترکیه، دکترای کامپیومنیک از «دانشگاه استنفورد»<sup>۱</sup> و در حال حاضر استاد «دانشگاه ایالتی پورتلند»<sup>۲</sup> است. وی از حل معماهای ریاضی لذت می‌برد و به عنوان یک سرگرمی به این کار می‌پردازد. جالب است که اینان در خلال پرداختن به انواع پازل‌های ریاضی متوجه یک ویژگی عماگونه هندسی در نام خود نیز شده است. بدین ترتیب که اگر در نام و نام خانوادگی وی، یعنی «AZIZ INAN»، در هر دو کلمه جای حروفهای صدادار (A و I)<sup>۳</sup> را عوض کنیم و سپس حروفهای بی‌صدا (Z و N) را به اندازه ۹۰ درجه بچرخانیم، جای نام و نام خانوادگی او عوض می‌شود.

## تاریخ‌های پالیندروم



باید همان باشد.

- رقم یکان در عدد ماه است و چون ۱۲ ماه داریم، پس تنها حالت‌های ممکن برای  $M_1$  عبارت‌اند از:  $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ . هم رقم صدگان در عدد سال است و باید با  $M_2$  برابر باشد. لذا تنها حالت‌های ممکن برای  $M_2$  نیز عبارت‌اند از:  $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ .
- رقم یکان در عدد ماه است و به وضوح  $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$  را می‌تواند اختیار کند، لیکن برای پالیندروم بودن باید با  $Y_1$  برابر باشد. از طرف دیگر،  $Y_1$  برای چهاررقمی بودن سال باید ناصفر باشد، لذا  $M_2 = Y_1$  هماهنگ با  $M_1$  می‌توانند ۱ تا ۹ باشند.

### ب. شرح جدول

جدول ۸ سطر و ۹ ستون دارد. در ستون اول، حالت‌های ممکن برای  $D_1$  به سه دسته تقسیم شده‌اند ( $1, 2, 3$ )، دلیل آن خاص بودن هر یک از این سه حالت است.  $D_1 = 0$  خاص است، زیرا با صفر بودن  $D_1$  دیگر  $N$  نمی‌تواند صفر باشد. (چرا؟) همچنین، چون با صفر بودن  $M_1$ ، به طور مشابه  $M_2$  نمی‌تواند صفر باشد، با مجزا کردن  $M_1 = 0$  و  $M_2 = 0$  برای  $D_1 = 0$  دو سطر از جدول اشغال می‌شود.

به همین ترتیب می‌توانید سطرهای دیگر جدول را رمزگشایی کنید و لذت ببرید! لازم به ذکر است که ستون آخر که سرستون آن با  $N$  مشخص شده است، تعداد تاریخ‌های پالیندروم تولید شده توسط هر سطر را نشان می‌دهد. نتایج این ستون نیز به سادگی با اصل شمارش قابل محاسبه هستند.

### ج. برخی نتایج جالب

- تاریخ‌های خودمقلوب صرفاً در سال‌های چهاررقمی که به کمتر از ۴ ختم می‌شوند، ظاهر می‌گردند. (چرا؟) بدین ترتیب سال‌هایی چون  $2017, 2016, 2018$  و  $2019$  فاقد چنین تاریخ‌هایی هستند.

حال که با نمایش تاریخ سال‌های چهاررقمی بهصورت  $DDMMYYYY$  آشنا شدیم، پرسشی که به ذهن می‌رسد این است که: «آیا برخی از این دنیالهای هشت رقمی اعداد می‌توانند خودمقلوب باشند یا نه؟» پاسخ مثبت است و این تاریخ‌های بهخصوص، تاریخ‌های پالیندروم نامیده می‌شوند. برای مثال، همان‌طور که در ادامه خواهیم دید، در فرمت  $DDMMYYYY$  اولین تاریخ پالیندروم قرن ۲۱ در دهه فوریه ۲۰۰۱ ظاهر می‌شود. زیرا این تاریخ که بهصورت  $10022001$  نمایش داده می‌شود عددی خودمقلوب است.

جالب است که عدد  $10022001$  در فرمت  $MMDDYYYY$  نیز اولین تاریخ خودمقلوب قرن ۲۱ است. البته این عدد در این فرمت مربوط به روز دیگری، یعنی دوم اکتبر ۲۰۰۱ است.

باید توجه داشت که تاریخ‌های خودمقلوب بسیار نادرند؛ تعدادشان کم است و گاه برای قرن‌ها ظاهر نمی‌شوند. حال برای یافتن این موارد نادر شرایط لازم را برای اینکه یک دنیاله هشت رقمی عدددها مربوط به تاریخ سال‌های چهاررقمی با فرمت  $DDMMYYYY$  یک تاریخ پالیندروم باشد، بررسی می‌کنیم. در آغاز برای تمایز ساختن ارزش مکانی رقم‌ها، آن‌ها را بهصورت  $D_1, D_2, M_1, M_2, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  اندیس‌گذاری می‌نماییم. حال برای اینکه دنیاله اخیر پالیندروم باشد، باید  $D_1 = Y_1, D_2 = Y_2, M_1 = Y_3, M_2 = Y_4$  باشد. در نتیجه خودمقلوب‌ها به فرم  $D_1, D_2, M_1, M_2, M_3, M_4, D_2, D_1$  خواهند بود. برای یافتن تمامی موارد مورد نظر جدول ۱ را با توجه به آنچه در ادامه می‌آید، ترتیب داده‌ایم.

### الف. محدودیت متغیرها

• رقم دهگان در عدد روز است و چون تعداد روزهای ماههای میلادی از  $31$  تجاوز نمی‌کند، لذا تنها حالت‌های ممکن برای  $D_1$  عبارت‌اند از:  $0, 1, 2, 3$ . از طرف دیگر،  $Y_1$  رقم یکان در عدد سال است و می‌تواند از  $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$  هر عددی را اختیار کند، ولی برای پالیندروم بودن باید با  $D_1$  برابر باشد. پس حالات ممکن برای  $Y_1$  عبارت‌اند از:  $0, 1, 2, 3$ .

• رقم یکان در عدد روز است.  $Y_1$  هم رقم دهگان در عدد سال است. هر دو می‌توانند  $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$  را اختیار کنند، لیکن برای خودمقلوب بودن باید با هم هماهنگ باشند؛ یعنی  $D_1$  هر مقدار باشد،  $Y_1$  هم

پنجاه و شش به صورت ۱۳۵۶/۰۳/۱۸ نوشته می‌شود که با برداشتن ممیزها دنباله هشت رقمی ۱۳۵۶۰۳۱۸ را خواهیم داشت.

پس از آن دیس‌گذاری فرمت  $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 M_1 M_2 D_1 D_2$  را خواهیم داشت که برای خود مقلوب بودن باید تساوی‌های  $Y_1 = M_1$ ,  $Y_2 = D_1$ ,  $Y_3 = M_2$  و  $Y_4 = D_2$  را داشته باشیم. با این اوصاف خود مقلوبها به صورت یافتن تمامی تاریخ‌های خود مقلوب در سال‌های چهار رقمی خورشیدی (۱۰۰۰ تا ۹۹۹۹) جدول ۲ را با توجه به آنچه در ادامه می‌آید ترتیب می‌دهیم:

رقم دهگان عدد ماه است و چون شماره ماه از دوازده تجاوز نمی‌کند، تنها مقدارهای ممکن برای عده‌های صفر و یک خواهند بود. اما  $M_1 = ۰$  حالت خاصی است، زیرا ناصر بودن  $M_1$  را ایجاب می‌کند. (چرا؟) پس با در نظر گرفتن دو حالت برای  $M_1$ , دو حالت برای  $M_2$  پدید می‌آید. برای پالیندروم بودن باید تساوی  $Y_1 = M_1$  برقرار باشد، پس تنها حالات ممکن برای  $Y_1$  فقط ۰ و ۱ هستند. این یعنی:

- تاریخ‌های خود مقلوب مربوط به سال‌های چهار رقمی خورشیدی فقط در سال‌هایی که به ۰ یا ۱ ختم می‌شوند، ظاهر می‌گردند.

رقم هزارگان عدد سال است و نمی‌تواند صفر باشد، زیرا در غیر این صورت  $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 = ۰$  نمی‌تواند چهار رقمی باشد. برای خود مقلوب بودن باید تساوی  $D_1 = Y_5$  برقرار باشد و این یعنی  $D_2$  باید ناصر باشد. به عبارت دیگر:

- تاریخ‌های خود مقلوب تقویم خورشیدی در روزهای دهم، بیستم و سیام ماه ظاهر نمی‌شوند.

رقم صدگان عدد سال است که برای خود مقلوب بودن باید با  $D_1$  برابر باشد. پس تنها مقادیر ممکن برای  $Y_2$ ,  $Y_3$ ,  $Y_4$  و  $Y_5$  عده‌های ۰، ۱، ۲ و ۳ خواهند بود. این یعنی:

- تاریخ‌های خود مقلوب خورشیدی تنها در قرن‌های اول، دوم، سوم و چهارم هزاره ظاهر می‌شوند. برای مثال، اکنون که در هزاره دوم (۱۰۰۱ - ۲۰۰۰) خورشیدی به سر می‌بریم، تمامی خود مقلوب‌های احتمالی در این هزاره در بازه زمانی ۱۰۰۱ تا ۱۳۹۹ خواهند بود. به عبارت دیگر، از ۲۰۰۰ تا ۱۴۰۰ پالیندرومی خواهیم داشت.

اگر  $Y_1$  بزرگ‌تر از ۲ باشد،  $Y_1$  باید صفر باشد؛ چون:

$$Y_1 > 2 \Rightarrow M_1 > 2 \Rightarrow M_1 = ۰ \Rightarrow Y_1 = ۰$$

این یعنی تاریخ‌های خود مقلوب در هزاره‌های

دوم و سوم (۱۰۰۱ - ۱۳۹۹) فقط در دو قرن نخستین

هر هزاره می‌توانند ظاهر شوند. به عبارت دیگر،

تاریخ‌های پالیندروم که بین هزاره‌های چهارم تا دهم (۱۰۰۱ - ۱۴۰۰) می‌افتد، فقط می‌توانند در اولین

قرن هر هزاره ظاهر شوند.

$D_1 = Y_5$	$D_2 = Y_4$	$M_1 = Y_3$	$M_2 = Y_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	N
۰	۱ → ۹	۰	۱ → ۹	۱ → ۹	۰	۱ → ۹	۰	۰	۸۱
۰	۱ → ۹	۱	۱, ۲	۱, ۲	۱	۱ → ۹	۰	۰	۱۸
۱, ۲	۰ → ۹	۰	۱ → ۹	۱ → ۹	۰	۰ → ۹	۱, ۲	۱۸۰	
۱, ۲	۰ → ۹	۱	۱, ۲	۱, ۲	۱	۰ → ۹	۱, ۲	۴۰	
۳	۰	۰	۱, ۳ → ۹	۱, ۳ → ۹	۰	۰	۳	۸	
۳	۱	۰	۱, ۳, ۵, ۷, ۸	۱, ۳, ۵, ۷, ۸	۰	۱	۳	۵	
۳	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۳	۱	
۳	۱	۱	۲	۲	۱	۱	۳	۱	

جدول ۱

با محاسبه مجموع اعداد ستون آخر مشخص می‌شود که جمیعاً ۳۵۴ تاریخ خود مقلوب در بازه زمانی نه هزار ساله که بالغ بر حدود سه میلیون روز می‌شود، وجود دارد.

## تاریخ‌های خود مقلوب قرن ۲۱

قرن بیست و یکم در فرمت DDMMYYYY دارای ۲۹ تاریخ پالیندروم است که سه مورد را ذکر می‌کنیم و استخراج بقیه را از جدول (۱) بر عهده خواننده می‌گذاریم:

- دهم فوریه دو هزار و یک با نمایش: ۱۰۰۲۲۰۰۱
- بیستم فوریه دو هزار و دو با نمایش: ۲۰۰۲۲۰۰۲
- یکم فوریه دو هزار و ده با نمایش: ۱۰۲۲۰۱۰

## تاریخ‌های خود مقلوب در تقویم هجری خورشیدی

در ایران برای نمایش تاریخ ایام از تقویم هجری خورشیدی با فرمت YYYY/MM/DD استفاده می‌کنیم. مثلاً هجدهم خرداد یک هزار و سیصد و

## تاریخ‌های خودمقلوب قرن ۱۴

از ۳۳۰ تاریخ خودمقلوب تقویم خورشیدی، تعداد ۴۲ مورد در هزاره دوم می‌افتنند و از این تعداد فقط شش مورد به قرن چهاردهم (۱۳۰۱ تا ۱۳۹۹) تعلق دارند که عبارت‌اند از:

۱. سی و یکم فروردین هزار و سیصد و ۵۵  
(۱۳۱۰۰۱۳۱)

۲. سی و یکم اردیبهشت هزار و سیصد و بیست  
(۱۳۲۰۰۲۳۱)

۳. سی و یکم خرداد هزار و سیصد و سی  
(۱۳۳۰۰۳۳۱)

۴. سی و یکم تیر هزار و سیصد و چهل  
(۱۳۴۰۰۴۳۱)

۵. سی و یکم مرداد هزار و سیصد و پنجاه  
(۱۳۵۰۰۵۳۱)

۶. سی و یکم شهریور هزار و سیصد و شصت  
(۱۳۶۰۰۶۳۱)

$Y_1 = D_7$	$Y_7 = D_1$	$Y_7 = M_7$	$Y_7 = M_1$	$M_7$	$M_1$	$D_7$	$D_1$	N
۱→۹	۰	۱→۹	۰	۰	۱→۹	۰	۱→۹	۸۱
۱→۹	۰	۰,۱,۲	۱	۱	۰,۱,۲	۰	۱→۹	۲۷
۱→۹	۱,۲	۱→۹	۰	۰	۱→۹	۱,۲	۱→۹	۱۶۲
۱→۹	۱,۲	۰,۱,۲	۱	۱	۰,۱,۲	۱,۲	۱→۹	۵۴
۱	۳	۲,۱,...,۶	۰	۰	۱,۲,...,۶	۳	۱	۶

جدول ۲

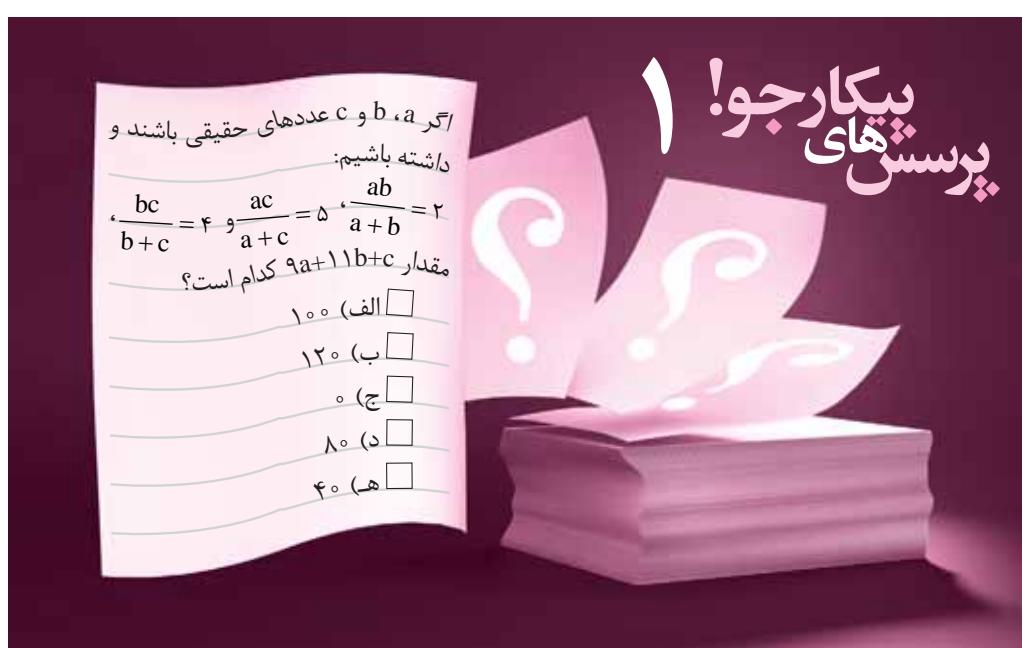
مجموع عددهای ستون N نشان می‌دهند که تنها ۳۳۰ تاریخ پالیندروم از سال ۱۰۰۱ تا ۱۰۰۰۰ خورشیدی وجود دارند. درخصوص سطر آخر جدول لازم به یادآوری است که در تقویم خورشیدی تنها شش ماه اول سال سی و یک روزه هستند. نیز با توجه به اینکه روز سی ام هیج ماهی نمی‌تواند خودمقلوب باشد، لذا بحث درخصوص سی روزه بودن اسفندماه در سال‌های کبیسه نیز به بررسی نیاز نداشت.

**تمرین**

تعداد تاریخ‌های خودمقلوب سال‌های چهار رقمی میلادی در فرمت MMDDYYYY را پیدا کنید.

- \*پی‌نوشت‌ها
1. Stanford university
  2. Portland State university
  3. Martin Gardner

- \*منبع
1. Inan, Aziz, Palindrome Dates in Four-Digit years. Pi in the Sky, Issue 14, 2010.



- کارگردان: علی محمد قاسمی و اعظم نجفیان
- تهیه‌کننده: هومن مرادی کرمانی
- تصویربردار: علی محمد قاسمی
- تدوین اولیه: طاهره حسینی
- تدوین نهایی: علی محمد قاسمی
- پژوهشگر: محبوبه کلانتری
- طراحی و ترکیب صدا و موسیقی: بهروز شهامت
- انتخاب تصاویر آرشیوی: اعظم نجفیان
- تصویربرداران بخش مصاحبه: مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثم جمال‌لو و اعظم نجفیان
- گوینده و راوي: محمود نظرعلیان
- تهیه شده در شبکه مستند سیماهی جمهوری اسلامی ایران

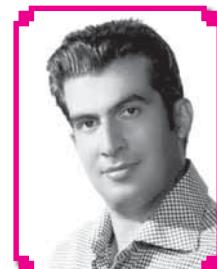
سرزمین ستاره‌ها:  
ابونصر محمد فارابی



دمشق از دنیا رفت. فارابی در تمامی زندگی خود کار دولتی نداشت و خیلی ساده و بالبافی صوفیانه زندگی می‌کرد. در فلسفه معتقد بود بین فلسفه افلاطون و ارسطو اختلافی نیست. در سیاست آرای اهل مدینه فاضله را نوشت و برای رهبر آن ۱۲ شرط گذاشت. او نوشت: «رهبر مدینه فاضله باید خوش‌فهم، خوش حافظه، تیزهوش، خوش‌بیان، هوادار آموزش، دشمن شهوت‌پرستی، راست‌گو، بزرگ‌طبع، بی‌اعتماد به مال دنیا، هوادار عدل و دشمن ظلم و ستم، مقاوم در برابر زور، و با اراده و جسور باشد».

معروف است که پورسینا بارها کتاب «مابعد الطبيعه» (متافیزیک) ارسطو را خوانده بود و نتوانسته بود، مضمون آن را درک کند. او سرانجام با راهنمایی یک کتاب‌فروش (به زبان آن روزگار، وراق)، به تفسیر فارابی در این باره دست یافت و به یاری آن، توانست مفهوم‌های دشوار آن کتاب را دریابد. فارابی، یکی از بنیان‌گذاران دانش و فلسفه در شرق، در زمینه ریاضیات هم کارهای زیادی انجام داده و شاخه‌های متفاوت ریاضیات زمان خود را به جلو برد است. فارابی به طور جدی درباره موضوع‌های مهم مربوط به «روشناسی ریاضیات» کار کرد و نمونه‌های عالی از کاربرد روش‌ها و نظریه‌های ریاضی را در حل مسئله‌های گوناگون دانش‌های طبیعی

# کامی به سوی آگاهی و دوراندیشی

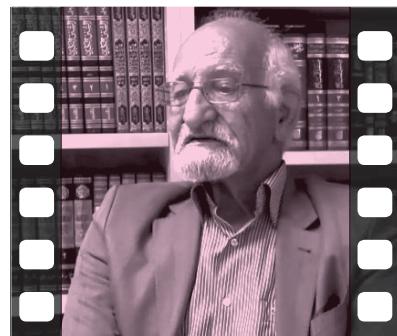


احسان یارمحمدی

### اشاره

ابونصر محمد بن محمد فارابی، از بزرگ‌ترین دانشمندان ایران زمین است که در زمینه‌های فلسفه، منطق، جامعه‌شناسی، پژوهشی، ریاضیات، موسیقی و دانشنامه‌نویسی صاحب سبک بوده و آثار ارزشناهای را به جامعه دانش و فرهنگ عرضه داشته است. در این مقاله با معرفی مستند «ابونصر محمد فارابی» از مجموعه مستند «سرزمین ستاره‌ها» قصد داریم ریاضی آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت بی‌بدیل در عرصه دانش و فرهنگ ایران زمین آشنا سازیم. به این منظور، نخست به ارائه سطورهایی از کتاب «گاهی» به تاریخ ریاضیات در ایران» به قلم زنده‌یاد پرویز شهریاری (۱۳۹۱-۱۳۰۵) می‌پردازیم که چاپ نخست آن در سال ۱۳۸۵ توسط «انتشارات علمی و فرهنگی» به زیور طبع آراسته شده است. در ادامه نیز به ارائه مطالبی از مستند مذبور خواهیم پرداخت.

محمد معروف به ابونصر فارابی در «وسیع» فاراب واقع در ترکمنستان شوروی پیشین متولد شد. فاراب بعدها به «أتار» تغییر نام یافت. این شهر همان جایی است که حاکم آن فرستادگان مغول را که برای صحبت در باب تجارت به آنجا آمده بودند، به دستور سلطان محمد خوارزمشاه کشت. سفیر چنگیز هم که برای پرس‌وجو نزد سلطان محمد رفته بود، کشته شد و این



در گذر تاریخ و هم‌گام با توسعه علم و غنی‌تر شدن گنجینه معرفت بشری، موضوع شناسایی علوم و طراحی موزه‌های معرفتی و هویتی میان آن‌ها دارای اهمیت زیادی بود. از گذشته‌های دور تا به امروز، فیلسوفان و اندیشمندان به ارائه ایده‌ها و معرفی نگرشای هستی‌شناسانه خود درباره این موضوع پرداخته‌اند و طبقه‌بندی‌های متفاوتی از علوم ارائه داده‌اند که بیان کننده فضای دانشی و نگاه ایدئولوژیک آن‌ها با یک جریان در یک زمان خاص به دنیای علم و تحولات آن بوده است. منشأ تمامی این طبقه‌بندی‌ها اندیشه‌های فلسفی عمیقی بوده‌اند که به نوعی از فضای غالب در حوزه تحولات فکری بشری در زمان خاص مطرح شدن‌شان سرچشمه گرفته بودند. در صدر تاریخ و در حکومت یونان علم یکی بود و به آن فلسفه می‌گفتند. لفظ فلسفه به مجموعه دانش‌های نظری و علمی بشر گفته می‌شود. کسانی مثل فیثاغورس خود را فیلسوف می‌نامیدند و امثال افلاطون و ارسطو بر تمام علوم زمان خود احاطه داشتند. دانشمندان یونانی به موضوع تقسیم‌بندی علوم بیش از دیگران توجه کرده‌اند. افکار ارسطوی سرآمد تفکر در این زمینه است.

پس از ظهور اسلام و تأکید این دین بر علم‌اندوزی و معرفت‌افزایی، دانشمندان زیادی تلاش کردند تا با بهره‌گیری از جهان‌بینی توحیدی و تعالیم وحی طبقه‌بندی‌های جامعی از علوم زمانه خویش ارائه کنند. کوشش مسلمانان برای طبقه‌بندی علوم از قرن سوم با کارکنندی

که در زمان او موجود بوده یا از پیشینیان باقی مانده بود، ضبط می‌کند. فارابی، در واقع برای نخستین بار در جهان، موسیقی علمی را مطرح کرده و این افتخاری برای ایرانیان است که نخستین کتاب موسیقی علمی در ایران و به وسیله فارابی نوشته شده است.

\*\*\*

مطلوب این کتاب از آن نظر سودمند است که چون آدمی بخواهد علمی را از این علم فرا گیرد و در آن به پژوهش پردازد، بداند که به چه کاری می‌پردازد و در چه چیزی پژوهش می‌کند و او را از این پژوهش چه سودی فراهم می‌شود. دانستن این مقدمات سبب می‌شود که انسان برای فraigیری هر دانش و فنی با آگاهی و دوراندیشی یکم بردارد (فارابی، احصاء‌العلوم).

و صنعت (اخترشناسی، نظریه موسیقی، نور، معماری و مانند آن) ارائه کرد. سرانجام هم بررسی‌هایی به کلی تازه در ریاضیات نظری انجام داد. می‌بینیم که موفقیت‌های فارابی در ریاضیات، در هر سه زمینه‌ای است که به طور دقیق به هم بستگی دارند: روش‌شناسی؛ کاربرد عملی؛ جنبه نظری.

جالب‌ترین جنبه‌ها از نظر تاریخ نظری ریاضی، بررسی‌های فارابی در مثلثات و هندسه است. فارابی در کتاب خود به نام «شرح مجسطی»، یکی از نخستین کسانی است که تائزه‌انت و کتائزه‌انت را در دایرة مثلثاتی وارد و قضیه‌سینوس‌ها و تائزه‌های ابرابری مثلث کروی قائم‌الزاویه ثابت کرد. فارابی در رساله‌ای که در زمینه هندسه نوشته است، برای نخستین بار در تاریخ ریاضی، به صورتی منظم، مسئله‌های مربوط به ساختمان‌های هندسی را مطرح می‌کند که از میان آن‌ها، بهویژه مسئله‌های مربوط به ساختمان‌های هندسی که به باری پرگار ثابت رسماً می‌شوند. رسماً سه‌می، رسماً چندضلعی‌های منتظم و همچنین رسماً روی کرده را می‌توان جالب دانست.

فارابی در کتاب موسیقی خود که نام اصلی آن «موسیقی‌الکبیر» است، ابتدا صوت‌شناسی را از نظر فیزیکی مطرح می‌کند و گونه‌های متنوع آواهای طبیعی و غیرطبیعی را شرح می‌دهد. بعد به گونه‌های متفاوت سازه‌ای که در زمان او معمول بوده‌اند، می‌پردازد. سر آخر نیز، موسیقی را از نظر علمی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهد. او به ظاهر نخستین نت موسیقی را به صورت عدد می‌آورد و مجموعه‌ای از موسیقی‌ای را



او ناچار از سرزمین‌هایی که در آن مورد آزار و تهدید بودند، می‌گریختند. از همین رو فارابی در جوانی از موارء‌النهر به قصد تحصیل علوم به بغداد رفت و علوم منطق و فلسفه را فرا گرفت.

فارابی در انواع علوم بی‌همتا بود. چنان‌که درباره‌های علمی از علوم زمان خویش کتاب نوشته و از کتاب‌های وی معلوم می‌شود که در علوم زبان، ریاضیات، کیمیا، هیئت، علوم نظامی، موسیقی، طبیعت‌شناسی، الهیات، علوم مدنی، فقه و منطق دارای مهارت بسیار بوده است. به عبارت دیگر، در حکمت، کارِ کنندی را فارابی تکمیل کرد. در فلسفه اسلامی سیمایی جالب‌تر و در عین حال ساده‌تر از او نیست. نه مثل کنندی از طبقه اشراف بود، نه مثل ابن‌سینا به خدمت سلاطین و امرا علاقه‌ای نشان داد. قناعت او حتی از زهد صوفیه هم بالاتر بود. ابن‌سینا او را استاد خود می‌شمارد و ابن‌رشد و دیگر حکماء اسلام و عرب برایش احترام زیادی قائل بودند.

فارابی پس از سال‌ها زندگی در بغداد، به مصر رفت. سپس در حلب و دمشق ماند و به تأثیر و تعلیم همت گمارد. آثار فارابی منشأ تفسیرهای فراوان شد. در سال ۱۶۳۸ مجموعه‌کاملی از ترجمه‌های لاتین فارابی در پاریس انتشار یافت. ابونصر فارابی در ۸۰ سالگی در دمشق درگذشت و با آنکه فقط چند نفر جنازه او را تشییع کردند. مجموعه‌ای گران‌قیمت از آثار خود را به زبان عربی بر جای گذاشت. اما نه عرب، که فیلسوف و نایب‌خواستار خراسانی و از جمله شخصیت‌های برجسته و کمنظیری است که آثار و افکارش اثری جهانی داشته است. در پایان از اشاره به مطالب بیشتری که در مستند «سرزمین‌های سرزمین» ابونصر محمد فارابی «گنجانده شده است، خودداری می‌کنیم و شما ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات در ایران‌زمین را به تهییه و تماشای این مستند تشویق می‌کنیم.



که ریاضی‌دان، منجم و فیلسوف عرب بود، آغاز شد و پس از آن این کوشش افزایش یافت. از آن پس با نهضت ترجمه، علمی اسلامی به ویژه فارابی، ابن‌سینا، غزالی و دیگران درباره رده‌بندی علوم بحث کردند. در آغاز مبنای طبقه‌بندی تقسیم ارسسطویی بود. بعضی از دانشمندان به همه علوم توجه داشتند. بعضی‌ها به دلیل علاقه‌های مذهبی فقط به علوم شرعی توجه کردند و از منظر شرع به سایر علوم نگریستند. بعضی‌ها با الهام از قرآن و عقاید دینی بین آنچه که از یونان آمده و آنچه که در عقاید دینی وجود دارد، تلفیقی به وجود آورند: فارابی از این دست افراد است. بدین ترتیب طبقه‌بندی رفته رفته کامل‌تر شد. علوم اسلامی بر علوم قدیمی افزوده شد و معرفت دینی و مابعدالطبیعی به معنی عرفان بالاترین درجه را پیدا کرد.

ابونصر محمد ابن محمد فارابی، معروف به فارابی، از فیلسوفان اسلامی و دومین فیلسوف بر جسته پس از کنندی در سده‌های سوم و چهارم هجری است. وی نخستین کسی است که در اسلام علوم را به صورت کامل طبقه‌بندی کرده و حدود هر یک را نشان داده و شالوده هر شاخه از تعلیم را ثابت کرده است. معلم اول را ارسسطو می‌دانستند که همین کار را در زمان‌های باستانی کرده و سابقه‌ای برای فیلسوفان بر جای گذاشته بود. بر جسته‌ترین کتاب فارابی با عنوان احصاء‌العلوم، با برشمدون دانش‌ها به طبقه‌بندی علوم و معرفی شاخه‌های گوناگون دانش می‌پردازد. به سبب همین نوشتار او را «معلم ثانی» خوانده‌اند و در مقام بعد از ارسسطو قرار داده‌اند.

**على اکبر دهخدا** به نقل از **بدیع الزمان فروزان** فر می‌نویسد: اسم پدر او عرفان و نام جدش **زلوق** است. تولد او ۲۱۸ شمسی در فاراب بوده است. فارابی نیمة اول زندگی خود را در فاراب گذراند. پدرش از سرداران

## ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

هوشینگ شرقی

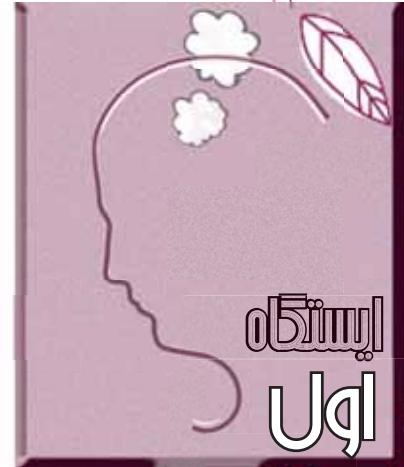
# فرهاد کوچولو و دوست‌آشی در اردبیل تفریحی همکنون روز!



نوروز باستانی در راه است! به همین مناسبت بد ندیدیم که ایستگاه اندیشه این شماره را به داستانی در این زمینه اختصاص دهیم تا ماجراهای جالب آن را بخوانید و در عین حال با معماهایی که در قالب داستان و در متن ماجرا رخ می‌دهند، چالش کنید. مطمئن باشید از ورزش و تفریح اندیشه در این ایام فراغت لذت خواهید بردا

\*\*\*

مسئولان مدرسه‌ای که فرهاد کوچولو در آن درس می‌خواند، تعدادی از دانش‌آموزان را با خود به اردبیل تفریحی - آموزشی برده‌اند. فرهاد کوچولو که از دانش‌آموزان ممتاز و فعال مدرسه است، در این اردو حضور دارد و با دوستان خود مشغول تفریح و بازی است. یکی از شبها، فرهاد و دوستانش دور هم جمع بودند و مشغول بازی‌های فکری بودند که یکی از بچه‌ها پیشنهاد کرد، هر یک از آن‌ها داستانی از زندگی خودش را برای دیگران تعریف کند و ضمن آن معماهی را طرح کند تا بقیه آن را حل کنند. به این ترتیب ماجراهای ما شروع شد!



اطلاعات بیشتری بدھی!

کاوه گفت: «راستی یادم رفت که

بگویم، پدرم ۵۰ ساله است.»

شهریار گفت: «خب چه ربطی به

پدربرزگت دارد؟»

فرهاد گفت: «بسیار خب، حالا فهمیدم

پدربرزگت چند سال دارد» و جواب را به

کاوه گفت. او هم درستی آن را تأیید کرد.

راستی بچه‌ها پدربرزگ کاوه چند سال

دارد؟

می‌گفت: هر شمع سبز معادل ۹ سال عمر و

هر شمع زرد معادل ۵ سال عمر است.

همچنین دیدم که او روی کیک اول

شمع و روی کیک دوم ۱۰ شمع قرار

داده است. حالا بگویید پدربرزگم دقیقاً چند

سال سن دارد.»

بچه‌ها به فکر فرو رفتند و هر کدام

خودکار و کاغذی برداشتند و مشغول

محاسبه شدند. ناگهان فرهاد کوچولو گفت:

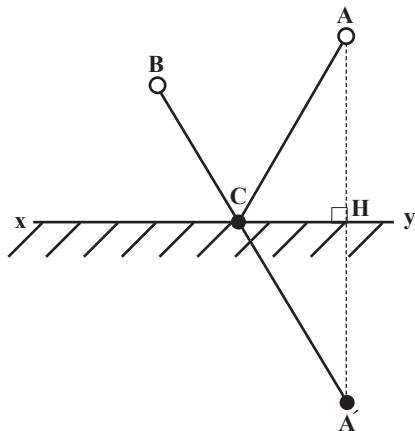
نمی‌شود به دقت جواب داد، مگر اینکه

### سن پدربرزگ کاوه!

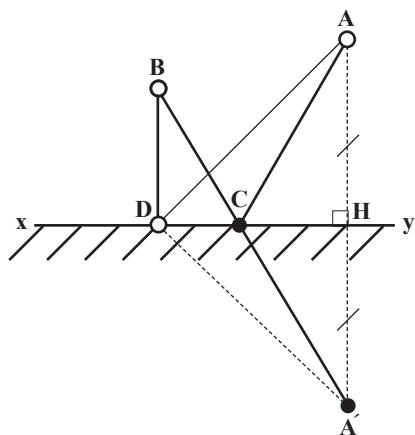
ابتدا کاوه شروع به تعریف کرد: «چند روز پیش روز تولد پدربرزگم بود. مادرم برای خوشحال کردن او ابتسکار جالبی به خرج داد. او دو نوع کیک خرید و روی هر کدام دو نوع شمع چید. روی کیک اول شمع‌های قرمز و آبی قرار داده بود و می‌گفت: هر شمع قرمز معادل ۱۰ سال عمر و هر شمع آبی معادل هفت سال عمر است. روی کیک دوم شمع‌های سبز و زرد قرار داده بود و

# پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر و یک قانون فیزیکی

برای دانش‌آموزان پایه‌یازدهم ریاضی



در کتاب هندسه (۲)، در مسئله‌ای موسوم به «مسئله هرون» با استفاده از قضیه نامساوی مثلث به درستی این مطلب پرداخته و ثابت می‌شود، برای هر نقطه دلخواه دیگری مانند D روی  $xy$  داریم:

$$AD+DB > AC+CB$$


توجه کنید که چون  $xy$  در تبدیل بازتاب نسبت به آینه عمودمنصف'  $AA'$  است، داریم:  $AC=A'C$ . پس  $AC+CB$  با  $A'B$  که کوتاه‌ترین فاصله بین تصویر  $B$  و  $B'$  محسوب می‌شود، برابر است.

## نتیجه فیزیکی

پرتو نوری که از نقطه  $A$  بر آینه می‌تابد،  $xy$  را در نقطه  $C$  قطع می‌کند که در آن نقطه داریم:  $B\hat{C}x = A\hat{C}y$ . بنابراین متمم‌های این دو زاویه، یعنی زاویه تابش و بازتابش با یکدیگر مساوی هستند؛ یعنی:  $Z\hat{C}A = Z\hat{C}B$ .

می‌دانیم کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه، اندازه پاره خط راستی است که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند. در کتاب هندسه یازدهم مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه با شرط عبور از نقطه سوم واقع بر یک خط، مسائلی هستند که به کمک بازتاب حل می‌شوند. به مسئله زیر توجه کنید:

**مسئله:** فرض کنید  $xy$  یک سطح صاف صیقلی (آینه تخت) است که نقاط  $A$  و  $B$  در یک طرف آن قرار دارند. اگر پرتو نور از نقطه  $A$  بر آینه بتابد و هنگام انعکاس از آینه از نقطه  $B$  عبور کند، چه مسیری را طی می‌کند؟

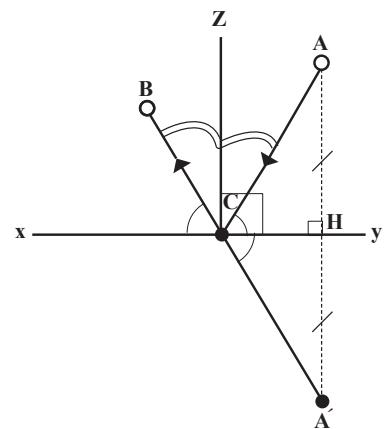
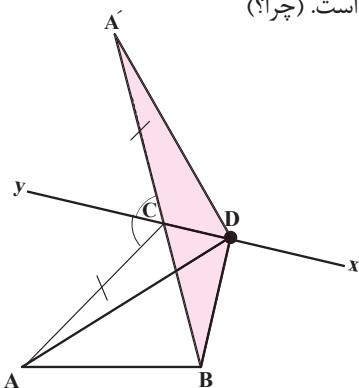


سیمین افروزان  
دیر ریاضی منطقه ۲ تهران



**پاسخ:** با توجه به اینکه نور در کمترین زمان ممکن مسیری را طی می‌کند و کمترین زمان، مستلزم کمترین مسافت است، پاسخ مسئله مسیری است که مجموع فاصله‌های دو نقطه  $A$  و  $B$  از نقطه برخورد با آینه کمترین مقدار باشد. برای یافتن این نقطه از  $xy$  عمودی رسم می‌کنیم و آن را به اندازه خودش تا نقطه'  $A'$  امتداد می‌دهیم. نقطه'  $A'$  بازتاب نقطه  $A$  نسبت به  $xy$  است و  $A'B$ ، آن را ( $xy$  را) در نقطه  $C$  قطع می‌کند.  $AB+CB$  مسیر مورد نظر مسئله است.

برای اثبات این مطلب، از رأس C ضلع BC را تا نقطه A' امتداد می‌دهیم. با نوشتن نامساوی مثلث در مثلث BDA' به نتیجه مطلب خواهید رسید. درواقع A' تصویر A نسبت به نیمساز خارجی رأس C محور بازتاب است. (چرا؟)

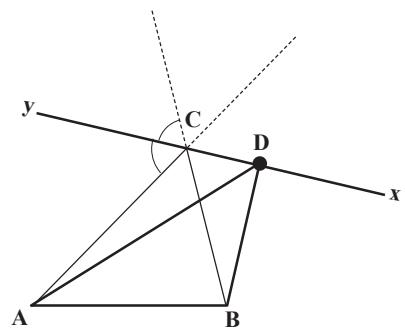


### نتیجه هندسی

در هر مثلث، مجموع فاصله‌های هر نقطه دلخواه روی نیمساز زاویه خارجی متناظر یکی از رأس‌ها از دو رأس دیگر، از مجموع دو ضلعی که شامل آن رأس هستند، بیشتر است:  $AD+DB > AC+CB$

**نتیجه گیری نهایی**  
برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه A و B با شرط عبور از نقطه سوم واقع بر یک خط، کافی است تصویر A را نسبت به خط مورد نظر پیدا کنیم (A'). محل تلاقی A'B با خط مفروض، نقطه سوم مورد نظر مسئله است.

در کتاب درسی به مسئله کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه با شرط عبور از چند نقطه نیز پرداخته شده است که ایده آن همان تصویرسازی به کمک تبدیل بازتاب و پیدا کردن کوتاه‌ترین فاصله بین آخرين تصویر و نقطه دوم است.



**پرسش‌های پیکارجو! ۲**

در مثلثی که دو زاویه حاده  $15^\circ$  و  $30^\circ$  دارد، میانسه وارد بر بزرگ‌ترین ضلع، با آن ضلع چه زاویه حاده‌ای می‌سازد؟

الف)  $30^\circ$       ب)  $60^\circ$       ج)  $45^\circ$       د)  $75^\circ$       ه)  $37.5^\circ$

■ از دوره ابتدایی ریاضیات را دوست داشتید یا بعداً به آن علاقه‌مند شدید؟

● هیچ وقت از ریاضی بد نیامده است، ولی از اول راهنمایی علاقه به آن در من تشدید شد.

■ آیا معلمانتان در این علاقه شما نقش داشته‌اند؟

● بله، معلم اول راهنمایی که خیلی دوستش داشتم و باعث بیشتر شدن علاقه من به ریاضی شد.

■ بین معلمان ریاضی معلمی بوده است که روش خاصی داشته باشد و باعث همین علاقه شما یا باعث فهمیدن بهتر ریاضی توسط شما شده باشد؟

● شیوه یکی از معلمان بود که مثال‌های زیادی حل می‌کرد، اما تمرکز زیاد سر کلاس و تمرین در خانه باعث علاقه و فهم بیشتر من شد.

■ شما در یادگیری ریاضیات بیشتر اهل نوشتی بودید یا خواندن؟

● خوب ریاضی را که اصلانمی شود خواند. باید مثال و تمرین حل کرد. یعنی حل کردن مسئله تأثیر دیگری دارد.

■ در المپیاد هم شرکت کردید؟

● حقیقتاً من به دلایلی تا سال دوم با اینکه شناختی هم نداشتم، در رشته تجربی درس خواندم. سال سوم تغییر رشته دادم و متأسفانه خیلی دیر متوجه المپیاد شدم.

■ چه روش مطالعه‌ای در درس ریاضی داشتید؟

● اول اینکه سر کلاس خیلی تمرکز داشتم. سر کلاس خیلی از مسائل را جلوتر از بقیه حل می‌کردم. هیچ وقت هم به راه حل اکتفا نمی‌کردم و خودم مسائل را حل می‌کردم.

■ چه عواملی باعث موفقیت شما شد؟

● اول لطف خداوند بود، بعد هم تلاش و سماحت خیلی زیاد و محیط خیلی خوبی که خانواده فراهم کرده بودند.

■ شغل پدرتان چیست؟

● شغل آزاد دارند و مادرم هم خانه‌دار هستند.

## گفت و گوی مجله ریاضی رشد برهان با محمد کاظم فقیه خراسانی رتبه ۲ کنکور سراسری رشته ریاضی ۱۳۹۶



### اشاره

محمد کاظم فقیه خراسانی در یکی از مدرسه‌های دولتی شهر یزد و در رشته ریاضی تحصیل کرده است و بنا به گفته خودش برای آنکه هزینه اضافی به خانواده‌اش تحمیل نکند، در هیچ کلاس کنکوری شرکت نکرد، و با تلاش خودش به نتیجه رسید. او اکنون با همت بلندش، به مقصد نائل شده است!

■ در کنکور چند درصد سؤالات درس ریاضی را درست

زدید؟ چه درسی را بیشتر درست زدید؟

● در درس ریاضی فقط یک غلط داشتم و ۹۷/۶۰ درصد

درست زدم.

■ ریاضیات در طول تحصیل برای شما چه جایگاهی

داشته است؟

○ همیشه ریاضی را دوست داشتم و در پرورش ذهن

خیلی اثر داشته است.



بله، من هم توصیه‌ام به شما همین است، امیدوارم که برگردید و به همین کشور خدمت کنید. ممنونم از اینکه وقت گذاشتید.

خواهش می‌کنم، ممنون از شما.

■ در چه رشته‌ای می‌خواهید در دانشگاه تحصیل کنید؟  
● اول می‌خواستم برق بخوانم، ولی الان مهندسی نرم‌افزار شریف.

■ توصیه‌ای برای بجهه‌ها ندارید؟  
● خیلی تلاش کنید، عرق بریزید و زحمت بکشید و به نتیجه هم خیلی فکر نکنید. مهم تلاش است و اینکه خودتان را هم محدود نکنید. مثلاً من تا سال سوم خیلی اهل درس خواندن نبودم، در حالی که خیلی‌ها شروع کرده بودند و خیلی درس‌ها را تمام کرده بودند.

■ خب، معدل دیپلم شما چند بود؟  
● ۱۹/۹۷. سال چهارم آن قدر سؤال می‌پرسیدم که تمام معلم‌هایم را خسته کرده بودم.

■ خب بعد از لیسانس و فوق‌لیسانس تصمیم دارید چکار کنید؟ به استان خودتان برمی‌گردید؟ یا حتی قصد خروج از کشور را ندارید؟  
● به استان خودم که نه، حقیقتاً خیلی اهل تدریس نیستم و بیشتر کارهای پژوهشی را دوست دارم. به خارج از کشور هم اگر بروم، امیدوارم که برگردم و این موضوع همیشه در ذهنم باشد.

مجموع عدهای دو رقمی که مقدار آن‌ها برابر است با یک واحد بیشتر از مجموع مربع‌های ارقام آن‌ها، کدام است؟

الف)	<input type="checkbox"/>	۱۰۰
ب)	<input type="checkbox"/>	۱۱۰
ج)	<input type="checkbox"/>	۱۳۰
د)	<input type="checkbox"/>	۱۵۰
هـ)	<input type="checkbox"/>	۲۰۰

# کاربرد ریاضیات در استان در

## اقتصاد



### اشاره

چند سالی است که ریاضی می خوانید. در دوره اول متوجه با مباحثی مثل معادله خط و حل معادله درجه یک آشنا شدید. در دوره دوم متوجه نیز حل معادله درجه ۲ و بالاتر و تابع درجه ۲ و تابع خطی مطرح می شود و در همه این سال‌ها خیلی از هم‌کلاسی‌های شما دانش‌آموزان عزیز از ما می‌پرسند: معادله خط و تابع به چه درد می‌خورند؟ چطوری به وجود آمداند؟ و چه کاربردی دارند؟ حتی بعضی از شماها به شوخی می‌گویید: دانشمندان بی کار بوده‌اند!

البته به شما حق می‌دهم، چون انسان باهوش و خردمند به دنبال چرایی هر پدیده‌ای می‌گردد. با مطالعه تاریخ علم متوجه می‌شوید که بسیاری از مطالب علمی را انسان با توجه به نیازش کشف کرده است که این موضوع در مورد ریاضی هم صدق می‌کند. در این مقاله با ارائه چند مثال ساده کاربرد این مطالب را در اقتصاد بیان می‌کنیم و به این سؤال شما مختصر پاسخی می‌دهیم.



جاiber مختاری دهقانی  
دبیر ریاضی استان لرستان  
شهرستان دورود

### مقدمه

- در هزینه‌ای مشاهده شد، می‌توان آن را به عنوان این گروه از هزینه‌ها طبقه‌بندی کرد. مشخصات مزبور از این قرارند:
- ۱. هزینه‌ها در سطوح مختلف تولید در کل ثابت هستند.
- ۲. سهم هزینه ثابت یک واحد کالا با افزایش تعداد تولید کالا کاهش می‌یابد و بر عکس.
- ۳. کنترل و قرعه این هزینه‌ها از طریق مدیران اجرایی صورت می‌پذیرد.

نمونه‌های بارز و مشخص این هزینه‌ها عبارت‌اند از: حقوق مدیران تولید؛ استهلاک ساختمان و ماشین‌آلات؛ بیمه ساختمان و ماشین‌آلات؛ اجاره محل کارخانه؛ و سایر موارد مشابه.

در این مقاله کاربردی از معادله خط و حل معادله و تابع را در اقتصاد مطرح خواهیم کرد. اما نخست چند تعریف مقدماتی را از علم اقتصاد بیان می‌کنیم. می‌دانیم در هر کارخانه‌ای مقدار تولید محصول و عرضه آن به بازار، به قیمت محصول، کیفیت آن، و قدرت خرید مردم بستگی دارد. در هر کارخانه‌ای هزینه‌ها (خارج) به دو دسته تقسیم می‌شوند که عبارت‌اند از: هزینه‌های متغیر و هزینه‌های ثابت.

### هزینه‌های ثابت

هزینه‌هایی هستند که با تغییر حجم تولید تا سطح مشخصی از تولید تغییر نخواهند کرد. باید بدانید که به طور کلی هزینه‌های ثابت مشخصاتی دارند که هرگاه

**مثال ۱.** فرض کنید هزینه اجاره کارخانه‌ای ماهانه ۱۵۰ میلیون ریال است. او لا هزینه اجاره در کل ثابت است. یعنی چه یک عدد کالا تولید شود، چه ۱۰۰۰ عدد، هیچ‌گونه تغییری در کل این هزینه به وجود نخواهد آمد. ثانیاً با افزایش تولید، سهم هزینه هر یک واحد کالا کاهش پیدا می‌کند. فرض کنید تولید کارخانه ۱۰۰ عدد باشد. اگر بخواهیم بگوییم سهم هر واحد کالا از کل ۱۵۰ میلیون ریال هزینه اجاره چقدر است، به این صورت عمل می‌شود:  $15000000 \div 100 = 150000$

که سهم هر کالا ۱۵۰۰۰۰ ریال خواهد شد. یا اگر ۲۵۰ عدد کالا تولید شود، سهم اجاره هر یک واحد کالا بنا بر این هزینه مواد مستقیم در یک واحد، ثابت است. در ضمن این هزینه به راحتی قابل پیش‌بینی در ساخت محصول است و می‌توان هزینه چوب مصرفی را در ساخت میز مشاهده کرد.

مجدداً تأکید می‌شود، هزینه‌های ثابت در کل در سطوح مختلف تولید ثابت است، ولی با افزایش تولید سهم هر یک واحد تولید کاهش خواهد یافت. و بر عکس با کاهش تولید، سهم هر یک واحد تولید از هزینه ثابت افزایش می‌یابد. در ضمن رخدادن هزینه‌های ثابت و مبلغ آن‌ها در اختیار وابسته به تصمیم‌گیری مدیران اجرایی است.

### هزینه‌های متغیر

هزینه‌های متغیر هزینه‌هایی هستند که کل مبلغ آن‌ها با تغییر در سطح تولید و میزان تولید تغییر می‌کند. یعنی با افزایش مقدار تولید و حجم تولید، این هزینه‌ها در کل افزایش می‌یابند و با کاهش در میزان تولید، این هزینه‌ها در کل کاهش خواهند یافت. نمونه مشخص این هزینه‌ها مواد مستقیم و دستمزد مستقیم هستند. هزینه‌های متغیر نیز ویژگی‌ها و مشخصه‌هایی به شرح زیر دارند:

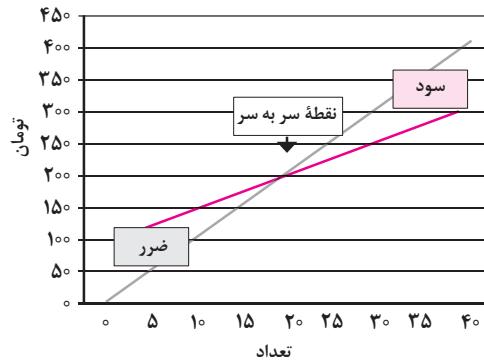
#### تمرین

هزینه‌های ثابت و متغیر یک کارگاه شیرینی‌پزی را مشخص کنید.

**مثال ۴.** خاطره‌ای را برای شما دانش‌آموzan عزیز نقل می‌کنم. روزی در دفتر دبیرستان نشسته بودم، خواهرم که کارمند حسابداری یک فروشگاه است زنگ زد و گفت کالایی داریم که قیمت فروش آن ۱۴۴۰ تومان ثبت شده است. فروشگاه ۲۰ درصد سود روی کالا محاسبه می‌کند، ولی در حال حاضر فاکتور خرید مفقوص شده است و قیمت خرید کالا را نمی‌دانم. چگونه باید آن را محاسبه کنم؟ اگر دقت کنید، این مشکل برای هر فروشگاهی ممکن است پیش بیاید. برای پیدا

۱. این هزینه‌ها در کل ارتباط مستقیم با تولید دارند. یعنی با افزایش تولید، افزایش و با کاهش تولید، کاهش می‌یابند.
  ۲. هزینه متغیر یک واحد کالا ثابت است، حتی اگر تعداد تولید نیز کاهش یا افزایش پیدا کند.
  ۳. به شکل ساده و آسان قابل تخصیص به دایرة تولید هستند.
- در ادامه مشخصه‌های هزینه‌های متغیر را در مثال ۲ بررسی می‌کنیم.

را برای خود محاسبه کند، زیرا این کار به آن‌ها نشان می‌دهد، تعداد کالاهای تولید شده‌ای که باید بفروشند تا بتوانند هزینه‌های ثابت و متغیر صورت گرفته را جبران کنند، چقدر است.



فرض کنید در یک بنگاه اقتصادی تولید کیف دستی، هزینه کل ساخت  $10$  کیف در یک ماه  $200$  هزار تومان شده است. اگر صاحب این کسب و کار بتواند تمامی این  $10$  کیف را به قیمت  $20$  هزار تومان بفروشد، به نقطه سر به سر رسیده است. یعنی  $200$  هزار تومان درآمد داشته است که با میزان کل هزینه‌ها برابر است. به بیان دیگر، نه سود کرده است و نه زیان. پیدا کردن و تحلیل نقطه سر به سر صاحب این کسب و کار نشان می‌دهد که اگر این فرد در هر سری از تولیداتش موفق به فروش تمام کیف‌ها به قیمت  $20$  هزار تومان نشود، ضرر می‌کند و برای ادامه کارش احتیاج دارد، یکی یا چند تا از موارد زیر را به کار گیرد:

- هزینه‌های ثابت را کاهش دهد (مثل هزینه اجاره کارگاه تولیدی).
- هزینه‌های متغیر را کاهش دهد (هزینه تهیه مواد اولیه برای تولید هر کیف).
- قیمت فروش هر کیف را افزایش دهد.

### معادله عرضه

قانون عرضه بیانگر این واقعیت است که بین مقدار عرضه یک کالا و قیمت آن رابطه مستقیم وجود دارد. بدین معنی که اگر قیمت یک کالا افزایش یابد، مقدار عرضه آن نیز افزایش می‌یابد. نمودار ۲ رابطه عرضه را نشان می‌دهد.

کردن مجھول مسئله ابتدا باید مسئله را به زبان ریاضی بنویسیم.

فرض کنید قیمت خرید کالا  $x$  باشد. در این صورت سود فروشگاه  $x/20\%$  و مجموع قیمت خرید و سود برابر با قیمت فروش است. به عبارت دیگر:  $x + x/20 = 1440$  که همان معادله درجه یک است و ما باید آن را حل کنیم:

$$\begin{aligned} x + x/20 &= 1440 \\ 1/20x &= 1440 \\ x &= \frac{1440}{1/20} = 12000 \end{aligned}$$

پس قیمت خرید کالا  $1200$  تومان است.

### تمرین

در یک کارخانه تولید نوعی خودکار، وقتی قیمت یک خودکار  $1000$  تومان است، روزانه  $40000$  عدد فروخته (تقاضای بازار) می‌شود و در صورتی که  $800$  تومان باشد،  $60000$  تقاضا می‌شود.تابع تقاضای این محصول را بنویسید (هر کارخانه‌ای بازاریاب و مدیر فروش دارد که مسئولیت ارزیابی بازار با آن‌هاست).

**راهنمایی.** معادله خطی را که از نقاط  $(1000, 40000)$  و  $(800, 60000)$  می‌گذرد، بنویسید.  $x$  نشان‌دهنده تقاضا و  $y$  نشان‌دهنده قیمت کالاست.

**مثال ۵.** کارخانه قند وقتی قیمت قند  $2500$  تومان باشد،  $100000$  کیلو قند به بازار عرضه می‌کند و وقتی قیمت  $3000$  تومان می‌شود،  $120000$  کیلو قند به بازار عرضه می‌کند. معادله عرضه را بنویسید. معادله خطی را که از دو نقطه  $(2500, 100000)$  و  $(3000, 120000)$  می‌گذرد، می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} m &= \frac{120000 - 100000}{3000 - 2500} = 40 \\ y - 2500 &= 40(x - 100000) \\ y &= 40x - 3997500 \end{aligned}$$

### نقطه سر به سر

در اقتصاد نقطه‌ای را که در آن قیمت کالای عرضه شده با قیمت کالای تقاضا شده برابر است، نقطه سر به سر می‌گویند. هر واحد تجاری باید نقطه سر به سر

که در آن،  $x$  تعداد کالا و  $p$  قیمت بر حسب تومان است. بخش مالی شرکت هزینه تمام شده تولید (معادله هزینه) همان کالا را به صورت  $x = 72000 + 60x$  ارائه کرده و مدیریت شرکت در صدد پیدا کردن مقدار تولیدی است که بیشترین سود را عاید شرکت کند.

از معادله تقاضا قیمت  $p$  را به دست می‌آوریم:

$$p = \frac{6000 - x}{30} = 200 - \frac{1}{30}x. \quad (1)$$

تابع درامد به صورت حاصل ضرب تعداد کالا در

قیمت فروش است:

$$R(x) = x \cdot p \Rightarrow$$

$$R(x) = x(200 - \frac{1}{30}x) = 200x - \frac{1}{30}x^2$$

تابع سود حاصل تفاضل هزینه از درامد است و آن

را با  $P(x)$  نشان می‌دهیم:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 200x - \frac{1}{30}x^2 - (72000 + 60x)$$

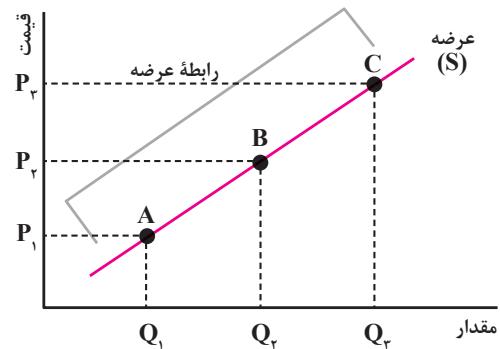
$$P(x) = -\frac{1}{30}x^2 + 140x - 72000$$

در نگاه اول ممکن است فکر کنید هرچه تولید و فروش کالای مورد نظر بیشتر باشد، سود شرکت بیشتر می‌شود و به این همه ریاضی و حساب و کتاب نیازی نیست. حال با اطلاعاتی که از تابع درجه ۲ داریم، می‌دانیم نمودار تابع  $P(x)$  سه‌می رو به پایین است و مقدار ماکزیمم در نقطه  $P(\frac{-b}{2a}) = P(\frac{-140}{2(-1)}) = 2100$  دارد.

یعنی شرکت برای به دست آوردن بیشترین سود باید ۲۱۰۰ تا از کالای مورد نظر تولید کند که در این صورت  $P(2100) = 7500$  تومان سود می‌کند. در ضمن قیمت

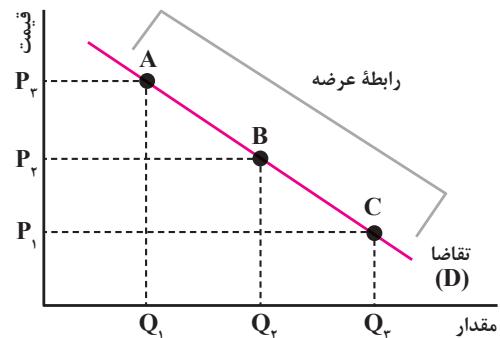
فروش هر کدام از کالاهای تولیدی از رابطه حساب می‌شود که برابر است با:  $p = 200 - \frac{1}{30}(2100) = 130$

درامد حاصل از فروش این ۲۱۰۰ کالا  $R(2100) = 273000$  تومان می‌شود. حال باید توجه داشت که ماکزیمم درامد وقتی حاصل می‌شود که شرکت ۳۰۰۰ عدد کالا تولید کند و در این صورت درامد شرکت  $R(3000) = 300000$  تومان می‌شود. جالب است که بدانید، با این تولید سود شرکت  $300000 - 300000 = 0$  می‌شود. یعنی شرکت اگر ۳۰۰۰ تا از محصول تولید کند، کمتر سود می‌کند. حال اگر



### معادله تقاضا

قانون تقاضا بیان می‌کند، در صورت برابر بودن سایر عوامل، هرچه قیمت یک کالا بالاتر باشد، افراد کمتری متقاضی آن کالا خواهند بود. مقداری از کالا که خریداران با قیمتی بالاتر می‌خرند، کمتر است. در نتیجه، مردم به طور طبیعی از خرید محصول چشم‌پوشی می‌کنند. نمودار زیر نشان می‌دهد که شیب منحنی به سمت پایین حرکت می‌کند (شیب منفی).



**مثال ۶.** اگر معادله‌های تقاضا و عرضه به صورت زیر باشند، نقطه سر به سر (تعادل بازار) را به دست آورید.

$$\text{معادله عرضه: } y = \frac{2}{5}x + 1/5$$

$$\text{معادله تقاضا: } y = -x + 5$$

**راهنمایی.** دستگاه دو معادله و دو مجهول تشکیل دهید و پاسخ را به دست آورید (پاسخ:  $x = 4$  و  $y = 1$ ).

**مثال ۷.** بخش تحقیق و بازاریابی یک شرکت پس از بررسی وضعیت بازار در مورد یک کالا که توسط شرکت تولید می‌شود، معادله تقاضا را مدل‌سازی ریاضی می‌کند و به مدیریت تحويلی می‌دهد.

$$\text{معادله تقاضا: } p = 6000 - 30x$$

### تمرین ۳

در چه بازه‌ای از تولید شرکت سود می‌کند

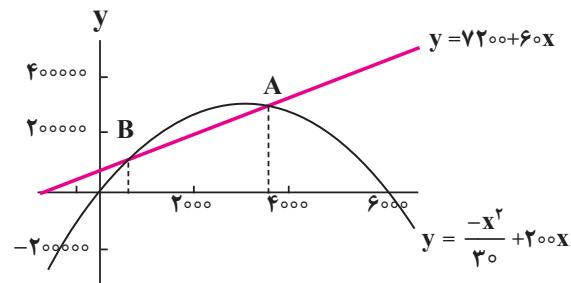
#### نتیجه

در حل مثال‌ها روشن شد که مطالب ریاضی، به خصوص معادله و تابع، در زندگی روزمره و رشته‌های دانشگاهی اقتصاد و بازرگانی کاربرد دارد. ولی نکته اینجاست که ما باید مدل‌سازی را یاد بگیریم و بتوانیم مسئله را به زبان ریاضی بنویسیم تا آموخته‌های خود را با زندگی روزمره تطبیق دهیم و در این صورت احساس نیاز به یادگیری در ما ایجاد می‌شود. همان‌طور که بیدید، از معادله خط و حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی، معادله درجه یک، تابع درجه ۲ و نمودار تابع استفاده شد. بسیاری از مباحث را شما می‌خوانید، ولی بعداً در سال‌های بعد یا دوره‌های تحصیلی بعدی از آن‌ها استفاده می‌کنید.

#### منابع\*

- بورکاظمی، محمدحسین (۱۳۹۲). ریاضیات عمومی و کاربردهای آن (ج). نشر نی. تهران. چاپ شانزدهم.
- آقامیری، احسان (۱۳۹۲). اقتصاد خرد. انتشارات راهیان ارشد. تهران. چاپ اول.

نمودار تابع هزینه و درامد رارسم کنیم و با دقت به آن فکر کنیم، همه این مطالب را می‌بینیم.



سهمی، نمودار تابع درامد و خط نمودار تابع هزینه است. محل برخورد دو نمودار  $x=3600$  و  $y=6000$  است که نشان‌دهنده نقطه سر به سر، یعنی نقاط A و B هستند (DRAMD و هزینه برابر و به عبارت دیگر، سود شرکت صفر تومان است).

### تمرین ۱

اگر شرکت ۶۰۰ عدد کالا تولید کند، باید به چه قیمتی بفروشد تا ضرر نکند؟

### تمرین ۲

با چه تولیدی درامد شرکت صفر می‌شود.

در مورد عدد سه رقمی  $\overline{abc}$  می‌دانیم  
 $c=41-7b-(a-5)=41-7b-a+5=46-7b$   
 تقسیم این عدد بر ۱۳ کدام است؟

- الف) ۸
- ب) ۹
- ج) ۱۰
- د) ۱۱
- ه) ۱۲

# پرسش‌های پیکارجو! ۴

### وصیت عجیب پدربرزگ مازیار!

مازیار در ادامه گفت: «خوش به حال شما که پدربرزگتان زنده است و می‌توانید از او بگویید. اما پدربرزگ من چندی پیش فوت کرد!»

بچه‌ها فاتحه‌ای برای پدربرزگ مازیار خواندند و او ادامه داد: «پدربرزگم در یکی از روستاهای زادگاهش زمینی داشت که به شکل یک هشت‌ضلعی بود که همه اضلاع آن با هم برابر باشند. آیا این هشت‌ضلعی،

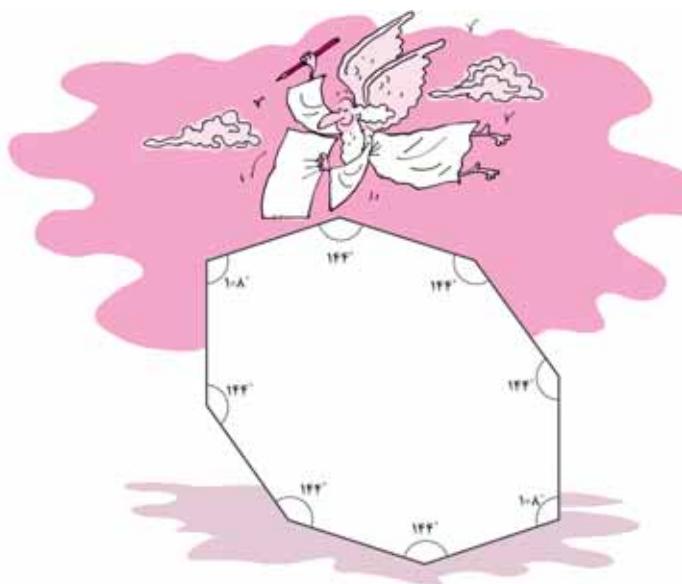
جمشید گفت: «یعنی هشت‌ضلعی منتظم!»

فرهاد گفت: «نه جمشیداً مگر نمی‌دانی که یک چندضلعی را فقط وقتی منتظم می‌گویند که اضلاع آن همگی با هم برابر و زاویه‌های داخلی آن هم همه با هم برابر باشند؟ آیا این هشت‌ضلعی، منتظم بود؟»

مازیار گفت: «نه! و مشکل همینجا بود.»

بچه‌ها گفتند: «چه مشکلی؟!»

مازیار گفت: «زاویه‌های این هشت‌ضلعی به این صورت که برایتان می‌کشم،  $144^\circ$  و  $108^\circ$  هستند.»



فرهاد گفت: «بگذارید ببینم... مجموعشان جور در می‌آید یا خیر... خب شش تا  $144^\circ$  و دو تا  $108^\circ$  می‌شود...»

مازیار گفت: «من قبلاً حساب کرده‌ام! درست در می‌آید. می‌شود  $108^\circ$  که مجموع زاویه‌های داخلی هر هشت‌ضلعی است. اما مسئلهٔ ما این نیست. پدربرزگم وصیت کرده است که این زمین به تساوی بین پدرم و پنج عمومیم تقسیم شود. حالا این شش برادر مانده‌اند که چطور این کار را انجام دهند! آیا شما می‌توانید با حل این معمایه آن‌ها کمک کنید؟»

بچه‌ها سخت به فکر فرو رفتند و شروع به خط‌کشی‌های متفاوت کردند. اما پس از مدتی همگی خسته شدند. فرهاد گفت: «واقعاً معمای سختی است. جای طرح آن اینجا نبود. من از تو وقت می‌خواهم و به تو قول می‌دهم وقتی به خانه برگشتم، به کمک پدرم و با طرح یک نقشه دقیق و با ابزار دقیق که اینجا در دسترس مانیست، مشکل پدر و عموهایت را حل کنم؛ طوری که وصیت پدربرزگت هم عملی شود.»

بچه‌ها شما چطور؟ حاضرید در این ایام تعطیلات نوروزی روی این مسئلهٔ زیبا وقت بگذارید؟!



### سن پدربرزگ بابک!

بابک در ادامه گفت: «اتفاقاً من هم می‌خواهم معماًی دربارهٔ سن پدربرزگم مطرح کنم! پدربرزگی دارم که معلم ریاضی بازنشسته و خیلی هم بازمه است و هرچه که از او بپرسیم، پاسخ آن را در قالب یک معماًی ریاضی به خودمان برمی‌گرداند! چند روز پیش برادر بزرگم از او پرسید: بابا جان! شما چند سال دارید؟ پدربرزگم گفت: سن من چهار برابر سن تو است، ولی نکتهٔ جالب این است که اگر جای رقم‌های سن هر دویمان عوض شود، سن تو سه برابر سن من می‌شود! حالا بگویید پدربرزگ و برادر من هر یک چند سال دارند.»

فرهاد گفت: «معماًی جالبی است و فکر می‌کنم از معماًی کاوه سخت‌تر است.»

سپس همه دست به خود کار و کاغذ برداشتند و پس از مدتی شهریار جواب را به دست آورد. فرهاد ضمن تأیید جواب او گفت: «راحل تو بیشتر آزمایشی و تجربی است، اگر بتوانی جواب را با محاسبه دقیق ریاضی به دست آوری، بالرزش‌تر است.»

راستی بچه‌ها شما می‌توانید این کار را انجام دهید؟

# مجموعه‌ها

**مثال ۳.** اگر  $A$ ,  $B$  و  $C$  سه مجموعه دلخواه باشند، در این صورت داریم:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(این خاصیت توزیع پذیری اشتراک در رابطه اجتماع نامیده می‌شود.)

## اثبات

**قسمت ۱.**  $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

فرض کنیم:  $x \in A \cap (B \cup C)$ . می‌خواهیم ثابت کنیم:

چون:  $x \in A \cap (B \cup C)$ , پس:  $x \in A$  و  $x \in (B \cup C)$ . بنابراین:  $x \in C$  یا  $x \in B$  و  $x \in A$ .

چون می‌دانیم  $x \in A$ , می‌توانیم دو حالت در نظر بگیریم: یا  $x \in B$  و  $x \in A$  یا  $x \in C$  و  $x \in A$ . بنابراین، یا:

و یا:  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

**قسمت ۲.**  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

فرض کنیم:  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . می‌خواهیم ثابت کنیم:

از آنجا که:  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ , پس یا  $x \in (A \cap B)$  و یا  $x \in (A \cap C)$ . بنابراین، یا:  $x \in A$  و  $x \in B$  و یا:  $x \in A$  و  $x \in C$ .

یعنی در هر حالت:  $x \in A$  و  $x \in B$  یا  $x \in C$  یا  $x \in A$  و  $x \in C$ . بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$x \in A \cap (B \cup C)$

با اتمام اثبات در دو قسمت فوق داریم:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

## لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Distributive Property	خاصیت توزیع پذیری
2. Intersection	اشتراک
3. Union	اجتماع
4. To Prove	اثبات کردن
5. Therefore	بنابراین، پس
6. Conclude	استنتاج، نتیجه گرفتن
7. Thus	بنابراین، آنگاه
8. To Consider	در نظر گرفتن

**EXAMPLE 3.** If A, B, and C are any three sets, then

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(This is known as the distributive property of the intersection with respect to the union.)

*Proof*

Part 1.  $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Let  $x \in A \cap (B \cup C)$ . We want to prove that  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

Because  $x \in A \cap (B \cup C)$ , then  $x \in A$  and  $x \in (B \cup C)$ . Therefore,  $x \in A$  and either  $x \in B$  or  $x \in C$ .

Because we know that  $x \in A$ , we can consider two cases: either  $x \in A$  and  $x \in B$ , or  $x \in A$  and  $x \in C$ . Thus, either  $x \in (A \cap B)$  or  $x \in (A \cap C)$ . Therefore, we can conclude that  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

Part 2.  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

Let  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . We want to prove that  $x \in A \cap (B \cup C)$ .

As  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ , that either  $x \in (A \cap B)$  or  $x \in (A \cap C)$ . Thus, either  $x \in A$  and  $x \in B$ , or  $x \in A$  and  $x \in C$ . Therefore, in any case  $x \in A$ , and either  $x \in B$  or  $x \in C$ . Thus,  $x \in A$  and  $x \in (B \cup C)$ . Therefore, we can conclude that  $x \in A \cap (B \cup C)$ .

By the conclusions proved in the two mentioned parts, we have that

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

### ترجمه برای دانشآموزان

**EXAMPLE 4.** Let  $A = \{x \in \mathbb{Z} | x \text{ is a multiple of } 5\}$  and  $B = \{x \in \mathbb{Z} | x \text{ is a multiple of } 7\}$ . Then

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} | x \text{ is a multiple of } 35\}.$$

*Proof*

Part 1.  $A \cap B \subseteq \{x \in \mathbb{Z} | x \text{ is a multiple of } 35\}$ .

Let  $x \in A \cap B$ . Then  $x \in A$  and  $x \in B$ . This implies that  $x$  is a multiple of 5 and it is a multiple of 7. Therefore,  $x = 5n$  and  $x = 7m$  with  $n$  and  $m$  integer numbers.

If we combine these two equalities, we obtain  $5n = 7m$ .

As 5 and 7 are prime numbers, 5n is divisible by 7 only if n is divisible by 7. Thus  $n = 7k$  for some integer number  $k$ . Therefore,  $x = 5n = 5(7k) = 35k$  for some integer number  $k$ . This means that  $x$  is a multiple of 35.

Part 2.  $\{x \in \mathbb{Z} | x \text{ is a multiple of } 35\} \subseteq A \cap B$ .

Let  $x$  be a multiple of 35. Therefore,  $x = 35t$  for some integer number  $t$ .

Thus,  $x$  is divisible by 5 (so  $x \in A$ ) and it is divisible by 7 (so  $x \in B$ ). This implies that  $x \in A \cap B$ . Therefore, the two sets are equal.



## اشاره

«پایی تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامه برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که بهطور فعال به حل آن‌ها پردازید و راه حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه حل‌های آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد).

مسائل و راه حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل  $150\text{ dpi}$ ) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به پهترین‌ها جواز نفیسی اهدا می‌شود.

## بخش اول:

### مسئله‌ها

**۳۵۵.** مجموع پنج توان متولی از ۲ از  $۱۳۹۷$  بیشتر

است. اولین جمله بین آن‌ها کدام است؟

**۳۵۶.** کوچکترین عدد صحیح  $x$  را بیابید، بهطوری که

$x-175 = 30x-3^x$  عددی اول باشد.

**۳۵۷.** مجموع تمام ریشه‌های حقیقی معادله

$= 0 - 6x^3 + 11x^2 - 6x^4 + 11x^5$  را به دست آورید.

**۳۵۸.** اگر عدد  $1397$  را در مبنای  $n$  بنویسیم، بهصورت

$10^{70}$  نمایش داده می‌شود.  $n$  چقدر است؟

**۳۵۹.** جواب‌های معادله  $x^4 + x^3 + 2x^2 = 82$  را به دست

آورید.

**۳۶۰.** اگر  $f(2) = 5$  و برای هر عدد حقیقی  $x$  داشته باشیم:

$f(x) \cdot f(x+1) = 3$  مطلوب است مقدار  $(f(1))^0$

**۳۵۱.** کوچکترین مقدار  $x$  را بیابید، بهطوری که:

$$[x] + [2x] + [3x] + [4x] = 15$$

**۳۵۲.** میانگین  $n$  عدد صحیح متولی که از  $n$  شروع

می‌شوند برابر  $94$  است. مطلوب است مقدار  $n$ .

**۳۵۳.** اندازه زاویه‌های یک پنج ضلعی محدب عدددهای

صحیح هستند و یک دنباله حسابی تشکیل

می‌دهند. چند مقدار متفاوت برای اندازه زاویه‌ها

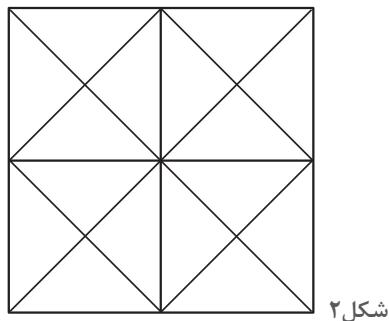
وجود دارد؟

**۳۵۴.** فاصله دو نقطه تقاطع منحنی‌های  $x+y=7$  و

$x^2+y=7$  را به دست آورید.

## بخش دوم: راه حل ها

۳۲۲. چند مثلث در شکل ۲ وجود دارد؟

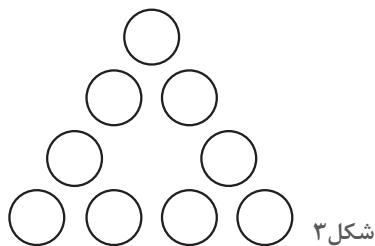


شکل ۲

اگر هر مثلث کوچک را مثلثی واحد در نظر بگیریم، ۱۶ مثلث واحد وجود دارد. همچنین ۱۶ مثلث با مساحت دو برابر، ۸ مثلث با مساحت چهار برابر و ۴ مثلث با مساحت هشت برابر وجود دارد. در نتیجه تعداد کل مثلثها برابر است با ۴۴.

۳۲۳. عدد های ۱ تا ۹ را درون دایره ها (شکل ۳).

طوری نوشته ایم که مجموع اعداد هر ضلع برابر ۱۷ شود. مجموع اعداد روی رأس ها را بیابید. چند روش برای نوشتن ۹ عدد وجود دارد؟

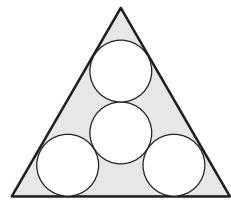


شکل ۳

مجموع همه خانه ها برابر است با ۴۵ و مجموع سه ضلع برابر است با ۵۱. اما در مجموع سه ضلع، رئوس را ۲ بار شمرده ایم. پس مجموع اعداد سه رأس برابر است با ۶. برای نوشتن سه رأس،  $6 = 3 + 3$  حالت وجود دارد. سپس اعداد ۴ تا ۹ را باید در ۶ خانه باقی مانده طوری بنویسیم که مجموع هر ضلع ۱۷ شود. اگر ۹ را با ۴ جفت کنیم، آن گاه باید ۸ را با ۶ و ۷ را با ۵ در نظر بگیریم و ۲۳ حالت برای نوشتن سه جفت روی اضلاع امکان وجود دارد. اگر ۹ را با ۵ جفت کنیم، آن گاه باید ۸ را با ۴ و ۷ را با ۶ در نظر بگیریم،

۳۲۱. در شکل ۱ دو مثلث متساوی الاضلاع با ضلع برابر مفروض آند. در مثلث اول ناحیه خارج دایره محاطی رنگ شده است و در شکل دوم ناحیه خارج از چهار دایره یکسان که مطابق شکل بی هم مماس هستند. کدام یک از دو ناحیه رنگی بزرگتر است؟

مطابق شکل چهار مثلث کوچکتر با مثلث اصلی متشابه هستند. در نتیجه مساحت رنگ شده در هر مثلث کوچکتر برابر یک چهارم مساحت رنگی مثلث اصلی است. در نتیجه مساحت رنگی دو شکل داده شده برابرند.



شکل ۱

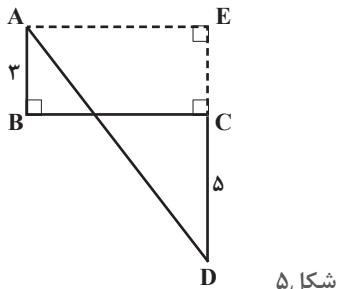
۳۲۲. در شکل زیر به جای مربع ها می توانیم علامت + یا - بگذاریم، اما حداکثر از سه علامت - می توانیم استفاده کنیم. چند راه برای پر کردن خانه ها وجود دارد؟

$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 \square 10 = 35$

مجموع عدد های ۱ تا ۱۰ برابر است با ۵۵. در نتیجه مجموع عدد هایی که کم می شوند باید برابر ۱۰ باشد. با توجه به علامت مثبت ۱، تنها جواب با سه علامت منفی  $\{-5, -3, -2\}$  است. با دو علامت منفی جواب ها  $\{-2, -8\}$  و  $\{-3, -7\}$  هستند و با یک علامت منفی تنها جواب  $\{-10\}$  است. در نتیجه در کل ۵ راه وجود دارد.

**۳۲۸.** در شکل ۵،  $BC=6$ . اندازه  $AD$  را به دست آورید.

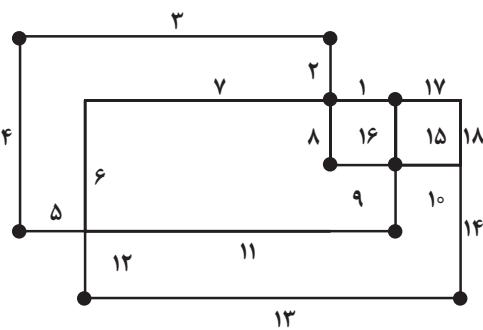
با توجه به شکل ۵،  $AE$  و  $DE$  به ترتیب برابر ۶ و ۸ خواهند بود. در نتیجه طبق قضیه فیثاغورس  $AD$  برابر است با:  $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ .



شکل ۵

**۳۲۹.** آیا می‌توان شکل ۶ را با یک حرکت خودکار رسم کرد؟ در واقع مجاز نیستیم خودکار را از روی کاغذ برداریم تا زمانی که شکل کامل شود.

مطابق شکل ۶ پاره خطها را طبق شماره طی می‌کنیم.



شکل ۶

**۳۳۰.** اگر  $x$  عددی حقیقی باشد، کمترین مقدار عبارت زیر را به دست آورید:

$$y = |||x - 10| + 10| - 10| + 1|$$

اگر بخواهیم  $y$  مینیمم شود، باید

$|x - 10| + 10 - 10 = 0$  برابر صفر باشد. در

نتیجه  $|x - 10| + 10 = 10$  باید برابر ۱۰ شود. یعنی

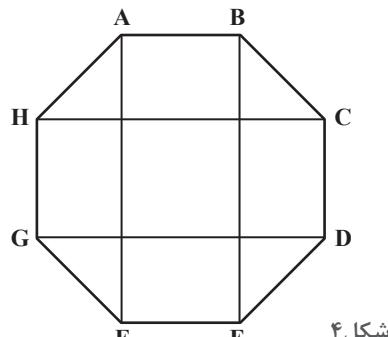
$|x - 10| = 0$  باید صفر باشد. پس  $x = 10$  و کمترین

مقدار  $y$  برابر ۱۰ است.

که در اینجا نیز ۳ حالت برای نوشتن آنها وجود دارد. بنابراین در کل  $4(8+8)=96$  راه برای نوشتن ۹ رقم وجود دارد.

**۳۲۵.** در شکل ۴ چه کسری از هشتضلعی منتظم رنگ شده است؟

اگر ضلع هشتضلعی را واحد در نظر بگیریم، مساحت رنگ شده نصف مساحت مستطیل  $ABEF$  است. از طرف دیگر، مساحت  $ABEF$  برابر ۳ و مساحت هشتضلعی برابر ۷ است. در نتیجه نسبت مساحت رنگی به کل مساحت برابر است با:  $\frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$ .



شکل ۴

**۳۲۶.** یک ظرف شیشه‌ای پر از عسل ۷۵۰ گرم وزن دارد. اگر یک سوم عسل را خالی کنیم، وزن ظرف به ۵۵۰ گرم می‌رسد. وزن ظرف خالی چقدر است؟

وزن یک سوم عسل برابر  $750 - 550 = 200$  گرم است. پس وزن عسل برابر  $600$  گرم و وزن ظرف برابر  $150$  گرم است.

**۳۲۷.** دو عدد طبیعی هستیم که حاصل ضربیان برابر  $1000$  است، اما هیچ کدام سمت راست خود رقم صفر نداریم. ما چه عده‌ایی هستیم؟

چون رقم یکان ما صفر نیست، پس به ده بخش پذیر نیستیم. بنابراین یکی از ما فقط عامل اول ۵ و دیگری فقط عامل اول ۲ را داریم. پس ما دو عدد  $2^3$  و  $5^3$  هستیم.



### وصیت پدر بزرگ شهریارا

شهریار در ادامه گفت: «داستان من هم شبیه داستان پدر بزرگ مازیار است. من هم پدر بزرگی داشتم که چند سال پیش عمرش را به شما داد و او هم زمینی در شهرمان داشت. ولی شکل زمین او به این عجیبی نبودا زمین او از دو قطعه مربع شکل به هم چسبیده مثل این شکل، تشکیل شده بود. اما وصیت او عجیب‌تر بود! او وصیت کرده بود که با رسم سه خط راست در این زمین، آن را به پنج قطعه تقسیم کنند و هر قطعه را به ترتیب بزرگی و به ترتیب سن به یکی از پنج پسرش بدهند».

کاوه گفت: «خب این کار که خیلی آسان است!»

شهریار گفت: «اجازه بدها اما او چیز دیگری هم گفته بود. او گفته بود که این تقسیم‌بندی طوری باشد که از کنار هم قرار دادن این پنج قطعه بتوان یک مربع دیگر ساخت!»

کاوه گفت: «آه! حالا مسئله سخت شد!»

ولی فرهاد گفت: «نه فکر نمی‌کنم سخت باشد. من شنیده‌ام همیشه می‌توان هر دو مربع دلخواه را با برش‌های مناسب به قطعاتی تقسیم کرد که از کنار هم قرار دادن آن‌ها مربع بزرگ‌تری درست شود. فکر می‌کنم این مسئله بی‌ارتباط با آن مسئله نباشد». پس از اندکی خطاکشی و امتحان کردن، فرهاد موفق به حل این مسئله شد و آن را به همه نشان داد. شهریار گفت: «بله درست است، اتفاقاً پدر و عموهایم نیز همین‌طور عمل کردند و یکی از آن پنج قطعه به پدرم رسید و هنوز هم آن را دارد و در آن کشاورزی می‌کند».

آیا شما هم می‌توانید این مسئله را حل کنید؟



Rیاضی‌دان کسی است که یک فنجان قهوه را به یک قضیه تبدیل می‌کندا!

**«پال اردیش ریاضی‌دان معاصر مجاری»**

Rیاضیات هنر دادن یک اسم به چیزهای متفاوت است!

**«هنری پوآنکاره ریاضی‌دان فرانسوی»**

Rیاضی‌دانان شبیه فرانسوی‌ها هستند. هرچه به آن‌ها بگویید، آن‌ها به زبان خودشان ترجمه می‌کنند و فوراً معنی کاملاً متفاوتی از آن به دست می‌آورند!

**«گوته شاعر آلمانی»**

Rیاضی‌دان مرد کوری است که در اتاقی تاریک به گربه‌ای سیاه که وجود ندارد، خیره شده است!

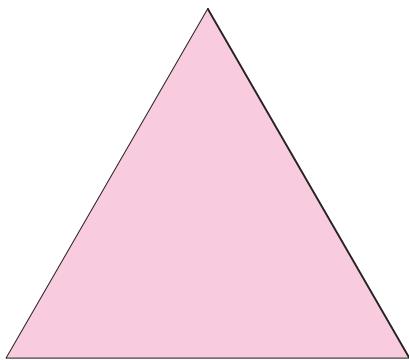
**«چارلز داروین زیست‌شناس انگلیسی»**

Rیچ شاخه‌ای از ریاضیات نیست که روزی در جهان واقعی به کار نزود.

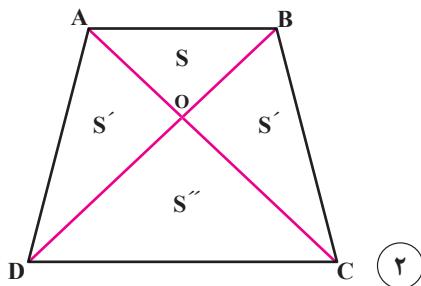
**«نیکلای لباقفسکی»**

Rهدف اصلی تمام تحقیقات در جهان باید کشف نظام منطقی جهان باشد که خداوند در آن قرار داده است و آن را به زبان ریاضیات بر ما آشکار ساخته است.

**«یوهانس کپلر»**

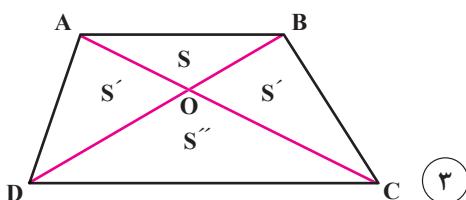


# قضیهٔ پیک در حالت‌های خاص

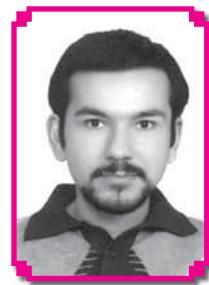


اثبات: با توجه به الف داریم:

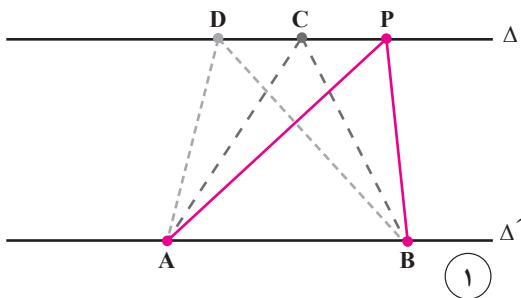
$$\begin{aligned} S_{ABC} = S_{ABD} &\Rightarrow S_{ABC} - S_{AOB} = S_{ABD} - S_{AOB} \\ \Rightarrow S_{AOD} = S_{BOC} &= S', A\hat{O}B = C\hat{O}D = \alpha \\ S_{AOB} \times S_{COD} &= \left(\frac{1}{2}AO \cdot OB \cdot \sin \alpha\right) \left(\frac{1}{2}OC \cdot OD \cdot \sin \alpha\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}OB \cdot OC \cdot \sin \alpha\right) \left(\frac{1}{2}AO \cdot OD \cdot \sin \alpha\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}OB \cdot OC \cdot \sin(18^\circ - \alpha)\right) \left(\frac{1}{2}AO \cdot OD \cdot \sin(18^\circ - \alpha)\right) \\ &= S_{AOD} \cdot S_{BOC} = S' \times S'' = S''' \Rightarrow S \cdot S'' = S''' \end{aligned}$$



با قضیهٔ پیک در فصل سوم هندسه دهم آشنا شده‌اید. می‌خواهیم به کاربرد و یافتن مساحت‌ها در مسائلی که به قضیهٔ پیک مربوط‌اند، بپردازیم. ابتدا به دو نکتهٔ کلیدی اشاره می‌کنیم:



خشایار کاویانپور  
دانشجوی  
کارشناسی ارشد ریاضی

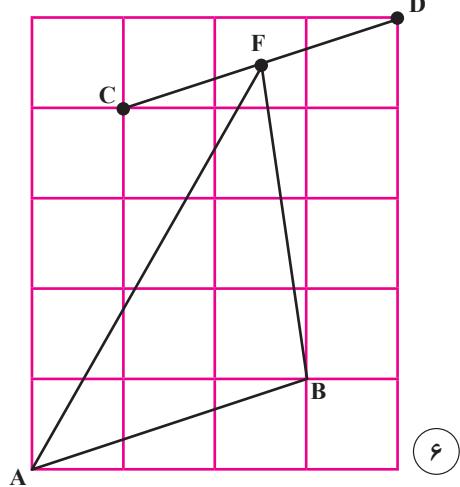


الف) دو خط موازی  $\Delta$  و  $\Delta'$  مفروض‌اند. اگر نقاط  $A$  و  $B$  واقع بر  $\Delta'$  در نظر بگیریم، آن‌گاه از هر نقطه متعلق به  $\Delta$  مانند  $P$ ،  $C$  و  $D$  به  $A$  و  $B$  وصل کنیم، مساحت مثلث‌های  $PAB$ ،  $CAB$  و  $DAB$  با هم برابر است:

$$\Delta \parallel \Delta' \Rightarrow S_{PAB} = S_{CAB} = S_{DAB}$$

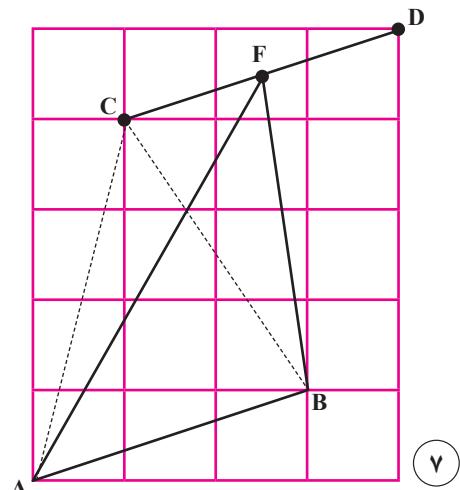
ب) در هر ذوزنقه مانند  $ABCD$  داریم:  $O$  محل تلاقي قطرها  
 $S''' = SS''$  (قضیهٔ شبه پروانه)

**مثال ۲.** در شکل ۶ که بخشی از یک شبکه را نشان می‌دهد، نقاط A، B، C، D و شبکه‌ای‌اند ولی FAB مساحت مثلث شبکه‌ای نیست. اگر:  $CF = FD$  مساحت مثلث FAB چقدر است؟



**حل:** ابتدا توجه می‌کنیم که AB و CD موازی‌اند (زیرا شیب‌های یکسانی دارند). با توجه به قسمت (الف)، چون CD و AB موازی‌اند و F نقطه‌ای روی CD است، اگر از C به A و B وصل کنیم، مساحت مثلث‌های  $S_{FAB} = S_{CAB}$  برابر است:

مثلث CAB شبکه‌ای است و ۳ نقطه مرزی و ۵ نقطه درونی دارد. بنابراین:



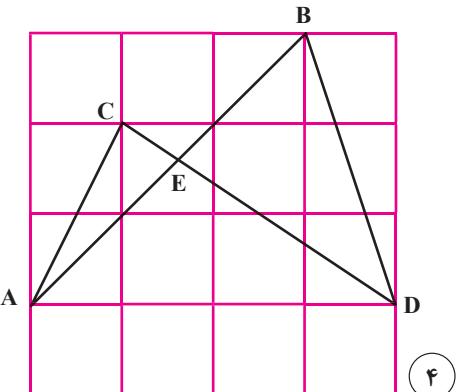
$$S_{FAB} = \frac{5}{2} + 3 - 1 = 4/5$$

(می‌توانستیم از D به A و B وصل کنیم و مسئله را

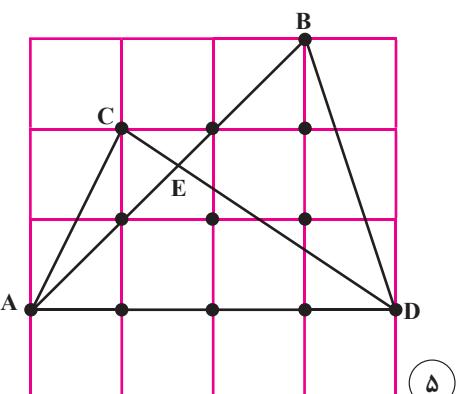
از این راه هم حل کنیم.)

حال به حل چند مثال می‌پردازیم:

**مثال ۱.** در شکل ۴ پاره خط‌های AB و CD یکدیگر را در E قطع کرده‌اند که شبکه‌ای نیست. حاصل  $S_{BED} - S_{CEA}$  را بیابید.



**حل:** E شبکه‌ای نیست، ولی نقاط A، B، C و D شبکه‌ای هستند. از D به A به وصل می‌کنیم. دو مثلث CAD و شبكه‌ای هستند و در مثلث BAD مشترک‌اند. لذا:



$$\begin{aligned} S_{BAD} - S_{CAD} &= S_{BED} + S_{EAD} - S_{CEA} - S_{EAD} \\ &= S_{BED} - S_{CEA} \quad (۱) \end{aligned}$$

با استفاده از دستور پیک داریم:

$$S_{BAD} = \frac{\lambda}{2} + 3 - 1 = 6, S_{CAD} = \frac{6}{2} + 2 - 1 = 4$$

از (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$S_{BED} - S_{CEA} = 6 - 4 = 2$$

(می‌توانستیم از B به C وصل کنیم و مسئله را از

این راه هم حل کنیم.)

طبق قضیه شبه پروانه در ذوزنقه داریم:

$$S' = S \times 4S \Rightarrow S' = 2S$$

مساحت ذوزنقه شبکه‌ای FECA:

$$A = \frac{1}{2} + 2 - 1 = 6$$

بنابراین:

$$4S = 6 \Rightarrow S = \frac{6}{9} \Rightarrow 4S = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

حال توجه می‌کنیم که:

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ADCB}$$

در نهایت مساحت متوازی‌الاضلاع ADCB برابر

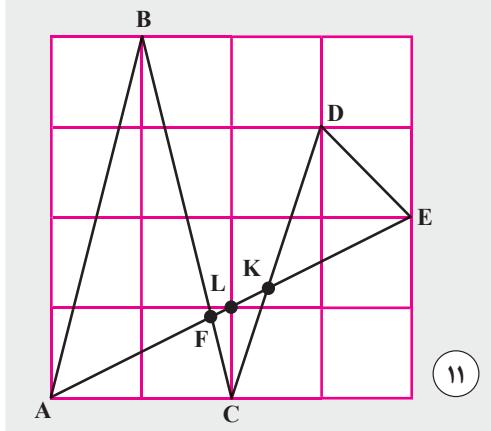
است با:

$$S_{\triangle ADCB} = 2 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

### تمرین

در شبکه شکل ۱۱ پاره خط AE، پاره خط‌های BC و DC را در نقاط غیرشبکه‌ای K و F قطع کرده است و از نقطه شبکه‌ای L می‌گذرد. حاصل

$$S_{\triangle ABF} + S_{\triangle DEK} - S_{\triangle CFK}$$



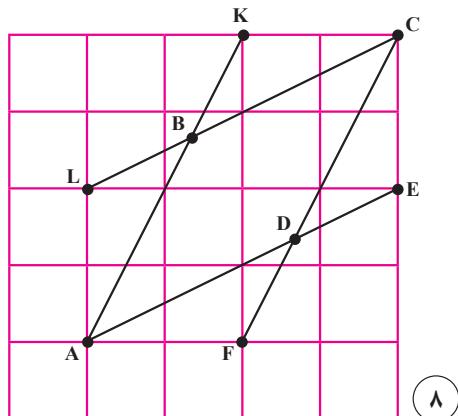
پاسخ: ۴

منبع \*

**مثال ۳.** در شبکه شکل ۸ مساحت چهارضلعی

ABCD را که در آن نقاط A و C شبکه‌ای هستند،

اما B و D شبکه‌ای نیستند، بیابید.



**حل:** ابتدا توجه کنید:  $CB \parallel AD$  و  $CD \parallel AB$

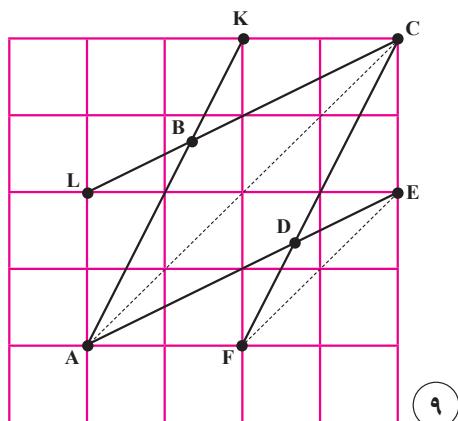
یعنی  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع است. از C به A

از E به F وصل می‌کنیم EF و CA موازی‌اند. لذا

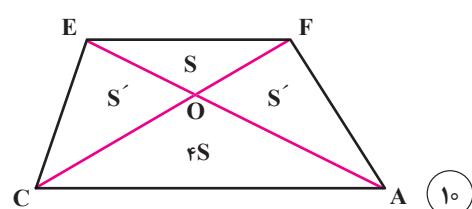
چهارضلعی FECA ذوزنقه است. از طرف دیگر،

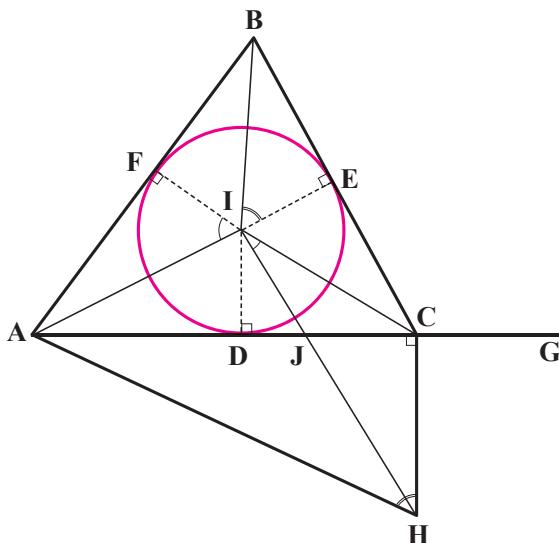
داریم:  $\triangle ADC = 2\triangle EDF$  و  $\triangle ADC = 2\triangle EDF$ . (چرا؟) از تشابه

داریم:



$$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle EDF}} = (2)^2 = 4$$





# اثبات هندسی رابطه هرون

اشاره

رابطه هرون فرمولی است که با استفاده از آن می‌توان مساحت یک مثلث را با داشتن طول‌های اضلاع و بدون داشتن طول ارتفاع آن به دست آورد. تاکنون به روش‌های جبری و مثلثاتی اثبات‌هایی از قضیه هرون ارائه شده است. در این مقاله این رابطه به روش هندسی اثبات می‌شود. در رابطه هرون،  $P$  نصف محیط مثلث و  $a$ ,  $b$  و  $c$  برابر اضلاع مثلث هستند.

## اثبات

برای اثبات رابطه هرون باید مراحل زیر را انجام دهیم:

**مرحله اول (طریقه ترسیم شکل):** فرض کنید  $AC=b$ ،  $BC=a$  و  $AB=c$  در نقاط  $E$ ،  $D$  و  $F$  مماس باشد. بر امتداد  $IH$  را چنان اختیار می‌کنیم که:  $G=BE$ ،  $A=CI$ ،  $C=AH$  را بر  $AI$  عمود کنید تا  $AC$  را در  $J$  و خط عمود بر  $AC$  (در نقطه  $C$ ) را در  $H$  قطع کند.

**مرحله دوم (استفاده از داده‌های شکل):** پاره خط‌های  $ID=IE=IF$ ،  $DIJ \sim HCJ$  به دلیل اینکه شعاع‌های دایره محاطی اند، با هم برابرند. همچنین می‌دانیم از هر نقطه خارج یک دایره فقط دو مماس می‌توان بر آن رسم کرد که طول آن‌ها با هم برابرند. پس:  $BF=BE$ ،  $AD=AF$  و  $CD=CE$ . می‌دانیم از چهار نقطه  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $H$ ، از یک دایره می‌گذرد (چرا؟). از این رو زاویه‌های  $AIC$  و  $CHA$  ممکن یکدیگرند. از طرف دیگر، اگر  $P$  را نصف محیط تعریف کنیم، طبق آنچه از کتاب درسی می‌دانیم:

$$ID = r = \frac{S}{P}, \quad S = Pr$$

**مرحله سوم:** ثابت می‌کنیم:  $\hat{BIE} = \hat{AHC}$ . می‌دانیم در نقطه  $I$  مجموع زاویه‌ها  $360^\circ$  درجه است؛ یعنی:

$$\hat{BIE} + \hat{BIE} + \hat{CIE} + \hat{CID} + \hat{BIF} + \hat{AID} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 2\hat{BIE} + 2\hat{CID} + 2\hat{AID} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{BIE} + \hat{CID} + \hat{AID} = 180^\circ$$

$$\hat{CID} + \hat{AID} = \hat{AIC} \Rightarrow \hat{BIE} + \hat{AIC} = 180^\circ$$

$\hat{BIE}$ ،  $\hat{AIC}$  ممکن یکدیگرند.  $\hat{AIC}$ ،  $\hat{AHC}$  ممکن یکدیگرند.

## مرحله چهارم: نشان می‌دهیم: $AG=P$

$$\begin{aligned} 2P &= AB + AC + BC = AF + BF + AD + CD + BE + CE \\ &= (AF + AD) + (BF + BE) + (CD + CE) \\ &= 2AD + 2BE + 2CD = 2(AD + BE + CD) \\ \underline{AG = AD + DC + CG} \quad \rightarrow 2P &= 2AG \Rightarrow P = AG \end{aligned}$$

## مرحله پنجم: از تناسب بین اضلاع در مثلث‌های متشابه برای به دست آوردن رابطه استفاده می‌کنیم:

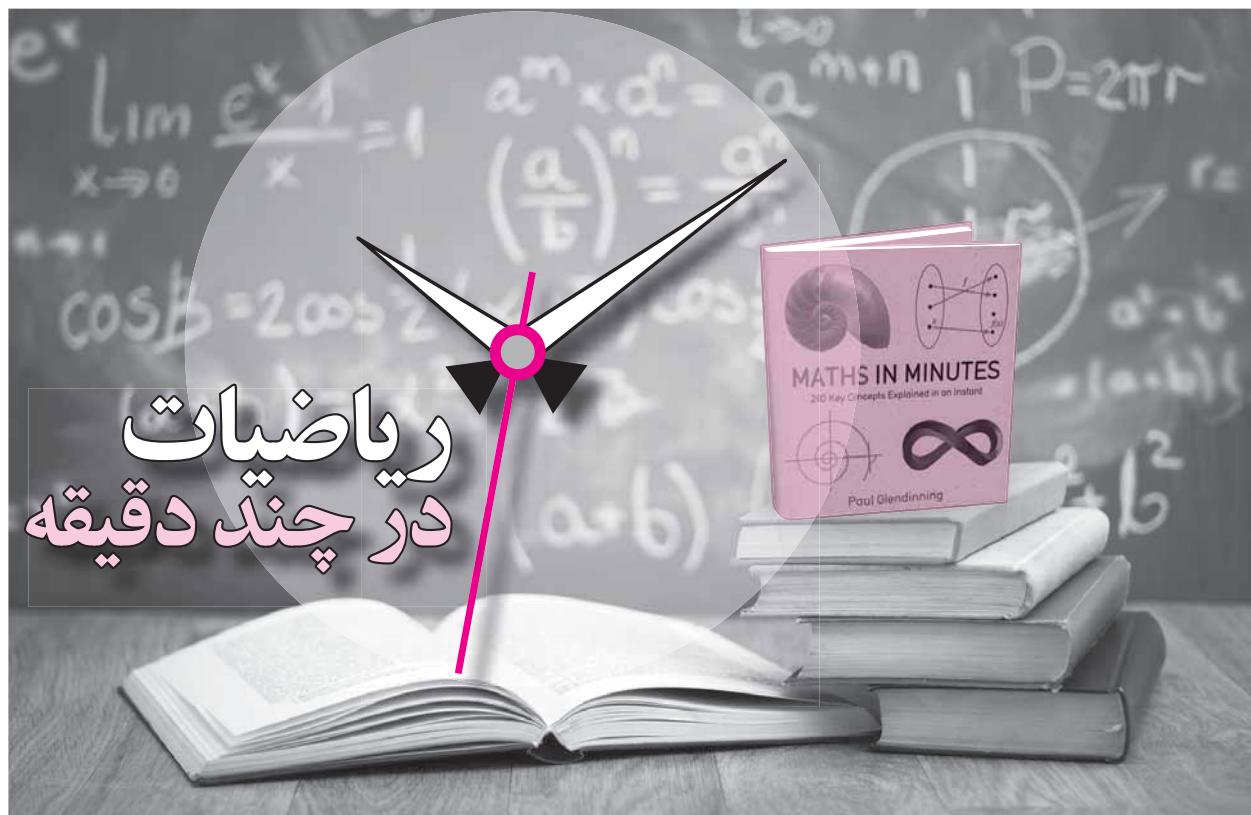
$$\begin{aligned} \triangle BIE \sim \triangle AHC &\Rightarrow \frac{AC}{BE} = \frac{CH}{IE} \quad (1) \quad \left| \begin{array}{l} ID = IE \\ DIJ \sim HCJ \Rightarrow \frac{CH}{ID} = \frac{JC}{DJ} \quad (2) \end{array} \right. \\ \frac{AC}{BE} &= \frac{JC}{DJ} \quad \underline{\text{BE} = CG} \quad \frac{AC}{CG} = \frac{CJ}{DJ} \\ \Rightarrow \frac{AC}{CG} &= \frac{CJ}{DJ} \Rightarrow \frac{AC}{CG} = \frac{CD}{DJ} \\ \Rightarrow \frac{AG}{CG} &= \frac{CD \times AD}{DJ \times AD} \\ \Rightarrow \frac{AG}{CG \times AG} &= \frac{CD \times AD}{DJ \times AD} \\ \Rightarrow \frac{AG}{CG} &= \frac{CD \times AD}{ID} \Rightarrow AG \cdot ID = AG \cdot CG \cdot CD \cdot AD \\ \Rightarrow (AG \cdot ID)^\gamma &= AG \cdot CG \cdot CD \cdot AD \Rightarrow (AG \cdot ID)^\gamma = P \cdot r = S \\ \Rightarrow S^\gamma &= AG \cdot CG \cdot CD \cdot AD \Rightarrow S = \sqrt{AG \cdot CG \cdot CD \cdot AD} \\ &= \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad (\text{رابطه هرون}) \end{aligned}$$

$$AG = p$$

$$CG = AG - AC = P - b$$

$$AD = AG - (CD + CG) = AG - (CE + BE) = P - a$$

$$CD = AG - (AD + CG) = AG - (AF + BF) = P - c$$



### معرفی هندسه

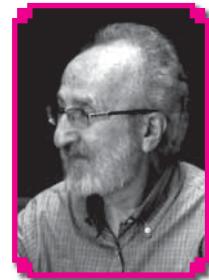
هندسه، مطالعه شکل، اندازه، موقعیت و فضاست. این بررسی، به شکل کلاسیکش که توسط اقلیدس، ریاضی‌دان یونانی، در حدود ۳۰۰ ق.م تأسیس شد، مبتنی بر فهرست‌هایی از اشیا، و فرض‌هایی موسوم به «اکسیوم» که از آن‌ها جمیع نتایج حاصل می‌شد، است. کتاب با نفوذ «مقدمات» اثر اقلیدس، پنج اکسیوم را به این شرح فهرست کرده بود:

۱. بین هر دو نقطه یک خط می‌توان رسم کرد.
۲. یک پاره‌خط را می‌توان در هر یک از دو جهت آن گسترش داد.

۳. به مرکز هر نقطه با هر شعاع می‌توان دایره‌ای رسم کرد.

۴. هر دو زاویه قائم‌های برابرند.

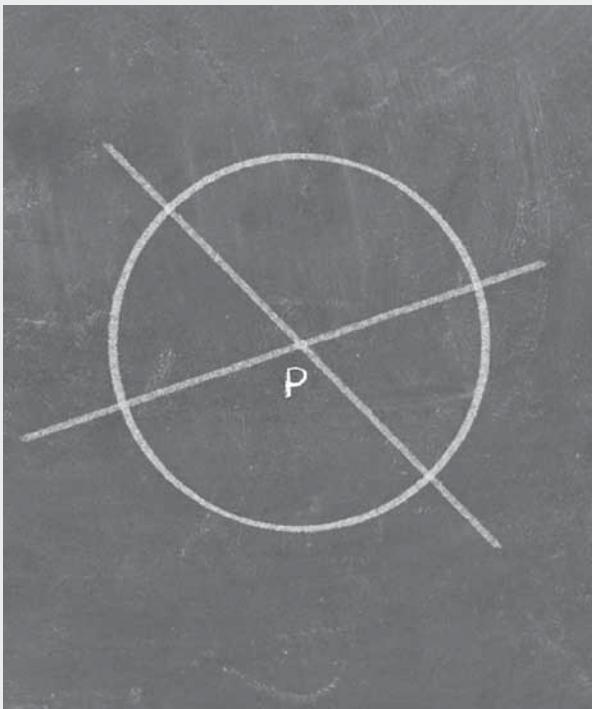
۵. به ازای هر خط راست مفروض و نقطه‌ای غیرواقع بر آن، دقیقاً یک خط، موسوم به خط موازی، موجود است که خط اصلی راقطع نمی‌کند. قابل توجه است که اکسیوم‌های اقلیدس از تعدادی کلمه و عبارت، از قبیل خط، زاویه قائم و شعاع، بدون توضیح یا تعریف آن‌ها، استفاده می‌کنند. در نتیجه تأثیر کارهای اقلیدس، اکسیوم‌های جدیدی در اوآخر سده ۱۸۰۰ برای توسعه هندسه در قالبی دقیقاً منطقی معرفی شدند.



ترجمه غلامرضا یاسیبور



## خطها و زاویه‌ها



خط و زاویه دو مفهوم از اساسی ترین مفاهیم هندسه اقلیدسی‌اند. اکسیوم پنجم اقلیدس بر این است که: با معلوم بودن یک خط راست و یک نقطه غیرواقع بر آن خط، جمیع خط‌های ممکن گذرنده از آن نقطه، به استثنای یکی، خط مفروض را قطع می‌کنند. به عبارت دیگر، خط‌های معمولی تقاطع می‌کنند، و خط‌های موازی، نامتقاطع شونده و غیرمعمولی‌اند.

مفهوم زاویه از آنجا به وجود آمد که وسیله‌ای برای توصیف چگونگی تقاطع خط‌ها باشد. فرض می‌کنیم، چنان‌که در شکل ۱ نشان داده‌ایم، دو خط در نقطه  $P$  متقاطع باشند. در این حالت دایره به مرکز  $P$ ، توسط این خط‌ها به چهار قطعه تقسیم می‌شود. اگر این قطعات از نظر سطح برابر باشند، آن‌گاه گفته می‌شود که خط‌های مذبور متعامد و زاویه‌های مربوطه قائم‌اند.

این موضوع با اکسیوم چهارم اقلیدس مرتبط است. در حالتهای عمومی‌تر، زاویه‌ها با درجه اندازه‌گیری می‌شوند و از طریق توابع مثلثاتی نقشی اساسی در زمینه‌هایی ایفا می‌کنند که ظاهراً با هندسه ارتباطی ندارند.

## اندازه‌گیری زاویه‌ها



از لحاظ تاریخی اندازه‌گیری زاویه‌های بین دو خط شامل رسم دایره‌ای دور نقطه تقاطع آن دو خط و تقسیم آن به تعدادی قطعه یا واحدهای برابر است. منجمان باستانی ماوراءالنهر مفهوم استفاده از  $360^\circ$  قسمت از چنین تقسیمی را که امروزه به عنوان درجه می‌شناسیم، معرفی کردند. آن‌ها واحدهای زمان، یعنی درجه را به  $60^\circ$  دقیقه برابر، هر یک شامل  $6^\circ$  ثانیه برابر نیز زیر تقسیم کردند. زیر تقسیم‌های کوچک مذبور برای اجتناب از اشتباه با واحدهای زمان، غالباً به عنوان دقیقه‌های کمان و ثانیه‌های کمان شناخته می‌شوند. به این ترتیب، اندازه یک زاویه با مشخص کردن اینکه چند درجه، دقیقه و ثانیه کمان را تشکیل داده است، به دست می‌آید.

استفاده از عدددهای  $6^\circ$  و  $360^\circ$  در این زمینه بسیار مناسب است، زیرا  $6^\circ$  می‌تواند توسط عدددهای  $1, 2, 3, 4, 5$ ، یا  $6$  شمرده شود و باز عددی تمام حاصل کند. اما این واحدهای خاص برای اندازه‌گیری زاویه مبنای اساسی نیستند. ایده اصلی در این امور آن است که می‌توانیم به زاویه به عنوان نسبتی از یک دایره نگاه کنیم که توسط دو خط سازنده آن زاویه محصور شده است.

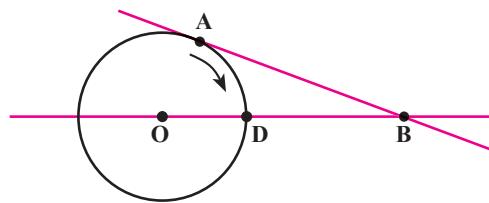
# چنان مسئله از حد در ذهن‌های گوغا گون

در نتیجه:

$$\lim_{A \rightarrow B} \frac{AB}{DB} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x}}$$

با نزدیک شدن  $x$  به صفر،  $\frac{2}{x}$  به سمت  $+\infty$  می‌رود و حد فوق  $+\infty$  خواهد بود. بنابراین:  $\lim_{A \rightarrow D} \frac{AB}{DB} = +\infty$ . یعنی این نسبت با نزدیک شدن نقطه A به B، به سمت  $+\infty$  می‌رود.

در کتاب حسابان یا ریاضی ۲ با مفهوم حد تاحدودی آشنا شده‌اید. می‌خواهیم با ذکر چند مثال به درک بیشتری از مفهوم حد برسیم. از یک مثال هندسی شروع می‌کنیم.



**مثال ۲.** معادله درجه دوم  $ax^2 + 2x + 1 = 0$  را در نظر بگیرید و فرض کنید a عددی در بازه  $(0, 1)$  است.

اگر دلتای معادله را محاسبه کنید، خواهید دید:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4a > 0$$

پس معادله دو ریشه دارد.  $x_1$  را ریشه بزرگ تر و  $x_2$  را ریشه کوچک تر فرض کنید. می‌خواهیم بررسی کنیم که با میل کردن a به صفر،  $x_1$  و  $x_2$  به سمت چه عددی می‌روند:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-2 + \sqrt{4 - 4a}}{2a} \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0^+} (x_1) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4 - 4a} - 2}{2a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{4 - 4a} - 2)(\sqrt{4 - 4a} + 2)}{2a(\sqrt{4 - 4a} + 2)} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{4 - 4a - 4}{2a(\sqrt{4 - 4a} + 2)} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{-4a}{2a(\sqrt{4 - 4a} + 2)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

پس با میل کردن a به صفر از سمت راست، ریشه بزرگ تر به  $-\frac{1}{2}$  میل می‌کند. دقیق کنید که  $-\frac{1}{2}$ - ریشه معادله  $2x^2 + 1 = 0$  است. حال حد ریشه کوچک تر را پیدا کنیم. می‌دانیم:  $x_1 x_2 = \frac{1}{a}$

**مثال ۱.** دایره C به مرکز O و شعاع واحد مفروض است. خطی افقی از مرکز می‌گذرانیم تا دایره را در نقطه D قطع کند. خط دیگری در نقطه A بر دایره مماس می‌کنیم تا خط افقی را در نقطه B قطع کند. حال نقطه A را روی دایره به نقطه D نزدیک می‌کنیم. طول دو پاره‌خط AB و DB چه تغییری می‌کنند؟ با نزدیک شدن A به D، پاره‌خط‌های AB و DB کوچک‌تر می‌شوند و طول آنها به سمت صفر می‌رود. حال می‌خواهیم بینیم نسبت  $\frac{AB}{DB}$  به سمت چه عددی می‌رود. چه حدسی می‌زنید؟ صورت و مخرج این کسر هر دو در حال کاهش هستند و به سمت صفر می‌روند، اما نسبت آنها چه طور؟ برای حل این مسئله و یافتن  $\lim_{A \rightarrow D} \frac{AB}{DB}$ ، ابتدا باید مقدار کسر را بر حسب یک متغیر مناسب نمایش دهیم.

فرض کنید:  $|OB| = x$ . در این صورت:  $|OA| = 1+x$  و در مثلث قائم‌الزاویه OAB خواهیم داشت:

$$AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} = \sqrt{(1+x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 + 2x}$$

در نتیجه:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} x_a = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{x_a a} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{-2}{a}$$

با نزدیک شدن  $a$  به صفر، مخرج کسر کوچک و کوچکتر می‌شود. در نتیجه  $\frac{-2}{a}$  به سمت  $-\infty$  می‌رود! به عنوان تمرین می‌توانید برسی کنید که با میل کردن  $a$  به عدد ۱، ریشه‌ها به سمت چه اعدادی می‌روند.

### مثال ۳. دنباله زیر از عده‌های حقیقی را در نظر بگیرید:

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$$

این دنباله را دنباله  $\{a_n\}$  می‌نامیم. شاید کنجکاو شده باشید که حد این دنباله وقتی  $n$  به سمت بی‌نهایت می‌رود، چقدر است، فرض کنید:  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ . یعنی بی‌نهایت رادیکال تودر تو نوشته‌ایم (این عمل غیرممکن است اما برای لحظه‌ای فرض کنید که بی‌نهایت بار رادیکال نوشته‌اید). پس:

$$L = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$L^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$$

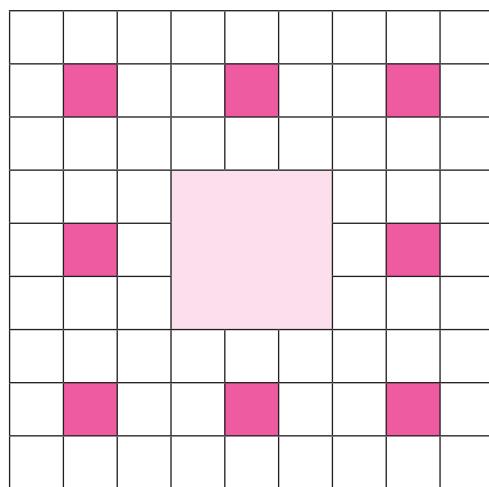
جمله دوم طرف راست همان  $L$  است. (چرا؟) در نتیجه:  $L = L^2$ . با حل این معادله به ریشه‌های  $L = -1$  می‌رسیم. اما ریشه ۱- قابل قبول نیست. پس:  $L = 2$

یک نکته جالب دیگر درباره این دنباله آن است که همه جملات دنباله گنج هستند. اما حد دنباله عددی گویاست.

### مثال ۴. دنباله زیر از عده‌های حقیقی را در نظر بگیرید:

$$\frac{\sqrt{2}}{1}, \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt[4]{3\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}{3}, \dots$$

جمله عمومی این دنباله برابر است با:  $a_n = \frac{[n\sqrt{2}]}{n}$  همان‌طور که مشاهده می‌کنید: همه جملات دنباله اعدادی گویا هستند. حال حد دنباله را در نظر بگیریم. این دنباله به سمت چه عددی می‌رود؟



**راه حل:** در پایان مرحله اول مساحت رنگ شده برابر  $\frac{1}{9}$  است. در پایان مرحله دوم مساحت رنگ شده برابر

در پایان چند مسئله برای حل توسط شما ارائه می‌کنیم:

**مسئلهٔ ۱.** دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \dots$$

۱. جملهٔ عمومی دنباله را بنویسید.

۲. حد جملهٔ عمومی را وقتی که  $n \rightarrow +\infty$  می‌کند، بدست آورید.

**مسئلهٔ ۲.** معادلهٔ  $x^2 + ax + 1 = 0$  مفروض است،

بطوری که:  $x > 2$

۱. نشان دهید معادلهٔ دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۲. وقتی:  $a \rightarrow 2^+$ ، ریشهٔ بزرگ‌تر به سمت چه عددی می‌رود؟ ریشهٔ کوچک‌تر چطور؟

۳. وقتی:  $a \rightarrow +\infty$ ، ریشهٔ بزرگ‌تر به سمت چه عددی می‌رود؟

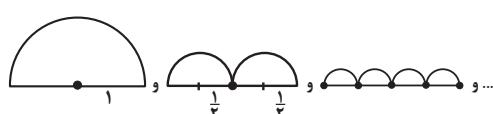
**مسئلهٔ ۳.** می‌دانیم:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ . در اینجا

برحسب رادیان است. اگر  $x$  برحسب درجه باشد، آن‌گاه حد فوق چه عددی خواهد شد؟

**مسئلهٔ ۴.** به نظر شما مقدار  $[\frac{9}{\pi}]^0$  چقدر است؟

**مسئلهٔ ۵.** در دنبالهٔ تصویری زیر، در هر مرحله

نیم‌دایره‌های مرحلهٔ قبل را با دو نیم‌دایرهٔ کوچک‌تر عوض کرده‌ایم. مجموع محیط و مجموع مساحت نیم‌دایره‌های هر مرحله به سمت چه عددی می‌رond؟



**مسئلهٔ ۶.** دنبالهٔ هندسی  $a_n = (\frac{1}{2})^n$  مفروض است.

۱. اگر  $S_n$  مجموع  $n$  جملهٔ اول دنبالهٔ  $a_n$  باشد،  $S_n$  را

برحسب  $n$  به دست آورید.

۲. ثابت کنید:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ .

**مسئلهٔ ۷.**

۱. ثابت کنید مثلثی با طول اضلاع  $x+1$ ,  $x+2$ ,  $x+3$  وجود دارد ( $x \in \mathbb{R}^+$ ).

۲. فرض کنید  $\Delta_x$  مثلثی با طول اضلاع قسمت قبل باشد، با میل کردن  $x$  به صفر، شکل مثلث  $\Delta_x$  به

چه شکلی تبدیل می‌شود؟

$S = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} + \dots$  است. بنابراین با ادامه این مراحل تا پایان مساحت رنگ شده برابر خواهد شد:

$$S = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 \times \frac{1}{9} + \dots$$

حال به محاسبهٔ  $S$  می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \dots \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} S \Rightarrow S = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} S \Rightarrow S - \frac{1}{9} S = \frac{1}{9} \Rightarrow S = 1 \end{aligned}$$

یعنی کل مساحت مربع رنگ خواهد شد!

**مثال ۶.** دنبالهٔ فیبوناچی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

نسبت جملات متولی این دنباله، یعنی  $\frac{F_{n+1}}{F_n}$  وقتی  $n \rightarrow +\infty$  می‌کند، به چه عددی نزدیک می‌شود؟

**راه حل:** فرض کنید:  $L$ . در این

$$\text{صورت: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} \right) = L$$

$$\text{بنابراین: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = L + 1. \text{ اما:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = L$$

در نتیجه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{1}{L}$$

پس باید داشته باشیم:  $\frac{1}{L} = L + 1$ . با حل این

معادله به مقدار  $L$  می‌رسیم:

$$1 + \frac{1}{L} = L \Rightarrow L - L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

چون:  $0 < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < 1$ . پس:  $\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . یعنی نسبت

جملات متولی دنبالهٔ فیبوناچی به عدد طلایی می‌کند.

مثال‌های فوق نشان می‌دهند، حد توابع یا حد دنباله‌ها ممکن است عددهایی دور از انتظار باشند، اما محاسبهٔ حد به کمک قوانین و قضایای حد، این امکان را فراهم می‌کند که بتوانیم رفتار حدی توابع و دنباله‌ها را کشف کنیم.

### وصیت پدربرزگ جمشیدا

جمشید در ادامه گفت: «من هم پدربرزگی داشتم که سال‌ها پیش از دنیا رفته بود. او هم زمینی داشت که در آن صیفی کاری کرده بود. زمین او دقیقاً مربع شکل بود و دور تا دور زمین را با درختان گردو که سال‌ها قبل نهال آن‌ها را کاشته بود، پوشانده بود. یعنی روی هر ضلع آن تعداد زیادی درخت گردو کاشته بود. او قبل از آنکه از دنیا برود، وصیت کرده بود که زمین او را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنند و هر قسمت مال پدرم و یکی از سه عمویم باشد».

کاوه گفت: «خب اینکه کار خیلی ساده‌ای است و چند راه دارد. مثلاً می‌توانستند قطرهای مربع را رسم کنند. و با این کار آن را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنند. یا اینکه...»

جمشید گفت: «بله درست است و پدر و عموهایم هم همین فکر را می‌کردند، ولی وقتی سر زمین رفتند، چیز عجیبی دیدند! عده‌ای از خدا بی خبر درختان دور زمین را کنده و برده بودند! و فقط روی هر ضلع مریع یک درخت باقی مانده بود. حالا پدر و عموهایم اصلانمی دانستند زمین پدربرزگ شامل چه قسمت‌هایی بوده است! یعنی از هر ضلع مریع فقط یک نقطه را در اختیار داشتند. پس ابتدا باید حدود زمین را مشخص می‌کردند و بعد آن را بین خودشان تقسیم می‌کردند. آیا شما می‌توانید بگویید آن‌ها چه کار کردند؟»

فرهاد گفت: «راستی که مسئله دشواری است و مناسب این ساعت که نزدیک خواب است، نیست!»

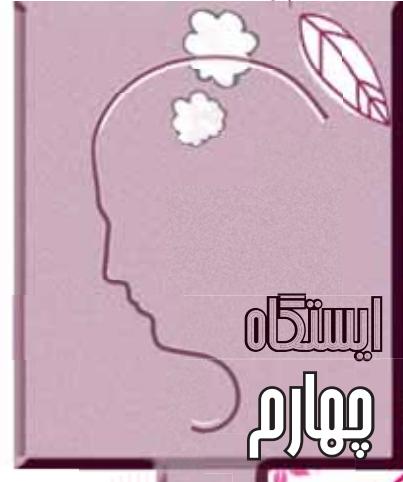
جمشید گفت: «چی شد؟! حالا که خودت نمی‌توانی مسئله را حل کنی، بهانه می‌آوری؟!»

فرهاد گفت: «نه جدی می‌گوییم! خیلی مسئله خوبی است، ولی حل آن آسان نیست. آیا خودت جوابش را می‌دانی؟»

جمشید گفت: «بله، البته یکی از عموهایم که مهندس عمران است، جواب آن را پیدا کرد و خودش هم تأکید کرد که مسئله دشواری است».

فرهاد گفت: «پس اجازه بده بیشتر روی آن فکر کنیم و تا آخر اردو وقت بده تا شاید آن را حل کنیم. حالا قبل از خواب، من معماه خودم را که آسان‌تر است، مطرح کنم. بچه‌ها موافقت کردند و بعدها مسئله را حل کردند. آیا شما هم می‌خواهید به این مسئله زیبا فکر کنید؟

### وصیت پدربرزگ جمشیدا



.....

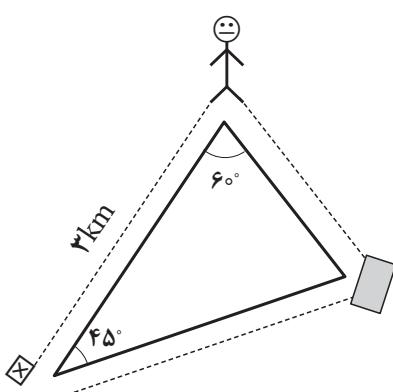


## آموزشی

هوشنگ شرقی، محمدتقی طاهری تنجانی  
مصطفی داورزنی، آناهیتا کمیجانی



۲. علی سر یک دوراهی ایستاده که شامل دو خیابان است که با هم زاویه  $60^\circ$  می‌سازند. در انتهای یکی از دو خیابان کتابخانه‌ای قرار دارد که علی با آن ۳ کیلومتر فاصله دارد. در انتهای خیابان دوم هم یک پارک واقع است. بین پارک و کتابخانه خیابان افقی دیگری وجود دارد که با خیابان اول زاویه  $45^\circ$  می‌سازد. علی از پارک چه فاصله‌ای دارد؟ پارک و کتابخانه با هم چه فاصله‌ای دارند؟



شکل ۲

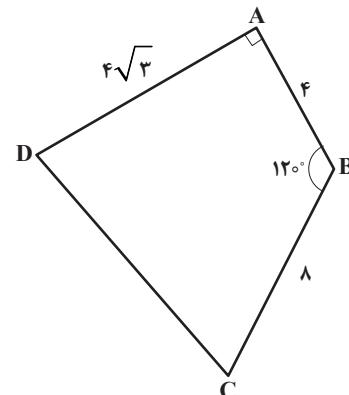
۳. زمینی به شکل ذوزنقه‌ای است که قاعده‌های آن ۵ و ۱۳ متر و ساق‌های آن ۳ و ۷ متر هستند. اولاً زاویه‌هایی را که ساق کوچک با قاعده‌ها می‌سازد، بیابید. ثانیاً مساحت زمین را به دست آورید.

## هندسه ۱

- نشان دهید اگر سه خط دوبعدی متقاطع باشند و در یک نقطه هم‌رس نباشند، آن‌گاه هر سه در یک صفحه قرار دارند.
- C، B، A و D چهار نقطه در فضا هستند. نشان دهید این چهار نقطه در یک صفحه قرار ندارند، اگر و تنها اگر AB و CD متناظر باشند.
- در فضا دو خط عمود بر یک خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟

## هندسه ۲

- در شکل ۱ داریم:  $AD = 4\sqrt{3}$ ,  $AB = 4$ ,  $\hat{B} = 120^\circ$ ,  $\hat{A} = 90^\circ$  و  $.BC = 8$ . مطلوب است تعیین مساحت چهارضلعی و طول قطر



شکل ۱

## آمار و احتمال

۱. اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند، بهطوری که داشته باشیم:  $P(A) = \frac{1}{2}$ ،  $P(B) = \frac{1}{2}$  و  $P(B|A) = \frac{1}{2}$ ، آن‌گاه  $P(B'|A)$  برابر چه عددی می‌شود؟

۲. کارمندان یک اداره دارای تحصیلات تخصصی طبق جدول زیر هستند.  
احتمال آنکه کارمند آقایی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد،  
چقدر است؟

	آقا	خانم
تحصیلات دانشگاهی	۱۵	۱۰
تحصیلات کمتر از دانشگاهی	۹۰	۸۰

۳. میانگین ده داده آماری  $\frac{33}{5}$  است. اگر دو داده  $34$  و  $41$  را از آن داده‌ها حذف کنیم، میانگین هشت داده باقی‌مانده را به دست آورید.

۴. در  $60$  داده آماری، میانگین  $8$  و انحراف معیار  $4/2$  محاسبه شده است. اگر به تمام داده‌ها  $16$  واحد اضافه شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید را به دست آورید.

## حسابان

۱. یک چرخ خودرو در حال حرکت در هر ثانیه  $2$  دور می‌چرخد. اگر شاعر چرخ  $30$  سانتی‌متر باشد و هنگام حرکت میخی به لاستیک آن فرو رود (مبدأً مختصات را روی مرکز چرخ در نظر بگیرید).  
(الف) پس از طی چه زاویه‌ای میخ به ارتفاع  $15$  سانتی‌متری از سطح زمین می‌رسد؟

(ب) پس از اینکه چرخ  $870^\circ$  چرخید، میخ به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد و چرخ خودرو چه مسافتی را طی می‌کند؟

$$\text{معادله } 1 \text{ در بازه } [\pi, \pi] \text{ چند جواب دارد?}$$

۲. می‌دانیم هر تابع و معکوس آن یکدیگر را روی خط  $x=y$  قطع می‌کنند. با استفاده از این نکته و یک ابتکار مناسب جواب‌های حقیقی معادله  $(x^3 - 2)^2 = x$  را به دست آورید.

۳. می‌دانیم:  $\log_3 = 0.477$ ،  $\log_2 = 0.301$  و  $\log_4 = 0.400$ . در این صورت مقدار تقریبی  $\log_7$  را حساب کنید.

۴. طول سه ضلع مثلثی  $1$ ،  $\log 2$  و  $\log n$  است. چند عدد طبیعی به جای  $n$  می‌تواند قرار گیرد؟

۱. یک کارمند اداره، زمان تقریبی رسیدن به محل کار خود را در دو دوره  $15$  روزه که با خودروی شخصی و اتوبوس طی کرده، به صورت زیر نوشته است:

۱۳، ۱۴، ۱۸، ۱۸، ۱۹، ۲۱، ۲۲، ۲۴، ۲۵، ۲۷، ۲۸، ۳۰، ۳۳، ۴۳  
دو: خودرو  
۱۶، ۱۶، ۱۶، ۱۷، ۱۷، ۱۸، ۱۸، ۲۰، ۲۰، ۲۱، ۲۳، ۲۸، ۳۰: اتوبوس

با رسم نمودار جعبه‌ای به سؤالات زیر پاسخ دهید:

- (الف) کدام وسیله نقلیه او را سریع‌تر به محل کار می‌رساند؟  
(ب) کدام وسیله برای رسیدن به مقصد مطمئن‌تر است؟

۲.  $15$  داده آماری با واریانس  $12$ ، با  $10$  داده دیگر با واریانس  $7/6$  را ترکیب می‌کنیم. اگر میانگین هر دو گروه پکسان باشند، انحراف معیار  $25$  داده حاصل کدام است؟

۳. اگر  $20$  داده آماری را دو برابر و سپس  $7$  واحد از هر کدام کم کنیم، ضریب تغییرات جدید،  $1/5$  برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی می‌شود. مجموع داده‌های اولیه را به دست آورید.

۴. (الف) آمار استنباطی به چه معناست?  
(ب) اریب در نمونه‌گیری را چگونه می‌توان کاهش داد؟

۵. برای هر یک از موضوعات زیر، کدامیک از روش‌های گردآوری داده را پیشنهاد می‌کنید؟

- (الف) علت ترک تحصیل جوانان در یک دهه اخیر:  
(ب) میزان درامد شهرداری در  $5$  سال اخیر:  
(ج) میزان استقبال مردم از یک فیلم در سینما.

## ریاضی دهم (رشته ریاضی - تجربی)

۱. تاسی را پرتاب می‌کنیم. تعداد پیشامدهای ناتهی را که با پیشامد  $\{1, 3, 5\}$  ناسازگار هستند، به دست آورید.

۲. از مجموعه عده‌های  $\{1, 2, \dots, 70\}$ ، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این عدد مضرب  $3$  یا  $8$  باشد؟

۳. در پرتاب دو تاس چقدر احتمال دارد که اختلاف اعداد رو شده زوج باشد و عدد دوم از عدد اول کوچکتر نباشد؟

۴. نوع هر یک از متغیرهای زیر را مشخص کنید.  
(الف) قد افراد (کوتاه قد - قد متوسط - بلندقد)

(ب) گروه خونی ( $B^+$ ,  $A^+$ ,  $A^-$  و ...)  
(ج) میزان بارندگی یک شهر (بر حسب میلی‌متر)

$$\Rightarrow S_{BCD} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 64 = 16\sqrt{3},$$

$$S_{ABD} = \frac{AB \times AD}{2} = \frac{4 \times 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

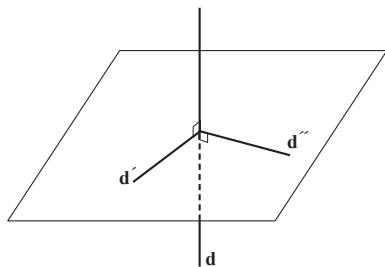
$$\Rightarrow S_{ABCD} = 24\sqrt{3}$$

$$\Delta ABC : AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow AC^2 = 16 + 64 - 2 \times 4 \times 8 \times (-\frac{1}{2}) = 112$$

$$\Rightarrow AC = 4\sqrt{7}$$

اما اگر  $d'$  و  $d''$  در یک صفحه باشند و  $d$  در این صفحه نباشد، آن‌گاه  $d'$  و  $d''$  متقاطع‌اند و بر صفحه شامل آن‌ها عمود است (شکل ۴).



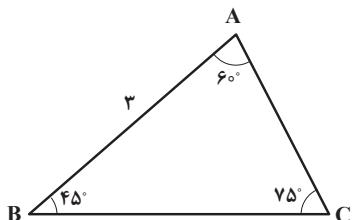
شکل ۴

$$\frac{AB}{\sin 75^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin 60^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

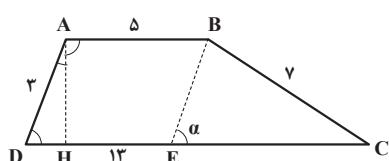
$$\Rightarrow AC = 2\sqrt{3} - 3 \approx 2 / 1 \text{ km}$$

$$BC = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{2} \approx 2 / 7 \text{ km}$$



شکل ۷

۳. از BE، B، A را موازی AD رسم می‌کنیم. ABED متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه:  $.EC = 13 - 5 = 8$  و  $DE = AB = 5$ ،  $BE = AD = 3$  در مثلث BEC به کمک قضیه کسینوس‌ها داریم:



شکل 8

$$BC^2 = BE^2 + CE^2 - 2BE \cdot CE \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 49 = 9 + 84 - 2 \times 3 \times 8 \times \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{D} = 60^\circ, \hat{A} = 120^\circ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \times AH = \frac{13 + 5}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$



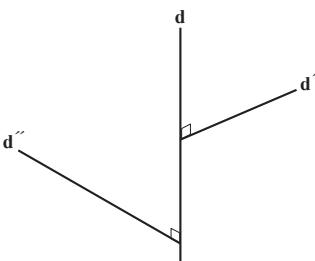
## هندسه ۱

۱. این سه خط را  $L_1$ ،  $L_2$ ،  $L_3$  می‌نامیم و فرض می‌کنیم:  $A \in L_1$  و  $L_2 \parallel L_3$  در  $B \in L_1$  و  $L_2 \parallel L_3$  در  $C \in L_1$  متقاطع باشند. از  $L_1$  و  $L_2$  صفحه P می‌گذرد. چون A در P است، پس A  $\in P$ . چون B روی  $L_2$  واقع است، پس B  $\in P$ . بنابراین C روی  $L_1$  است، پس C  $\in P$ . چون A، B و C روی P هستند. هر سه نقطه A، B و C روی P هستند. چون از هر یک از سه خط، دو نقطه روی صفحه P است، پس تمام خط هم روی صفحه P است. بنابراین  $L_1$ ،  $L_2$  و  $L_3$  هر سه روی P هستند.

۲. (الف) اگر A، B، C و D روی یک صفحه باشند، از تا از آن‌ها، مثلث A، B، C و D، ABED متوازی‌به‌فرد مثل P می‌گذرد و:  $D \notin P$ . پس AB و CD نمی‌توانند در یک صفحه باشند و در نتیجه متناورند.

(ب) اگر AB و CD متناور باشند، آن‌گاه در یک صفحه نیستند. لذا A، B، C و D هم در یک صفحه قرار ندارند.

۳. اگر  $d'$ ،  $d$  و  $d''$  سه خط باشند و داشته باشیم:  $d \perp d'$  و  $d \perp d''$ ، آن‌گاه اگر  $d'$  و  $d''$  در یک صفحه باشند و  $d$  هم در همان صفحه باشد، در این حالت داریم:  $d' \parallel d''$  (شکل ۳).



شکل ۵

## هندسه ۲

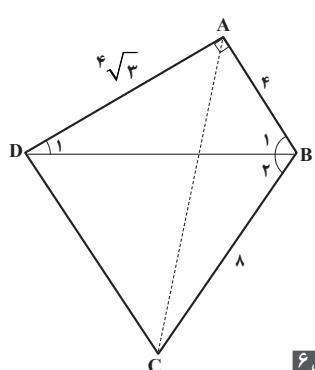
۱. قطر BD را رسم می‌کنیم (شکل ۶). در مثلث قائم‌الزاویه ABD داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 16 + 48 = 64$$

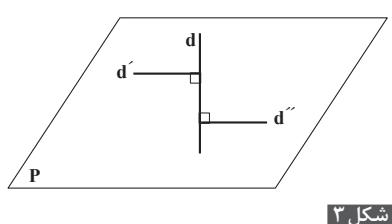
$$\Rightarrow BD = 8, AB = \frac{BD}{2} \Rightarrow \hat{D}_1 = 30^\circ, \hat{B}_1 = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B}_2 = 60^\circ, BD = BC = 8 \Rightarrow$$

BCD متساوی‌الاضلاع



شکل ۶



شکل ۳

## آمار و احتمال

$$\Rightarrow P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{15}{15+9} = \frac{1}{2}$$

۳

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \Rightarrow ۲۳ / ۵ = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_{۱۰}}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{۱۰} = ۲۳۵ \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{۲۳۵ - (۴۴ + ۴۱)}{۸} = ۲۲ / ۵$$

۴

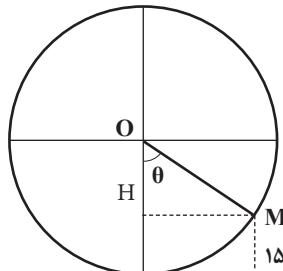
$$\begin{cases} \bar{x}_1 = ۸ \\ \sigma_1 = ۴ / ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_۲ = ۸ + ۱۶ = ۲۴ \\ \sigma_۲ = \sigma_۱ = ۴ / ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (CV)_۲ = \frac{\sigma_۲}{\bar{x}_۲} = \frac{۴ / ۲}{۲۴} = ۰ / ۱۷۵$$

### حسابان ۱

(الف)

$$\cos \theta = \frac{OH}{OM} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = ۶۰^\circ$$



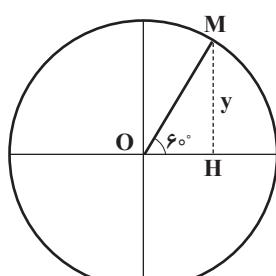
شکل ۱

(ب)

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{y}{OM}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{30} \Rightarrow y = 15\sqrt{3}$$

$15\sqrt{3} = 30 + 15\sqrt{3}$  = ارتفاع از سطح زمین



شکل ۲

۴. الف) فرایند نتیجه‌گیری درباره پارامترهای جامعه براساس نمونه، «آمار استنباطی» است.

ب) با به کار گیری روش‌های نمونه‌گیری مناسب و در نظر گرفتن مشخصات واحدی‌های جامعه.

۵. الف) مصاحبه؛ ب) دادگان؛ ج) مشاهده.

### ریاضی دهم

۱. اگر A پیشامدی باشد که با  $\{1, 3, 5\}$  ناسازگار است، باید داشته باشیم:  $A \cap \{1, 3, 5\} = \emptyset$ . پس:  $A \subseteq \{2, 4, 6\}$  و می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه عبارت است از:  $2^{\infty} = 7$

۲. اگر A مجموعه عددی مضرب ۳ و  $A \cap B$  مجموعه عددی مضرب ۸ باشند، مجموعه عددی مضرب ۲۴ است و داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{۲۳}{۷۰} + \frac{۸}{۷۰} - \frac{۲}{۷۰} = \frac{۲۹}{۷۰}$$

۳

$$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 5), (4, 4), (4, 6), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۲}{۳۶} = \frac{1}{3}$$

۴. الف) کتی گستته؛

ب) کیفی اسمی؛

ج) کمی پیوسته.

### ریاضی ۲ (تجربی)

$$P(B' | A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{P(A \cup B)'}{P(A')}$$

$$= \frac{P(B|A)P(A)}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{1 - (۰ / ۲ + ۰ / ۲ - ۰ / ۷ \times ۰ / ۲)}{1 - ۰ / ۲} = \frac{۹}{۱۰}$$

۲

پیشامد دارا بودن تحصیلات دانشگاهی A =

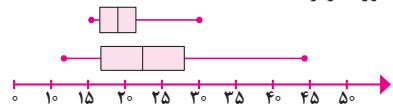
پیشامد مرد بودن شخص موردنظر = B

۱. برای هر یک از وسائل داریم:

خودرو:  $\min = ۱۲, Q_1 = ۱۸, Q_۲ = ۲۲, Q_{۳\text{max}} = ۴۳$

اتوبوس:  $\min = ۱۶, Q_1 = ۱۷, Q_۲ = ۱۸, Q_{۳\text{max}} = ۳۰$

نمودار جعبه‌ای برای این دو وسیله به صورت زیر است:



در استفاده از اتوبوس، میانه برابر ۱۸ است، بنابراین در ۵۰ درصد موارد، زمان مسافت با این وسیله کمتر از ۱۸ دقیقه است. در حالی که این عدد برای خودروی شخصی ۲۲ دقیقه است، پس اتوبوس سریع‌تر از خودروی شخصی است. از سوی دیگر، دامنه میان چارکی برای خودرو و اتوبوس عبارت است از:

خودرو:  $IQR = Q_۲ - Q_۱ = ۲۸ - ۱۸ = ۱۰$

اتوبوس:  $IQR = Q_۲ - Q_۱ = ۲۱ - ۱۷ = ۴$

بنابراین، زمان رسیدن به مقصد برای اتوبوس در ۵۰ درصد موارد کمتر از ۴ دقیقه است، در حالی که این زمان برای ماشین شخصی ۱۰ دقیقه است. پس اتوبوس وسیله نقلیه مطمئن‌تری نسبت به خودروی شخصی است.

$$\sigma_1^2 = ۱۲ \Rightarrow \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2 = ۱۲$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2 = ۱۸۰$$

$$\sigma_۲^2 = ۷ / ۶ \Rightarrow \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = ۷ / ۶$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = ۷۶$$

پس:

$$\sigma^2 = \frac{1}{25} (\sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2)$$

$$= \frac{1}{25} (۱۸۰ + ۷۶) = \frac{۲۵۶}{25} \Rightarrow \sigma = \frac{۱۶}{5} = ۳ / ۲$$

$$\frac{۲\sigma}{۲x - y} = ۱ / ۵ \Rightarrow \frac{\sigma}{x - \frac{y}{2}} = \frac{۲}{۲x - y} \Rightarrow \frac{\bar{x}}{\bar{x} - \frac{\bar{y}}{2}} = \frac{۲}{۲} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\bar{x}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 + \dots + x_{۱۰} = ۲۰ \left( \frac{\bar{x}}{2} \right) = ۲۰\bar{x}$$

وارون (معکوس) یکدیگرند. برای حل معادله  $y_1 = y_2$  کافی است معادله  $x = y_1 = y_2$  را حل کنیم:

$$2 - x^3 = x$$

$$x^3 + x - 2 = 0$$

$$x^3 - 1 + x - 1 = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1) + (x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2+x+2=0 \end{cases}$$

(جواب حقیقی ندارد)

۴. می‌توان نوشت:

$$\sqrt[3]{z} = 2400 = 2^3 \times 3 \times 10^3$$

$$\log \sqrt[3]{z} = \log(2^3 \times 3 \times 10^3)$$

$$3 \log 2 + \log 3 + \log 10$$

$$\log z = \frac{3(\log 2 + \log 3 + \log 10)}{3} = 8.45$$

۵. شرط آنکه سه عدد مثبت  $a, b, c$  و طول اضلاع مثلث ABC باشند، آن است که:

$$|b-c| < a < b+c$$

$$|\log z| < \log n < 1 + \log 2$$

$$\log 5 < \log n < \log 2$$

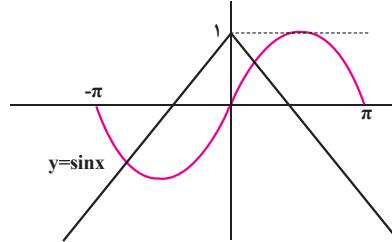
$$5 < n < 2$$

$$n = 6, 7, \dots, 19 \Rightarrow$$

۱۴ عدد طبیعی برای  $n$  وجود دارد.



لذا معادله  $|x| + \sin x = 1$  دارای دو جواب در بازه  $[-\pi, \pi]$  است.



شکل ۳

۶. معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(2-x^3)^3 = 2-x$$

$$(2-x^3) = \sqrt[3]{2-x}$$

دو تابع  $x$  و  $y_1 = \sqrt[3]{2-x}$

محیط یک دور چرخ بر اثر چرخیدن برابر  $2\pi \times 3 = 6\pi$  است.

$$87^\circ = 2 \times 36^\circ + 15^\circ$$

حال میزان چرخش  $15^\circ$  را بر حسب طول محیط دایره به دست می‌آوریم:

$$\frac{360^\circ}{15^\circ} \Rightarrow x = \frac{15 \times 6\pi}{36^\circ} = 25\pi$$

$$\text{مسافت} = 2 \times (2\pi) + 25\pi = 4\pi \times 3 + 25\pi = 145\pi \text{ cm}$$

۷. نمودار توابع  $y = |x|$  و  $y = \sin x$  را در بازه  $[-\pi, \pi]$  رسم می‌کنیم.

همان‌طور که در شکل ۳ مشخص شده است، در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

آن عدد طبیعی را که مجموع ارقامش مساوی ۷ باشد، «عدد خوش‌بخت» می‌نامیم. دنباله تمام عددهای طبیعی خوش‌بخت را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم. اگر در این دنباله  $a_n = 2005$  باشد، آن ۵ کدام است؟

- (الف)  ۵۲۰۰۰
- (ب)  ۱۰۰۰۴
- (ج)  ۶۰۰۰۱
- (د)  ۶۰۰۱۰
- (ه)  ۵۱۰۰۱

## پرسش‌های پیکارجو!



### پدربرگ بدین و نوء فضول!

فرهاد آخرین معماهی آن شب را به سبک بقیه و به نقل از پدربرگش مطرح کرد: «من هم پدربرگی دارم. پدربرگم خیلی مهربان است، ولی کمی هم بدین است. مخصوصاً نسبت به من، چون کمی کنجکاو هستم، بدین تر است و فکر می‌کند که من امانتدار نیستم و ممکن است به چیزهایی که مربوط به اوست و وسائل شخصی اش سرک بکشم. یک بار او می‌خواست جعبه‌ای در بسته را به من بدهد تا به پدرم برسانم. پدربرگم چند قفل و کلید هم داشت، ولی به من اعتماد نداشت که در جعبه را با قفل بیندد و کلید آن را به من تحویل دهد تا به پدرم برسانم. پس چه باید می‌کرد؟»

بابک گفت: «اینکه کاری ندارد. می‌توانست در جعبه را با یک قفل بیندد و جعبه را بدون کلید به تو بدهد تا به پدرت برسانی. بعد دوباره پیش او برگردی و کلید آن را به تو بدهد تا برای پدرت ببری.»

فرهاد گفت: «اتفاقاً جعبه برای چند قفل جا داشت و می‌توانست به جای یک قفل، چند قفل به آن بزند. ولی مشکل این بود که اصلاً به من اعتماد نداشت و می‌ترسید که جعبه را به خانه برم و به پدرم نشان ندهم و بعد که کلید را به دست آوردم، در آن را باز کنم و محتويات آن را ببینیم و بعد دوباره قفل بزنم و به پدرم بدهم!»

کاوه گفت: «عجب پدربرگ بدینی داری! پس چه کار کرد؟»

فرهاد گفت: «معماهی من هم همین است دیگر! شما بگویید چه کار کرد.»

جمشید گفت: «آن قدرها هم که می‌گفتی آسان نیست!»

فرهاد گفت: «آسان است، ولی در عین حال جالب هم هست. اگر کمی فکر کنید، پاسخ آن را می‌باید. در ضمن این را هم بگوییم که پدربرگم تلفن هم نداشت و هیچ تماسی هم با پدرم نگرفت، ولی به مقصودش هم رسید!»

شما هم می‌توانید بگویید او چگونه به مقصود خود رسید؟!



## ؟ پاسخ پرسش‌های پیکارجو

$$\Delta = 100 - 4(y^r - y + 1) \geq 0.$$

$$\Rightarrow y^r - y + 1 \leq 25 \Rightarrow y^r - y - 24 \leq 0 \Rightarrow y \leq 5$$

همچنین برای آنکه  $x \in \mathbb{Z}$  باشد، لازم است  $y^r - y - 24$  مربع کامل باشد که فقط به ازای  $y=5$  چنین می‌شود. با این فرض نتیجه می‌شود:  $x^r - 10x + 21 = 0 \Rightarrow (x-7)(x-3) = 0$ .

$$\Rightarrow x = 7 \text{ یا } x = 3$$

و دو عدد ۳۵ و ۷۵ با این ویژگی به دست می‌آیند که مجموع آن‌ها مساوی ۱۱۰ است (گزینه ب).



با ساده کردن فرض نتیجه می‌شود:

$$49a - 245 = 41 - 7b - c \Rightarrow 49a + 7b + c = 286$$

$$\Rightarrow (abc)_7 = 286$$

حال کافی است عدد ۲۸۶ را در مبنای ۷ بنویسیم تا a و b و مشخص شوند:

$$(abc)_7 = (556)_7 \Rightarrow a = 5, b = 5, c = 6$$

$$\Rightarrow \overline{abc} = 556 = 42 \times 13 + 10 \Rightarrow r = 10.$$

(گزینه ج)



با معکوس کردن کسرها نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

و با جمع این سه معادله خواهیم داشت:

$$2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{10+4+5}{20} = \frac{19}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{19}{40}$$

واز کم کردن این تساوی از سه معادله اولیه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{1}{c} = \frac{19}{40} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{40} \Rightarrow c = -4 \\ \frac{1}{b} = \frac{19}{40} - \frac{1}{5} = \frac{11}{40} \Rightarrow b = \frac{40}{11} \\ \frac{1}{a} = \frac{19}{40} - \frac{1}{4} = \frac{9}{40} \Rightarrow a = \frac{40}{9} \end{cases} \Rightarrow 9a + 11b + c = 4. \quad (\text{گزینه ه})$$



بدیهی است که  $\hat{A} = 135^\circ$  و با نوشتن قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

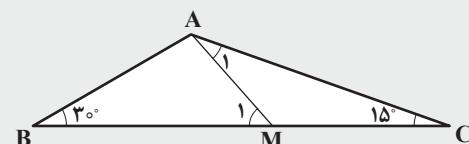
$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AC}{\frac{1}{2}} \Rightarrow BC = \sqrt{2}AC$$

$$\Rightarrow BC^r = 2AC^r \Rightarrow BC \times \frac{BC}{2} = AC^r$$

$$\Rightarrow AC^r = MC \cdot BC \Rightarrow \frac{AC}{MC} = \frac{BC}{AC}, \hat{C} = \hat{C}$$

$$\Rightarrow \Delta AMC \sim \Delta ABC \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1 \Rightarrow \hat{A}_1 = 3^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{A}_1 + \hat{C} = 45^\circ \quad (\text{گزینه ج})$$



اگر این عده‌ها را  $\overline{xy}$  بنامیم، طبق فرض داریم:

$$\overline{xy} = x^r + y^r + 1 \Rightarrow 10x + y = x^r + y^r + 1$$

$$\Rightarrow x^r - 10x + (y^r - y + 1) = 0$$

مطلوب مسئله ما  $a_{335}$  است. حال داریم:

$$P(4) = \binom{9}{4} = 126, P(5) = \binom{10}{5} = 210, \sum_{k=1}^5 P(k) = 330.$$

پس کافی است، شش عدد آخر پنج رقمی خوش‌بخت را مرور کنیم:

$$a_{330} = 70000, a_{331} = 6100, a_{332} = 60100,$$

$$a_{333} = 60100, a_{334} = 60001, a_{335} = 52000$$

(گزینه الف)

## پلسخ معملاهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه دوم...

◆ اگر سن پدر بزرگ  $\overline{xy}$  و سن برادر بزرگ  $\overline{zt}$  باشد، داریم:

$$\overline{xy} = \mathfrak{f}\overline{zt}, \overline{tz} = \mathfrak{f}\overline{yx}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \circ x + y = 4(1 \circ z + t) \\ 1 \circ t + z = 3(1 \circ y + x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \circ x + y = 4 \circ z + 4t \\ 1 \circ t + z = 3 \circ y + 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} \circ (X - \mathfrak{F}Z) = \mathfrak{F}t - y \\ \textcircled{1} \circ (t - \mathfrak{V}y) = \mathfrak{V}x - z \end{cases}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که  $y = 4t$  و  $3x - z = 0$  هر دو باید مضرب ۱۰ باشند.

باشند؛ برای مثال:  $4t-y=1$  و  $3x-z=1$  که از آنجا داریم:  $x-4z=1$  و  $t-3y=1$  که نتیجه می‌شود:  $x=\frac{39}{11}$  که غیرقابل قبول است.

با امتحان کردن مقادیر دیگر نتیجه می‌شود:  $t=3$  و  $y=2$  و  $x=7$  و  $z=3$  از آنجا داریم:  $3x-z=3$  و  $x-4z=2$  و در نتیجه:  $3t-3y=2$  و  $t-4z=18$  سال برادرش ۱۸ سال دارد.

t=۸ و z=۱. یعنی پدر بزرگ بابک ۷۲ سال و برادرش ۱۸ سال دارد.

ایستگاہ اول

اگر روی کیک اول  $x$  شمع قرمز و  $y$  شمع آبی چیده شده باشد، و روی کیک دوم  $z$  شمع سبز و  $t$  شمع زرد قرار داده باشد، طبق مفروضات مسئله دارایم:

$$\begin{cases} x + y = \lambda \\ z + t = \gamma \\ \gamma x + \gamma y = \gamma z + \delta t \end{cases}$$

و از معادله سوم نتیجه می شود:

$$\forall \underbrace{(x+y)}_{\Delta} + \forall x = \Delta \underbrace{(z+t)}_{\circ} + \forall z \Rightarrow \forall x + \Delta \circ = \Delta \circ + \forall z$$

$$\Rightarrow 4z = 3x + 6 \Rightarrow 4z = 3(x + 2)$$

بنابراین  $z = 3$  باید مضرب ۳ باشد و با توجه به اینکه:  $t=1$ ، پس:  
 $.z=3$  لذا:  $9$  یا  $6$  یا  $3$   $.z < 10$   
 به ازای  $z=3$  داریم:  $x=2$ ،  $y=6$  و  $t=7$  از آنجا:  $x+7y=62$   
 به ازای  $z=6$  داریم:  $x=6$  و  $y=2$  و  $t=4$ :  $x+7y=74$   
 و به ازای  $z=9$  داریم:  $x=1$  که غیرقابل قبول است.  
 پس پدربرزگ کاوه  $62$  سال یا  $74$  سال دارد و با توجه به سن پدرش،  
 تنها جواب قابل قبول  $74$  سال است.



با مجله‌های رشد آشنا شوید

## مجله‌های دانش آموزی

**مجله های دانش آموزی** صورت ماهانه و نه شما راه در سال تجدیل می شود:

۱۰

محله‌های رشد سلامتی و تغذیه‌ی ایمنی می‌بینیان. مشاوران و کارکنان این میدان را دشکوه و میکنند. و کارشناسان کرومهای آموزشی و... تهیه و منتشر می‌شوند.

به صورت فصل تابعه و سه بیانه در سال تحصیلی هشتاد و پنجم مذکور یعنی درسی مخصوصی: **مذکورهای پروردگاری**

▪ رشید اموریں اقان و معارف اسلامی رشید اموریں زبان و ادب فارسی  
▪ رشید اموریں حقوق رشید اموریں مشاوره مدرسی رشید اموریں تربیت پیشی  
▪ رشید اموریں علوم اجتماعی رشید اموریں فناخی رشید اموریں حجرات  
▪ رشید اموریں زبانهای خارجی رشید اموریں پاپلش رشید اموریں فیزیک  
▪ رشید اموریں سینمایی رشید اموریں زیست‌شناسی رشید اموریں مدرسه  
▪ رشید اموریں فنی و جرافمایی و کردانش رشید اموریں پیش دینستی

(ب) صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحمیل متنش می‌شود:

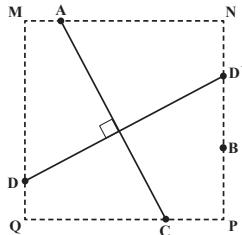
中華書局  
印製

بیانیہ میں شوہد: وہ وہشت شمارہ در سال تھمیلی منتشر میں شود:

بصورت ماهانه و هشت شماهه در سال تبدیل متشر میشود:

◆ تلعن و نمایر: ۱۳۷۸ - ۱۳۷۷

D' را به B وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم. اولین ضلع مربع روی امتداد D'B است. سپس از A و C عمودهایی بر این خط رسم می‌کنیم تا دو ضلع دیگر مرربع به دست آیند و از D' بر این دو ضلع عمود می‌کنیم تا مربع رسم شود. علت درستی عمل را برسی کنید.



ایستگاه پنجم ..

مسئله آسان است! کافی است پدر بزرگ فرهاد قفلی بر جعبه بزند و آن را به فرهاد بدهد و به او بگوید: «جعبه را پیش پدرت ببر و به او بگو قفلی بر آن بزند و آن را برایم ببایور.» بعد از آنکه فرهاد این کار را انجام داد، پدر بزرگ قفل خودش را باز می کند و به فرهاد می گوید: «حالا جعبه را برای پدرت ببر!»

## پاسخ جدول ایستگاه اندیشه شماره ۵:

१				१	३	३	५	३	३
२	७	९	९		६				०
५				३	८	२	१	१	६
८	६	६	४		८				०
०				५	५	८	५	२	२
६	१	०	०	०	०	०			०

رمز جدول عدد ۳۶۲۸۸۰ است که معادل ۹۱ است.

لشکر  
بزرگ ایران

نحوه اشتراک مجلات رشد به دو روش زیر:  
[www.roshdmag.ir](http://www.roshdmag.ir)  
الف. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی [www.roshdmag.ir](http://www.roshdmag.ir) و پیش‌نام در سایت و سفارش و خرید از طریق درگاه الکترونیکی  
بانکی.  
ب. واپیز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۰۰۵۶۴۹۳ بازک  
تعارف، شعبه سمراه آرمایش کد ۵۹۳ در وجه شرکت افست و  
رسال فیش بانکی به همراه برگ تکمیلی شده اشتراک با پست  
سفارشی با از طریق دورنگاری به شماره ۰۰۰۰۵۶۴۹۳۸۸.

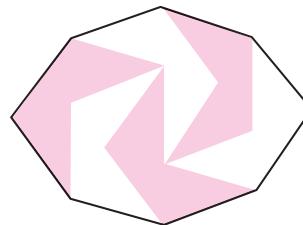
◆ عنوان مجلات در خواستی:

- ◆ نام و نام خانوادگی: .....
  - ◆ تاریخ تولد: .....
  - ◆ تلفن: .....
  - ◆ میزان تحصیلات: .....
  - ◆ شماره پستی: .....
  - ◆ امستان: ..... خیابان: ..... بلاک: .....
  - ◆ شماره فیش بانکی: .....
  - ◆ مبلغ پرداختی: .....
  - ◆ اگر قبل از مشترک مبلغ رشد نداشته باشد، شماره اشتر اک خرد را بنویسید: .....
  - ◆ امضا: .....

• تلفن بازرسانی: ۰۳۱۷۸۷۸۰۸-۰۲  
• Email: Eshterak@roshdmag.ir

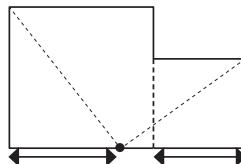
- ◆ هزینه اشتراک سالانه مجلات عمومی (شد هشت شماره): ٠٠٠ / ٥٣ دیال
- ◆ هزینه اشتراک سالانه مجلات تخصصی (شد سه شماره): ٠٠٠ / ٢ دیال

• تقسیم مناسب چنین است که در شکل می‌بینید. آیا می‌توانید اندازه‌های زوایای داخلی این شش پنجضلعی همنهشت را به دست آورید؟

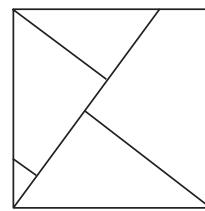


## ایستگاه سوم ..

تقسیم متناسب با شرایط مسئله چنین است:



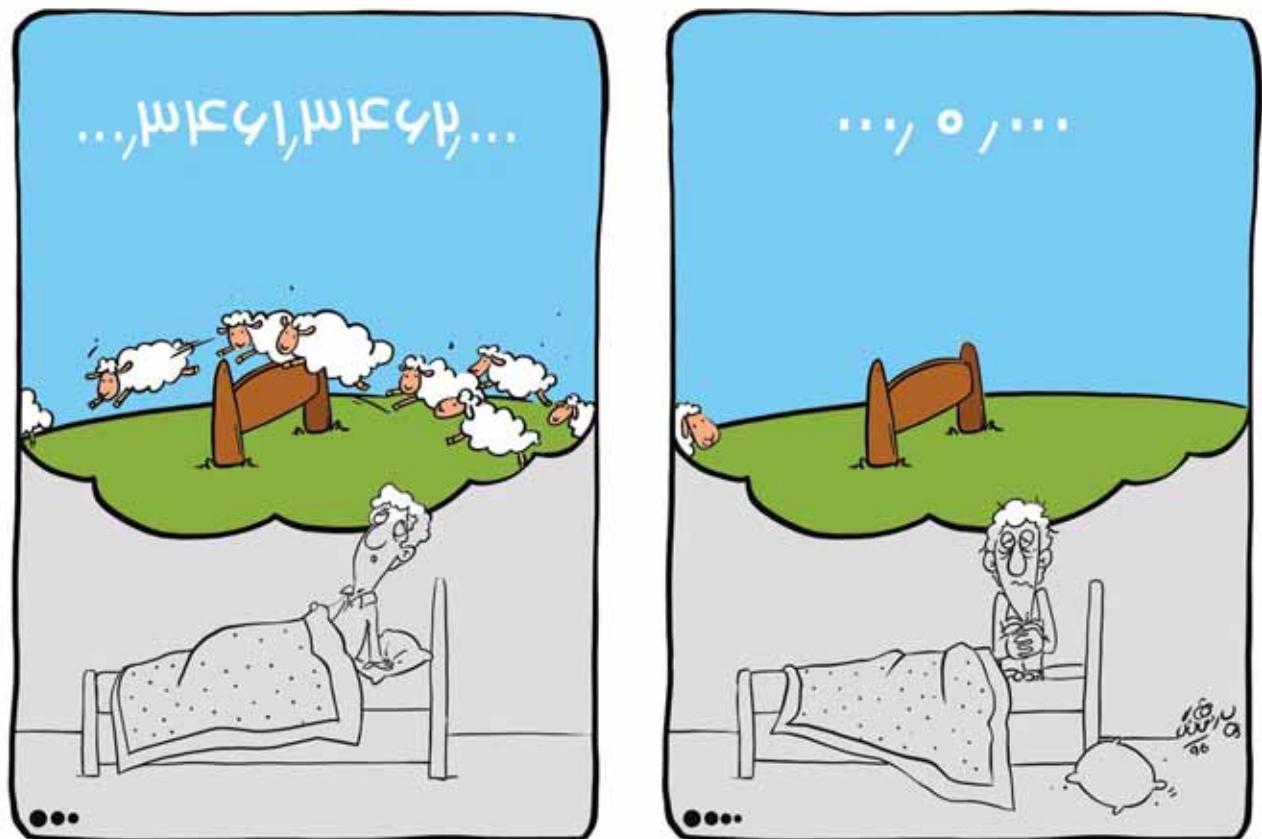
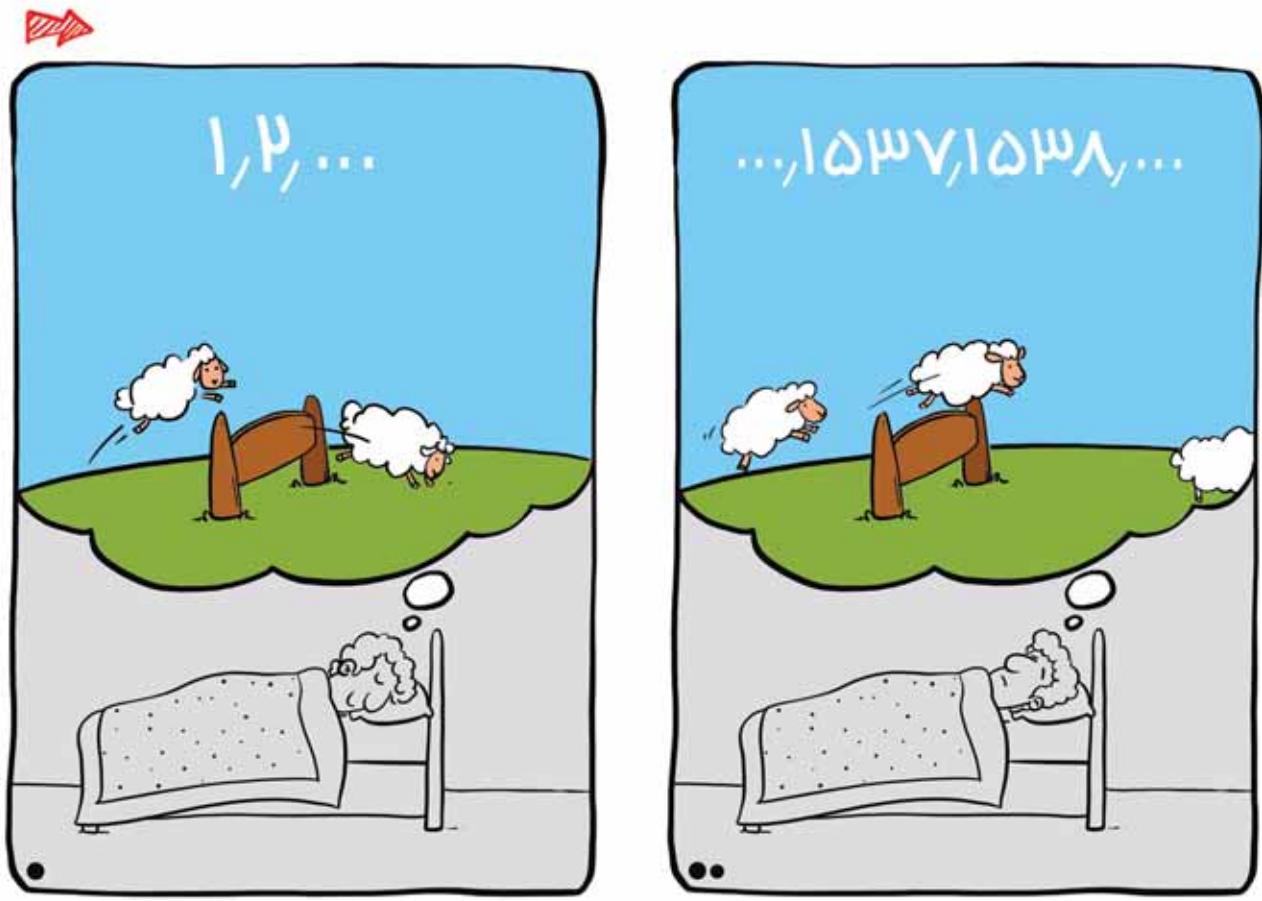
و از کنار هم قرار دادن این پنج قطع مربع زیر حاصل می شود.



ایستگاه چهارم ...

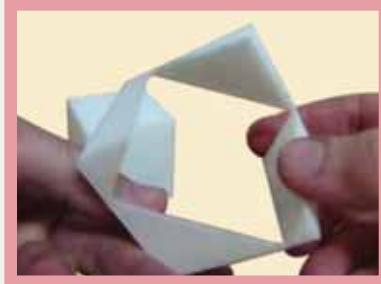
این یک مسئله، دشوار هندسه است! در واقع از هر ضلع یک مربع، یک نقطه در اختیار داریم و می‌خواهیم مربع را رسم کنیم. برای این کار به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

اگر این چهار نقطہ A, B, C و D باشند، AC را رسم می کنیم۔ سپس از D عمودی بر آن رسم می کنیم و DD' را مساوی AC جدا می کنیم۔



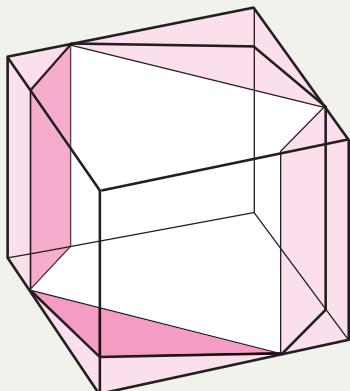
# مکعب پرنس روپرت

دلیل دلیل  
ریاضیات



پیتر نیولند

با ضلع  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$  برابر ضلع مکعب اولیه (قریباً ۶ درصد بیشتر از آن) از درون آن وجود دارد. طرح هندسی این کار در شکل زیر نشان داده شده است و تصویر عملی آن هم دیده می شود:



توجه کنید که نقاط روی یال‌های مکعب همگی به صورت متقارن، هر یال را به نسبت ۱ به  $3^{\text{rd}}$  تقسیم کرده‌اند.

حفره‌ای درست کرد که مکعبی مشابه خودش از آن عبور کند؟» شرط‌بندی کرده بود. او برای اثبات نظر خودش که معتقد بود این کار شدنی است، از والیس کمک خواست. والیس توانست درستی موضوع را (با کمی خطای اثبات کند و در نتیجه پرنس روپرت برنده شد!

اما تقریباً یک قرن بعد، پیتر نیولند، ریاضی‌دان هلندی (۱۷۹۴ - ۱۷۶۴) که به اسحاق نیوتون هلند معروف است، توانست موضوع را در حالت کلی اثبات کند و نشان داد، حتی مکعبی بزرگ‌تر از مکعب اولیه را می‌توان از آن عبور داد، بدون آنکه مکعب اولیه به دو بخش جدا از هم تبدیل شود. یعنی امکان عبور مکعبی

آیا می‌توان، در یک مکعب چوبی حفره‌ای درست کرد که مکعبی بزرگ‌تر از آن بگذرد؟



پرنس روپرت

این پرسش را نخستین بار به شکلی ساده‌تر، پرنس روپرت (۱۶۱۹ - ۱۶۸۲) مطرح کرد. او که فرزند شاهزاده فردریک آلمانی و شاهزاده الیزابت انگلیسی بود، از جوانی به مشاغل نظامی روی آورد. در جنگ‌های بسیاری شرکت کرد و سمت‌های مهم نظامی داشت. در همان حال به کارهای علمی و مهندسی هم علاقه‌مند بود و در این زمینه کارهای زیادی انجام داد. اختراعاتی را هم به نام خود ثبت کرد. به علاوه، نقاش و هنرمند زبردستی هم بود.



جان والیس

جان والیس، ریاضی‌دان انگلیسی (۱۶۰۳ - ۱۶۱۶) (که شهرت بسیاری دارد و از جمله کارهایی زیادی محاسبه تقریبی عدد پی است) نقل می‌کند که پرنس روپرت بر سر این موضوع که: «آیا می‌توان در یک مکعب چوبی