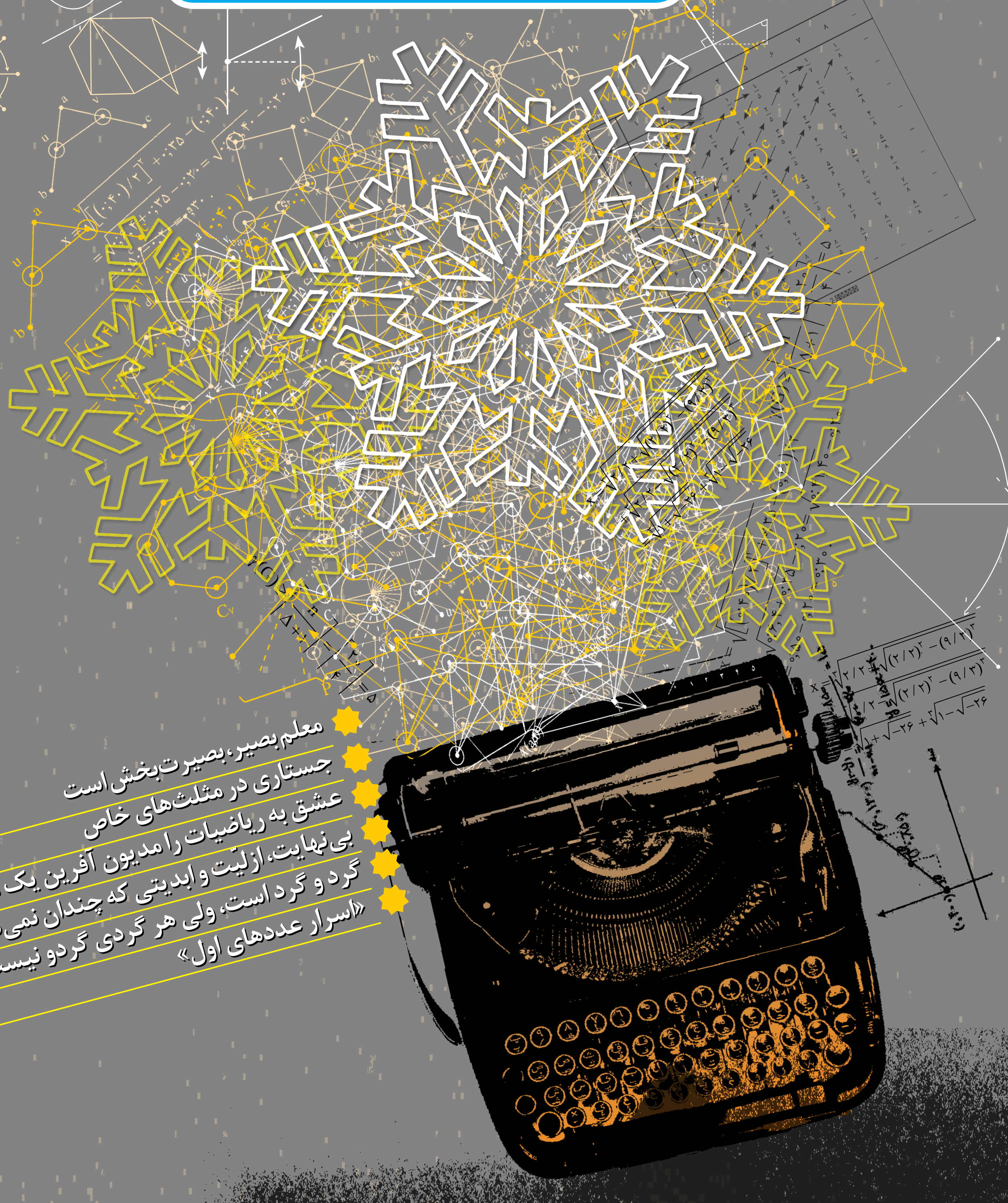
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

ISSN:1606-9188

رشد آموزش ریاضی ۱۳۴

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی | برای معلمان، دانشجومعلمان و کارشناسان وزارت آموزش‌وپرورش |
دورهٔ سی و هفتم | شمارهٔ ۲ | زمستان ۱۳۹۸ | ۶۴ صفحه | ۳۶۰۰۰ ریال | پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵ |
www.roshdmag.ir



- معلم بصیر، بصیرت‌بخش است
- جستاری در مثلث‌های خاص
- عشق به ریاضیات را مدیون آفرین یک معلم هستم
- بی‌نهایت، ازلیّت و ابدیتی که چندان نمی‌شناسیم
- گرد و گرد است، ولی هر گردی گردو نیست
- «اسرار عددهای اول»

ابوسعید سجزی

ابوســـعید احمدبن محمدبن عبدالحلیل سجزی از سیستان، از جمله مشاهیر، ریاضی‌دانان و منجمان معروف قرن چهارم هجری بوده است. بیشتر اوقات عمر خود را در شیراز گذراند و تاریخ تقریبی دورهٔ زندگی‌اش، بنا به تحقیق سوتر، بین ۳۴۰ تا ۴۱۵ ق بوده است.

معاصران و نظردهندگان دربارهٔ کارهای ابوسعید سجزی

ابوسعید با **ابوریحان بیرونی** معاصر بود و در دورهٔ **عضدالدوله دیلمی** بسیاری از تألیفات خود را به نام این امیر آل‌بویه نوشته است. برخی از آثار خود را هم به **سید امیر ابوجعفر احمدبن محمد**، از امیران بلخ تقدیم کرد. بیرونی بارها در آثار خود از سجزی نام برده و راه‌حل‌هایی از مسئله‌های هندسه را از وی نقل کرده است.

بیرونی در کتاب «استیعاب‌الوجوه الممکنئ فی صنعئ الاسطرلاب» نوشته است: از «ابوسعید ســـجزی **اسطرلابی** از نوع واحد و بسیط دیدم که از شمالی و جنوبی مرکب نبود و آن را **اسطرلاب زورقی** می‌نامید. او را به جهت اختراع این اسطرلاب تحسین بسیار کردم.»

بسم الله الرحمن الرحیم

اللهم صلی علی محمد و آل محمد

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات فناوری آموزشی

رشد آموزش ریاضی ۱۳۴

فصلنامۀ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای معلمان، دانشجومعلمان و کارشناسان وزارت آموزش‌وپرورش
دورۀ سی‌وهفتم | شمارۀ ۲ | زمستان ۱۳۹۸

نشانی دفتر مجله: تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶. صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ • تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۴۳۰) • نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ • وبگاه: www.roshdmag.ir
• پیام‌نگار: riyazi@roshdmag.ir • پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵ • roshdmag:
• نشانی امور مشترکین: تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱ • تلفن امورمشترکین: ۸۸۸۶۷۳۰۸ – ۰۲۱ • شمارگان: ۲۷۰۰

مجلۀ رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به‌ویژه معلمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

• مطالب یک خط در میان به صورت وُرد (Word) تایپ شود. • شکل قرار گرفتن جدول‌ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیۀ مطلب نیز مشخص شود.
• نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود. • برای ترجمۀ مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمۀ یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمۀ ارائه شده، سفارش ترجمه به فرستندۀ مقاله داده شود. در غیر این صورت، مجله می‌تواند سفارش ترجمۀ مقاله را به مترجم دیگری بدهد. • در متن‌های ارسالی تا حد امکان از معادل‌های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود. • پی‌نوشت‌ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارۀ صفحۀ مورد استفاده باشد. • چکیده‌ای از اثر و مقالۀ ارسال‌شده حداکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.
• در مقاله‌های تحقیقی یا توصیفی، واژه‌های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود. همچنین: • مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است. • مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبین نظر دفتر انتشارات و فناوری آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ‌گویی به پرسش‌های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است. • مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

معلم بصیر بصیرت‌بخش است

بسیاری از ما معلمان و دبیران ریاضی این موضوع را تجربه کرده‌ایم که کلام و رفتار ما تأثیر بسیار زیادی روی دانش‌آموزان کلاس‌هایمان داشته است. معلم ریاضی اگر نظم و ترتیب را رعایت کند، از دانش ریاضی خوبی برخوردار باشد و به روش جذابی تدریس کند، می‌تواند با بیان یک جمله چنان تأثیری روی دانش‌آموز خودش بگذارد که شاید یک واعظ با ساعت‌ها موعظه نتواند آن تأثیر را به‌وجود آورد.

دانش‌آموزان عموماً در نگاهشان به معلم ریاضی، شخصیتی را می‌بینند که دارای رفتاری منطقی، دقیق و برنامه‌ریزی‌شده است و برای هر کلام و گفتار خود دلیل و برهانی از پیش آماده دارد. این نوع نگاه و برداشت از شخصیت ما معلمان ریاضی، مسئولیت و رسالت واقعی ما را که همانا بصیرت‌بخشی به دانش‌آموزان است، دو چندان می‌کند.

زیباترین و دقیق‌ترین تعبیر و تفسیر از بصیر و بصیرت را می‌توان در کلام **حضرت امیرالمؤمنین علی(ع)** در خطبهٔ ۱۵۳ «نهج‌البلاغه» یافت که فرمودند: «فانما البصیر من سمع فتفکر و نظر فابصر و انتفع بالعبر»: اهل بصیرت[۱] کسی است که بشنود و بیندیشد و بنگرد و ببیند و از حوادث عبرت گیرد.

در بیانیهٔ حوزهٔ تربیت و یادگیری ریاضیات، مربوط به «سند برنامهٔ درسی ملی» و در بخش ضرورت و کارکردِ این حوزه، آمده است: «ریاضیات و کاربردهای آن بخشی از زندگی روزانه و در جهت حل مشکلات زندگی در حوزه‌های متفاوت به‌شمار می‌آید و دارای کاربردهای وسیع در فعالیت‌های گوناگون انسانی است.

ریاضیات موجب تربیت افرادی خواهد شد که در برخورد با مسائل می‌توانند به‌طور منطقی استدلال کنند، از قدرت تجزیه و انتزاع برخوردارند و دربارهٔ پدیده‌های پیرامونی تئوری‌های جامع می‌سازند. وجه مهم ریاضی توانمندسازیِ انسان برای توصیف دقیق موقعیت‌های پیچیده و پیش‌بینی و کنترل وضعیت‌های ممکن مادی ـ طبیعی، اقتصادی و اجتماعی است.»

تدریس ریاضیات، آن هم با رویکرد «تدریس از طریق حل مسئله»، و به نوعی درگیرشدن و در نهایت ساختن مفاهیم ریاضی توسط یادگیرنده، ماندگاری بهتر و مؤثرتری دارد. این‌گونه درگیر شدن با مفاهیم و مسائل، تفکر ریاضی مورد نظر در سند برنامهٔ درسی ملّی (که نمونه‌هایی از آن نقل شد) را بهتر و مؤثرتر می‌تواند ایجاد کند و این «تفکر ریاضی» و یا «ریاضی‌وار اندیشیدن» می‌تواند از عوامل تأثیرگذار در رشد و ارتقای بصیرتِ مورد نظر در کلام امیر المؤمنین **علی**(ع) باشد.

در همین راستا، رهبر فرزانه انقلاب در بخشی از بیاناتشان که در جمع دانشجویان استان قم در سال ۱۳۸۹ ایراد فرمودند، این نکته را متذکر شدند: «این بصیرتی که در حوادث لازم است و در روایات و در کلام امیرالمؤمنین هم روی آن تکیه و تأکید شده، به معنای این است که انسان در حوادثی که پیرامون او می‌گذرد و در حوادثی که پیش روی اوست و به او ارتباط پیدا می‌کند، تدبر کند. سعی کند از حوادث به شکل عامیانه و سطحی عبور نکند... حوادث را درست نگاه کردن، درست سنجیدن، و در آن‌ها تدبر کردن، در انسان بصیرت ایجاد می‌کند؛ یعنی بینایی ایجاد می‌کند و انسان چشمش به حقیقت باز می‌شود.»

حمیدرضا امیری (دبیر شورا)

پی‌نوشت

۱. بصیرت در لغت عرب به معنای عقیدهٔ قلبی، شناخت، یقین، زیرکی و عبرت آمده است (لسان‌العرف ج ۲، ص ۸۱۴).
در فرهنگ معین نیز دانایی، بینایی، بینایی‌دل، هوشیاری، زیرکی و یقین معنی شده است (فرهنگ معین، ج ۱، ص ۵۳۴)

تاریخچۀ جبر کلاسیک (۱)

ایسرائل کلاینر
مترجمان: روح‌الله جهانی‌پور (استاد دانشگاه کاشان)
سعید مقصودی (استاد دانشگاه زنجان)

کلیدواژه‌ها: معادلات چندجمله‌ای، حل با رادیکال‌ها، جبر نمادین، قضیۀ اساسی جبر

۱. سرچشمه‌های اولیه

تا اوایل قرن نوزدهم، یعنی حدود سه‌هزار سال، «جبر» عبارت بود از فن حل کردن معادله‌های چندجمله‌ای عمدتاً با درجۀ حداکثر چهار. موضوع‌هایی از قبیل نمادگذاری این‌گونه معادلات، نوع ریشه‌های آن‌ها و قوانین حاکم بر دستگاه‌های عددی گوناگونی که ریشه‌ها عضو آن‌ها بودند، در این چارچوب مورد بررسی قرار می‌گرفتند. همۀ این موضوع‌ها را روی هم با عنوان «جبر کلاسیک» می‌شناختند (اصطلاح «جبر» بعداً در قرن نهم میلادی وضع شد). در دهه‌های آغازین قرن بیستم بود که جبر به شکل مطالعۀ دستگاه‌های اصل موضوعی تکامل یافت و طولی نکشید که این رهیافت اصل موضوعی، «جبر جدید» یا «جبر مجرد» نام گرفت. گذر از جبر کلاسیک به جبر جدید در قرن نوزدهم رخ داد.

بیشتر تمدن‌های بزرگ باستانی، مانند بابلی‌ها، مصری‌ها، چینی‌ها و هندی‌ها، با حل معادله‌های چندجمله‌ای و عمدتاً خطی و درجه دو سروکار داشتند. به‌ویژه بابلی‌ها (حدود ۱۷۰۰ ق. م.) «جبردان‌های» ماهری بودند. آن‌ها می‌توانستند معادله‌های درجۀ دو و معادله‌هایی را که به آن‌ها منجر می‌شدند، همچون معادله‌های $x+y=a$ و $x^2+y^2=b$، را با روش‌هایی شبیه به روش‌های امروزی حل کنند. این دسته از معادله‌ها به شکل «مسائل کلامی» مطرح می‌شدند.

در اینجا یک نمونه را همراه با حل آن می‌آوریم: «مساحت و دوسوم ضلع مربع را به هم افزوده‌ام؛ حاصل آن ۰;۳۵ شده است. [۳۵/۶۰ در نمایش شصتگانی]. طول ضلع مربع من چیست؟»

با نمادگذاری امروزی، مسئله عبارت می‌شود از حل معادلۀ $x^2+(2/3)x=35/60$. راه‌حلی که بابلی‌ها عرضه می‌کنند این است:

«عدد ۱، همان ضریب، را در نظر بگیر. دو سوم ۱ برابر با ۰;۴۰ است. نصف آن، ۰;۲۰ را در ۰;۲۰ ضرب کن [نتیجه] برابر با ۰;۶,۴۰ است. آن را به ۰;۳۵ بیفزا، پس [نتیجه] می‌شود: ۰;۴۱,۴۰ که ریشۀ دوم آن ۰;۵۰ است. مقدار ۰;۲۰ را که در خودش ضرب کردی از ۰;۵۰ کم کن؛ پس [ضلع] مربع می‌شود ۰;۳۰».

دستورالعمل یافتن جواب را می‌توان با نمادگذاری کنونی به این صورت بیان کرد که

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\left[(0;40)/2\right]^2+0;35}-(0;40)/2 \\ &= \sqrt{0;6,4+0;35}-0;20=\sqrt{0;41,40}-0;20 \\ &= 0;50-0;20=0;30\,. \end{aligned}$$

این دستورالعمل، با فرمول $x=\sqrt{(a/2)^2+b}-a/2$ برای حل معادلۀ درجۀ دوم $x^2+ax=b$ یکی است که این مورد یک شاهکار محسوب می‌شود. (منابع شمارۀ ۱ و ۸ را ببینید.)

دربارۀ جبر بابلی‌ها ذکر این نکات لازم است:

- هیچ‌گونه نمادگذاری جبری در آن وجود نداشت و همۀ مسئله‌ها و راه‌حل‌ها به‌صورت کلامی بیان می‌شدند؛

● مسئله‌ها به معادله‌هایی با ضرایب عددی می‌انجامیدند؛ به‌ویژه چیزی به‌نام معادلهٔ درجه دوم کلی $ax^2 + bx + c = 0$ که a، b و c پارامترهای دلخواه باشند، وجود نداشت؛

● راه‌حل‌ها دستوری بودند، به این معنی که اگر چنین و چنان کنید، به جواب خواهید رسید و لذا هیچ توجیهی برای این شگردها در کار نبود. با این حال، وجود انبوهی از مثال‌های مشـــابه برای یک مســـئله حاکی از این است که نوعی توجیه برای شگردهای ریاضی بابلی‌ها وجود داشته است؛

● مســـئله‌ها طوری انتخاب می‌شدند که جواب‌های آن‌ها فقط عددهای گویای مثبت باشند. به‌علاوه در مورد معادله‌های درجهٔ دو تنها یکی از ریشه‌ها به‌عنوان جواب اعلام می‌شد، زیرا تا جایی که ما می‌دانیم، صفر، عددهای منفی و عددهای گنگ جزئی از دســـتگاه عددهای بابلی‌ها نبودند؛

● مسئله‌ها غالباً به زبان هندسی بیان می‌شدند، ولی مسئله‌های هندســـی نبودند. این مسئله‌ها کاربرد عملی هم نداشتند و احتمالاً در طرح آن‌ها هدف‌های آموزشـــی وجود داشتند. مثلاً به این مورد در مسئلهٔ بالا دقت کنید که مساحت را به $\frac{2}{3}$ ضلع مربع می‌افزاید.

برای مطالعهٔ جنبه‌هایی از جبر بابلی‌ها، منابع شمارهٔ ۲، ۶، ۱۴ و ۱۸ را مطالعه کنید.

ریاضی‌دانان چینی (حدود ۲۰۰ ق. م.) و هندی (حدود ۶۰۰ ق. م.) پا را از ریاضی‌دانان بابلی فراتر گذاشتند (تاریخ‌هایی که ذکر کردیم، بســـیار تقریبی‌اند). برای مثال، آن‌ها ضریب‌های منفی در معادله‌ها را مجاز می‌شـــمردند (ولی ریشه‌های منفی را نه) و وجود دو ریشـــه برای معادلهٔ درجـــهٔ دو را می‌پذیرفتند. همچنین آن‌ها شـــگردهایی را برای دســـتورزی با معادلات بیـــان کرده‌اند، ولی هیچ نمادگذاری یا توجیهی برای جواب‌هایشان نداشتند. چینی‌ها روش‌هایی برای تقریب زدن ریشه‌های معادله‌های چندجمله‌ای از هر درجه‌ای داشته‌اند و دستگاه‌های معادلات خطی را با استفاده از «ماتریس‌ها» (آرایهٔ مستطیلی از عددها) حل کرده‌اند؛ خیلی پیش‌تر از آنکه چنین فنونی در اروپای غربی شناخته شوند. (به منابع شمارهٔ ۷، ۱۰ و ۱۸ رجوع کنید.)

۲. یونانیان

ریاضیات یونانیان باستان به‌ویژه در هندسه و نظریهٔ عددها نسبتاً پیشرفته و ماهرانه بود، ولی جبر آن‌ها ضعیف بود. در اثر عظیم **اقلیدس**، «اصول» (حدود ۳۰۰ ق. م.)، بخش‌هایی وجود دارد که تاریخ‌دانان (به منابع شمارهٔ ۱۴ و ۱۶ مراجعه کنید)، به استثنای چند مورد مهم، آن‌ها را دارای ماهیت جبری می‌دانند. این چند مورد گزاره‌هایی هندســـی هســـتند که اگر به زبان جبری بیان شوند، نتایجی جبری همچون قانون‌های جبر و همچنین راه‌حل‌های معادله‌های درجهٔ دو را به‌دست می‌دهند. این کار به «جبر هندسی» شهرت داشت.

ریاضیات یونانیان باستان به‌ویژه در هندسه و نظریهٔ عددها نسبتاً پیشرفته و ماهرانه بود، ولی جبر آن‌ها ضعیف بود. در اثر عظیم اقلیدس، «اصول» (حدود ۳۰۰ ق.م.)، بخش‌هایی وجود دارد که تاریخ‌دانان، به استثنای چند مورد مهم، آن‌ها را دارای ماهیت جبری می‌دانند

برای مثال، گـــزارهٔ II. ۴ در کتاب اصول بیان می‌کند: «اگر خطی راست به دو قطعهٔ دلخواه تقسیم شده باشد، مربع واقع بر کل خط با مربع‌های واقع بر هر یک از قطعه‌ها و دو برابر مستطیل حاصل از این قطعه‌ها مســـاوی اســـت.» اگر a و b آن دو قطعهٔ خط راست را نشان دهند، این گزاره را می‌توان به‌صورت جبری $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ بیان کرد. گزارهٔ II. ۱۱ بیان می‌کند: «مطلوب است تقسیم یک خط راســـت به دو قطعه طوری که مستطیل حاصل از کل خط و یکی از قطعه‌ها، با مربع واقع بر قطعهٔ دیگر مساوی باشد.» به زبان جبری، مطلوب این گزاره حل معادلهٔ $a(a - x) = x^2$ است. (صفحهٔ ۷۰ منبع شمارهٔ ۷ را ببینید.)

چنان‌که در ایـــن نمونه‌ها دیدیم، در جبر یونانی صحبت از کمیت‌ها می‌شود نه عددها. به‌علاوه شرط همگن بودن عبارت‌های جبری، یعنی هم‌درجه بودن همهٔ جمله‌های آن عبارت، شرطی دشوار است. مثلاً بنابر این شرط، معادله‌هایی مانند $x^2 + x = b^2$ پذیرفتنی تلقی نمی‌شـــدند. برای مطالعه در این باره، به منابع شمارهٔ ۱، ۲، ۱۸ و ۱۹ رجوع کنید.

یکی دیگر از آثار یونانیان در زمینهٔ جبر که بسیار مهم‌تر است، کتاب «اریثمتیکا»[2] **دیوفانتوس** (حدود ۲۵۰ ب. م.) است. هر چند این اثر اساساً کتابی دربارهٔ نظریهٔ عددهاست، راه‌حل برخی معادله‌ها در مجموعهٔ عددهای صحیح و گویا را نیز در خود دارد. اما چیزی که اهمیت بیشتری برای پیشرفت جبر دارد، این است که در این کتاب یـــک نمادگذاری جبری به‌طور جزئی معرفی شده است که دستاوردی بسیار مهم به‌شمار می‌آید: ζ مجهول را نشان می‌دهد، Φ منفی را، $\acute{\iota}\sigma$ تساوی را، Δ^σ مربع مجهول را، K^σ مکعب آن را و M نبود مجهول را (چیزی که ما آن را به‌صورت x^0 می‌نویسیم). مثلاً معادلهٔ $x^3 - 2x^2 + 10x - 1 = 5$ به‌صورت $K^\sigma\alpha\zeta\acute{\iota}\Phi\Delta^\sigma\beta M\alpha\acute{\iota}\sigma M\varepsilon$ نوشته می‌شد. (عددها را با حروف نشان می‌دادند. بنابراین برای مثال، α به‌جای ۱ و ε به‌جای ۵ نوشـــته می‌شـــد. به‌علاوه علامتی برای جمع وجود نداشـــت و لذا همهٔ جمله‌های با ضرایب مثبت، اول نوشـــته می‌شدند و بعد از آن جمله‌های با ضریب‌های منفی را می‌آوردند.)

دیوفانتوس پیشرفت‌های قابل توجه دیگری هم داشته است:

● دو قاعدهٔ بنیادی برای کار با عبارت‌های جبری عرضه کرد: انتقال یک جمله از یک طرف معادله به طرف دیگر و حذف جمله‌های همانند از دو طرف معادله.

● او توان‌های منفی کمیت مجهول را تعریف و قانون‌نماها، یعنی $x^m x^n = x^{m+n}$ را به ازای $-۶ \le m, n, m+n \le ۶$ صریحاً بیان کرد.

● چندین قاعده برای انجام عملیات روی ضریب‌های منفی بیان کرد، مثل «کاستی ضربدر کاستی، نتیجه می‌دهد فراوانی» ($(-a)(-b) = ab$).

او برخی از چیزهایی را که پیامد سنت کلاسیک یونان بود، از میان برداشت؛ مثل تعبیر هندسی عبارت‌های جبری، محدود کردن درجهٔ حاصل‌ضرب جمله‌ها به حداکثر سه و الزام به همگن بودن جمله‌ها در عبارت‌های جبری (منابع شمارهٔ ۱، ۷ و ۱۸ را بنگرید).

۳. خوارزمی

بین قرن‌های نهم تا پانزدهم پس از میلاد (قرون سوم تا نهم هجری)، ریاضی‌دانان اسلامی به دستاوردهایی مهم در حوزهٔ جبر نائل آمدند. شاید برجسته‌ترین آن‌ها **محمدبن موسی خوارزمی** (حدود ۸۵۰- ۷۸۰ م.) باشد که برخی او را «اقلیدس جبر» لقب داده‌اند. او این علم را سازمان‌دهی کرد و هستی بخشید و آن را به‌صورت یک شاخهٔ علمی مجزا درآورد. او این کار را در کتابش با عنوان «الجبر و المقابله» به انجام رساند. «الجبر» (که کلمهٔ algebra از آن گرفته شده است) به معنای منتقل کردن جملهٔ منفی از یک طرف معادله به طرف دیگر و مثبت کردن آن است و «المقابله» اشاره به حذف جمله‌های مثبت برابر در دو طرف یک معادله دارد. مسلم است که این دو کار، شگردهای اساسی در حل معادله‌های چندجمله‌ای هستند.

خوارزمی (که اصطلاح «الگوریتم» از نام او مشتق شده است) این شگردها را برای حل معادله‌های درجهٔ دو به‌کار برده است. او این معادله‌ها را به پنج نوع دسته‌بندی کرد: $ax^۲ = bx$، $ax^۲ = b$، $ax^۲ + bx = c$، $ax^۲ + c = bx$ و $ax^۲ = bx + c$.

این دسته‌بندی به این دلیل لازم بود که خوارزمی ضریب‌های منفی یا صفر را پذیرفتنی نمی‌دانست. همچنین او اساساً هیچ‌گونه نمادگذاری در اختیار نداشت و لذا مسائل و راه‌حل‌ها را به صورت کلامی بیان می‌کرد. مثلاً دستهٔ معادله‌های اول و سوم بالا را به‌صورت «مال‌هایی که با جذرها برابر می‌شوند» و «مال‌ها و جذرهایی که با عددی برابر می‌شوند» بیان کرده است (او مجهول را «جذر» نامیده است). خوارزمی برای راه‌حل‌های خود توجیهی هرچند هندسی می‌آورد. (به منابع ۱۳ و ۱۷ مراجعه شود.)

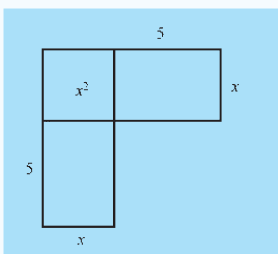
در اینجا نمونه‌ای از مسئله‌ها و راه‌حل‌های او را می‌آوریم [Katz, 1998]: «مالی را بیابید که اگر به ده جذر از خودش افزوده شود، مجموع ۳۹ شود.» (به‌عبارت دیگر، معادلهٔ $x^۲ + ۱۰x = ۳۹$ را حل کنید.)

محمدبن موسی خوارزمی
(حدود ۸۵۰- ۷۸۰ م.)

بین قرن‌های نهم تا پانزدهم پس از میلاد، ریاضی‌دانان اسلامی به دستاوردهایی مهم در حوزهٔ جبر نائل آمدند. شاید برجسته‌ترین آن‌ها محمدبن موسی خوارزمی (حدود ۸۵۰_ ۷۸۰م.) باشد که برخی او را «اقلیدس جبر» لقب داده‌اند

حل: «باید جذرها [ضریب x] را نصف کنی که این مقدار نصف، در این مسئله پنج می‌شود و آن نصف را در مانند خودش ضرب کنی. در این صورت حاصل‌ضرب ۲۵ می‌شود. آن‌گاه این عدد را بر ۳۹ بیفزایی، مجموع ۶۴ می‌شود. سپس جذر این عدد را می‌گیری؛ هشت می‌شود. نیمی از شمارهٔ جذرها را که عبارت باشد از پنج، از آن کم می‌کنی که در نتیجه سه باقی می‌ماند و همین عدد سه، جذر مال مورد نظر است و آن مال نُه است.» (این دستور با استفاده از نمادهای کنونی عبارت است از: $x = \sqrt{[(۱/۲)\times ۱۰]^۲ + ۳۹} - (۱/۲)\times ۱۰$).

توجیه هندسی خوارزمی برای این روش به این صورت



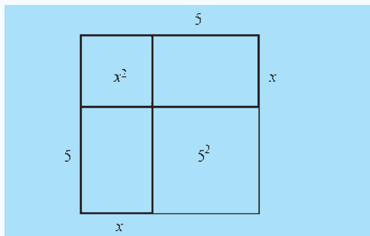
شکل ۱

است: عَلَمی مانند شکل ۱ بساز و با افزودنِ مربعی به ضلع ۵ آن را «کامل» کن تا مربع شکل ۲ به‌دست آید. مربع حاصل دارای طول ضلع $x + ۵$ است. اما طول ضلع آن برابر ۸ نیز هست، زیرا: $x^۲ + ۱۰x + ۵^۲ = ۳۹ + ۲۵ = ۶۴$. بنابراین $x = ۳$.

اکنون چندکلمه‌ای هم دربارهٔ برخی آثار ریاضی‌دانان اروپای غربی دربارهٔ جبر در قرن‌های پانزدهم و شانزدهم بگوییم. این ریاضی‌دانان که به آن‌ها «اِبسیست»[۳] (حسابدار، مشتق از «اَبَکس»[۴] به معنی چرتکه) و یا «کوسیست»[۵] (مشتق از «کوسا»[۶] که در لاتین به معنای شیء است و برای کمیت مجهول از آن استفاده می‌کردند) گفته می‌شد، نمادگذاری‌های قبلی و قواعد حاکم بر انجام اعمال را گسترش دادند و به‌طور کلی آن‌ها را بهتر کردند. یکی از تأثیرگذارترین این نوع آثار، کتاب «مجموعه»[۷] نوشتهٔ **لوکا پاچولی**[۸]

به سال ۱۴۹۴ بود که جزء نخستین کتاب‌های چاپی در زمینهٔ ریاضی نیز هست (ماشین چاپ در حدود سال ۱۴۴۵ اختراع شد). برای مثال، او از «co»[۹] به جای مجهول استفاده می‌کند، نمادهایی برای ۲۹(!) توان اول آن وضع می‌کند، «p»[۱۰] را به جای جمع و «m»[۱۱] را به جای منها به‌کار می‌برد. برخی دیگر هم «R_X»[۱۲] را به جای ریشهٔ دوم و $R_{X,3}$ را به جای ریشهٔ سوم به‌کار برده‌اند. در سال ۱۵۵۷، **رابرت رکورد**[۱۳] نماد «=» را برای نشان دادن برابری معرفی کرد با این توجیه که «هیچ دو چیز نمی‌توانند خیلی برابر باشند.[۱۴]» (به منابع شمارهٔ ۷، ۱۳ و ۱۷ رجوع کنید.)

بابلی‌ها در حدود سال ۱۶۰۰ ق. م. معادلهٔ درجه دو را با استفاده از دستورهایی اساساً معادل با فرمول درجهٔ دوم حل می‌کردند. بنابراین طبیعی است که بپرسیم: «آیا معادله‌های درجهٔ سه را می‌توان با استفاده از فرمول‌هایی مشابه حل کرد؟»



شکل ۲

۴. معادله‌های درجهٔ سه و درجهٔ چهار

بابلی‌ها در حدود سال ۱۶۰۰ ق. م. معادلهٔ درجه دو را با استفاده از دستورهایی اساساً معادل با فرمول درجهٔ دوم حل می‌کردند. بنابراین طبیعی است که بپرسیم: «آیا معادله‌های درجهٔ سه را می‌توان با استفاده از فرمول‌هایی مشابه حل کرد؟» سه هزار سال دیگر باید سپری می‌شد تا جواب معلوم شود.

این اتفاق شگرفی در جبر بود که ریاضی‌دانان قرن شانزدهم «با استفاده از رادیکال‌ها» به حل نه‌تنها معادله‌های درجهٔ سه، بلکه معادله‌های درجه چهار نائل آمدند.

حل معادلهٔ چندجمله‌ای برحسب رادیکال‌ها، عبارت است از ارائهٔ فرمولی که ریشه‌های معادله را برحسب ضریب‌های آن به‌دست بدهد. تنها اعمالی که روی ضریب‌ها مجاز شمرده می‌شود، چهار عمل جبری (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) و گرفتن ریشه‌ها (ریشهٔ دوم، ریشهٔ سوم و ...، یعنی رادیکال‌ها) است. مثلاً فرمول درجهٔ دوم $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a$، حل معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ برحسب رادیکال‌هاست.

نخستین بار **کاردانو**[۱۵] در کتابش با عنوان «فن کبیر[۱۶]» (که اشاره به جبر دارد) به سال ۱۵۴۵ حل معادلهٔ درجه سه را برحسب رادیکال‌ها منتشر کرد؛ گرچه **دل فرّو**[۱۷] و **تارتالیا**[۱۸] قبلاً آن را کشف کرده بودند. تارتالیا روش خود را با کاردانو در میان گذاشته بود و کاردانو عهد کرده بود که آن را منتشر نخواهد کرد، ولی منتشر کرد. فرمول مشهور به فرمول کاردانو برای حل معادلهٔ درجه سهٔ $x^3 = ax + b$ به این صورت بوده است:

$$x = \sqrt[3]{b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - (a/3)^3}} + \sqrt[3]{b/2 - \sqrt{(b/2)^2 - (a/3)^3}}$$

در اینجا تذکر چند نکته بجاست:

- کاردانو هیچ نمادی به‌کار نبرده است و بنابراین «فرمول» او به‌صورت کلامی بیان شده است (و تقریباً در نیمی از یک صفحه جا گرفته است). علاوه بر این، معادله‌هایی که او حل کرده است، همگی ضریب‌های عددی دارند.
- معمولاً به یافتن تنها یک ریشه از معادلهٔ درجه سه اکتفا کرده است. اما حقیقت این است که اگر ریشه‌های سوم درست انتخاب شوند، هر سه ریشهٔ معادلهٔ درجه سه را می‌توان با فرمول کاردانو معلوم کرد.

جیرولامو کاردانو
(۱۵۷۶-۱۵۰۱ م.)

- در آثار او گهگاه عددهای منفی دیده می‌شوند، لیکن او به دیدهٔ شک به آن‌ها نگاه می‌کرد و آن‌ها را «مجعول» می‌خواند. ضریب‌ها و ریشه‌های معادلهٔ درجه سهٔ مورد بررسی کاردانو، عددهای مثبت بودند (عددهای گنگ را نیز مجاز می‌شمرد). بنابراین مثلاً دو معادلهٔ $x^3 = ax + b$ و $x^3 + ax = b$ را باید متمایز از هم در نظر گرفت و به هر کدام، یک فصل اختصاص داد. (با دسته‌بندی خوارزمی برای معادله‌های درجهٔ دو مقایسه کنید).
- کاردانو برای روش حل معادله‌های درجهٔ سه توجیهی هندسی می‌آورد.

طولی نکشید که معادله‌های چندجمله‌ای درجهٔ چهار نیز بر حسب رادیکال‌ها حل شدند. ایدهٔ اصلی این بود که حل معادلهٔ درجهٔ چهار را به حل معادلهٔ درجه سه تحویل کنند. **فِرّاری**[۱۹] اولین ریاضی‌دانی بود که این‌گونه معادله‌ها را حل کرد. نتایج او

قرن‌ها دیدگاه ریاضی‌دانان دربارهٔ ریشه‌های دوم عددهای منفی این بود که چون مربع هر عدد مثبت و نیز مربع هر عدد منفی، عددی مثبت است، پس ریشهٔ دوم عددهای منفی وجود ندارد و درواقع نمی‌تواند وجود داشته باشد. اما پس از آنکه در قرن شانزدهم میلادی، معادلات درجهٔ سه به کمک رادیکال‌ها حل شدند، همه چیز دگرگون شد

در کتاب فن کبیر کاردانو آمده است. (برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه، به منابع شمارهٔ ۱، ۷، ۱۰ و ۱۲ رجوع کنید.)

باید خاطرنشان کنیم که روش‌های یافتن ریشه‌های تقریبی معادله‌های درجهٔ سه و درجهٔ چهار، خیلی قبل‌تر از حل این معادله‌ها برحسب رادیکال‌ها شناخته شده بودند. این جواب‌های معادله‌ها گرچه دقیق هستند، ارزش کاربردی کمی دارند. با این حال، پیامدهای این ایده‌های «غیرقابل استفادهٔ» ریاضی‌دانان دورهٔ رنسانس ایتالیا بسیار بااهمیت بود.

۵. معادله‌های درجهٔ سه و عددهای مختلط

قرن‌ها دیدگاه ریاضی‌دانان دربارهٔ ریشه‌های دوم عددهای منفی این بود که چون مربع هر عدد مثبت و نیز مربع هر عدد منفی، عددی مثبت است، پس ریشهٔ دوم عددهای منفی وجود ندارد و درواقع نمی‌تواند وجود داشته باشد. اما پس از آنکه در قرن شانزدهم میلادی، معادلات درجهٔ سه به کمک رادیکال‌ها حل شدند، همه چیز دگرگون شد.

وقتی فرمول کاردانو را برای حل معادلات درجه سه به‌کار می‌بریم، ریشه‌های دوم عددهای منفی «به‌طور طبیعی» ظاهر می‌شوند. برای مثال، اگر این فرمول را برای حل معادلهٔ درجهٔ سهٔ $x^۳ = ۹x + ۲$ به‌کار بریم، به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[۳]{۲/۲ + \sqrt{(۲/۲)^۲ - (۹/۳)^۳}} \\ &\quad + \sqrt[۳]{۲/۲ - \sqrt{(۲/۲)^۲ - (۹/۳)^۳}} \\ &= \sqrt[۳]{۱ + \sqrt{-۲۶}} + \sqrt[۳]{۱ - \sqrt{-۲۶}} \end{aligned}$$

خب! تکلیف ما با این جواب چیست؟ چون کاردانو به عددهای منفی بدگمان بود، یقیناً درکی از ریشهٔ دوم آن‌ها نیز نداشت و لذا این فرمول را برای معادله‌هایی مانند $x^۳ = ۹x + ۲$ غیرقابل استفاده می‌دانست. اگر بخواهیم بر مبنای تجربیات گذشته قضاوت کنیم، این طرز تفکر چندان هم نامعقول نبود، کما اینکه از نظر فیثاغورسیان پاره‌خطی وجود نداشت که اندازهٔ آن برابر با طول ضلع مربعی به مساحت ۲ باشد (به زبان امروزی، مثل این است که بگوییم معادلهٔ $x^۲ = ۲$ حل‌پذیر نیست).

رافائل بومبلّی[۲۰] همهٔ این دیدگاه‌ها را عوض کرد. او در کتاب مهمش به نام «جبر» به سال ۱۵۷۲، فرمول کاردانو را برای حل معادلهٔ $x^۳ = ۱۵x + ۴$ به‌کار برد و جواب را به شرح زیر به‌دست آورد:

$$x = \sqrt[۳]{۲ + \sqrt{-۱۲۱}} + \sqrt[۳]{۲ - \sqrt{-۱۲۱}}$$

اما نمی‌توانست این جواب را کنار بگذارد، زیرا با وارسی متوجه شده بود که $x = ۴$ جوابی از این معادله است و دو ریشهٔ دیگر این معادله که آن‌ها هم عددهای حقیقی هستند، عبارت‌اند از: $-۲ \pm \sqrt{۳}$.

از این رو دچار سرگشتگی شد؛ در حالی که هر سه ریشهٔ معادلهٔ $x^۳ = ۱۵x + ۴$ حقیقی بودند، نتیجه‌ای که از به‌کار بردن فرمول کاردانو به‌دست می‌آمد، مشتمل بر ریشه‌های دوم عددهای منفی بود که این پدیده در آن زمان بی‌معنی بود. اما چگونه می‌شد از این سرگشتگی بیرون آمد؟

بومبلی قوانین مربوط به محاسبه با کمیت‌های حقیقی را در مورد عبارت‌هایی «بی‌معنا» به شکل $a + \sqrt{-b}\ (b > ۰)$ به‌کار بست و توانست نشان دهد که:

$$\sqrt[۳]{۲ + \sqrt{-۱۲۱}} = ۲ + \sqrt{-۱} \quad \text{و} \quad \sqrt[۳]{۲ - \sqrt{-۱۲۱}} = ۲ - \sqrt{-۱}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[۳]{۲ + \sqrt{-۱۲۱}} + \sqrt[۳]{۲ - \sqrt{-۱۲۱}} \\ &= (۲ + \sqrt{-۱}) + (۲ - \sqrt{-۱}) = ۴ \end{aligned}$$

به این ترتیب بومبلی به چیزی اندیشید که «اندیشیدنی» نبود و آن اینکه با ریشه‌های دوم عددهای منفی می‌توان به روشی بامعنا کار کرد و نتایجی مهم به‌دست آورد. پس او به یک کار «بی‌معنا»، معنا بخشیده بود. این پیشرفتی برجسته در مجموعهٔ کارهای بومبلی بود. خودش در این باره می‌گوید:

«به باور بسیاری، این یک اندیشهٔ افسارگسیخته بود و خودم نیز مدتی طولانی همین عقیده را داشتم. به نظر می‌رسید کل ماجرا یک جور سفسطه باشد تا حقیقت. با این حال آنقدر به جست‌وجو ادامه دادم تا ثابت کردم که نه! این حقیقت است» [Nahin, 1998].

بومبلی یک «حساب» برای عددهای مختلط ارائه کرد که با قاعده‌هایی همچون قاعده‌های زیر آغاز می‌شد:

$$(\sqrt{-۱})(\sqrt{-۱}) = -۱ \quad \text{و} \quad (\sqrt{-۱})(-\sqrt{-۱}) = ۱$$

و جمع و ضرب برخی عددهای مختلط خاص را تعریف کرد. این، زمان تولد عددهای مختلط بود؛ تولدی که مانده بود تا رسمیت یابد. طی دو سده پس از آن، ماهیت عددهای مختلط پوشیده از رمز و راز بود، درک درستی از آن‌ها وجود نداشت و این اعداد غالباً نادیده گرفته می‌شدند. درواقع پس از آنکه **گاوس** به سال ۱۸۳۱ برای عددهای مختلط نمایشی هندسی به‌سان نقاطی در صفحه ارائه کرد، این موجودات به‌عنوان عضوهای واقعی دستگاه عددها پذیرش

تا اوایل قرن نوزدهم، یعنی حدود سه هزار سال، «جبر» عبارت بود از فن حل کردن معادله‌های چندجمله‌ای عمدتاً با درجهٔ حداکثر چهار. موضوع‌هایی از قبیل نمادگذاری این‌گونه معادلات، نوع ریشه‌های آن‌ها و قوانین حاکم بر دستگاه‌های عددی گوناگونی که ریشه‌ها عضو آن‌ها بودند، در این چارچوب مورد بررسی قرار می‌گرفتند. همهٔ این موضوع‌ها را روی هم با عنوان «جبر کلاسیک» می‌شناختند

یافتند (کارهای نخستین **آرگان**[21] و **وِسِل**[22] در این باره در میان ریاضی‌دانان شناخته‌شده نبود). برای مطالعهٔ بیشتر رجوع کنید به: منابع شمارهٔ ۱، ۷ و ۱۳.

توجه کنید کــه معادلهٔ $x^3 = 15x + 4$ نمونه‌ای از معادلات درجهٔ سـهٔ تحویل‌ناپذیر اســت، یعنی معادلاتی با ضریب‌های گویا که روی میدان عددهای گویا تحویل‌ناپذیر هستند و همهٔ ریشـــه‌های آن‌ها حقیقی‌اند. در قرن نوزدهم ثابت شد که همه جواب این‌گونه معادلات درجهٔ سه (نه‌تنها معادلهٔ کاردانو) که با رادیکال‌ها بیان شود، مشتمل بر عددهای مختلط است. بنابراین اگر بخواهیم معادلات درجهٔ ســهٔ تحویل‌ناپذیر را با رادیکال‌ها حل کنیم، عددهای مختلط اجتناب‌ناپذیر هســتند. به همین دلیل اســت که این عددها در ارتباط با حل معادلات درجه سه ظاهر می‌شـــوند، نه چنان که به غلط تصور می‌شود، در زمینهٔ حل معادلات درجهٔ دو (اینکه معادلهٔ درجهٔ دو $x^2 + 1 = 0$ جواب ندارد، قرن‌ها بود که پذیرش عام یافته بود).

ادامهٔ مطلب را در شمارهٔ آیندهٔ مجله مطالعه بفرمایید.

پی‌نوشت‌ها

۱. این مقاله ترجمه فصل اول از کتاب زیر است:

Kleiner, Israel. *A History of Abstract Algebra*. Birkhäuser, 2007.

2. Arithmetica
3. abacists
4. abacus
5. cosists
6. cosa
7. Summa
8. Luca Pacioli
9. cosa
10. piu
11. meno
12. radix
13. Robert Recorde
14. noe 2 thynges can be moare equalle
15. Gerolamo Cardano
16. The Great Art
17. Scipione del Ferro
18. Niccolò Tartaglia
19. Lodovico Ferrari
20. Rafael Bombelli
21. Jean-Robert Argand
22. Caspar Wessel

منابع

1.Bashmakova,I.G.,Smirnova,G.S., The Beginnings and Evolution of Algebra,Translated from the Russian by A. Shenitzer, The Mathematical Association of America, 2000.

2.Bashmakova, I.G., Smirnova, G.S.,Geometry: The first universal language of mathematics, in: Grosholz, E., Breger, H. (eds.), The Growth of Mathematical Knowledge, Kluwer Academic Press, 2000.

3. Bourbaki, N.,Elements of the History of Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidel-berg, 1994.

4. Dobbs, D. E., Hanks, R.,A Modern Course on the Theory of Equations, Polygonal Pub-lishing House, Washington, New Jersey, 1980.

5. Fine, B., Rosenberg, G.,The Fundamental Theorem of Algebra, Springer-Verlag, NewYork, 1987.

6. Hoyrup, J.,Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Babylonian Algebra and its Kin,Springer-Verlag, New York, 2002.

7. Katz, V.,A History of Mathematics, 2nd. edn., Addison-Wesley, New York, 1998.

8. Katz, V., Algebra and its teaching: An historical survey,Journal of Mathematical Behav-ior,16(1997).

9.Kleiner,I.,Thinking the unthinkable: The story of complex numbers (with a moral), Mathematics Teacher, 81(1988).

10.Kline,M.,Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press,Oxford, 1972.

11. Nahin, P. G.,An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$ Princeton University Press, 1998.

12. Parshall, K. H., The art of algebra from al-Khwarizmi to Viète: A study in the naturalselection of ideas, History of Science,26 (1988).

13. Pycior, H. M., George Peacock and the British origins of symbolical algebra, Historia Mathematica,8 (1981).

14. Robson, E., Influence, ignorance, or indifference? Rethinking the relationship between Babylonian and Greek mathematics, Bulletin of the British Society for the History of Mathematics, 4 (2005).

15. Turnbull, H. W.,Theory of Equations, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1957.

16. Unguru, S., On the need to rewrite the history of Greek mathematics, Archive for the History of Exact Sciences,15 (1975–76).

17. Van der Waerden, B. L., A History of Algebra, from al-Khwarizmi to Emmy Noether,Springer-Verlag , Berlin, Heidelberg, 1985.

18. van der Waerden, B. L.,Geometry and Algebra in Ancient Civilizations, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983.

19. van der Waerden, B. L., Defence of a “shocking” point of view,Archive for the History of Exact Sciences,15 (1975–76).

ساختن‌گرایی

نویسنده: **یاسمین کافای** [1]
ترجمه و تألیف: **خسرو داودی**
مؤلف کتاب‌های درسی ریاضی

اشاره

پیش از مطالعه متـــن، توجه خوانندگان عزیز را به نکات زیر جلب می‌کنم:

۱. متن حاضر، بخشی از فصل سوم کتاب «راهنمای علوم یادگیری»[2] است که توسط «دانشگاه کمبریج» در سال ۲۰۰۶ منتشر شد. سرویراستار این مجموعه، کیت سایر[3] است. با توجه به طولانی بودن متن، قسمتی از متن ترجمه و تقدیم می‌شود. ابتدا قصد داشتم همهٔ این فصل را در ســـه شماره و به‌تدریج ارائه کنم، اما با نظر اعضای محترم هیئت تحریریه، نکات اصلی در یک متن انتخاب و ترجمه شدند. همچنین به پیشنهاد دوستان توضیحاتی تکمیلی توسط مترجم به متن اصلی اضافه شد تا برای خواننده روشنگر و مکمل متن اصلی باشد. این قسمت‌ها با رنگ متفاوت درج شده‌اند.

۲. در ترجمهٔ این متن برای واژهٔ «constructionism» که یک لغت ترکیبی و ابداعی اســـت و به‌طور معمول در واژه‌نامه‌های انگلیســـی نیز وجود نـــدارد، از معادل «ساختن‌گرایی» استفاده شده است. شباهت این عبارت با واژهٔ آشنای «ساخت‌گرایی» در علوم یادگیری ممکن است ابهام ایجاد کند. مطالعهٔ متن به رفع این ابهام کمک می‌کند. همچنین اصطلاح «ساخت و سازگرایی» به‌عنوان معادل «constructivism» از بین ترجمه‌های متفاوتی که برای این واژه در فارسی به‌کار رفته، انتخاب شده است.

۳. مفهوم ساخت و سازگرایی در ادبیات پژوهشی و دانشگاهی ایران شناخته شده است. مقالات، کتاب‌ها و مطالب متفاوتی به زبان فارسی در این باب منتشر شده‌اند، اما مفهوم ســـاختن‌گرایی کمتر مورد توجه بوده است. اغلب آموزشگران ریاضی یا از آن اطلاع کمی دارند و یا تفاوت آن را با ساخت و سازگرایی به روشنی نمی‌دانند. در طول سال‌های انتشار مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی»، تنها در شـــمارهٔ ۷۵ در ســـال ۱۳۸۳ و در حد یک‌ونیم صفحه به این موضوع پرداخته شده و معرفی مختصری از مفهوم ساختن‌گرایی، با ترجمهٔ آقای مرتضی ایوبیان درج شده است. خوش‌بختانه ایشان نیز از همان معادل‌های به کار رفته در متن‌ها و ترجمهٔ خود استفاده کرده‌اند.

۴. با گسترش حضور رایانه‌ها در مدرسه‌های ایران در دههٔ ۱۳۷۰، بحث‌های زیادی در خصوص محتوای قابل ارائه به دانش‌آموزان مطرح شـــد. در آن سال‌ها عده‌ای زبان برنامه‌نویسی «لوگو» را با توجه به سادگی آن، نقطهٔ شروع مناســـبی برای آموزش زبان‌های برنامه‌نویسی و تفکر الگوریتمی معرفی کردند و تعدادی از مدرسه‌ها نیز آن را در برنامـــهٔ آموزش رایانهٔ خود گنجاندند. اما اغلب معلمان و آموزشگران از وجود نرم‌افزار لوگو که در واقع برای آموزش ریاضی طراحی شده بود، بی‌اطلاع بودند و بعد از مدتی نیز لوگو فراموش شد. در این متن با فلسفه و چگونگی به‌وجود آمدن این نرم‌افزار در آموزش ریاضی آشنا می‌شویم.

۵. با توجه به تغییرات گســـتردهٔ کتاب‌های درسی و تأکید مؤلفان در اســـتفاده از فعالیت‌های آموزشـــی و روش‌هـــای اکتشـــافی کـــه مبتنی بـــر نظریه‌های ساخت‌وسازگرایی هســـتند، عموم معلمان به نوعی با فعالیت‌هایی که به ســـاختن دانش توسط یادگیرنده‌ها کمک می‌کند، آشنا شده‌اند. لذا مطالعه این متن می‌تواند به درک بهتر تفاوت ساخت‌وسازگرایی و ساختن‌گرایی کمک کند و افق تازه‌ای را برای معلمان و دبیران ایجاد نماید.

کلیدواژه‌ها: ســـاختن گرایی، ســـاخت و سازگرایی، علوم یادگیری، آموزش، استفاده از رایانه در آموزش، زبان برنامه‌نویسی لوگو، شبیه‌سازها، بسته‌های دست‌ورزی

نقطهٔ اشتراک پژوهشگران علوم یادگیری در این است که خود را متعهد می‌دانند، از یادگیری انتقالی به سبک انتقال و اکتساب که با روش‌های سخنرانی و آزمون‌های پی‌درپی آمیخته است، بپرهیزند و به سمت روش‌های فعال و مشارکتی حرکت کنند. شاید اولین آموزشگری که پی برد رایانه‌ها چنین فرصتی را برای مدرسه‌ها ایجاد می‌کنند، **سیمور پَپِرت**[4] بود؛ همان شخصی که زبان معروف و شناخته‌شدهٔ برنامه‌نویسی «لوگو»[5] را خلق کرد. پَپرت دو دکترا در ریاضیات دریافت کرد، اما توسعهٔ حرفه‌ای خود را در مطالعات شناختی زیر نظر **ژان پیاژه**[6] بنیانگذار ساخت و سازگرایی ـ یکی از تئوری‌های بنیادین علوم یادگیری امروز ـ گذارند. پَپرت بعد از ترک آزمایشگاه پیاژه در سوئیس، یک کرسی در انیستیو تکنولوژی ماساچوست گرفت؛ جایی که او با همکاری **ماروین مینسکی**[7] آزمایشگاهی در زمینهٔ هوش مصنوعی پایه‌گذاری کرد. در سال ۱۹۷۰، پَپرت گسترش دیدگاه شناختی ساخت و سازگرایی پیاژه را با تبیین اصول پداگوژیک آن آغاز کرد که بعدها این چارچوب تأثیر زیادی بر پژوهشگران علوم یادگیری گذاشت.

ساختن‌گرایی، ساخت و سازگرایی نیست، همان‌طور که نه پیاژه هرگز قصد داشت نظریه‌اش را در بارهٔ دانش به‌عنوان نظریهٔ یادگیری و تدریس مطرح کند و نه یادگیری ساختن‌گرا سادهٔ‌شدهٔ یادگیری اکتشافی است

وقتی در سال ۱۹۸۰ کتاب پَپرت با عنوان «توفان ذهن»[8] منتشر شد، هنوز واژهٔ ساختن‌گرایی درست نشده بود. در این کتاب و آثار پس از آن، او تئوری خود را برای یادگیری، تدریس و طراحی توسعه داد. بسیاری از افراد، ایدهٔ «بچه‌ها، رایانه و ایده‌های قدرتمند» که زیر عنوان کتاب پپرت بود، به‌عنوان نسخهٔ ساده شدهٔ یادگیری اکتشافی پیاژه همراه با زبان برنامه‌نویسی لوگو تعبیر کردند که در واقع این فکر و ایده را درست در نقطهٔ مقابل کاربردش قرار می‌داد. **ساختن‌گرایی، ساخت و سازگرایی نیست، همان‌طور که نه پیاژه هرگز قصد داشت نظریه‌اش را دربارهٔ دانش به‌عنوان نظریهٔ یادگیری و تدریس مطرح کند و نه یادگیری ساختن‌گرا سادهٔ‌شدهٔ یادگیری اکتشافی است**. بنابراین در نقطهٔ مقابل هر نوع «تدریس»[9] (آموزش تجویزی و دستورالعملی) است. در نهایت در ساختن‌گرایی، کاربردها و نه رایانه‌ها به‌عنوان راهبران تغییر در آموزش دیده می‌شوند. دیدگاه‌های یادگیری ساختن‌گرایی پَپرت، به معنی ساختن رابطه‌ها بین دانش قدیم و جدید در تعامل با دیگران، در حالی که مصنوعات مرتبط با جمع را می‌سازند، شکل می‌گیرد. بنابراین هر فصلی دربارهٔ ساختن‌گرایی با روشن کردن سه نظریه آغاز شود: ساخت و سازگرایی، تدریس (آموزش تجویزی و دستورالعملی) و آموزش فناورانه‌محور. قبل از آنکه به واکاوی‌های خاص نظری و پداگوژیک بپردازیم، یادآور می‌شویم که **شباهت‌های نزدیک ساختن‌گرایی و ساخت و سازگرایی پیاژه غالباً باعث بدفهمی می‌شود، در حالی که هنوز تفاوت‌های آشکاری بین این دو وجود دارد**:

ساختن‌گرایی معنای ضمنی ساخت و ساز گرایی را برای یادگیری، به‌عنوان ساختن ساختارهای دانش، بدون توجه به شرایط یادگیری به اشتراک می‌گذارد. سپس این ایده را اضافه می‌کند که این شرایط به‌طور مقتضی در زمینه‌ای که یادگیرنده آگاهانه در گیر ساختن موجودی عام است، اتفاق می‌افتد که می‌تواند برای مثال یک قلعهٔ شنی در ساحل دریا و یا یک نظریه دربارهٔ جهان باشد [پَپرت، ۱۹۹۱:۱]

ساختن‌گرایی همیشه وفاداری‌اش را به تئوری پیاژه تصدیق می‌کند، اما قطعاً با آن یکسان نیست. در حالی که ساخت و سازگرایی در زمینهٔ توسعهٔ فردی و ساختارهای مجزای دانش برتری دارد، ساختن‌گرایی بر رابطه‌های طبیعی و معمول دانش‌ها با ابعاد شخصی و اجتماعی تمرکز دارد. این ترکیب جنبه‌های فردی و اجتماعی در یادگیری، در قلب بسیاری از مباحث علوم یادگیری قرار دارد. تقابل ساختن‌گرایی و آموزش‌های مستقیم و دستورالعملی، غالباً یادگیری ساختن‌گرا را با یادگیری اکتشافی از نظر یادگیری بدون برنامهٔ درسی که در آن، بچه‌ها اصول و ایده‌های خودشان را کشف می‌کنند، هم‌سو می‌کند. یک وجه مشترک دیگر با ساخت و سازگرایی این ایده است که هر تدریس انتقالی و دستورالعملی برای آموزش بد است. یک مطلب خواندنی به روزتر از نوشته‌های اصیل پَپرت این نظر را بیشتر آشکار می‌کند:

اما تدریس بدون برنامهٔ درسی معنایش بدون اراده بودن و بدون شکل بودن کلاس یا به‌طور ساده‌تر، **تنها رها کردن بچه‌ها** نیست؛ معنایش حمایت کردن از بچه‌هاست، به‌طوری که آن‌ها ساختارهای هوشمندانهٔ خودشان را با مواد در اختیارشان براساس فرهنگ پیرامونی خود بسازند. در این مدل، مداخله‌های آموزشی به معنی تغییر فرهنگ‌ها، طرح‌ریزی عناصر ساختنی جدید در آن و همچنین زدودن سم‌ها است [پَپرت، ۱۹۹۳-۱۹۸۰: ۳۱]

ساختن‌گرایی، آن بخش از دیدگاه تدریس و آموزش را که بیشتر شناخته‌شده‌اند، به خوبی تبیین می‌کند. یادگیری و تدریس در تعامل بین معلم و شاگردان زمانی ساخته می‌شود که آن‌ها درگیر طراحی، یادگیری و بحث دربارهٔ دست‌سازه‌ها می‌شوند. علاوه بر آن، چنین تعامل‌های یادگیری تنها به مدرسه‌ها محدود نیستند، بلکه به گروه‌های کوچک یادگیری و خانواده‌ها بسط و توسعه داده می‌شوند. نحوهٔ طراحی کردن محیط‌های یادگیری که تسهیل کنندهٔ هم‌افزایی و اشتراک ایده‌ها باشد، نقطهٔ تمرکز بسیاری از تلاش‌ها در علوم یادگیری است.

پَپرت در نوشته‌های خود اشاره می‌کند که روزی در دانشگاه از کنار کلاس هنر عبور می‌کرد و شاهد بود که چطور دانشجویان

بــا برش زدن به یک قالب صابون ســعی می‌کردنــد، فرم‌ها و شکل‌های متفاوت بسازند. او از آن لحظه فکر می‌کرد که چطور می‌شود در درس ریاضی نیز چنین محیطی را فراهم کرد. ایدهٔ توسعهٔ نرم‌افزار لوگو از آنجا آغاز شد.

زبان برنامه‌نویس لوگو همیشه همراه و در کنار ساختن‌گرایی بوده اســت. این موضوع بسیاری را به این باور که ساختن‌گرایی فناوری را به‌عنوان نیروی پیشران برای نحوهٔ آموزش و یادگیری می‌بینند، رهنمون ساخته است. هنوز همان‌طور که پَپرت استدلال می‌کند، این نوع از تفکر فناورانه‌محور مهم‌تر و شایسته‌تری به‌نظر می‌رسد، از اینکه فناوری را عامل تغییر آموزش بدانیم:

آیا می‌توان با چوب خانه‌های خوب ساخت؟ اگر من خانه‌ای با چوب بسازم و خراب شود، آیا نشان‌دهندهٔ این است که با چوب نمی‌توان خانه‌های خوبی ســاخت؟ آیا چکش‌ها و اره‌ها مبلمان خوب می‌سازند؟ این سؤال‌ها خودشــان را به‌عنوان سؤال‌های فناورانه‌محور بــا انکار نقش افراد و عناصر زیر ســؤال می‌برند. مهارت‌ها، طراحی و زیبایی‌شناسی صرفاً ساختهٔ دست افراد است [پَپرت ۱۹۸۷: ۲۴].

ســاختن‌گرایی ما را به چالش می‌کشــد تــا در افکارمان درخصوص یادگیری و تدریس تجدیدنظر کنیم. برنامه‌نویسی با لوگو بستری را برای آزمایش کردن فراهم می‌کند تا دانش‌آموزان را درگیر حل مســئله و یادگیری چگونه یاد گرفتن کند. علاوه بر آن، برنامه نویســی با لوگو راه‌های متفاوت یادگیری مفهومی ریاضیات و علوم با اســتفاده از رایانه را نشان می‌دهد. بسیاری از ایــن چالش‌ها در یادگیری و تدریس در رابطه با علوم یادگیری ادامه خواهند داشت، خواه درگیر استفاده از رایانه باشند یا نباشند.

پَپرت در دست‌نوشته‌هایش به خاطرات خود از زمان کودکی اشاره می‌کند که چطور با استفاده از اتصال چرخ‌دنده‌های کوچک به یکدیگر، قوانین مهم فیزیکی را تجربه کرده اســت. او امیدوار اســت دستورزی با رایانه چنین محیطی را برای کشف و درک بهتر مفاهیم ریاضی فراهم کند.

هدف مقالهٔ حاضر این اســت که دیدگاه‌های ساختن‌گراها را با وضوح بیشــتری توضیح دهد تا ماهیت دانستن، تدریس و یادگیری تبیین شود. در ادامه ریشه‌های تاریخی ساختن‌گرایی و اســتفاده از لوگو به‌عنوان مثال بیان شده است و بحث با ایدهٔ کلیدی ساختن‌گراها دربارهٔ ساختن دانش، فرهنگ‌های یادگیری و کاربردهای ســاختن دانش، به ســمت طراحی با محیط‌های شبیه‌سازی و بســته های دست‌سازه سوق می‌یابد. سپس یک مطالعهٔ مــوردی از یادگیری با نرم‌افزار و طراحی فعالیت‌ها ارائه شــده است تا کاربســت ایده‌های مرکزی ساختن‌گراها با مثال روشن و واضح شود. در قسمت نتیجه‌گیری، نظریات ماندگار و چالش‌ها در خصوص ســاختن‌گرایی و در حوزهٔ علوم یادگیری مورد بحث قرار می‌گیرد.

ریشه‌های تاریخی

در تمام موارد مرتبط با ساختن‌گرایی، زبان برنامه‌نویسی لوگو، به علت در برداشتن نظراتی که باعث تغذیه کردن مباحث مربوط به استفاده از رایانه در مدرســه‌ها در اوایل دههٔ ۱۹۸۰ می‌شد، «موضوعی مهیج»[۱۰] ـ عبارتی که به نام **شری ترکل**[۱۱] ثبت شده اســت ـ به شمار می‌رفت و حضوری پررنگ داشت. در آن زمان رایانه‌ها آمادهٔ خروج از آزمایشگاه‌های دانشگاه‌ها و حضور در دنیا بودند، اما کار با رایانه به‌عنوان حیطهٔ اختصاصی بزرگ‌سالان دیده می‌شد. لوگو اولین زبان برنامه‌نویسی نبود که بچه‌ها از آن استفاده می‌کردند. «بیسیک»[۱۲] در بسیاری از مدرسه‌ها برجسته بود و در واقع بحث‌های قابل‌توجهی در مورد اینکه چه زبان برنامه‌نویسی برای مدرســه‌ها مناسب‌تر است، مطرح بودند. اما در مقابل زبان بیسیک، یادگیری با لوگو متعهد بود که چیزی فراتر از یادگرفتن یک زبان برنامه‌نویســی ارائه کند که شامل یادگیری نحوهٔ فکر کردن خود فرد و یادگرفتن ریاضی و علوم از مســیری مفهومی و جدید باشــد. همین خصوصیات مکمل و اضافه‌شده، لوگو را بی‌شباهت با هر زبان دیگر برنامه‌نویسی ساخت.

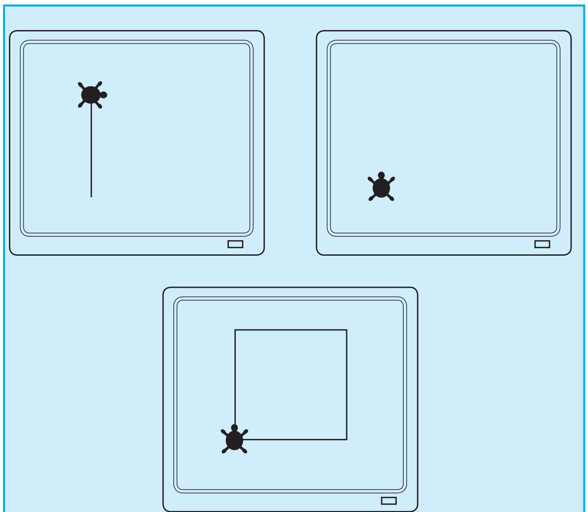
در حالی که ساخت و سازگرایی در زمینهٔ توسعهٔ فردی و ســاختارهای مجزای دانش برتری دارد، ســاختن‌گرایی بر رابطه‌های طبیعی و معمول دانش‌ها با ابعاد شخصی و اجتماعی تمرکز دارد

نرم‌افزار لوگــو را به‌راحتــی می‌توانید از طریــق اینترنت دانلــود کنیــد. البتــه توجــه داشــته باشــید کــه در حال حاضر نســخه‌های بســیار زیادی از ایــن نرم‌افــزار (حتی با نام‌هــای مختلــف) وجــود دارد. توصیه می‌کنم برای شــروع MSW LOGO را که نسخهٔ مقدماتی و سادهٔ آن است، انتخاب کنید. پس از نصب و اجرای نرم‌افزار دو بخش اصلی مشــاهده می‌کنید: یک صفحهٔ نمایش که در وسط آن یک لاک‌پشتی قرار دارد (در نسخه‌های ساده به‌جای لاک‌پشت یک مثلث می‌بینید) و یک قســمت برای نوشتن دستورات. دســتورها و فرمان‌های اجرایی به زبان انگلیســی‌اند و اغلب به صورت مخفف هستند. برای مثال «FD100» یعنی به انــدازه ۱۰۰ واحد برو جلو. FD مخفــف کلمهٔ Forward اســت. در ادامهٔ مطلب با کاربرد چند دستور آشنا می شوید.

اولین ویژگی ذکرشــده دربارهٔ لوگو این اســت که چگونه یادگیرنده با لوگو تعامل می‌کرد. بچه ها دستوراتی را می‌نوشتند تا یک شیء گرافیکی ـ که لاک‌پشت نامیده می‌شد ـ را در صفحهٔ نمایش حرکت دهند؛ بیشتر از آنکه با آرایه‌های عددی یا نمادها دستورزی و پردازش کنند. (شکل ۱، سمت راست را ببینید). برنامه‌نویسی رایانه‌ای هم‌معنی با برنامه دادن به لاک‌پشت بود. یک برنامه‌نویس فرمان‌ها و دستوراتی به لاک‌پشت می‌دهد؛ مثل

لاک‌پشت لوگو، به‌عنوان اولین نمایندۀ ریاضیات رسمی، به بچه‌ها کمک می‌کرد و آن‌ها را قادر می‌ساخت با مجسم کردن بدن خود بتوانند چگونگی حرکت لاک‌پشت روی صفحۀ نمایش را تصور کنند

«۱۰ قدم جلو برو» و سپس «۹۰ درجه به راست بچرخ» که در زبان برنامه‌نویسی لوگو با عبارت‌های «FORWARD۱۰» و «RIGHT۹۰» نوشته می‌شود. (شکل ۱، سمت چپ را ببینید). در نتیجه لاک‌پشت روی صفحۀ نمایش حرکت و بنابراین بازخوردهای تصویری روی آن فراهم می‌کرد؛ چه برنامۀ نوشته‌شده درست بود یا نبود. به‌علاوه، لاک‌پشت قلمی با خود حمل می‌کرد که می‌توانست رسم کند و اثری از قدم‌هایش روی صفحه باقی بگذارد. دستورهای: «قلم را روی صفحه بگذار[۱۳]»، «۱۰ قدم جلو برو» و «۹۰ درجه به راست بچرخ»، در صورتی که چهار بار تکرار می‌شدند، به رسم یک مربع روی صفحۀ رایانه منجر می‌گردیدند. (شکل ۱، قسمت وسط را ببینید).



شکل ۱ـ تصویر سمت راست یک لاک‌پشت را در موقعیت شروع که آمادۀ دریافت فرمان‌هاست نشان می‌دهد. در تصویر سمت چپ، لاک‌پشت فرمان‌های «قلم را روی صفحه بگذار»، «۱۰ قدم جلو برو» و «۹۰ درجه به راست بچرخ» را اجرا کرده است. تصویر قسمت وسط، رسم‌شدۀ یک مربع را با ۴ بار تکرار دستورات یا REPEAT4 [FORWARD 100, RIGHT90]، نشان می‌دهد.

دومین ویژگی قابل توجه این است که لاک‌پشت لوگو، به‌عنوان اولین نمایندۀ ریاضیات رسمی، به بچه‌ها کمک می‌کرد و آن‌ها را قادر می‌ساخت با مجسم کردن بدن خود بتوانند چگونگی حرکت لاک‌پشت روی صفحۀ نمایش را تصور کنند. به دستورها و فرمان‌های زیر توجه کنید که چگونه لاک‌پشت یک قدم به جلو حرکت می‌کند، یک درجه به راست می‌چرخد، و سپس ۳۶۰ مرتبه این دستورات را تکرار می‌کند:

REPEAT 360 [FORWARD 1, RIGHT 1]. با گذاشتن قلم روی صفحه، این دستورها یک دایره روی صفحۀ نمایش رسم می‌کند. پِپرت این ویژگی را «یادگیری همانندساز[۱۴]» نامید و بسیار مهم توصیف کرد، چون به بچه‌ها اجازه می‌داد با اشیای رایانه‌ای به روش‌های متفاوت فرا گیرند:

برای مثال، دایرۀ لاک‌پشتی، همانندسازی‌شدۀ حرکت بدن است چرا که این دایره ارتباط زیادی با حس و فهم بچه‌ها از چگونگی حرکت قدم‌های خودشان دارد. یا اینکه نوعی همانندسازی با خود است که ارتباط معناداری با حس بچه‌ها از خودشان دارد؛ به عنوان کسانی که اراده، هدف، مطلوبیت، دوست داشتن و نداشتن و ... دارند. هر کس می‌تواند این موضوع را به‌عنوان فرهنگ همانندسازی ببیند که وقتی یک دایره رسم می‌شود، لاک‌پشت با ایده‌هایی از زاویه و ایدۀ راندن و حرکت دادن مرتبط می‌شود که به‌طور عمیقی ریشه در تجربه‌های بچه‌ها از کارهای فوق‌برنامه‌ای ایشان دارد. [۱۹۸۰/۱۹۹۳، ص ۶۸ - ۶۳]

لاک‌پشت لوگو به بچه‌ها اجازه می‌داد تا با اشیای روی صفحۀ نمایش دست‌ورزی کنند، همان‌طور که می‌توانستند در دنیای فیزیکی با آن‌ها دست‌ورزی کنند. بنابراین، هندسۀ لاک‌پشتی یک ورودی ملموس به دنیای رسمی ریاضیات فراهم می‌کرد و به یادگیرنده‌ها اجازه می‌داد که تجربیات شخصی خود را با مفاهیم و عملیات ریاضی مرتبط کنند.

ویژگی ذکرشده در بالا یکی از اساسی‌ترین نکات در تئوری ساختن‌گرایی است. همۀ ما معتقدیم اگر بتوانیم مفهومی را به شخص دیگری آموزش دهیم، به این معناست که آن موضوع را خودمان خوب درک کرده و فهمیده‌ایم. کاربر لوگو در واقع باید به لاک‌پشت آموزش دهد. این کار زمانی محقق می‌شود که کاربر خود را جای لاک‌پشت تصور کند. برای انجام یک حرکت، مسیر را با بدن خود طی کند و انجام دهد، سپس آن را با نوشتن دستورات به لاک‌پشت فرمان دهد. برای مثال اگر قرار است در صفحه با حرکت لاک‌پشت یک دایره ایجاد شود، او باید با حرکت دادن بدن خود روی یک مسیر دایره‌ای چگونگی حرکت را تصور نماید و سپس با نوشتن دستورهای مورد نظر، آن حرکت را برای لاک‌پشت شبیه‌سازی کند. در واقع اگر بخواهیم روی یک مسیر دایره‌ای حرکت کنیم، ابتدا یک قدم بسیار کوچک برمی‌داریم. سپس با یک زاویۀ بسیار کوچک می‌چرخیم و دوباره آن را تکرار می‌کنیم. ترجمۀ این حرکت بدن در زبان لوگو می‌شود (۱ واحد برو جلو، ۱ درجه بچرخ) و این کار را آن قدر ادامه بده تا دایره رسم شود.

سومین ویژگی مهم برنامه‌نویسی لوگو این ایده بود که بچه‌ها دربارۀ چگونه فکر کردن و یادگیری خود، یاد می‌گرفتند، که بازتاب یا «فراساخت» نامیده می‌شد. پِپرت مدعی شد که در یادگیری برنامه‌نویسی، بچه‌ها یاد می‌گیرند که دستورات و

فرمان‌ها را بازگو کنند، تکرارها را تشخیص دهند و فکرهای خود را وقتی که برنامه‌ها مطابق انتظارشان کار نمی‌کنند، غلط‌گیری و تصحیح کنند. «اما فکر کردن دربارهٔ یادگیری با قیاس کردن برنامهٔ نوشته‌شده و خروجی آن، یک راه قدرتمند و قابل دسترس برای شروع تبدیل شدن به بازتاب کنندهٔ راهبردهای تصحیح و غور کردن بیشتر برای بهبود و ارتقای تفکر خود است» (۱۹۸۰/۱۹۹۳، ص ۲۳). برنامه‌نویسی با رایانه می‌تواند به «موضوعی برای تفکر با» تبدیل شود که به بچه‌ها کمک کند تا بر عملکرد خود از طریق راه‌های مشابه تجربه‌های یادگیرنده‌ها بازتاب داشته باشند.

بنابراین لوگو هدف‌های چندگانه‌ای را ترکیب کرد: یاد گرفتن برنامه‌نویسی، یادگیری ریاضیات، و یادگیری چگونه یاد گرفتن. این ادعاها بدون معارض نبودند. خیلی‌ها دربارهٔ موفقیت‌ها و

زبان برنامه‌نویس لوگو همیشه همراه و در کنار ساخت‌گرایی بوده است. این موضوع بسیاری را به این باور که ساخت‌گرایی فناوری را به‌عنوان نیروی پیشران برای نحوهٔ آموزش و یادگیری می‌بینند، رهنمون ساخته است

شکست‌های استفاده از لوگو در مدرسه مطالبی نوشته‌اند که پشتوانهٔ ارزشمندی برای گفت‌وگو در این زمینه فراهم کرده است. در تحلیلی فوق‌العاده که از زمینه‌های تاریخی این موضوع در آمریکا و اروپا انجام شده است، **ریچارد ناس**[15] و **سلیا هویلز**[16] (۱۹۹۶) چند مورد مهم‌تر از تأثیرات قوی فرهنگی لوگو را در بازی تشخیص دادند که به منتقدان اجازه می‌داد سؤال‌هایی مشخصاً در مورد لوگو و نه سایر برنامه‌ها مطرح کنند. در بسیاری از مدرسه‌ها، سؤال‌هایی در مورد سودمندی یادگیری با لوگو به‌طور خاص بر انتقال مهارت‌های حل مسئله متمرکز شده بودند و کمتر به فایده‌های یادگیری ریاضیات و ایده‌های اصلاحی و بهبود توجه داشتند. تعداد کمتری از مطالعات، از جمله مطالعات **روی پی**[17] و **میدین کورلاند**[18] (۱۹۸۴)، به نتایجی مثل یادگیری برنامه‌نویسی با لوگو محصول خاصی تولید نمی‌کند و تأثیرگذار نیست، رسیدند.

این مطالعات چندین مسئله درخصوص روش پژوهش داشتند. برای مثال، طول زمانی را که برای یادگیری برنامه‌نویسی صرف شده و نوع برنامه‌هایی که ساخته شده‌اند را درنظر نگرفته‌اند. این ویژگی‌ها در حال حاضر به‌عنوان خصوصیات ابزاری در طراحی آموزش‌های موفق برنامه‌نویسی [پالومبو[19]، ۱۹۹۰] شناخته شده‌اند که به این موضوع بعداً در بخشی که به طراحی نرم‌افزار برای یادگیری اختصاص داده شده است، با جزئیات خواهم پرداخت. مسئلهٔ دیگر این بوده است که معلمان غالباً خود را با لوگو تطبیق داده‌اند، اما به نوآوری‌های پداگوژیکی برای یادگیری ریاضی و علوم دست نزده و حتی اگر نوآوری داشته‌اند، حمایت‌های آموزشگاهی گسترده‌ای در مدارسشان برای انجام چنان کارهایی دریافت نکرده‌اند [پَپِرت، ۱۹۹۱ و ۱۹۹۷]. بیشتر نیروهای آموزشگاهی برای شکل دادن استفاده از لوگو در مدرسه به کار گرفته شده‌اند و نتیجه غالباً این بوده که ایده‌های ساختن‌گراها در مورد یادگیری و تدریس آخرین چیزی بوده که مورد توجه قرار گرفته است.

ایده‌های کلیدی در ساختن‌گرایی

نام ساختن‌گرایی استعاره‌ای از یادگیری را در ذهن متبادر می‌کند که در آن هرکس دانش خودش را می‌سازد و غالباً با آموزش‌های سنتی و دستورالعملی مقایسه می‌شود که استعاره‌ای از یادگیری با انتقال دانش را یادآوری می‌کند. اگرچه این دو استعاره مقایسه‌ای خلاصه‌وار از دو نوع یادگیری ارائه می‌دهند، اما این مقایسه وقتی ارزشمند می‌شود که ایده‌های ساختن‌گراها از ساختن دانش کاملاً تشریح شود و ویژگی‌های آن، چه در مورد افراد و چه در مورد گروه‌های پویا به دقت بررسی شوند. پس ما به سمت تفکرات این فرهنگ یادگیری حرکت و مشخص می‌کنیم که کدام ویژگی‌ها از این محیط یادگیری مشوق ساختن موفق دانش است.

ساختن دانش

این ایده که هرکس دانش خودش را می‌سازد، قطعاً از تئوری توسعهٔ دانش **پیاژه** و بینش ابزاری او که بچه‌ها دنیا را اساساً از راه‌های متفاوتی نسبت به بزرگ‌سالان می‌فهمند، استخراج شده است. او دو سازوکار تشخیص داد: جذب[20] و انطباق[21] که چگونگی حس بچه‌ها از دنیا را وقتی که با آن تعامل می‌کنند و تجربیات خود را با فهمشان در می‌آمیزند، توضیح می‌دهد. ساختن‌گرایی براساس این دو سازوکار ساخته می‌شود و بر فرایندی که به یادگیرنده‌ها کمک می‌کند تا بین آنچه قبلاً یاد گرفته‌اند ارتباط برقرار کنند، تمرکز و تأکید می‌کند. یک وجه کلیدی در ساختن دانش این است که چگونه یادگیرنده‌ها دانش خودشان را می‌سازند و با آن شروع به تشخیص و درک و فهم می‌کنند. این ویژگی اختصاصی از هوشمندی نشئت می‌گیرد و شامل ارزش‌های اساسی است.

با توجه به نظرات پَپِرت، اشیای فیزیکی در فرایند ساختن دانش نقش‌محوری و مرکزی دارند. او عبارت «اشیایی برای تفکر با» را به‌عنوان روشن‌کننده این موضوع ثبت کرد که چگونه اشیا در دنیای فیزیکی و دیجیتالی (مثل برنامه‌ها، روبات‌ها و بازی‌ها) می‌توانند اشیائی ذهنی شوند که کمک می‌کنند مفاهیم ساخته شوند، آزمایش گردند و ارتباط‌های بین دانش‌های قدیم و جدید را بازسازی و درباره آن تجدید نظر کنند. «اشیایی برای تفکر با»[22]، از قبیل لاک‌پشت لوگو به‌طور خاص در حمایت از این

ویژگی اختصاصی تأثیرگذار هستند، چون آن‌ها توانایی بازشناخت بچه‌ها و یادگیری سازگار با محیط را آسان می‌کنند.

ساختن‌گرایی بیشتر از مدل پیاژه در خصوص برابری ارزش ملموس‌ها و انتزاع بین آن‌ها تفاوت قائل می‌شود. در مراحل نظریه [رشد شناختی] پیاژه، انتزاع رسمی به‌عنوان هدف غایی ساختن دانش دیده می‌شود، تفکر ملموس همیشه برای کوچک‌ترها در مقایسه با بچه‌های بزرگ‌تر در نظر گرفته می‌شود. **ترکل**[23] و پِپرت (۱۹۹۰) در عوض مدعی شدند که تفکر ملموس می‌تواند حتی برتر از تفکر انتزاعی لحاظ شود. علوم به طور عمومی و فرهنگ رایانه به‌طور خاص، قصد داشته‌اند که تفکر انتزاعی را ارزشمند جلوه دهند. اما در مطالعهٔ برنامه‌نویس‌ها، ترکل و پِپرت کشف کردند که ترغیب کردن رسمی و از بالا به پایین رویکردهای برنامه‌ریزی همیشه به بداهه‌پردازی‌های عالی منجر نمی‌شود و بیشتر به نگرش‌های غافلگیرانه و ناگهانی شبیه است. در سبک‌های غافلگیرانه مراحل مشخص و غیرقابل تغییر به سمت صورت‌های عالی از ساختن دانش نیستند اما به راه‌هایی کیفی متفاوت از روش‌های سازمان‌دهی، طرح‌ریزی یا حل مسئلهٔ فردی شبیه هستند.

به‌طور خلاصه، ساختن دانش عبارت است از: «کنکاش کردن در بخشی از یادگیری که شامل ساختن ارتباط‌هایی بین موجودات ذهنی که از قبل موجود بودند، با موجودات ذهنی جدیدی است که به نظر می‌رسد با دقت بیشتری به وجود آمده‌اند و از کنترل پیوستهٔ آگاهی فرار کرده‌اند ... این موضوع یک راهبرد پیشنهاد می‌کند: یادگیری با ارتقا در محیط‌های یادگیری و همچنین به وسیلهٔ عمل کردن فرهنگ‌ها (بیشتر از افراد) تسهیل می‌شود» (پِپرت، ۱۹۹۳: ۱۰۵)

در ادامه نویسنده به تشریح ویژگی دیگر نظریه ساختن‌گرایی با عنوان «فرهنگ یادگیری» می‌پردازد. با ذکر مثال‌های متفاوت از جمع‌های بزرگسالان و دانش‌آموزان که هر یک پروژه‌ها و دغدغه‌های خود را در یادگیری دنبال می‌کنند و در واقع برنامه درسی مشخصی وجود ندارد، به این نکته اشاره دارد که این نوع نگاه به یادگیری به همراه خود فرهنگی را تولید می‌کند که متفاوت از فرهنگ معمول و متداول مدرسه و کلاس‌های سنتی است. این مثال‌ها ما را به تدریج به سمت استفاده از رایانه در این نوع فرهنگ یادگیری پیش می‌برد تا زمینه برای طرح موضوع دیگری که به‌طور گسترده به این تئوری مربوط می‌شود، فراهم شود.

در واقع برای محقق شدن ایدهٔ ساختن‌گرایی به محیطی (مجازی یا فیزیکی) نیاز است که امکان ساختن را برای یادگیرنده فراهم کند. در اینجا دو مفهوم مطرح می‌شود:

۱. محیط‌های شبیه‌سازی دیجیتالی که در ادبیات پژوهشی مرتبط با ساختن‌گرایی از آن با عنوان «دنیاهای کوچک»[24] یاد می‌شود.

ویژگی مهم برنامه‌نویسی لوگو این ایده بود که بچه‌ها دربارهٔ چگونه فکر کردن و یادگیری خود، یاد می‌گرفتند، که بازتاب یا «فراشناخت» نامیده می‌شد

۲. بسته‌های دست‌ساز که شامل قطعات فیزیکی‌اند و شرایط را برای دست ورزی یادگیرنده فراهم می‌کنند. (کیت‌های ساختن[25]).

اصطلاح دنیای کوچک به یک محیط تعاملی رایانه‌محور برای یادگیری اشاره دارد که پیش‌نیازهای موردنظر برای ساختن در آن محیط رایانه فراهم است و جایی است که یادگیرنده فعال می‌شود و چگونگی یادگیری خود را می‌سازد. همچنین یکی از بسته‌های دست‌ساز معروف و شناخته‌شده «لگو»[26] نام دارد که شامل قطعات مستطیل‌شکل (آجرها) موتورها، حسگرها و پردازشگر است. با نوشتن برنامه روی پردازشگر، این امکان فراهم می‌شود که ترکیبی از ساختن فیزیکی و دیجیتالی فراهم شود.

با توجه به موارد فوق، یکی از مهم‌ترین مباحث پژوهشی مرتبط با ساختن‌گرایی، طراحی فعالیت‌ها و تأثیر آن بر یادگیری است. در پایان این مطلب یادآور می‌شوم که با محوریت نظریه ساختن‌گرایی و محیط‌های شبیه‌سازی مثل لوگو و سایر محیط‌های رایانه‌ای، هزاران پژوهش انجام شده‌اند و هنوز ادامه دارند. شایان ذکر است که این موضوع و شاخهٔ کلی‌تر آن (استفاده از ابزارهای دیجیتالی در آموزش ریاضی) هنوز جای خود را در فضای دانشگاهی و تخصصی رشته آموزش ریاضی باز نکرده‌اند، در حالی که تعداد مقالات و پژوهش‌ها در این زمینه در خارج از ایران روز به روز رو به افزایش است. امید دارم این مطلب فتح بابی باشد برای تحقیقات بیشتر در این حوزه آموزشی و شاهد کاربست‌های آن در مدرسه‌ها و آموزش‌های رسمی باشیم.

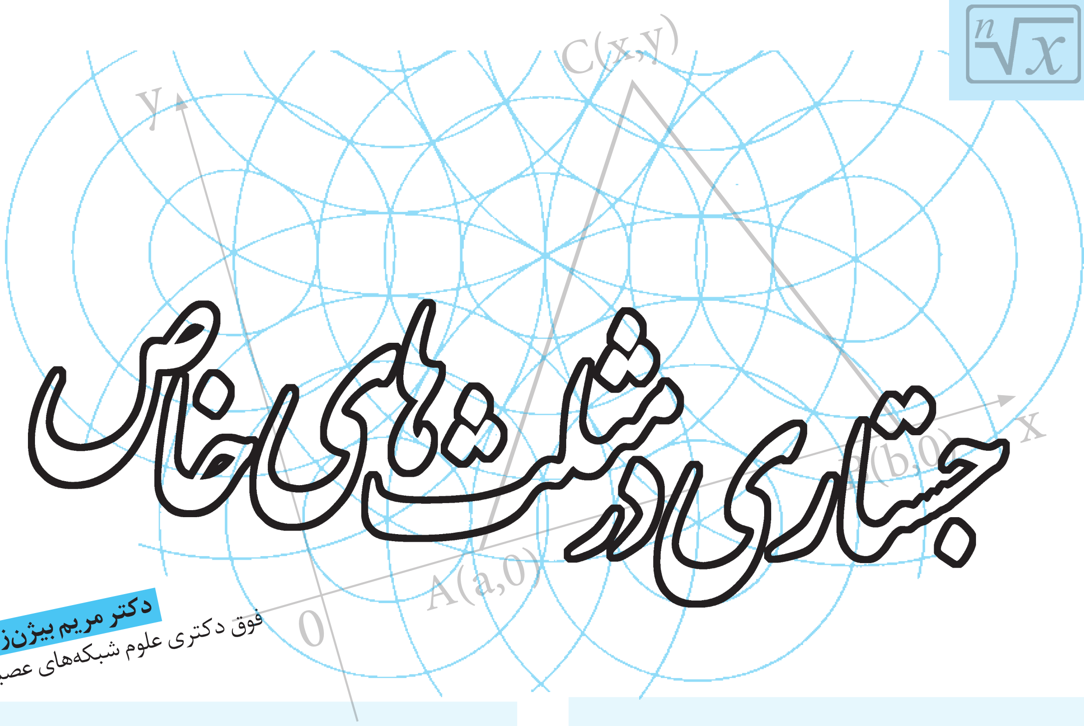
پی‌نوشت‌ها

1.Yasmin B. Kafai
2. The Cambridge Handbook of The Learning Sciences
3. R. Keith Sawyer
4. Seymour Papert
5. Logo
6. Jean Piaget
7. Marvin Minsky
8. Mind storm
9. Instruction
10. evocative object
11. Sherry Turkle
12. Basic
13. PEN DOWN
14. Syntonic
15. Richard Noss
16.Celia Hoyles

17. Roy Pea
18. Midian Kurland
19. Palumbo
20. assimilation
21. accommodation
22. object-to-think-with
23. Turkle
24. microworlds
25. construction kits
26. Lego

منابع

1. Ching, C. C. (2000). *Apprenticeship, Learning and technology: Children as oldtimers and newcomers in the culture of learning through design*. Unpublished doctoral dissertation. University of California, LosAngeles.
2. Disessa, A. (2000). *Changing minds: Computers, Learning and Literacy.* Cambridge, MA: MIT Press.
3. Edwards, L. (1998). Embodying mathematics and science: Microworlds as representations. *Journal of Mathematical Behavior*. 17(1).
4. Eisenberg, M. (2003). Mindstuff: Educational technology beyond the computer: *Convergence*, 4.
5. Furth, H. G. (1987). *Knowledge as desire: An essay on Freud and Piaget*. NewYork: Columbia University Press.
6. Harel. I. (1990). *Children designers.* Norwood, NJ: Ablex.
7. Harel, I., & Papert, S. (1991). Software design as a learning environment. *Interactive Learning Environments*, 1(1).
8. Kafai, Y. B. (1995). *Minds in play: Computer game design as a context for children's learning.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associaties.
9. Kafai, Y. B. (1996). Gender differences in children's constructions of video games. In Patricia M. Greenfield & Rodney R. Cocking (Eds.), *Interacting with video* (pp. 39-66). Norwood, NJ: Ablex publishing Corporation.
10. Kafai, Y. B., & Ching, C. C. (2001). Affordances of collaborative software design planning for elementary students' science talk. *The Journal of the Learning Sciences*, 10(3).
11. Kafai, Y. B., Franke, M., Ching, C., & Shih, J. (1998). Games as interactive learning environments fostering teachers' and students' mathematical thinking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(2).
12. Kafai, Y. B., Resnick, M. (1996). *Constructionism in practice*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
13. Kafai, Y. B., & Roberts, M. (2002). On becoming junior software designers. In R. Stevens & P. Bell (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference on the Learning Sciences* (pp.191-198). Mahwah. NJ: Erlbaum.
14. Keller, E. F. (1983). *A feeling for the organism: The life and work of Barbara McClintock.* San Francisco: W.H. Freeman.
15. Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation.* London: Cambridge University Press.
16. Marshall, S. (2000). *Planning in context: A situated view of children's management of science projects.* Unpublished doctoral dissertation. University of California, Los Angeles.
17. Martin, F. (1996). Ideal and real systems: A study of notions of control in undergraduates who design robots. In Y. Kafai & M. Resnick (Eds.), *Constructionism in practice* (pp. 255-268). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
18. Martin, F. (2001). *Robotic Explorations: A Handson introduction to engineering*. NewYork: Prentice Hall.
19. Noss, R., Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers.* Dordrecht: Kuwer Academic Publishers.
20. Palumbo, D. (1990). Programming language/ problem-solving research: A review of relevant Issues. *Review of Educational Research*, 45.
21. Papert, S. (1980/1993). *Mindstorms* (2nd ed.). NewYork: Basic Books.
22. Papert, S. (1987). Computer criticism versus technocentric thinking. *Educational Researcher*, 16(1).
23. Papert, S. (1991). Situating constructionism. In I. Harel & S. Papert (Eds.), *Constructionism* (pp. 1-14). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
24. Papert, S. (1993). *The children's Machine: Rethinking school in the age of the computer*. NewYork: Basic Books.
25. Papert, S. (1997). Tinkering towards utopia: A century of public school reform. *Journal of the Learning Sciences,* 6(4).
26. Pea, R., & Kurland, M. (1984). On the cognitive effects of learning computer programming. *New Ideas in Psychology,* 2(2).
27. Resnick, M. (1991). New paradigms for computing, new paradigms for thinking. In Y. Kafai & M. Resnick (Eds.), *Constructionism in Practice* (pp. 255-268). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
28. Resnick, M. (1994). *Turtles, Termites, and Traffic Jams*. Cambridge, MA: MIT Press.
29. Resnick, M. (1998). Technologies for life long learning. *In Educational Technology, Research Development,* 46(4).
30. Resnick, M., & Ocko, S. (1991). LEGO/Logo: Learning through and about design. In I. Harel & S. Papert (Eds.), *Consructionism* (pp.141-150). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
31. Resnick, M., Rusk, N., & Cooke, S. (1998). The computer clubhouse: Technological fluency in the inner-city. In D. Schon, B. Sanyal, & W. Mitchell (Eds.), *High Technology and Low Income Communities* (pp. 266-286). Cambridge, MA: MIT Press.
32. Resnick, M., & Wilensky, U. (1998). Diving into complexity: Developing probabilistic decentralized thinking through role-playing activities. *Journal of the Learning Sciences,* 7(2).
33. Turkle, S. (1995). *Life on the screen: Identity in the age of the Internet.* NewYork: Simon & Schuster.
34. Turkle, S., & Papert, S. (1990). Epistemological pluralismand the reevaluation of the concrete. *Signs*, 16(1).



جستاری در مثلث‌های خاص

دکتر مریم بیژن‌زاده
فوق دکتری علوم شبکه‌های عصبی

مقدمه

مســـاحت یک مثلث با طول اضلاع صحیح (عدد طبیعی)، در حالت کلی عددی صحیح نیســـت. با این حال، هرگاه طول اضلاع مثلثی برابر ۱۳، ۱۴ و ۱۵ باشد، مساحت آن نیز عددی طبیعی است:

نصف محیط $P=\frac{۱۳+۱۴+۱۵}{۲}=۲۱$

مساحت $\Delta=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۲۱\times ۸\times ۷\times ۶}=۸۴$

اکنون این پرسش مطرح می‌شود: مثلث‌های با طول اضلاع صحیح و مساحت صحیح کدام‌اند؟

ابتدا این رابطه را یادآوری می‌کنیم که هرگاه شـــعاع دایرۀ محیطی مثلث را برابر r فرض کنیم، بین مساحت مثلث، نصف محیط و شعاع رابطه زیر برقرار است:

$\Delta=rP$

فـــرض کنیم طول اضـــلاع یک مثلـــث برابـــر عددهای a، b و c باشد. پارامترهای u و v را چنان فرض می‌کنیم که:

$$(1)\quad a=۳u^۲+۳v^۲\ ,\ \ b=۶u^۲+۲v^۲\ ,\ \ c=۹u^۲+v^۲$$

برای آنکه عددهای صحیح a، b و c را چنان به دست آوریم که وافی به مقصود یعنی Δ صحیح باشـــد، پارامترهای u و v را کاوش می‌کنیم.

آیا Δ عددی صحیح است؟

داریم: $P=۹u^۲+۳v^۲$

$$\Delta=\sqrt{(۹u^۲+۳v^۲)(۶u^۲)(۳u^۲+v^۲)(۲v^۲)}=۶uv(۳u^۲+v^۲)$$

درواقع عبارت‌های (۱) طوری ســـاخته شده‌اند که Δ نیز عبارتی گویا به دست آید. بنابراین، به ازای هر مقدار صحیح u و v، Δ عددی صحیح است. در جدول ۱ برخی از این مثلث‌ها را به ازای مقادیری از پارامترهای u و v به دست آورده‌ایم.

همان‌گونـــه که ملاحظـــه می‌شـــود، با اختیـــار کردن مقادیـــر عـــددی بـــرای پارامترهـــای u و v، تعـــداد زیادی مثلـــث خـــاص کـــه اضـــلاع و مســـاحت صحیـــح دارند، به دســـت می‌آید. این مثلث‌ها به لحاظ شکلی بسیار متنوع هستند

اما نکتۀ مهم این اســـت: آیا جـــدول ۱ همۀ مثلث‌های مطلوب را به دســـت می‌دهد؟ قطعاً چنین نیســـت. زیرا مثلاً مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ابعاد ۶، ۸ و ۱۰ دارای مساحت ۲۴ است، لیکن از عبارت‌های پارامتری (۱) حاصل نمی‌شود.

بنابراین مسئله را چنین بازطرح می‌کنیم: چگونه می‌توانیم *همۀ مثلث‌های با اضلاع و مساحت صحیح* را به دست آوریم؟

به نظر می‌رسد که این مســـئله راه‌حل معمول هندسی نداشته باشد. درواقع آنچه از محتوای مسئله عایدمان می‌شود، مجهولات مســـئله اســـت؛ یعنی مثلث‌هایی خاص. اما هیچ

جدول ۱

u	v	اضلاع	r	Δ
۱	۱	۶, ۸, ۱۰	۲	۲۴
۱	۲	۱۳, ۱۴, ۱۵	۴	۸۴
۲	۱	۱۵, ۲۶, ۳۷	۴	۱۵۶
۳	۱	۱۵, ۲۸, ۴۱	۳	۱۲۶
۱	۴	۲۵, ۳۸, ۵۱	۸	۴۲۶
۳	۲	۳۹, ۶۲, ۸۵	۱۲	۱۰۹۲
۴	۱	۵۱, ۹۸, ۱۴۵	۸	۱۱۷۶
۱	۵	۱۷, ۲۸, ۳۹	۵	۲۱۰
۵	۱	۳۹, ۷۶, ۱۱۳	۵	۵۷۰
۲	۵	۶۱, ۷۴, ۸۷	۲۰	۲۲۲۰
۳	۴	۷۵, ۸۶, ۹۷	۲۴	۳۰۹۶
۴	۳	۷۵, ۱۱۴, ۱۵۳	۲۴	۴۱۰۴
۶	۱	۱۱۱, ۲۱۸, ۳۲۵	۱۲	۳۹۲۴
۱	۷	۲۹, ۳۵, ۷۵	۷	۵۴۶

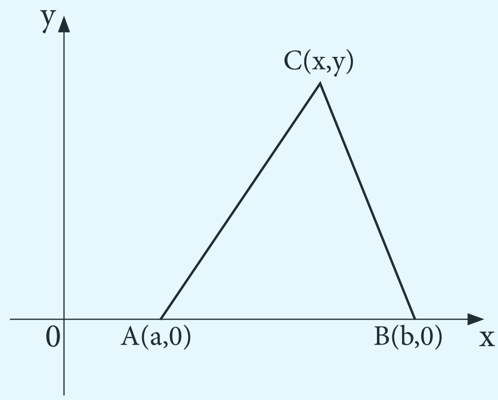
مفروضات مشـــخصی در دست نیســـت! باز هم توسل به جبر می‌تواند کلید راه‌حل مسئله باشد.

خلاصهٔ حل: در صفحهٔ مختصات دکارتی، دو نقطهٔ متناظر با دو رأس مثلث مجهول در نظر می‌گیریم. برای ســـهولت در یافتن مجهولات، مناسب‌تر آن اســـت که این دو نقطه را روی محور طول اختیار کنیم: فرض کنیم $A(a,\text{۰})$ و $B(b,\text{۰})$ دو رأس مثلث مجهول باشند.

A و B را چنان اختیـــار می‌کنیم که طول AB یعنی b-a عددی صحیح و مثبت باشد: b-a=k. اکنون رأس سوم مجهول مســـئله است. رأس سوم، یعنی C(x,y) را چنان فرض می‌کنیم که فاصله‌های $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ و همچنین مســـاحت مثلث ABC عددهایی صحیح باشند.

هر سهٔ این عددها برحسب x و y به‌صورت عبارت‌هایی جبری قابل محاســـبه‌اند. اینک مسئله تبدیل می‌شود به اینکه x و y را چنان انتخاب کنیم که این عبارت‌ها گویا و عددی صحیح باشند. پس مسئلهٔ مفروض هندسی به یک مسئلهٔ جبری تبدیل می‌شود.

بـــا تغییر k به نحوی که $K \in Z$ و $K > \text{۱}$ همهٔ مثلث‌های مطلوب به دســـت می‌آیند. به لحاظ تحلیل بیشتر این مسئله نکات زیر را یادآوری می‌کنیم:



نکته

۱. این مســـئله را از این نظر ارائه کردیم که خوانندگان به ارتباط جبر و هندسه بیشتر پی ببرند. برخی از مسائل تاریخی هندسی، راه‌حل هندسی ندارند و تنها با ابزارهای جبری حل و فصل شده‌اند. **رنه دکارت**، فیلسوف و ریاضی‌دان فرانسوی قرن هفدهم، اولین کســـی بود که مفاهیم هندسه را به زبان جبری بیان کرد و ارتباط معنی‌داری بین این دو رشتهٔ مهم ریاضیات برقرار ساخت.

۲. به لحاظ نظریه‌های آموزش ریاضی، این نکته را یادآوری می‌کنیم که گرچه محتوای مســـئله فاقد مفروض (دیتا) است، لکـــن با اختیار کردن برخی از اجزای مثلث، یعنی رأس‌های A و B و عدد K، درواقع مفروضاتی به مســـئله اضافه شده است تا براســـاس «نظریهٔ پردازش اطلاعات»[1]، با پردازش این اطلاعات در قالب عبارت‌های جبری بتوان به رسم معمول به حل و بحث مسئله نائل شد.

۳. چون مسئله یک مسئلهٔ عددی است، می‌توان براساس مدل صفحهٔ دکارتـــی مذکور نرم‌افـــزاری طراحی کرد که به آســـانی همهٔ مثلث‌های مطلوب را بـــه نمایش بگذارد. لذا این مسئله می‌تواند تمرین مناسبی برای استفاده از فناوری در حل مسائل ریاضی باشد.

پی‌نوشت

1. Information Processing Theory

منابع

۱. جی. پی. میلر (۱۳۹۶). نظریه‌های برنامهٔ درسی. ترجمهٔ دکتر محمود مهرمحمدی. انتشارات سمت. تهران.

2. Assessment in the mathematic sclassroom; Berinderjeat Kaur. Wong Khoon Yoong; World Scientific 2011.

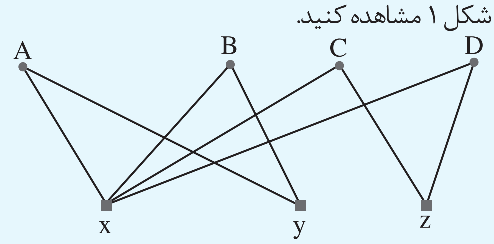
احاطه‌گری (۲)

محمود نصیری
مؤلف کتاب‌های درس ریاضی

اشاره
قسمت اول مقالهٔ احاطه‌گری را در شمارهٔ ۱۳۳ مطالعه نمودید و در این شماره ادامهٔ مطلب را می‌خوانید:

گراف‌های دو بخشی و احاطه‌گری[1]

نوعی از گراف‌ها که کاربردهای متعددی نیز دارند، گراف‌هایی هستند که مجموعهٔ رأس‌های آن به دو مجموعهٔ جدا از هم، قابل تفکیک هستند. فرض کنید رأس‌های x، y و z در یک گراف نشان‌دهندهٔ سه شغل متفاوت و رأس‌های A، B، C و D نشان‌دهندهٔ چهار فرد باشند که هر یک می‌توانند شغل‌هایی را اختیار کنند. مثلاً A و B فقط می‌توانند شغل‌های x و y، و C و D فقط می‌توانند شغل‌های x و z را اختیار کنند. می‌توانید نمایش آن را در شکل ۱ مشاهده کنید.



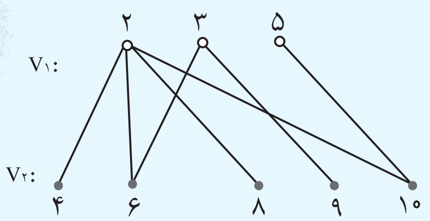
۱

آنچه در این نوع گراف‌ها اهمیت دارد آن است که مجموعهٔ رأس‌های $V_1=\{A,B,C,D\}$ و $V_2=\{x,y,z\}$ مجزا از هم هستند. یعنی هیچ یالی بین مجموعهٔ رأس‌های V_1 و همچنین هیچ یالی بین مجموعه رأس‌های V_2 وجود ندارد. به این معنی که افراد هیچ ارتباطی با هم ندارند و همچنین شغل‌ها نیز ارتباطی با هم ندارند. در اینجا ارتباط بین هر فرد و هر شغل مدنظر است. چنین گراف‌هایی را گراف‌های دو بخشی می‌نامند. بنابراین تعریف زیر را داریم:

تعریف: یک گراف G حداقل از مرتبهٔ ۲ را یک گراف دوبخشی می‌نامند، هرگاه V(G) مجموعهٔ رأس‌های آن را بتوان به دو زیرمجموعهٔ غیرتهی و مجزای V_1 و V_2 افراز کرد؛ به‌طوری که هر یک از یال‌های G رأسی از V_1 را به رأسی از V_2 وصل کند.

V_1 و V_2 مجموعه‌های دوتایی (V_1, V_2) یا دو بخشی نامیده می‌شوند. ساده‌ترین گراف دوبخشی گراف $K_{1,1}$ یا همان K_2 است.

فرض کنیم: $V_1=\{2,3,5\}$ و $V_2=\{4,6,8,9,10\}$، اگر G گرافی باشد که:



۲

$V(G)=V_1 \cup V_2$

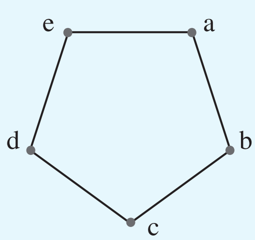
و

$E(G)=\{v_1v_2 | v_1\in V_1$ و $v_2\in V_2$ و v_1 بر v_2 بخش باشد$\}$

آیا G گراف دو بخشی است؟ آن را رسم کنید.

اکنون یک پرسش مهم مطرح است. آیا می‌توان هر گرافی را به یک گراف دو بخشی تبدیل کرد؟

گراف C_5 را درنظر می‌گیریم. آیا می‌توانید آن را به یک گراف دوبخشی تبدیل کنید.



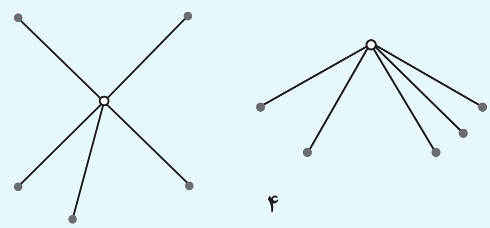
۳

مسلماً پاسخ منفی است. زیرا اگر: $a\in V_1$، آن‌گاه باید: $b,e\in V_2$ و سپس باید: $c,d\in V_1$. اما این امکان ندارد، زیرا بین c و d یالی وجود دارد. یا می‌توانیم به‌طور دوری در یک جهت حرکت کنیم: اگر $a\in V_1$، آن‌گاه باید: $b\in V_2$، سپس: $c\in V_1$ و: $d\in V_2$ و بالاخره باید $e\in V_1$ باشد. اما a و e_1 هر دو متعلق به V_1 می‌شوند که امکان ندارد. زیرا یالی بین آن دو وجود دارد. به‌طور کلی قضیهٔ زیر به سادگی ثابت می‌شود:

قضیه: شرط لازم و کافی برای آنکه گراف G یک گراف دوبخشی باشد، آن است که شامل دور به طول فرد نباشد.

گراف دوبخشی کامل

گراف دوبخشی با بخش‌های (V_1,V_2) را گراف کامل دوبخشی می‌نامند، هرگاه هر رأس V_1 مجاور هر رأس V_2 باشد.



۴

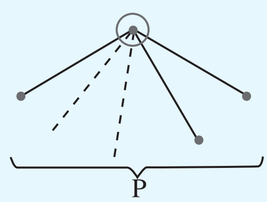
اگر $|V_1|=p$ و $|V_2|=q$، آن‌گاه این گراف کامل دوبخشی را به $K_{p,q}$ نشان می‌دهند. مثلاً $K_{1,p}$یک ستاره است.

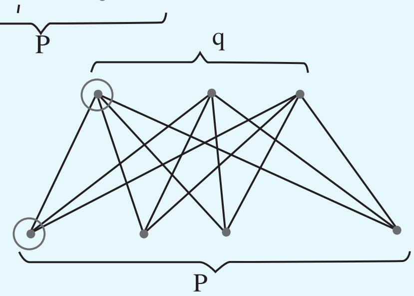
گراف دوبخشی و احاطه‌گری

تعیین مجموعهٔ احاطه‌گر و عدد احاطه‌گری در گراف‌های دوبخشی مانند سایر گراف‌هاست، اما اگر گراف دوبخشی کامل باشد، به سادگی مشخص می‌شود. فرض کنیم G گراف دوبخشی $k_{p,q}$ باشد، به‌طوری که: $1\le q\le p$.

اگر: q=1، آن‌گاه: $\gamma(k_{p,q})=1$

در غیر این صورت: $\gamma(k_{p,q})=2$





۵

اگر: $p\ge 2$ و $q\ge 2$، کافی است برای انتخاب مجموعهٔ احاطه‌گر فقط یک رأس از مجموعهٔ رأس‌های اولی و یک رأس از مجموعه رأس‌های دومی انتخاب کنیم. بنابراین مجموعه احاطه‌گر مینیمم دو عضوی است.

$$\gamma(k_{p,q})=\begin{cases}1 & \min(p,q)=1\\ 2 & \min\{p,q\}\ge 2\end{cases}$$

اگر بتوانیم یک گراف را به یک گراف دوبخشی تبدیل کنیم، پیدا کردن مجموعه‌های احاطه‌گر ساده‌تر خواهد بود.

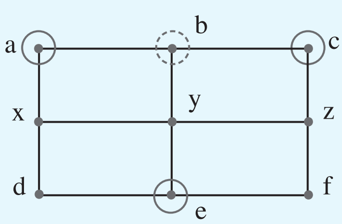
فرض کنیم kp,q یک گراف کامل دوبخشی باشد (شکل ۵). تعداد این مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم چندتاست؟ فرض کنیم: $p\ge q\ge 2$.

آیا پاسخ pq درست است؟ اگر: p=1 یا q=1 چگونه می‌شود؟ در هر کدام از این حالت‌ها تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال چقدر است؟ آیا ممکن است از pq بیشتر باشد؟ چرا؟ اگر p=1 یا q=1 چطور؟

فعالیت: گراف G مطابق شکل ۶ رسم شده است. مرتبهٔ گراف ۹ و ماکسیمم درجهٔ آن ۴ است. آیا S={a,b,c,e} یک مجموعهٔ احاطه‌گر است؟

به سادگی مثبت بودن پاسخ مشخص است. اکنون آیا S یک مجموعهٔ مینیمال G است؟

زیرمجموعهٔ محض S'=S-{b}={a,c,e} از S نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است. پس S مینیمال نیست. اکنون آیا



۶

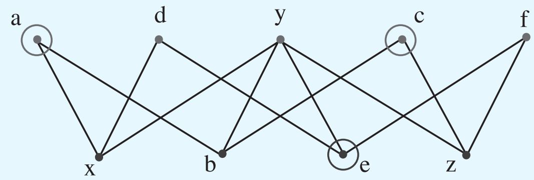
S' مینیمال است؟ آیا می‌توانید زیرمجموعه‌ای محض از S' پیدا کنید که مجموعه‌ای احاطه‌گر G باشد؟

اگر چنین مجموعه‌ای وجود داشته باشد، باید حداکثر دوعضوی باشد.

نشان خواهیم داد که هیچ مجموعهٔ دوعضوی نمی‌تواند یک مجموعهٔ احاطه‌گر این گراف باشد. اگر آن را به یک گراف دوبخشی مطابق شکل بعدی تبدیل کنیم، پاسخ به سادگی مشخص می‌شود. در هر گراف دوبخشی که هر بخش بیش از یک رأس دارد، هر مجموعه احاطه‌گر حداقل باید یک عضو از هر

یک از دوبخش داشته باشد. زیرا هیچ یک از رأس‌های هر بخش نمی‌تواند رأس‌های دیگر همان بخش را احاطه کند

پس اگر این گراف یک مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی داشته باشـــد، حتماً یکی باید از مجموعـــهٔ $S_1=\{a,d,y,c,f\}$ و دیگری از $S_2=\{x,b,e,z\}$ باشـــد. از مجموعـــهٔ S_1 فقط رأس y می‌تواند تمام رأس‌های S_1 را احاطه کند. پس y یک عضو این مجموعهٔ احاطه‌گر است. عضو دیگر مجموعهٔ احاطه‌گر باید متعلق به S_2 باشد، اما اعضای S_2 همگی از درجهٔ ۳ و حداکثر مجاور سه رأس S_1 هستند.



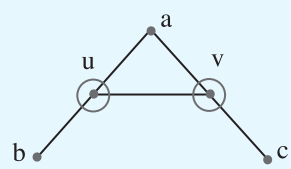
۷

در نتیجه دو عضو باقی‌ماندهٔ دیگر توسط هیچ رأسی احاطه نمی‌شوند. بنابراین هیچ مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی برای این گراف وجود ندارد.

ویژگی‌هایی از مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال

اکنون قضیهٔ مهمی را در مورد مجموعه‌های احاطه‌گر بیان می‌کنیم که در مورد گراف‌های بدون رأس منفرد است.

در گراف G شـــکل ۸ داریم که $V=\{a,b,c,u,v\}$، مشاهده می‌کنیـــد که $S=\{u,v\}$ یک مجموعـــهٔ احاطه‌گر مینیمم و در نتیجه مینیمال است. اکنون مجموعهٔ $S'=V-S=\{a,,b,c\}$ مکمل S را درنظر بگیرید. آیا 'S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است؟



۸

به ســـادگی مشخص است که 'S نیز مجموعهٔ احاطه‌گر G است. این اتفاقی نیست و در حالت کلی نیز درست است. اکنون در قضیهٔ زیر آن را ثابت می‌کنیم.

قضیه: فرض کنیم G یک گراف با رأس غیرمنفرد باشـــد $(\delta(G)\geq 1)$. اگـــر S یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال G باشـــد، آن‌گاه $S'=V-S$ مکمل S، نیـــز یک مجموعهٔ احاطه‌گر G و V مجموعهٔ رأس‌های G است.

اثبات: فرض کنیم $S\subseteq V$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال گـــراف G باشـــد. می‌خواهیم ثابت کنیـــم V-S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G اســـت. آن را با برهـــان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنیـــم V-S مجموعهٔ احاطه‌گر G نباشـــد. چون هر مجموعهٔ احاطه‌گـــر عضوهای خودش را احاطه می‌کنـــد، پس اگر V-S احاطه‌گر نباشد، رأسی مانند v از S وجود دارد که توسط V-S احاطه نمی‌شود. بنابراین v مجاور هیچ رأسی از V-S نیست. اما S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است. پس رأس V-S مجاور رأسی از S به جز v اســـت. یعنی هر رأس V-S توسط رأسی از S-{v} احاطه می‌شـــود. از طرف دیگر طبق فـــرض، v رأس منفرد G نیست. همچنین مجاور رأسی از V-S نیز نیست. پس باید مجاور رأسی از S-{v} باشد. یعنی باید v نیز توسط S-{v} احاطه شود. در نتیجه باید S-{v} یک مجموعهٔ احاطه‌گر G باشد. اما این با مینیمال بودن S متناقض اســـت. در نتیجه فرض خلف باطل و V-S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است.

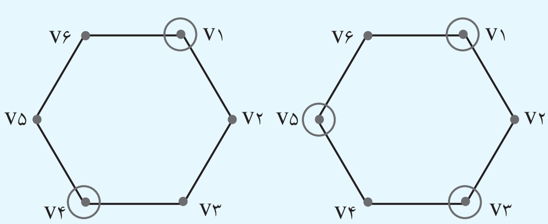
نتیجه: اگـــر G گرافی با رأس غیرمنفـــرد و V مجموعهٔ رأس‌های آن باشد، اگر S مجموعهٔ احاطه‌گر مینی‌مم G باشد، آن‌گاه V-S نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است.

نتیجه: هر گراف همبنـــد G از مرتبهٔ $n\geq 2$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر دارد که مکمـــل آن V-S نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است.

قضیهٔ بعدی نیز یـــک ویژگی از مجموعه‌هـــای احاطه‌گر مینیمال است.

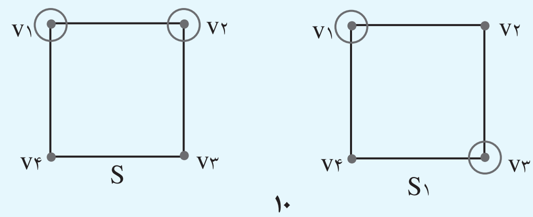
قضیه: گراف G مفروض اســـت. اگر هـــر دو رأس در یک مجموعه احاطه‌گر S از G مجاور نباشند، آن‌گاه S لازم است یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال باشد، اما لزومی ندارد یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم باشد.

اثبات: فرض کنیم S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G باشد که هر دو رأس آن مجاور نباشـــند، پس در S هـــر رأس باید خود آن را احاطه کند. در نتیجه، به ازای هر رأس v از S، S-{v} یک مجموعهٔ احاطه‌گر نیست. در نتیجه طبق تعریف، S یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است؛ یعنی لازم اســـت مینیمال باشد، اما لزومی ندارد



۹

مینیمم باشد. $C_۶$ رادر نظر می‌گیریم. $S=\{v_۱,v_۳,v_۵\}$ در شکل ۹ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است و هیچ دو رأس آن مجاور هم نیستند. اما S مینیمم نیست، زیرا: $\gamma(G)=۲$ و $S_۱=\{v_۱,v_۴\}$ احاطه‌گر مینیمم است.**تذکر:** عکس این قضیه در حالت کلی برقرار نیست. ممکن است S یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال باشد، اما رأس‌هایی در S مجاور هم باشند (شکل‌های ۱۰ را مشاهده کنید).



۱۰

مرور بر چند ویژگی مهم

فرض کنیم S یک مجموعه احاطه‌گر گراف G باشد. می‌گوییم S یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم G است، هرگاه، برای هر مجموعهٔ احاطه‌گر S_i از G داشته باشیم: $|S|\le|S_i|$.

همچنین مشاهده کردیم:

> هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم G یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است، اما عکس آن همواره درست نیست.

اگر G گراف از مرتبهٔ یک باشد، واضح است که خودش مجموعهٔ احاطه‌گر خودش است که هم مینیمم و هم مینیمال است و $\gamma(G)=۱$ که این یک حالت بدیهی است. تاکنون ویژگی‌های زیر را برای عدد احاطه‌گری بررسی کرده‌ایم:

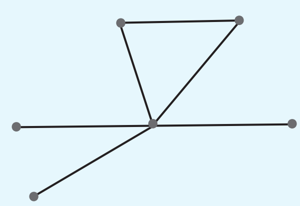
۱. اگر G گرافی از مرتبهٔ n باشد، آن‌گاه: $۱\le\gamma(G)\le n$.

۲. $\gamma(G)=۱$، اگر و فقط اگر: $\Delta(G)=n-۱$.

۳. $\gamma(G)=n$، اگر و فقط اگر G گراف تهی از مرتبهٔ n باشد.

۴. اگر K_n گراف کامل از مرتبهٔ n باشد، آن‌گاه: $\gamma(K_n)=۱$.

آیا عکس این ویژگی درست است؟ یعنی اگر: $\gamma(G)=۱$، آیا G گراف کامل K_n است؟



۱۱

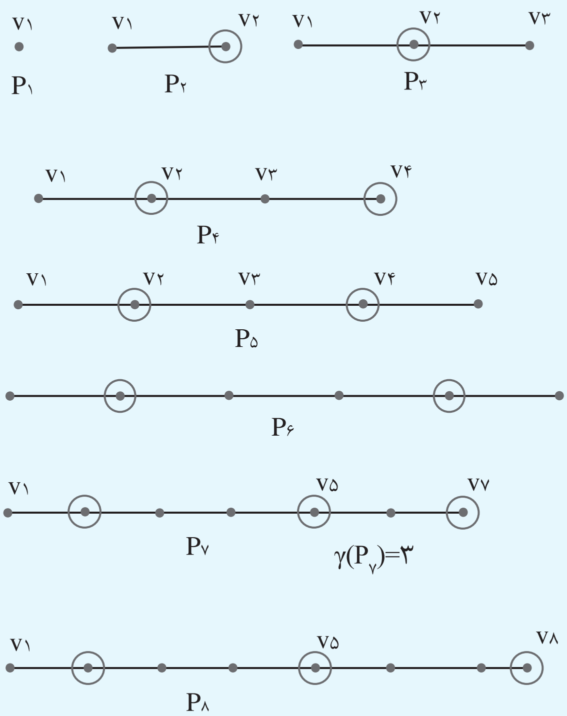
بنابراین، اگر: $\gamma(G)=۱$، با توجه به (۲) و (۴) (ویژگی‌های فوق) می‌توان گفت: گراف G حداقل یک رأس از درجهٔ n-۱ دارد. پس وقتی گراف کامل باشد، می‌تواند از n-۱ یال تا $\frac{n(n-۱)}{۲}$ یال داشته باشد.

در حالت کلی تعیین عدد احاطه‌گری $\gamma(G)$ چندان ساده نیست، اما تعیین کرانه‌های بالا را بررسی می‌کنیم.

محاسبهٔ $\gamma(G)$ در بعضی گراف‌های خاص و کرانهٔهایی برای $\gamma(G)$

گراف‌های P_n و C_n و عدد احاطه‌گری

اگر G گرافی از مرتبهٔ n باشد که رأس‌های آن $v_۱,v_۲,\ldots,v_n$ برچسب‌گذاری شده باشند، به‌طوری که یال‌های آن

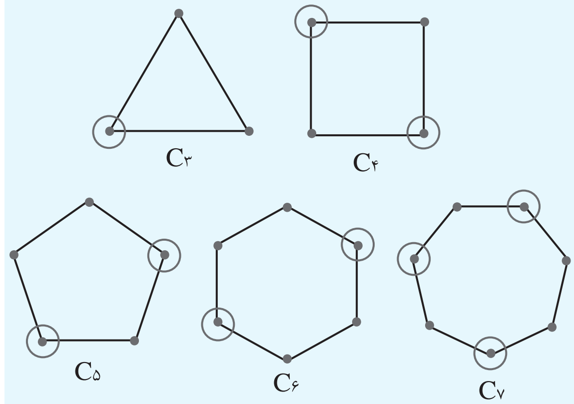


۱۲

$v_۱v_۲,v_۲v_۳,\ldots,v_{n-۱}v_n$ باشند و: $n\ge۱$، آن‌گاه گراف G را یک مسیر با n رأس می‌نامند و به P_n نشان می‌دهند.

حدس می‌زنیم، اگر: $n\ge۱$، آن‌گاه: $\gamma(P_n)=\left\lceil\frac{n}{۳}\right\rceil$.

اگر رأس‌های گراف G از مرتبهٔ $n\ge۳$ با $v_۱$، $v_۲,\ldots,v_n$ برچسب‌گذاری‌شده باشند، به‌طوری که یال‌های آن، $v_۱v_۲,v_۲v_۳,\ldots,v_{n-۱}v_n$ باشند، آن‌گاه G را یک سیکل یا دور می‌نامند. یعنی یک مسیر بسته یک سیکل یا دور است.



۱۳

قضیه: $\gamma(C_n)=\left\lceil \frac{n}{3}\right\rceil$، n≥۳.

اثبات: n=۳q+r که ۰≤r≤۲.

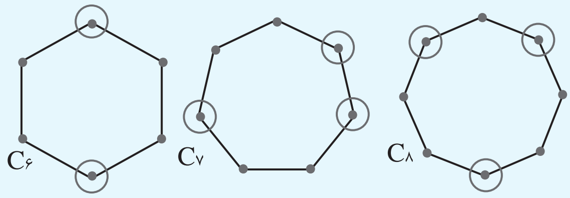
چون Cn دو منتظم است، هر رأس Cn دقیقاً سه رأس آن را احاطه می‌کند. بنابراین هر q رأس Cn حداکثر ۳q رأس آن را احاطه می‌کند. اگر: r=۰، در این صورت: $\gamma(C_n)\ge q=\left\lceil \frac{n}{3}\right\rceil$.

اگر r=۱ یا r=۲، آن‌گاه: $\gamma(C_n)\ge q+1=\left\lceil \frac{n}{3}\right\rceil$.

اکنون باید نشان دهیم: $\gamma(C_n)\le\left\lceil \frac{n}{3}\right\rceil$ که n=۳q+r و ۰≤r≤۲.

ابتدا فرض کنیم r=۰. فرض کنیم S مجموعه‌ای شامل هر رأس v از Cn و هر سه رأس از Cn با شروع از v باشد که به‌طور دوری و همه در یک جهت روی Cn در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین هر رأس Cn به وسیلهٔ دقیقاً یک رأس از S احاطه می‌شود. چون S دقیقاً شامل q رأس است، داریم: $\gamma(C_n)\le q=\left\lceil \frac{n}{3}\right\rceil$. سپس فرض کنیم: r=۱ یا r=۲.

اکنون فرض کنیم S مجموعه‌ای شامل هر رأس v از Cn و هر سه رأس Cn شروع از v به‌طور دوری در یک جهت باشد، تا در کل q+۱ رأس داشته باشیم. سپس، هر رأس Cn به وسیلهٔ حداقل یک رأس S احاطه شده است. بنابراین S یک مجموعهٔ



۱۴

احاطه‌گر C_n است و داریم: $\gamma(C_n)\le q+1=\left\lceil \frac{n}{3}\right\rceil$. در نتیجه: $\gamma(C_n)=\left\lceil \frac{n}{3}\right\rceil$.

نتیجه: اگر در گراف C_n داشته باشیم: n=۳k، آن‌گاه:

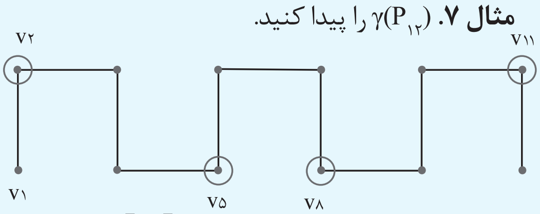
$$\left\lceil \frac{3k}{3}\right\rceil = k = \left\lceil \frac{n}{3}\right\rceil$$

به همین ترتیب،

$$\gamma(P_n)=\left\lceil \frac{n}{3}\right\rceil \text{، } n\ge 1$$

اگر: n≥۳، آن‌گاه: $\gamma(P_n)=\gamma(C_n)=\left\lceil \frac{n}{3}\right\rceil$

مثال ۷. $\gamma(P_{12})$ را پیدا کنید.

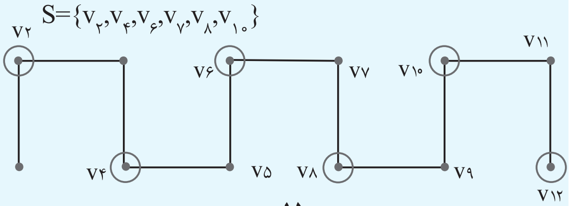


$$\gamma(P_{12})=\left\lceil \frac{12}{3}\right\rceil=4$$

D={v۲,v۵,v۸,v۱۱}

یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و مینیمال است.

S={v۲,v۴,v۶,v۷,v۸,v۱۰}



۱۵

شکل ۱۵ یک مجموعهٔ احاطه‌گر P_{12} است که مینیمم نیست. |S|=۶، اما S مینیمال است، زیرا اگر هر رأس آن را حذف کنیم مثلاً S-{v۲} دیگر احاطه‌گر نیست.

اکنون قضیهٔ مهمی را که در مورد کران بالای عدد احاطه‌گری و به قضیهٔ «ORE» معروف است، بیان می‌کنیم:

قضیه: اگر G گرافی از مرتبهٔ n و δ(G)≥۱ (رأس منفرد نداشته باشد) آن‌گاه $\gamma(G)\le\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$.

اثبات: در بخش قبلی ثابت کردیم که اگر S یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای گراف G باشد که: δ(G)≥۱، آن‌گاه V-S نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است.

حال اگر D یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم G باشد، مینیمال نیز هست. پس V-D نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است و: |V-D|≥|D|=γ(G). در نتیجه:

$$n=|D|+|V-D|\geq ۲|D|=۲\gamma(G)\Rightarrow \gamma(G)\leq \frac{n}{۲}$$

$$\Rightarrow \gamma(G)\leq \left\lfloor \frac{n}{۲}\right\rfloor$$

شفر و وایل[۲] در سال ۱۹۸۹ نشان دادند که اگر: $\delta(G)\geq ۲$، آن‌گاه: $\gamma(G)\leq \frac{۲n}{۵}$. همچنین، **رید**[۳] در سال ۱۹۹۶ نشان داد، اگر: $\delta(G)\geq ۳$، آن‌گاه: $\gamma(G)\leq \frac{۳n}{۸}$.

نتیجهٔ ۱: اگر G و $\bar{G}$ هر دو بدون رأس منفرد باشند، آن‌گاه:
$\gamma(G)+\gamma(\bar{G})\leq n$

$$\gamma(G)\leq \frac{n}{۲} \text{ و } \gamma(\bar{G})\leq \frac{n}{۲}\Rightarrow \gamma(G)+\gamma(\bar{G})\leq n$$

اگر G دارای یک رأس منفرد باشد، آن‌گاه: $\gamma(\bar{G})=۱$. چرا؟
و: $\gamma(G)\leq n$، در نتیجه: $\gamma(G)+\gamma(\bar{G})\leq n+۱$.
به همین ترتیب اگر $\bar{G}$ یک رأس منفرد داشته باشد، آن‌گاه: $\gamma(G)=۱$ و $\gamma(\bar{G})\leq n$. در نتیجه: $\gamma(G)+\gamma(\bar{G})\leq n+۱$.

نتیجهٔ ۲. اگر G گرافی ناهمبند باشد، آن‌گاه: $\gamma(\bar{G})\leq ۲$.

اکنون مهم‌ترین قضیهٔ این قسمت را که کرانی بالا و هم کرانی پایین برای عدد احاطه‌گری ارائه می‌دهد، برای هر گراف از مرتبهٔ n که $n\geq ۲$ بیان می‌کنیم.

قضیه. اگر G گرافی از مرتبهٔ n باشد کــه: $n\geq ۲$، آن‌گاه:
$$\left\lceil \frac{n}{۱+\Delta(G)}\right\rceil \leq \gamma(G)\leq n-\Delta(G)$$

اثبات: اگر $\deg(v)$، درجهٔ رأس v از گراف G باشد، واضح است که رأس v، به تعداد $۱+\deg(v)$ رأس G را احاطه می‌کند. اگر v چنان انتخاب شده باشد که $\deg(v)=\Delta(G)$، آن‌گاه v، $۱+\Delta(G)$ رأس G را احاطه می‌کند، به‌جز $n-(1+\Delta(G))$ رأس G که باقی می‌مانند.

چون هیچ‌کدام از $n-(1+\Delta(G))$ رأس G به وسیلهٔ v احاطه نمی‌شوند، پس حداکثر خودشـــان احاطه می‌شوند، در نتیجه G حداکثر بوسیلهٔ $(n-(۱+\Delta(G)))+۱=n-\Delta(G)$ رأس احاطه می‌شود یعنی،

$\gamma(G)<n-\Delta(G)$

برای اثبات قسمت دیگر نامســاوی، فرض کنیم $\gamma(G)=k$، یعنی $S=\{v_۱,v_۲,\ldots,v_k\}$ مجموعه احاطه‌گر مینیمم G باشــد.
چون هر رأس v_i به تعداد $۱+\deg(v_i)$ رأس G را احاطه می‌کند که $۱\leq i\leq k$ و رأس‌های S همه n رأس G را احاطه می‌کنند پس:

$$\sum_{i=۱}^{k}(۱+\deg(v_i))\geq n$$

اما به ازای هر i که $۱<i<k$، $۱+\deg(v_i)<۱+\Delta(G)$ در نتیجه:

$$n\leq \sum_{i=۱}^{k}(۱+\deg(v_i))\leq k(۱+\Delta(G))$$

بنابراین:

$$n\leq k(۱+\Delta(G))\Rightarrow \frac{n}{۱+\Delta(G)}\leq k$$

یعنی:

$$\left\lceil \frac{n}{۱+\Delta(G)}\right\rceil \leq \gamma(G)\leq n-\Delta(G)$$

نتیجهٔ ۱. اگر G گرافی k منتظم باشـــد، آن‌گاه: $\Delta(G)=k$.
بنابراین: $\left\lceil \frac{n}{۱+k}\right\rceil \leq \gamma(G)\leq n-k$

نتیجهٔ ۲. با توجه بـــه قضیهٔ «اور» و قضیـــهٔ قبلی، اگر: $\delta(G)\geq ۱$، آن‌گاه: $\left\lceil \frac{n}{۱+\Delta(G)}\right\rceil \leq \gamma(G)\leq \left\lfloor \frac{n}{۲}\right\rfloor$

بنابراین در هر گرافی که هیچ رأس منفرد نداشـــته باشد، آن‌گاه $\gamma(G)$ بزرگ‌تر از $\frac{n}{۲}$ نیست.

حالت‌های تساوی در رابطه‌های فوق

۱. برای هر عدد صحیح و نامنفی n گرافی از مرتبهٔ n مثال بزنید که در آن: $\gamma(G)=n-\Delta(G)$. در حالتی که G همبند نباشد و در حالتی که G همبند باشد، آن را نشان دهید.

پاسخ: گـــراف G را چنان درنظر می‌گیریم که شامل یک ســـتاره باشـــد؛ یعنی یک رأس که به r رأس دیگر وصل شده باشد: $r\leq n-۲$. سپس کافی است $n-(r+۱)$ رأس منفرد دیگر در نظر بگیریم.

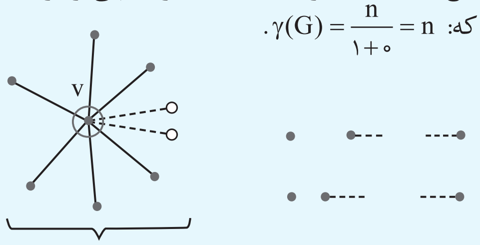
اکنون، $r+۱$ رأس توســـط یک رأس v احاطه شـــده‌اند که $r=\Delta(G)$ و $n-(r+۱)$ رأس منفرد دیگر توسط خودشان احاطه شده‌اند. پس:

$\gamma(G)=۱+(n-r-۱)=n-r=n-\Delta(G)$

اگر گراف G همبند باشد، چگونه آن را پیدا می‌کنید؟
اگر گراف G از مرتبهٔ n باشد که: $\Delta(G)=n-۱$، آن‌گاه:

$\gamma(G)=\gamma(K_n)=n-(n-۱)=۱=n-\Delta(G)$

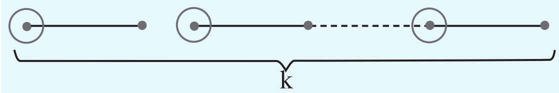
واضح اســـت که اگر: $\Delta(G)=۰$، گـــراف تهی از مرتبهٔ n را داریم که: $\gamma(G)=\frac{n}{۱+۰}=n$.



۱۶

۲. گرافی از مرتبهٔ n مثال بزنید که در آن $\gamma(G)=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

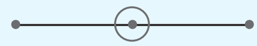
پاسخ: فرض کنید n زوج باشد. پس: n=2k که k≥1 عددی طبیعی است. در این صورت گراف G را شامل k مؤلفهٔ گراف k_2 در نظر می‌گیریم. در این گراف داریم: $\delta(G)=\Delta(G)=1$ و هر رأس در هر مؤلفه، آن مؤلفه را احاطه می‌کند. پس: $\gamma(G)=k=\frac{n}{2}$ و واضح است که: $\frac{n}{2}=\frac{n}{1+\Delta(G)}$.



۱۷

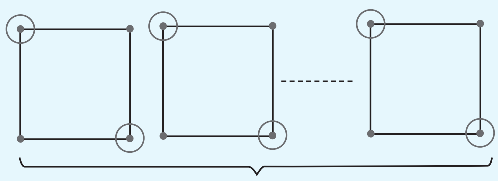
اگر n فرد باشد، داریم: n=2k+1. پس کافی است یکی از مؤلفه‌ها را به یک مسیر به طول ۲ تبدیل کنیم که در این حالت نیز در تعداد عضوهای مجموعهٔ $\gamma(G)=\left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor=k=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ احاطه‌گر، تغییری حاصل نمی‌شود.

$$\gamma(G)=\left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor=k=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$



اگر: n=4k، می‌توانیم k گراف C_4 را رسم کنیم که:

$$\gamma(G)=2k=\frac{n}{2}\Rightarrow\gamma(G)=\frac{n}{2}$$



۱۸

k تا c_4

اکنون حالت کلی‌تری را بررسی می‌کنیم.

> برای هر n صحیح و مثبت چگونه گرافی همبند بسازیم که در آن: $\gamma(G)=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$؟

فرض کنیم n≥2 عددی زوج باشد؛ یعنی: n=2k.
فرض کنیم H گرافی همبند از مرتبهٔ k باشد، به‌طوری که:

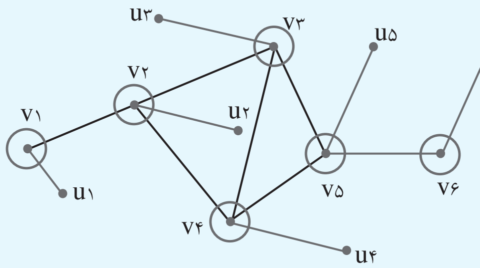
$$V(H)=\{v_1,v_2,\dots,v_k\}$$

گراف جدید H^* را بر پایهٔ گراف H به‌صورت زیر می‌سازیم:

$$V(H^*)=V(H)\cup\{u_1,u_2,\dots,u_k\}$$

$$E(H^*)=E(H)\cup\{u_iv_i|i=1,2,\dots,k\}$$

یعنی رأس‌های H^* اجتماع رأس‌های H و k رأس دیگر است که هر یک به u_i نشان داده شده‌اند و یال‌های H^*، اجتماع یال‌های H و یال‌هایی هستند که شامل دو رأس v_i و u_i می‌شوند. در این صورت گراف H^* را «تاج گراف H»[8] می‌نامند.



۱۹

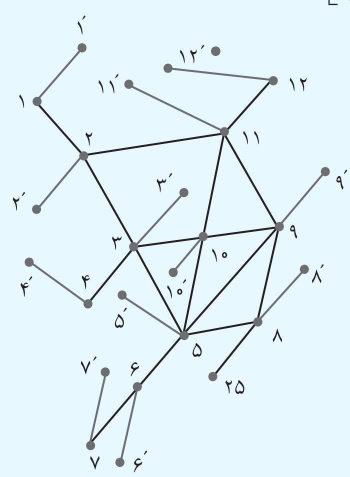
در شکل ۱۹، گراف H با مجموعهٔ رأس‌های $\{v_1,v_2,\dots,v_6\}$ و گراف H^* با مجموعهٔ رأس‌های $V(H)\cup\{u_1,u_2,\dots,u_6\}$ را مشاهده می‌کنید. همچنین نشان داده شده است که چگونه یال‌های H به ۶ رأس جدید وصل شده‌اند.

به ازای هر گراف همبند H همواره گراف تاج H، یعنی H^* نیز گرافی همبند است؛ چرا؟

جالب‌ترین ویژگی در مورد H^* این است که: $\gamma(H^*)=k=\frac{n}{2}$.

اگر n عددی فرد باشد، گراف H^* را از مرتبهٔ n-1 می‌سازیم. سپس یک رأس جدید w را به H^* اضافه و آن را به رأسی از H متصل می‌کنیم. اکنون پرسش اصلی این است که چرا همواره: $\gamma(H^*)=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$؟

استدلال آن چندان مشکل نیست. اگر n زوج باشد، گراف همبند H از مرتبهٔ $\frac{n}{2}$ را به دلخواه روی $\frac{n}{2}$ رأس در نظر می‌گیریم. حال گراف H هر مجموعهٔ احاطه‌گری که داشته باشد، داریم: $\gamma(H)\le -$. حتی چون همبند است، بنابر قضیهٔ «اور» داریم: $\gamma(H)\le\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$. اما این در اثبات مهم نیست.



۲۰

اکنون وقتی $\frac{n}{2}$ رأس دیگر را به H اضافه می‌کنیم و گراف جدید H^* را می‌سازیم، هر رأس H که رأس احاطه‌گر است، همچنان احاطه‌گر H^* هم خواهد بود. اما هر رأس H که رأس احاطه‌گر نباشد نیز باید به رأس احاطه‌گر تبدیل شود. یا اگر آن را در نظر نگیریم، رأس جدید اضافه‌شده باید به رأس احاطه‌گر تبدیل شود. در نتیجه، دقیقاً: $\gamma(H^*)=\frac{n}{2}$.

حال اگر n فرد هم باشد، روند فوق را برای n-1 رأس که تعداد آن‌ها زوج است، انجام می‌دهیم. سپس یک رأس باقی‌مانده را به یکی از رأس‌های H متصل می‌کنیم که احاطه‌گر است. پس در تعداد عضوهای مجموعه احاطه‌گر تأثیری ندارد. بنابراین در این حالت نیز داریم:

$$\gamma(H^*)=\frac{n-1}{2}=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$$

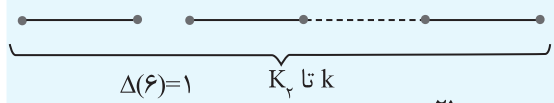
پس به‌طور کلی: $\gamma(H^*)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$.

۳. برای هر عدد صحیح و نامنفی n گرافی از مرتبهٔ n مثال بزنید که در آن: $\gamma(G)=\left\lceil\frac{n}{1+\Delta(G)}\right\rceil$. همچنین گرافی از مرتبهٔ n مثال بزنید که در آن: $\gamma(G)=\frac{n}{1+\Delta(G)}$.

پاسخ: همـان k مؤلفه k_2 می‌تواند مثالی باشد که: n=2k؛ یعنی n زوج است.

اگر n فرد باشد G چگونه است؟

$$\gamma(G)=\frac{n}{1+1}=\frac{n}{2}=k$$



۲۱

یا:

$$\gamma(C_n)=\left\lceil\frac{n}{1+2}\right\rceil=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$$

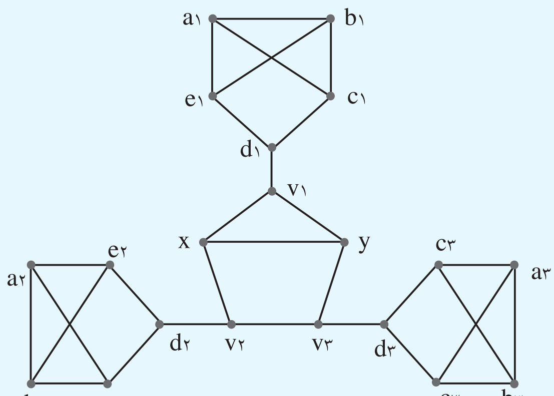
مثال ۸. گراف سه منتظم G از مرتبهٔ ۲۰ در شکل ۲۲ رسم شده است. یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای آن پیدا کنید.

پاسخ: با توجه به شکل ۲۳، مجموعهٔ رأس‌های $\{a_1,a_2,a_3\}$، ۱۲ رأس را مطابق شکل احاطه می‌کنند. اکنون فقط رأس‌های d_1، d_2، d_3، x، y، v_1، v_2 و v_3 باید توسط رأس‌هایی احاطه شوند. با کمی دقت مشاهده می‌کنیم که مجموعهٔ $D=\{a_1,a_2,a_3,v_1,v_2,v_3\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است.

در نتیجه: $\gamma(G)\le 6$.

از طرف دیگر، بنا بر قضیهٔ قبل:

$$\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{20}{4}\right\rceil=5$$

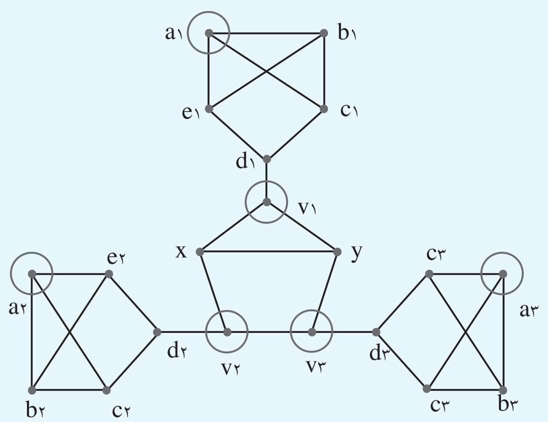


۲۲

پس: $5\le\gamma(G)\le 6$.

اکنون کافی است نشان دهیم $\delta(G)=5$ امکان ندارد.

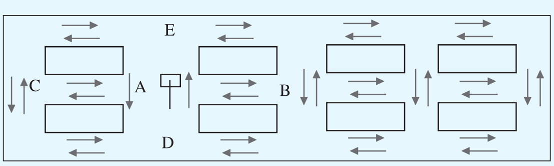
اگـر مجموعـهٔ $A=\{a_1,b_1,c_1,d_1,e_1\}$ را در نظـر بگیریم، $A\cup\{v_1\}$ حداقل باید به‌وسیلهٔ دو رأس احاطه شوند، که همین به ترتیب باید برای دو زیرگراف مشابه نیز برقرار باشد. در نتیجه حداقل باید $\gamma(G)$ برابر ۶ باشـد که با توجه به: $\gamma(G)\le 6$، نتیجه می‌گیریم: $\gamma(G)=6$.



۲۳

یک مثال کاربردی

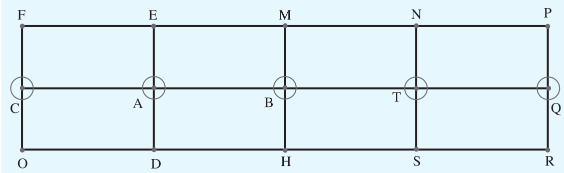
مثال ۹. در شکل ۲۴ شهرکی نشـان داده شده که دارای سـه خیابان افقی و پنـج خیابان عمودی اسـت. برای ایمنی شهرک می‌خواهیم در بعضی تقاطع‌ها دوربین‌هایی نصب کنیم. هـر دوربین در هر تقاطع می‌تواند خود آن تقاطع و تقاطع‌های مجاورش را پوشش دهد.



۲۴

مثـــلاً دوربین تقاطع A می‌تواند چهار تقاطع B، C، D و E را پوشش دهد. تعیین کنید دوربین‌ها در چه تقاطع‌هایی نصب شـــوند تا تمام پانزده تقاطع تحت‌پوشش دوربین‌ها باشند و در ضمن از کمترین تعداد دوربین استفاده شود.

پاسخ: بـــرای پاسخ به مسئله ســـعی می‌کنیم تقاطع‌ها و خیابان‌های متصل به آن‌ها را با یک گراف G مدل‌سازی کنیم. در گراف رسم‌شـــده در شـــکل ۲۵، رأس‌ها، تقاطع‌ها و یال‌ها خیابان‌های منتهی به این تقاطع‌ها هستند.

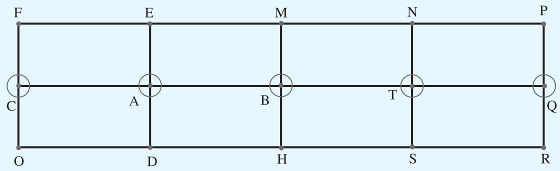


۲۵

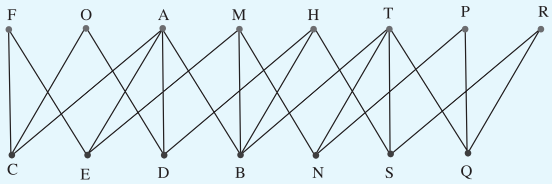
شاید اولین نقاطی که برای نصب دوربین به ذهن برسند، تقاطع‌های C، A، B، T و Q باشـــند که در این صورت، به پنج دوربین نیاز است. واضح است که تمام چهارراه‌ها تحت پوشش واقع می‌شوند، آیا این تعداد کمترین تعداد است؟ آیا می‌توانیم تغییری در نصب دوربین‌ها بدهیم تا به کمتر از ۵ دوربین نیاز باشد؟

این گراف دارای پانزده رأس اســـت و حداکثر درجهٔ رأس در آن ۴ اســـت. فقط ســـه رأس از درجهٔ ۴، هشـــت رأس از درجهٔ ۳ و چهار رأس از درجهٔ ۲ داریم. با اســـتفاده از فرمول کرانه‌های γ(G) چون همبند است: $\left\lceil \frac{۱۵}{۱+۴} \right\rceil \le \gamma(G) \le \left\lfloor \frac{۱۵}{۲} \right\rfloor$. پس: $۳\le\gamma(G)\le۷$. اما یک مجموعهٔ احاطه‌گر پنج عضوی برای آن به ســـادگی مشخص می‌شـــود؛ پس: $۳\le\gamma(G)\le۵$. با کمی دقت مشاهده می‌کنیم که هیچ کدام از رأس‌های درجهٔ چهار نمی‌تواننـــد هیچ‌کدام از رأس‌های درجهٔ دو را احاطه کنند. به همین دلیل رأس C را آزمایش می‌کنیم. رأس C سه رأس A، F و O و خودش را احاطه می‌کند. اکنون اگر دو رأس M و H را انتخاب کنیم، مشاهده می‌کنیم که فقط چهار رأس P، Q، R و T می‌مانند که توسط هیچ رأسی احاطه نشده‌اند. اگر رأس Q را انتخاب کنیم، این مشـــکل هم حل می‌شود و در نتیجه یک مجموعهٔ احاطه‌گر چهار عضوی بـــرای G پیدا کرده‌ایم. بنابراین: $۳\le\gamma(G)\le۴$.

اکنون فقط کافی است نشـــان دهید $\gamma(G)=۳$ نیز امکان نـــدارد. به این منظور بهتر اســـت از تبدیل این گراف به یک گراف دوبخشی استفاده کنیم. آن را رسم کرده‌ایم. در نتیجه: $\gamma(G)=۴$.



۲۶



۲۷

کافی اســـت دوربین‌ها در تقاطع‌های C، M، H و Q نصب شوند. آیا نصب این چهار دوربین به روشی دیگر امکان دارد؟

چند ویژگی جدید در احاطه‌گری

$$۳\le\gamma(G)+\gamma(\overline{G})\le n+۱ \qquad (n\ge۲)$$

$$\delta(G) \ge k \ge ۴ \Rightarrow \gamma(G) \le \frac{kn}{۳k-۱}$$

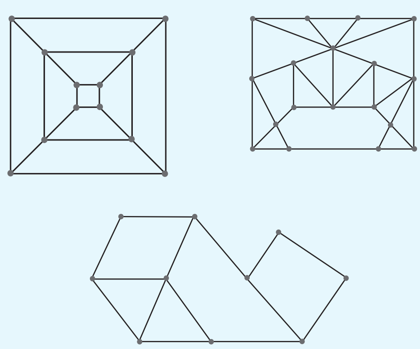
k>۷ (Caro Roditty 1990)

k=۴ (Sohn and Yuan 2009)

k=۵ (Xing, Sun and Chen 2006)

k=۶ (Cao, Shi Sohn and Yuan 2008)

مثال ۱۰. در شکل‌های زیر عدد احاطه‌گری را پیدا کنید.



۲۸

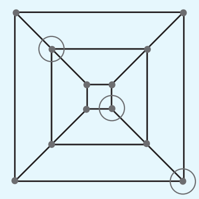
پاسخ:

$$n=۱۲ \qquad \Delta(G)=۳$$

$$۳=\left\lceil \frac{۲۱}{۴} \right\rceil \le \gamma(G) \le \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor = ۶$$

$$\gamma(G) \ge ۳ \Rightarrow \gamma(G) \le \frac{۳n}{۸} = \frac{۳\times۱۲}{۸} = ۴/۵$$

$$۳\le\gamma(G)\le۴ \quad , \quad \gamma(G)=۳$$

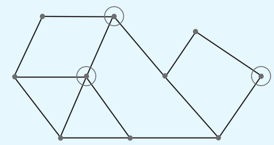


۲۹

$$|v|=۱۰ \qquad \Delta(G)=۴$$

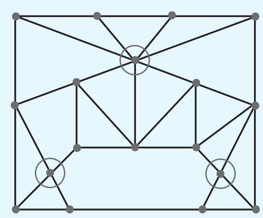
$$۲=\frac{۱۰}{۱+۴}\le\gamma(G)\le\left\lfloor\frac{۱۰}{۲}\right\rfloor=۵\ ,\quad ۲\le\gamma(G)\le ۵$$

$$\delta(G)\ge ۲\Rightarrow\gamma(G)\le\frac{۲\times ۱۰}{۵}=۴\Rightarrow ۲\le\gamma(G)\le ۴$$



۳۰

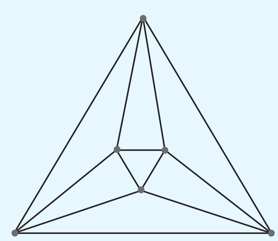
$$\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{۱۶}{۱+۶}\right\rceil=۳$$



۳۱

چند مسئله

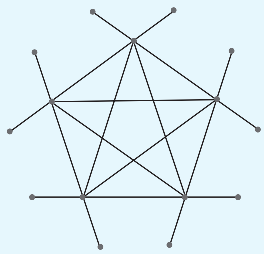
۱. در گـــراف ۳۲ $\gamma(G)$ چند اســـت؟ چـــه تعداد مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارد؟



۳۲

۲. اگر G گرافی ناهمبند باشد، چرا: $\gamma(\overline{G})\le ۲$.

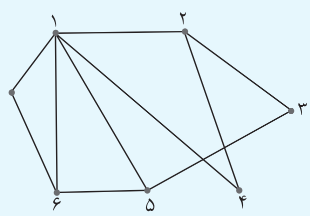
۳. در گراف شـــکل ۳۳ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با کمترین عضو و یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با بیشـــترین عضو پیدا کنید.



۳۳

۴. آیا تعریف زیر از مجموعهٔ احاطه‌گر می‌تواند درست باشد؟ گراف $G(V,E)$ مفروض است. $D\subseteq V$ را یک مجموعهٔ احاطه‌گر G می‌نامیم، هرگاه، برای $v\in V$، یا $v\in D$ یا $N_G(v)\cap D\neq\varnothing$.

۵. $D_C\subseteq V(G)$ را یـــک مجموعهٔ احاطه‌گر همبند گراف G می‌نامیم، هرگاه هر رأس $V\text{-}D_C$ مجاور رأســـی از D_C باشـــد و زیرگراف D_C از G همبند باشد. اکنون در گراف شکل ۳۴ یک مجموعهٔ احاطه‌گر همبند و یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرهمبند پیدا کنید، به‌طوری‌که هر دو احاطه‌گر مینی‌مم باشند.



۳۴

پی‌نوشت‌ها

1. Bipartite Graphs
2. Shephered & White
3. Reed
4. Corona of H

منابع

1. Haynes, Teresa W.; Jedetniemi, Stephen T.: Sater, Peter J. (1998). Fundamentals of domination in graphs. Marcel Dekker, Ine. NewYork.
2. Balakishnan, R & Rangannthan, K. (2000). A text book of graph theory springer. Springer-verlag, NewYork.
3. Aldous, Joan M. & Wilson, Robin J. (2000). Graphs and applications. Springer-verlag, London.

راهبرد بُرد

عباس قلعه‌پور اقدم
دبیر و کارشناس ارشد ریاضی، ارومیه

اشاره
با توجه به اینکه اغلب دانش‌آموزان در یادگیری ریاضیات مشکل دارند و در راستای پاسخ دادن به این پرسش دانش‌آموزان که «این مفهوم ریاضی که برای ما تدریس می‌شود، چه کاربردی دارد؟» می‌توان آموزش مفاهیم ریاضی را همراه با ارائهٔ مثال‌های کاربردی، ترتیب دادن زیرکلاس‌هایی با عنوان آزمایشگاه ریاضی و معرفی بازی‌هایی که ماهیت ریاضی دارند پیش‌برد تا یادگیری برای دانش‌آموزان شیرین و آسان شود.
در این مقاله با طرح مسئله‌ای به معرفی یک بازی دو نفره می‌پردازیم و راهبردهایی را که یک بازیکن باید در پیش گیرد تا برندهٔ حتمی بازی شود، یا احتمال بردش را بیشتر کند، بررسی خواهیم کرد. چون این راهبردها با مفهوم هم‌نهشتی (از مباحث نظریهٔ عددها که در کتاب «ریاضی گسستهٔ سال دوازدهم رشتهٔ ریاضی گنجانده شده است) رابطهٔ مستقیمی دارند، لذا پیش از پرداختن به آن‌ها و حل مسئلهٔ مطرح‌شده، مفهوم هم‌نهشتی را تعریف و قضیه‌ای را در این خصوص که بدان نیاز خواهیم داشت، اثبات می‌کنیم. این بازی برای دانش‌آموزان دورهٔ اول متوسطه نیز به‌عنوان کاربردی از قواعد بخش‌پذیری می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

کلیدواژه‌ها: بازی و ریاضی، راهبرد برد، هم‌نهشتی.

آزمایشگاه ریاضی

آشنایی دانش‌آموزان با جنبه‌های کاربردی دانش ریاضی، یادگیری آن را برایشان شیرین و آسان‌تر می‌کند.
در این راستا می‌توان ساعت‌هایی از برنامهٔ درسی ریاضی یا بخشی از زنگ‌های ریاضی را به فعالیت‌هایی تحت‌عنوان آزمایشگاه ریاضی اختصاص داد. محیط انجام آزمایش‌ها می‌تواند کلاس درس، حیاط مدرسه یا بسته به نیاز، حتی محیط بیرون از مدرسه باشد. اجازه دهید به ذکر چند نمونه از تجربه‌های خودم در این زیرکلاس‌ها بپردازم:
۱. برای آشنایی دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی با عدد پی می‌توان از آنان خواست که پیرامون اشیایی مدور چون کاسه، فنجان، قابلمه و ... را اندازه‌گیری و بر اندازهٔ قطر تقسیم کنند. در دورهٔ اول متوسطه می‌توان به این منظور با علامت‌گذاری نقطه‌ای از لاستیک یک دوچرخه که با زمین تماس دارد و حرکت دادن دوچرخه روی یک خط مستقیم، به تعداد ۱ یا چند دور، محیط چرخ را محاسبه و بر قطر آن تقسیم کرد.
در دورهٔ دوم متوسطه برای دانش‌آموزانی که در درس فیزیک با دورهٔ تناوب آونگ ساده $(T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}})$ آشنا شده‌اند، می‌توان پا را فراتر گذاشت و با ترتیب دادن آزمایشی واقعی روی یک آونگ ساده، T را محاسبه کرد. این کار

پس از جاگذاری L و g در فرمول مربوطه، به محاسبهٔ π می‌انجامد.

همچنین، برای سهولت به خاطرسپاری عدد پی تا ۱۰ رقم اعشار برای دانش‌آموزان علاقه‌مند، می‌توانیم آنان را به حفظ بیت زیر ترغیب کنیم:

خرد و بینش و آگاهی دانشمندان

ره سر منزل مقصود به ما آموزد

$\pi \simeq$ ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵

۲. به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ **تالس** و مفهوم تشـــابه، می‌توان اندازه‌گیری ارتفاع‌های بلند، مانند تیرهای نورافکن در پارک‌ها یا میل پرچم داخل حیاط مدرسه را مدنظر قرار داد. به این صورت که می‌توان دانش‌آموزان را در یک روز آفتابی به حیاط مدرسه یا یک پارک برد و به کمک میله‌ای مثلاً یک متری (به‌عنوان شاخص)، از طول سایه‌ها استفاده و طول مجهول را محاسبه کرد.

۳. برای جذاب شدن یادگیری حل معادلهٔ درجهٔ اول و ساده کردن عبارت‌های جبری، می‌توان یک بازی دو نفره ترتیب داد؛ به این صورت که نفر اول از نفر دوم می‌خواهد که عددی را (ترجیحاً کوچک و صحیح) در نظر بگیرد. پس از این کار از او می‌خواهد که یک سلسله عملیات جبری روی آن عدد انجام دهد و در پایان نتیجه را به او بگوید. در نهایت نفر اول با حل معادلهٔ درجهٔ اول مربوطه عدد مورد نظر را پیدا می‌کند و به او باز می‌گوید. به مثال زیر توجه کنید:

آشنایی دانش‌آموزان با جنبه‌های کاربردی دانش ریاضی، یادگیری آن را برایشان شیرین و آسان‌تر می‌کند. در این راستا می‌توان ساعت‌هایی از برنامهٔ درسی ریاضی یا بخشی از زنگ‌های ریاضی را به فعالیت‌هایی تحت‌عنوان آزمایشگاه ریاضی اختصاص داد

نفر اول: عددی را در نظر بگیر.

نفر دوم: گرفتم (مثلاً ۵).

نفر اول: آن را با ۳ جمع کن (حاصل ۸).

نفر اول: نتیجه را منهای ۴ کن (حاصل ۴).

نفر اول: نتیجه را با ۶ جمع کن (حاصل ۱۰).

نفر اول: حاصل را دو برابر کن (حاصل ۲۰).

نفر اول: از عدد حاصل، ۵ تا کم کن (حاصل ۱۵).

نفراول: حاصل را به من بگو.

نفر دوم: حاصل ۱۵ می‌شود.

نفر اول معادلهٔ $2(x+3-4+6)-5=15$ یا $2x+5=15$ را حل می‌کند و عدد ۵ را می‌یابد.

در واقع آزمایشـــگاه ریاضی فرصتی است برای انجام بازی‌هایی که ماهیت ریاضی دارند، حل مثال‌هایی که جنبهٔ کاربردی دارند، و انجام برخی آزمایش‌ها برای حل مسئله‌های ریاضی.

معرفی یک بازی دو نفره و طرح یک مسئله

حـــال به موضوع بحث این مقاله می‌پردازیم که یک بازی دو نفره اســـت. این بازی تنهـــا به تعدادی (اختیاری) سنگ‌ریزه، یا دکمه، یا لوبیا، و موارد مشابه نیاز دارد. طریقهٔ بازی به شرح زیر است:

در آغاز شـــروع‌کنندهٔ بازی (نفر اول) باید مشـــخص شود. این کار می‌تواند توافقی یا با روش‌هایی مانند گل گل یا سنگ کاغذ قیچی، و یا روش‌های دیگری که بچه‌ها با آن‌ها آشنایی دارند، انجام شود. فرض کنیم بازی را با تعدادی دکمه بخواهیم انجام دهیم. دکمه‌ها را به‌صورت ســـتونی روی زمین یا یک میز می‌چینیم (دلیل ستونی چیدن را در ادامه متوجه خواهید شد).

بازی به این صورت شروع می‌شود که هر بازیکن در نوبت خود می‌تواند ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ دکمه را از ستون بردارد. برندهٔ بازی نفری است که آخرین دکمه‌ها را از ستون بردارد. به عبارت دیگر، ستون (یا زمین بازی) را از دکمه‌ها خالی کند. با ذکر این اشارهٔ کوچک که اگر یکی از بازیکنان برای آخرین برداشت رقیب خود بتواند کاری کند که ۶ دکمه در ستون بماند، چون حداکثر تعدادی که هر نفر می‌تواند بردارد، ۵ تاست، در این صورت برد خود را حتمی خواهد کرد.

اکنون می‌توان دلیل ستونی چیدن مهره‌ها را درک کرد. دلیلش این است که هر یک از بازیکنان در هر لحظه از بازی بتوانند تعداد باقی‌مانده را بشمارند و بدانند. حال با طرح یک مسئله کار را ادامه می‌دهیم.

مسئله: نسترن و **نگار** بازی را با ستونی از ۴۰ عدد دکمه شروع می‌کنند. در هر نوبت هر یک می‌توانند ۱، ۲،

۳، ۴ یا ۵ دکمه از ستون بردارد. بازیکنی که آخرین دکمه را از ستون بردارد، برندهٔ بازی خواهد بود. اگر نگار نفر اول شروع‌کنندهٔ بازی باشد، در اولین نوبت خود باید چند دکمه بردارد که مطمئن شود او برندهٔ بازی خواهد شد؟

حال چون حل مسئله با مفهوم هم‌نهشتی در ارتباط است، لذا پیش از پرداختن به آن به سراغ تعریف هم‌نهشتی و اثبات قضیه‌ای می‌رویم که بدان نیاز داریم.

تعریف هم‌نهشتی

دو عدد صحیح a و b را به پیمانهٔ m (m عدد صحیح مثبت) هم‌نهشت گویند هر گاه a–b بر m بخش‌پذیر باشد $(m|a-b)$. این هم‌نهشتی به‌صورت زیر نموده می‌شود:

$a \equiv b$ (به پیمانهٔ m)

برای مثال، با فرض ۶ = n به سادگی دیده می‌شود که (به پیمانهٔ ۶) ۱ ≡ ۱۹ و (به پیمانهٔ ۶) ۴ ≡ ۴۰ .

لم ۱. به ازای عددهای صحیح دلخواه a و b، اگر (به پیمانهٔ m) $a \equiv b$، آن‌گاه a و b بر m باقی‌ماندهٔ یکسانی دارند.

اثبات: چون: (به پیمانهٔ m) $a \equiv b$، پس: $m|a-b$. یعنی به ازای عدد صحیح k‌ای a–b=km یا a=b+km . اگر b را بر m تقسیم کنیم، بنا بر الگوریتم تقسیم، عددهای صحیح q (خارج قسمت) و r (باقی‌مانده) را خواهیم داشت، به‌طوری که: b=qm+r، که: ۰≤r<m. بنابراین:

$$a = qm + r + km = (q + k)m + r$$

یعنی باقی‌ماندهٔ a بر m هم برابر r است.

لم ۲. به ازای عددهای صحیح دلخواه b و m، اگر: b<m آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم b بر m برابر b است.

اثبات: چون b<m، پس بنابر الگوریتم تقسیم، ۰=q و r=b خواهد بود.

قضیه: به ازای عددهای صحیح a، b و m (۰<m و b<m)، اگر: (به پیمانهٔ m) $a \equiv b$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m برابر b است.

اثبات: با توجه به لم‌های ۱و۲، حکم قضیه برقرار است.

حل مسئله (راهبرد برد)

نگار نفر اول و شـــروع‌کنندهٔ بازی اســـت. چون حداکثر تعداد دکمه‌ای که هر بازیکن می‌تواند از ستون بردارد، ۵ است، لذا اگر نگار بتواند برای آخرین برداشت رقیبش (نسترن)، ۶ تا دکمه باقی بگذارد، دیگر نسترن نمی‌تواند کاری انجام دهد و نگار می‌تواند برندهٔ مسلم بازی باشد.

و اما چگونه؟

چون: (به پیمانهٔ ۶) ۴ ≡ ۴۰، لذا باقی‌ماندهٔ تقسیم ۴۰ بر ۶ برابر ۴ است. پس اگر نگار در اولین نوبت خود ۴ دکمه بردارد و سپس منتظر نسترن شود و کار را طوری جلو ببرد که مجموع تعداد دکمه‌های برداشتی او و نسترن برابر ۶ شود، برد خود را تضمین می‌کند. پس در اولین حرکت ۴ دکمه برمی‌دارد. در ادامه، اگر نسترن ۱ دکمه برداشت، او ۵ مهره برمی‌دارد، اگر نسترن ۲ دکمه برداشت، او ۴ دکمه برمی‌دارد و ...

به نمونهٔ بازی زیر توجه کنید:

برندهٔ بازی	۴	۱	۲	۴	۵	۳	۴	نگار
		۲	۵	۴	۲	۱	۳	نسترن

بررسی راهبردهای برد در حالت‌های متفاوت

دو پرسش مطرح است:

۱. اگر نگار نفر دوم باشد، با چه راهکاری می‌تواند به برد برسد؟

۲. اگر تعداد دکمه‌ها بر ۶ بخش‌پذیر باشد، وضع چگونه خواهد بود؟

یاد گرفتیم که برای نفر اول (با شرط بخش‌پذیر نبودن تعداد دکمه‌ها بر ۶)، راهبرد برد حتمی این‌گونه است که در اولین حرکت خود، به تعداد باقی‌ماندهٔ تقســـیم تعداد مهره‌ها بر ۶ برمی‌دارد و در ادامه مجموع را ۶ می‌کند. برای مثال، در بازی نگار و نســـترن اگر تعداد دکمه‌ها به جای ۴۰ برابر ۵۰ باشد و نگار نفر اول باشد، چون: (به پیمانهٔ ۶

۲ ≡ ۵۰، پس اگر نگار ابتدا ۲ دکمه بردارد و در ادامه مجموع را ۶ کند، برندهٔ حتمی خواهد بود. اما اگر نگار نفر دوم باشد، نسترن شروع‌کنندهٔ بازی است. اگر او از راهبرد برد نفر اول مطلع باشد، دیگر نگار کاری نمی‌تواند بکند. در غیر این‌صورت باز هم راهکاری برای برد حتمی نگار متصور نیست. ولی او می‌تواند به‌صورت زیر عمل کند تا احتمال بردش را افزایش دهد:

او منتظر نسترن می‌شود تا دکمه‌هایش را بردارد. حال نگار علاوه بر اینکه مجموع را ۶ می‌کند، به تعدادی که می‌تواند، اقدام به جبران آن ۴ تای مطرح‌شده در قسمت قبل می‌کند و اضافه‌تر برمی‌دارد. برای اینکه بهتر متوجه شوید، فرض کنیم نسترن در اولین برداشت خود ۴ دکمه بردارد. خب! نگار ۲ تا از بابت ۶ کردن مجموع برمی‌دارد و علاوه براین، چون می‌تواند تا ۵ دکمه بردارد، ۳ تا هم از بابت جبران آن ۴ تا برمی‌دارد؛ یعنی در مجموع ۵ تا برمی‌دارد. حالا ۳ تا از آن ۴ تا جبران شده است.

در مرحله‌های بعدی، به شرط آنکه نسترن اقدام به برداشتن ۱ دکمه نکند، می‌تواند آن ۱ عدد باقی‌مانده را نیز جبران کند. در هر مرحله از بازی که نگار موفق به جبران شود، در واقع به اصطلاح ورق برمی‌گردد و مثل این می‌شود که نگار نفر اول است و نسترن نفر دوم. نگار ادامهٔ بازی را با ۶ کردن مجموع ادامه می‌دهد. به بازی زیر توجه کنید:

	۱	۲	۳	۲	۱	۴	نسترن
برندهٔ‌بازی	۵	۴	۳	۴+۱=۵	۵	۲+۳=۵	نگار
				۰		۱	باقی‌مانده جبرانی
	۰	۶	۱۲	۱۸	۲۵	۳۱	تعداد دکمهٔ باقی‌مانده در ستون

همان‌گونه که مطرح شد، در این حالت راهکاری برای برد حتمی نفر دوم وجود ندارد. ولی اگر نفر دوم طبق روالی که گفته شد عمل کند، احتمال بردش را افزایش می‌دهد. مثلاً اگر نفر اول اصرار بر برداشتن فقط یک دکمه داشته باشد، دیگر نفر دوم کاری از پیش نمی‌تواند ببرد. (چرا؟)

حال به سراغ پرسش دوم می‌رویم. اگر تعداد دکمه‌ها بر عدد ۶ بخش‌پذیر باشد، این نفر دوم است که می‌تواند با راهکار سادهٔ شش کردن مجموع، برد خود را حتمی سازد. برای مثال، فرض کنیم به جای ۴۰ دکمه، نگار و نسترن با ۳۶ دکمه بازی کنند و باز نگار نفر اول باشد. نسترن منتظر نگار می‌شود و پس از برداشتن او مجموع را ۶ می‌کند. به بازی زیر توجه کنید:

	۱	۴	۲	۳	۴	۱	نگار
برندهٔ بازی	۵	۲	۴	۳	۲	۵	نسترن

و اما در این حالت، آیا نفر اول هم می‌تواند راهکاری برای رسیدن به برد حتمی در پیش گیرد؟ جواب منفی است. نفر اول به شرط عدم اطلاع نفر دوم از راهبرد برد مطرح‌شده، می‌تواند به طریق زیر عمل کند تا احتمال بردش را افزایش دهد.

نگار نفر اول و نسترن نفر دوم، بازی را با ۳۶ دکمه آغاز می‌کنند. نسترن از راهکار برد نفر دوم آگاه نیست و نگار می‌خواهد بازی را ببرد. او باید ابتدا در اولین برداشت به تعداد مینیمم، یعنی ا عدد دکمه بردارد و بعد منتظر نسترن شود. سپس اگر مثلاً نسترن ۲ دکمه برداشت، او برای ۶ کردن مجموع باید ۴ دکمه بردارد، ولی ۳ دکمه برمی‌دارد (در واقع آن ۱ عدد را که اول برداشته بود، جبران می‌کند). سپس به ۶ کردن مجموع‌ها ادامه می‌دهد. در واقع جای نفر اول و نفر دوم از دومین برداشت عوض می‌شود و نگار نفر دوم می‌شود. تعداد دکمه‌ها هم که بر ۶ بخش‌پذیر است (۳۰ = ۶ ـ ۳۶). به بازی زیر توجه کنید:

برندهٔ بازی	۱	۳	۲	۱	۲	۳	۱	نگار
		۵	۳	۴	۵	۴	۲	نسترن

خلاصه

اگر n (تعداد مهره‌های بازی) بر ۶ بخش‌پذیر نباشد، راهبرد برد حتمی برای نفر اول وجود دارد، ولی اگر n بر ۶ بخش‌پذیر باشد، این نفر دوم است که می‌تواند برد خود را حتمی کند.

تحقیق: اگر بازیکنان مجاز به برداشتن ۱، ۲، ۳ و ۴ مهره باشند، شرایط چگونه تغییر می‌کند؟

پی‌نوشت: از نسترن و نگار قلعه پوراقدم (دخترانم) که در این مقاله مرا همراهی کردند، سپاس‌گزارم.

منابع

۱. برتن، دیویدام (۱۳۸۱). «نظریهٔ مقدماتی اعداد». ترجمهٔ محمدصادق منتخب، مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ اول.
2.Chen. Jane. Twenty More Problem Solving skills for Math Counts Competitions Paper back- september 23, 2011.

ابوسعید سجزی

جعفر زیدی
دبیر ریاضی

ابوسعید احمدبن محمدبن عبدالجلیل سجزی از سیستان، از جمله مشاهیر، ریاضی‌دانان و منجمان معروف قرن چهارم هجری بوده است. او بیشتر اوقات عمر خود را در شیراز گذراند و تاریخ تقریبی دورهٔ زندگی‌اش، بنا به تحقیق سوتر، بین ۳۴۰ تا ۴۱۵ ق بوده است. این نکته را یادآوری می‌کنیم که در قرون اول هجری که ایرانیان به دین مبین اسلام مشرف شدند، زبان نوشتاری پژوهشگران و مشاهیر ایران‌زمین عربی بوده است، لذا آن‌ها کتاب‌های خود را به زبان عربی می‌نوشتند.

معاصران و نظردهندگان دربارهٔ کارهای ابوسعید سجزی

ابوسعید با **ابوریحان بیرونی** معاصر بود و در دورهٔ **عضدالدوله دیلمی** بسیاری از تألیفات خود را به نام این امیر آل‌بویه نوشته است. برخی از آثار خود را هم به **سید امیر ابوجعفر احمدبن محمد**، از امیران بلخ تقدیم کرد. بیرونی بارها در آثار خود از سجزی نام برده و راه‌حل‌هایی از مسئله‌های هندسه را از وی نقل کرده است.

بیرونی در کتاب «استیعاب‌الوجوه الممکنة فی صنعة الاسطرلاب» نوشته است: از «ابوسعید سجزی **اسطرلابی**[1] از نوع واحد و بسیط دیدم که از شمالی و جنوبی مرکب نبود و آن را **اسطرلاب زورقی** می‌نامید. او را به جهت اختراع این اسطرلاب تحسین بسیار کردم.»

بیرونی در کتاب استیعاب‌الوجوه‌الممکنة فی صنعة الاسطرلاب از سه نوع اسطرلاب ساخته‌شده توسط سجزی، به نام‌های شقایقی، آسی و زورقی سخن گفته است.

ابوعلی حسن‌بن علی مراکشی، از علمای قرن هفتم هجری، در کتاب «جامع‌المبانی و الغایات فی علم المیقات» خود دربارهٔ اسطرلاب زورقی می‌گوید که ابوریحان گفته است: مخترع این اسطرلاب سجزی بوده است. آن اسطرلاب مبنی بر این فرض است که کرهٔ زمین متحرک و کرهٔ سماوی به استثنای سیارات هفت‌گانه، ثابت‌اند. بیرونی گفته است که این شبهه‌ای است که حل آن دشوار است و این امری است که **ابوعلی سینا** بطلان آن را در کتاب «شفا» و **رازی** بطلان آن را در کتاب «ملخص» و بسیاری از کتاب‌های دیگرش بیان کرده است.

در پایان «رسالة فی قسمة الزاویة المستقیمة الخطین بثلثة اقسام متساویة»، ابوسعید پنج مسئله را که مربوط به تثلیت زاویه‌اند و ابوریحان بیرونی آن‌ها را طرح

کرده، بیان داشته است.

سجزی هفتضلعی منتظم را براساس همان قانون مورد استفادهٔ **ابوسهل بیژن کوهی** ساخت و مقاله‌هایی دربارهٔ خط مستقیم و رساله‌هایی دربارهٔ مسئله‌هایی مرتبط با آثار **اقلیدس** و **ارشمیدس** نوشت. او در جواب **شیخ ابوالحسین محمدبن عبدالجلیل** رسالهٔ «فی خواص الشکل المجسم الحادث من ادارة القطع الزاید» را نوشت. موضوع این رساله خواص سهمی‌وار و هذلولی‌وار دوار است.

توصیفی از آثار ریاضی ابوسعید سجزی

از آثار سجزی مشخص است که وی در هندسه بسیار زبردست بوده و تحقیقاتی دربارهٔ تقاطع قطوع مخروطی کرده است. تا زمان او، ریاضی‌دانان مسئلهٔ تثلیث زاویه را با روش هندسهٔ متحرک به وجهی تقریبی حل می‌کردند. ولی سجزی این مسئله را به کمک روشی کاملاً هندسی، یعنی تقاطع یک دایره و یک هذلولی متساوی‌القطرین حل کرد و آن را «روش هندسهٔ ثابت» نامید.

از سجزی حدود ۳۸ کتاب و رساله می‌شناسیم که حدود ۲۰ کتاب آن در مسائل ریاضی و بقیه دربارهٔ احکام نجوم است. مجموعهٔ خطی از کتاب‌ها و رساله‌های سجزی به دستخط خودش که در شیراز استنساخ کرده، در «کتابخانهٔ ملی پاریس» به شمارهٔ ۲۴۵۷ موجود است.

سجزی در «کتاب المدخل الی علم الهندسه» می‌گوید: در سیستان ابزار عظیم و مهمی ساختم.

برخی تألیفات ریاضی سجزی

● **رسالة فی وصف القطوع المخروطیة**

موضوع این رساله تثلیث زاویه است و یک نسخه خطی از آن در «کتابخانهٔ لیدن» موجود است. **ویکه** آن را به زبان فرانسوی ترجمه کرده است.

● **عمل المسبع فی الدائره و قسمة الزاویة المستقیمة الخطین ثلاثة اقسام متساویة**

موضوع قسمت اول این رساله محاط کردن هفتضلعی منتظم در دایره، و موضوع قسمت دوم، یعنی رسالهٔ دوم، تثلیث زاویه است. یک نسخهٔ خطی از آن در «کتابخانهٔ خدیویه» مصر موجود است. **کارل شوی** آن را به زبان آلمانی ترجمه کرده است.

● **رساله فی شکل القطاع**

این رساله را سجزی بعد از کتاب «النسبة المولفة» نوشته است، زیرا چندین بار در آن به کتاب النسبة المولفة ارجاع داده است.

● **رساله‌ای بدون عنوان**

این رساله دربارهٔ مجانب‌های هذلولی از سجزی است و در کتابخانهٔ لیدن نگهداری می‌شود. گرچه **برو کلمان** گفته است که این رساله ممکن است بخشی از رساله فی وصف القطوع المخروطیة باشد.

● **ثبت براهین بعض اشکال کتاب اقلیدس**

یک نسخه از آن در «ایندیا آفیس» موجود است.

● **رساله فی اخراج الخطوط فی الدوائر الموضوعة من النقط المعطاة**

این رساله مشتمل بر سیزده مسئلهٔ هندسی است.

● **رساله تحصیل القوانین الهندسیة المحدودة**

این رساله مشتمل بر یازده قضیه دربارهٔ هندسه و مخروطات است. سجزی در آن به دو تألیف خود به نام‌های «فی تعلیقات هندسیة» و «فی خواص القطع الناقص» اشاره کرده است.

● **رسالة فی الجواب عن المسائل التی سئل فی حل الاشکال المأخوذه من کتاب المأخوذات لارشمیدس**

این رساله مشتمل بر ۱۵ مسئلهٔ هندسی است و از آن یک نسخهٔ خطی در پاریس موجود است. **سدیو** مقدمه و صورت مسائل آن را به زبان فرانسوی ترجمه کرده است.

● **کتاب فی الاجوبة عن مسائل سألها عنه بعض مهندسی شیراز**

این رساله مشتمل بر ده مسئلهٔ هندسی است و نسخه‌ای از آن به خط ابوسعید سجزی در پاریس موجود است.

● **رساله فی خواص الشکل المجسم الحادث من ادارة القطع الزاید و المکافی**

این رساله را سجزی در جواب شیخ ابوالحسین محمدبن عبدالجلیل نوشته و موضوع آن خواص سهمی‌وار و هذلولی‌وار دوار است.

● **رسالة فی الاسطرلاب**

این رساله را سجزی به نام شخصی به نام **ابومحمد عبدالله‌بن علی حاسب** نوشته و نسخهٔ خطی آن در «کتابخانهٔ آستان قدس رضوی» موجود است.

● **کتاب فی عمل الاسطرلاب**

● **رسالة فی کیفیة تصویر الخطین الذین یقربان و لا یلتقیان**

موضوع این رساله «خطوط مجانب هذلولی» است و یک نسخهٔ خطی از آن در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی موجود است.

پی‌نوشت

۱. **تعریف اسطرلاب:** نام چند نوع ابزار اندازه‌گیری نجومی که برای سنجش ارتفاع، بُعد و میل خورشید و ستارگان، تعیین وقت ساعات روز و شب، قبله و زمان طلوع و غروب آفتاب و مقاصد دیگر که از بسیاری نتوان شمرد (دایرةالمعارف بزرگ اسلامی، مدخل اسطرلاب).

منابع

۱. قربانی، ابوالقاسم (۱۳۷۹). زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ پنجم.

۲. ــــــــ (۱۳۵۰). ریاضی‌دانان ایرانی از خوارزمی تا ابن‌سینا. انتشارات مدرسهٔ عالی دختران. چاپ اول.

۳. گلیپسی، چارلز کلستون (۱۳۹۵). زندگی‌نامهٔ دانشمندان اسلامی. ترجمهٔ احمد بیرشک و دیگران. انتشارات علمی فرهنگی. تهران.

گفت‌وگو با دکتر محمدحسن بیژن‌زاده، استاد تمام ریاضی و مؤلف کتاب‌های درسی

عشق به ریاضیات را مدیون آفرین یک معلم هستم

قسمت اول

محمدحسین دیزجی

اشاره

دورهٔ کارشناسی ریاضی را در دانش‌سرای عالی تهران گذراند و سپس وارد دورهٔ دو سالهٔ مدرسی ریاضیات در «مؤسسه ریاضیات دکتر غلامحسین مصاحب» شد. کارشناسی ارشد را از «دانشگاه شفیلد» انگلستان و دکترای ریاضیات را در رشتهٔ تخصصی «جبر جابه‌جایی» و «جبر همولوژی» از همان دانشگاه دریافت کرد. به مدت دو سال استاد مدعو در «دانشگاه شفیلد» انگلستان بود. سپس در زمینه‌های علمی و تحقیقاتی ریاضیات و آموزش ریاضیات فعالیت‌های خود را دنبال کرد.

تدریس ریاضیات در «دانشگاه خوارزمی» (تربیت‌معلم سابق)، تحقیق و تدریس به مدت یک سال در «دانشگاه آرکانزاس» آمریکا، راهنمایی، مشاوره و نظارت بر چند پایان‌نامهٔ دکترا و کارشناسی ارشد، و همچنین تألیفات متعدد، ترجمهٔ کتاب و نوشتن مقالات فراوان در این رشته، از جمله نکته‌های برجستهٔ کارنامهٔ او به شمار می‌روند. در موضوع‌های ریاضیات، جبر، جبر خطی، هندسه و آموزش ریاضی آثار متنوعی از این استاد ریاضیات در دسترس است که از دانش‌آموزان دبستانی تا دانشجویان دوره‌های عالی دانشگاهی از آن‌ها بهره می‌برند. نوشته‌هایش تنها به زبان فارسی محدود نیست و به زبان‌های خارجی نیز مطالبی را در قالب مقاله ثبت کرده است.

دکتر محمدحسن بیژن‌زاده متولد سال ۱۳۲۵ است. با پرسش‌هایی متنوع در حوزهٔ دانش ریاضی به گفت‌وگو با او نشستیم. عمرش را در راه علم‌آموزی و آموزش ریاضی صرف کرده و امروز دنیایی از تجربه و تدبیر است. برای آنان که تازه در راه آموزش ریاضیات پا پیش گذاشته‌اند و درصدد تعلیم آن به دانش‌آموزان هستند، کلامش قابل درنگ و تأمل است. حرف‌هایش سرشار از تجربه است. او ریاضیات را با تمام وجود درک می‌کند، اما فروتنی‌اش اجازه نمی‌دهد که از خویش و گام‌هایی که برداشته است بیشتر بگوید.

شما را به مطالعهٔ متن این گفت‌وگو دعوت می‌کنیم تا از دیدگاه‌ها و نظرات استاد دکتر محمدحسن بیژن‌زاده بیشتر بدانیم.

محمدحسین دیزجی

● گفت‌وگو را با این پرسش شروع می‌کنم که به نظر شما هدف از آموزش ریاضی در مدرسه چیست و اصولاً چرا باید دانش‌آموز ریاضی یاد بگیرد؟

❍ بسم‌الله الرحمن الرحیم. بنده بعد از فارغ‌التحصیلی، به‌عنوان استاد مدعو با دانشگاه اکستر و شفیلد انگلستان همکاری داشته‌ام. متخصصان آموزش ریاضی هدف‌های متعددی را برای آموزش و یادگیری ریاضی بیان کرده‌اند؛ از جمله اینکه ریاضیات به‌عنوان پایه‌ای برای علوم شناختی، مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و سایر علوم، در تبیین پدیده‌های طبیعت نقش دارد. اصولاً مأموریت علوم این است که پدیده‌های طبیعت را شناسایی کنند، به این منظور که بتوان بر آن‌ها مسلط شد و از آن‌ها استفاده کرد. جهان فیزیکی پر از پدیده است. حتی جوامع انسانی شهری و روستایی پدیده‌هایی هستند که برای بررسی تغییرات مداوم آن‌ها علوم محضی مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی و ... به میدان آمده‌اند. البته امروزه سایر علوم نیز، از جمله جغرافیا، از ریاضیات بهره می‌برند.

جغرافیا بدون استفاده از ریاضیات نمی‌تواند پژوهش‌های خود را دربارهٔ پدیده‌ها به سرانجام برساند. برای مثال، چند سال قبل بنده در جایی خواندم که «انجمن جغرافی‌دانان آمریکا» برای متغیرهای جغرافیایی معادلاتی را تعریف کرده بود و ناچار شد یک دستگاه معادلهٔ خطی، شامل دو میلیون معادله با چهارصد هزار مجهول حل کند. اگر مجبور بودیم این دستگاه را به روش سنتی و دو معادله و دو مجهول یا سه معادله و سه مجهول حل کنیم، سال‌های سال و شاید صدها سال زمان می‌برد. خوش‌بختانه ریاضیات روشی را براساس «روش حذفی گاوس ـ جردن» ارائه کرده که امروزه برای آن برنامهٔ رایانه‌ای نیز نوشته شده است. این برنامه می‌تواند چنین دستگاه معادلات بزرگ را حل کند و کار صدساله را ظرف چند دقیقه انجام دهد. این قدرت ریاضیات است.

نمونهٔ دیگر پدیده‌ای مثل منظومهٔ شمسی است. برای شناخت پدیدهٔ منظومهٔ شمسی، حساب دیفرانسیل و انتگرال ابداع شد تا بتوانند چگونگی و چرایی حرکات سیارات منظومهٔ شمسی به دور خورشید و نیروهای درگیر و مسیرهای حرکتی آن‌ها را تبیین کنند که در حال حاضر یک درس دبیرستانی است. اگر حساب دیفرانسیل و انتگرال کشف نمی‌شد، همچنان این موضوع برای **کپلر، نیوتن، لایبنیتز** و بقیهٔ ستاره‌شناسان و فیزیک‌دانان، به‌صورت یک مسئلهٔ حل‌نشده باقی می‌ماند. در حال حاضر مدل‌سازی کاملاً مشخص و رفتار منظومهٔ شمسی قابل پیش‌بینی است. یا اقتصاد امروزه بدون ریاضیات معنی ندارد.

متأسفانه ما در ایران باور داریم فقط کسی که وارد رشتهٔ ریاضی می‌شود، باید ریاضی را بخواند و به خوبی فرا بگیرد و سایر رشته‌ها نباید ریاضی بخوانند. این بزرگ‌ترین اشتباه است. از نظر بنده کسی که رشتهٔ حسابداری، جغرافیا، اقتصاد (اکونومتری و اقتصادسنجی در اصل ریاضیات است) و ... می‌خواند، باید ریاضیات را در سطح خوب بداند. ولی متأسفانه خیلی از اقتصاددانان ما با دانش روز اقتصاد آشنا نیستند. چند سال قبل یکی از استادان اقتصاد دانشگاه تهران در زمینهٔ اکونومتری کتابی را ترجمه کرد که وقتی بنده آن را مطالعه کردم، متوجه شدم تقریباً نیمی از کتاب ریاضیات بود و نیم دیگر آن مقدمه‌ای بود برای نیمهٔ دیگر آن. کتاب حاوی مباحث ریاضی ماتریس، معادلات، دیفرانسیل و ... بود و من از وجود این مباحث ریاضی در آن تعجب کردم.

در حقیقت ریاضیات برای همهٔ علوم لازم است. حتی علوم انسانی نیز از این قضیه مستثنا نیستند و علوم انسانی دیگر مانند قدیم، داستان و قصه نیست. از نظر ریاضی‌دانان تا وقتی موضوعی به زبان ریاضی در نیاید، اصلاً علم نیست. حتی در باستان‌شناسی از جبر خطی استفاده می‌شود. در کتابی که توسط بنده و با همکاری چند تن از دوستان تألیف شد و در «دانشگاه پیام نور» به چاپ رسید، بخشی با عنوان «کاربرد جبر خطی در باستان‌شناسی» وجود دارد. بنده قبل از آن اصلاً فکر نمی‌کردم

> **مهم‌ترین نکته در نگارش کتاب این است که مطالب برای بچه‌ها قابل‌فهم و درک باشند، به‌صورت فعالیت‌محور تنظیم شوند بچه‌ها را به ریاضیات علاقه‌مند کنند**

که در باستان‌شناسی هم بشود از جبر خطی استفاده کرد. در این کتاب مثال‌هایی از ترافیک شهری نیز آمده است که چطور می‌توان با کمک ریاضی ترافیک را سامان‌دهی کرد. یک‌طرفه کردن خیابان‌ها در شهرها بنیان ریاضی دارد.

● صحبت‌های شما در مورد اهمیت ریاضی است. اگر امکان دارد صحبت‌های خود را ریزتر بیان کنید تا معلمان ما بدانند چگونه به دانش‌آموزان پیام‌های شما را منتقل کنند و از طریق این پیام، عشق به ریاضیات از پایه در کودکان شکل بگیرد. معلمان ما از این زاویه چگونه می‌توانند درک خوبی از نقش ریاضیات در علوم گوناگون پیدا کنند و به بچه‌ها اهمیت زیربنایی بودن ریاضیات را انتقال دهند؟

❍ پرسش بسیار خوبی را مطرح کردید. بنده یکی از هدف‌های ریاضیات را بیان کردم که به سایر علوم در شناخت پدیده‌های طبیعت کمک می‌کند. بنده در کتاب خود با عنوان «آموزش و یادگیری ریاضیات»، سه هدف دیگر را شرح داده‌ام و از سه هدف دیگر نیز نام خواهم برد. اما قبل از آن در پاسخ به سؤال شما،

برای اینکه دانش‌آموزان را به ریاضیات علاقه‌مند کنیم، باید شیوهٔ یاددهی ـ یادگیری خود را تغییر دهیم. تا وقتی که ریاضیات به روش سنتی دیکته کردن، حافظه‌ای و دستوری آموزش داده شود، بچه‌ها با ریاضیات انس نخواهند گرفت. البته در حال حاضر کتاب‌های ریاضیات خوش‌بختانه به‌صورت فعالیت‌محور هستند، ولی در تدریس که مهم‌ترین بخش آموزش است، این موضوع فعلیت پیدا نمی‌کند. در صورتی که اصل تدریس است و بچه با کتاب کاری ندارد. دانش‌آموز نگاه می‌کند ببیند معلم ریاضی چه ریاضیاتی برای او دارد. معلم باید بداند چگونه مفهوم را به‌صورت فعال و مشترک با دانش‌آموزان سامان‌دهی کند.

هنر جدید معلمی این است که معلم کاری کند که دانش‌آموزان در صورت‌بندی مفهوم مورد آموزش شریک و سهیم باشند. مثلاً در آموزش قضیهٔ **فیثاغورس** به‌صورت سنتی، صورت مسئله نوشته می‌شود و شروع به اثبات آن می‌کنند، با این روش کودک فکر می‌کند این قضیه از کجا آمده و به‌صورت جادو

کسی که تفکر ریاضی دارد، دیدگاهی سالم و سازنده خواهد داشت و چون دانش جزئی از وجود اوست، هیچ‌وقت حاضر نیست آموخته‌های خود را فدای چیز دیگری کند

به نظرش می‌رسد. اما در اصل باید بتوان به‌صورت تجربی شأن نزول آن را با ترسیم چند مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع متفاوت و اندازه‌گیری اضلاع مثلث‌ها و کشف رابطهٔ موجود بین آن‌ها نشان داد و به دانش‌آموز در کشف مفاهیم کمک کرد. سپس اضلاع را مربع کنیم و بعد از بچه‌ها بپرسیم الان چه رابطه‌ای می‌بینند؟ اینکه مربع وتر برابر است با مجموع مربعات اضلاع. این قانون خلقت است که وقتی انسان چیزی را کشف کند، آن را دوست خواهد داشت. برای مثال، نجاری که با علاقه میزی را می‌سازد، به آن میز عشق خواهد ورزید و برای محافظت و نگهداری از آن سفارش می‌کند. ولی وقتی نجاری میزی را از روی عشق و علاقه نساخته باشد، نسبت به آن بی‌تفاوت است و هیچ توصیه‌ای نیز برای آن نمی‌کند. بنابراین این امر در همه جا مشهود است.

ما بچه‌ها را از یادگیری محروم می‌کنیم و روی آموزش تأکید می‌کنیم. در صورتی که آموزش جواب نمی‌دهد. بنده این موضوع را برای بسیاری از دبیران توضیح داده‌ام و آنان نیز قبول کرده‌اند. نظرشان این است که تمهیدات و ابزار کافی ندارند و بچه‌ها مشکلات اجتماعی و ... دارند. تا وقتی این اتفاق نیفتد و کلاس فعال به وجود نیاید، یادگیری اتفاق نمی‌افتد. به قول متخصصان ریاضی، در حقیقت باید کودکان در جاهایی از کشف ریاضی لذت ببرند و اتفاقاً این نوع کشف‌ها در دبستان و دبیرستان به راحتی می‌تواند اتفاق بیفتد.

کلاس ریاضی باید به شکل کارگاه ریاضی باشد و نه کلاس ریاضی. امروزه در کشورهای پیشرفته کارگاه‌های ریاضی وجود دارند و فضا طوری نیست که بچه‌ها روبه‌روی معلم بنشینند. بلکه بچه‌ها میز کار دارند و روبه‌روی هم می‌نشینند و با استفاده از نقاله، خط‌کش، کاغذ رنگی و ... مشغول کشف هستند و معلم فقط راهنمای آن‌هاست.

هدف‌های دیگری نیز در آموزش ریاضیات وجود دارند. ریاضی خود زیبایی و فرهنگ دارد و می‌تواند در اعتلای فرهنگ جامعه هم سهیم باشد. یکی از هدف‌های ریاضیات کمک به اعتلای فرهنگ است. فرهنگ مفهوم ثابتی نیست؛ به این معنا که یا باید رشد کند و یا نزول کند. ما باید از خود بپرسیم که ریاضی در چه مواردی می‌تواند به اعتلای فرهنگ کمک کند؟ برای مثال، ما در ریاضیات مفهومی به نام «نمادسازی» داریم. سعی می‌شود خیلی از چیزها به‌صورت ساده با یک نماد نشان داده شود و سپس روی آن کار شود. فرهنگ نیز همین‌طور است. به‌طور مثال با اختصاص کد به معنا و مفاهیم می‌توان عمل نمادسازی را در فرهنگ انجام داد و در پس هر کدی معنایی وجود دارد. مورد دیگر قدرت تفکر است. خداوند به بچه‌ها قدرت تفکر داده است. یکی از هدف‌های ریاضیات اعتلای قدرت تفکر است و آن را از قوه به فعل در می‌آورد. یعنی وقتی کودک مسئله‌ای را نمی‌تواند حل کند، نباید با ندادن نمره یا حل کردن مسئله برای او، از آن بگذریم، بلکه باید به کودک در حل مسئله کمک کنیم و با این کار قدرت تفکر او را بالا ببریم. باید ایمان داشته باشیم که کودکان می‌توانند مسئله حل کنند. بچه قوهٔ خلاقیت، استدلال و تفکر را می‌تواند در علوم دیگر هم یاد بگیرد، ولی متولی اصلی آن ریاضیات است.

● **در صورتی که تصور عموم این نیست و اغلب فکر می‌کنند که با خواندن ریاضی در نهایت مهندسی خواهند شد که می‌تواند یک ساختمان را به خوبی طراحی کند. در حالی‌که همان فرهنگی که به آن اشاره کردید، ریشه در ریاضیات دارد.**

❍ تربیت ریاضی باید در کودکی صورت گیرد. با رشد استعدادهای کودک، او می‌تواند در آینده مهندس، پزشک، کارشناس و ... خوبی شود. اگر دانش‌آموز درس را با عشق و علاقه بخواند، می‌تواند در شغل خود نیز با علاقه خدمت کند. اما اگر تحصیل با تحمیل باشد، شخص در هر شغلی که وارد شود باز هم تصور تحمیلی بودن آن را دارد و نمی‌تواند بالنده، خلاق و موفق باشد. یکی از هدف‌های دیگر ریاضی تأمین آیندهٔ فرد و جامعه است. هر فردی برای موفق شدن ناچار است از فراگیری ریاضیات عبور کند و با رشد طبیعی تفکر و استدلال که بزرگ‌ترین قوای خدادادی است، به موفقیتی تثبیت‌شده برسد. ممکن است این قوا به‌صورت ظاهری رشد کند، ولی در یک مرحله از زندگی سقوط خواهد

کرد؛ چرا که رشد واقعی صورت نگرفته است. این اتفاقات متأسفانه در جامعهٔ ما به کرات دیده می‌شوند، به این دلیل که رشد رخ نداده است. رشد باید به‌صورت طبیعی صورت گیرد. برای مثال درخت در طول یک شبانه‌روز یکباره یک متر رشد نمی‌کند و عملاً رشد آن را به چشم نمی‌بینیم. رشد تفکر هم باید به این شکل باشد و رشدی طبیعی داشته باشد. دورهٔ ابتدایی مهم‌ترین دورهٔ آموزش محسوب می‌شود، ولی متأسفانه به آن بهای کافی داده نمی‌شود.

● صحبت‌های شما سؤالی را در ذهن من ایجاد کرد. جناب‌عالی بر اهمیت ریاضیات به‌عنوان اصل و اساس سایر علوم، حتی علوم انسانی، تأکید دارید. ریاضی را یک فرهنگ و تفکر می‌دانید. حال آنکه برخی هنوز تصور می‌کنند که این دانش در رشته‌های مرتبط، مثل فنی و مهندسی حائز اهمیت است. کمی دربارهٔ اهمیت داشتن تفکر ریاضی و نقش آن در زندگی افراد برایمان توضیح بدهید.

❍ کسی که تفکر ریاضی دارد، دیدگاهی سالم و سازنده خواهد داشت. اگر چنین فردی طراح ساختمان، حسابدار، اقتصاددان یا ... بشود، به این دلیل که دانش جزئی از وجود اوست، هیچ وقت حاضر نمی‌شود به فرض دانش حسابداری یا دانش اقتصادی خود را فدای چیز دیگری کند. پس وقتی بر یادگیری به جای آموزش تأکید داریم، به این دلیل است که یادگیری جزئی از وجود فرد می‌شود، ولی آموزش این‌طور نیست. مشکل این است که بچه‌ها بعد از دوازده سال خیلی از مطالب (اتحادها، قضیهٔ فیثاغورس، خواص عدد اول، مثلثات و ...) را فراموش می‌کنند و مطالب کمی در خاطرشان باقی می‌ماند. این موضوع به این دلیل است که یادگیری اتفاق نیفتاده است. یادگیری جزئی از پرستیژ و اخلاق انسان می‌شود. او حاضر نمی‌شود تحت فشار، محاسبات و دانش خود را تغییر و کاری نادرست انجام دهد. مثلاً پزشکی که چنین ویژگی‌هایی دارد، حاضر نخواهد شد به خاطر پول کارهای غیراخلاقی انجام دهد و اگر شخصی واقعاً به عمل نیاز نداشته باشد و با درمان جزئی قابل بهبود باشد، همین کار را انجام خواهد داد.

اگر افراد واقعاً با عشق و زحمت درس بخوانند و به جای آموزش، یاد بگیرند، خیلی از مشکلات حل خواهد شد. متأسفانه علاوه بر آموزش‌وپرورش، دانشگاه‌های ما نیز مشکل دارند. ما باید از خود بپرسیم که «چرا در کشورهای دیگر آمار مسائل اجتماعی و فساد کمتر است؟» نظام آموزشی باید پاسخگو باشد و باید برای آن چاره‌اندیشی کند و در این صورت به فرایندها و رویه‌های دیگری می‌توان رسید.

● سؤال بعدی من این است که چرا اساساً ساختار ریاضیات به گونه‌ای است که به کاربرد منجر می‌شود؟

❍ بنده در سؤال قبل به گونه‌ای این سؤال شما را پاسخ دادم اما باید باز هم تأکید کنم که اساساً ریاضیات از دو مسیر به وجود می‌آید و کشف می‌شود. یکی از مسیرهای مزبور این است که وقتی فیزیک‌دانان و شیمی‌دانان بررسی و پژوهش می‌کنند، نیازمند هستند که به گونه‌ای متغیرها را به یکدیگر ربط دهند و برای این کار به سمت ریاضی می‌آیند. همان‌طور که می‌دانید، بسیاری از فیزیک‌دانان ریاضی‌دان هم بودند. مثلاً **نیوتن** هم ریاضی‌دان بود و هم فیزیک‌دان. لایبنیتس هم فیزیک‌دان، هم ریاضی‌دان و هم فیلسوف بود. این دانشمندان ریاضی را برای شناسایی پدیده‌ها به وجود می‌آورند که بعدها با جدا شدن این ریاضیات از سایر علوم، ریاضیات شکل می‌گیرد. مثال‌های آن همان حساب دیفرانسیل یا روش حذفی گاوس جردن هستند. یعنی ریاضیات از روی ناچاری و برای شناخت پدیده‌ها به وجود می‌آیند.

یکی از ریاضی‌دانان فرانسوی قرن شانزدهم ـ به نظرم **پاسکال** بود، جایی زندگی می‌کرد که مردم شرط‌بندی می‌کردند. هنگامی که برای شرط‌بندی از وی کمک می‌خواهند، استدلال می‌کند که در این قضیه حتماً ریاضیاتی وجود دارد و ریاضیات می‌تواند به آن‌ها کمک کند. شرط‌بندی برای مردم آنجا کار مباحی بود. به این ترتیب برای شرط‌بندی مدل‌سازی ریاضی انجام می‌دهد و آمار و احتمال و ترکیبیاتی را که قبلاً وجود نداشتند، کشف می‌کند. بنابراین به ریاضی‌دان مراجعه می‌کنند و وی روی مسئله فکر می‌کند و مدل و فرمول ارائه می‌دهد.

برخی قضیه‌ها قله‌های ریاضی هستند و وقتی معلمان به این مباحث می‌رسند، باید مکث بیشتری کنند و زیبایی آن‌ها را به بچه‌ها انتقال دهند

شکل کلاس‌های اول ابتدایی، یا متکلم‌وحده بودن معلم باید تغییر کند. مثلاً می‌توان از میزهای کارگاهی کوچک استفاده کرد

راه دیگر نیز از درون خود ریاضیات است. ریاضیات زیبایی‌هایی دارد. در یونان باستان هنگامی که قضیهٔ فیثاغورس کشف شد، در آن زمان به دنبال کاربرد آن نبودند. یا زمانی که عددهای اول کشف شدند، به احتمال قریب به یقین کاربردی برای آن قائل نبودند. یعنی ریاضیات را دوست داشتند. مثلاً عددهای اول را به‌عنوان عددهایی که خواصی دارند که عددهای مرکب ندارند، شناسایی کردند و برایشان جالب بود. اما امروزه از عددهای اول در نظریهٔ کدها و در نظریهٔ امنیت رایانه‌ای در سطح عالی و پیچیده استفاده می‌کنند. یعنی مفاهیمی درون ریاضیات به وجود آمده‌اند که در آن زمان «ریاضیات محض» به آن‌ها گفته می‌شد، در صورتی که ریاضیات محضی شاید به آن معنا واقعاً وجود نداشته باشد. چون از همهٔ ریاضیات به گونه‌ای استفاده شده است.

● **پس درواقع می‌توان گفت که بخشی از ریاضیات علمی است که به تناسب نیاز از آن استفاده می‌کنیم و بخش دیگر آن مفاهیمی است که نیازها آن‌ها را تولید می‌کنند. شما که وارد عرصهٔ ریاضیات شده و سال‌ها عمر خود را صرف این رشته کرده و هم ریاضی خوانده و هم تدریس و هم تألیف کرده‌اید، از نگاه خود زیبایی در ریاضیات را چگونه تعریف می‌کنید؟**

❍ ملاک‌های زیبایی در ریاضیات را شخصی در کمبریج به نام **هاردی** در کتاب خود با عنوان «اعتراف ریاضی‌دان» آورده است. بنده مطالبی را در این زمینه برداشت کرده‌ام. سؤال اول این است: «ما چه چیزی را زیبا می‌دانیم؟» زیبایی ویژگی‌هایی دارد. یکی از ویژگی‌هایش این است که غیرمنتظره است. اگر غیرمنتظره نباشد، طبیعتاً می‌گوییم ما قبلاً چنین چیزی را دیده‌ایم. برای مثال، اگر کسی یک تابلو را طراحی کند که قبلاً شما دیده باشید، شما را جذب نمی‌کند. ولی اگر تابلویی باشد که به دلایلی غیرمنتظره باشد، شما را جذب می‌کند و در مورد سبک، حکمت و تفسیر تصویر سؤال‌هایی به ذهن شما می‌آیند.

ویژگی دیگر عمق است. ریاضیاتی زیباست که عمق داشته باشد. همهٔ ریاضیات مثل هر چیز دیگری، به یک نسبت زیبا نیست. ما به هر حقیقت ریاضی «قضیه» می‌گوییم. چون برای آن اثبات داریم. در ریاضیات ده‌ها میلیون قضیه وجود دارند. بنابراین ریاضیات بسیار وسیع است و بیش از هشتاد شاخهٔ اصلی دارد. در هر شاخه نیز ماهانه بیش از صدها قضیه اضافه می‌شود. چون در هر شاخه دانشجویان و ریاضی‌دانان در دانشگاه‌های کشورهای جهان تحقیقات متعددی انجام می‌دهند و حاصلش را در مجلات چاپ می‌کنند. اما همهٔ قضیه‌ها به یک نسبت زیبا نیستند. قضیه‌ای زیباتر است که عمق بیشتری داشته باشد. چرا قضیهٔ فیثاغورس زیباست؟ چون اولاً غیرمنتظره است. در مثلث هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است و وقتی مربع شود، باز هم این نسبت باید بیشتر به هم بخورد. ولی وقتی در مثلث قائم‌الزاویه مجموع مربع دو ضلع با مربع یک ضلع برابر می‌شود، غیرمنتظره است. عمق چنین قضیه‌ای در ریاضیات بسیار زیاد است. اگر این قضیه نباشد، بسیاری از روابط در مثلثات وجودی پیدا نخواهند کرد.

● **منظور شما از عمق این است که یک قضیه پیش‌زمینه‌ای برای سایر قضیه‌ها می‌شود؟ یعنی از نظر شما دلیل عمق داشتن برخی از قضیه‌های ریاضی این است که زیرشاخه و پایهٔ بسیاری از مباحث ریاضی و علوم دیگرند؟**

❍ بله. عمق بدین معنا که کاربردی باشد و پیش‌زمینه‌ای نیز برای سایر قضیه‌ها باشد. این گونه قضیه‌ها قله‌های ریاضی هستند. وقتی معلمان به این مباحث می‌رسند، باید مکث بیشتری کنند و زیبایی آن‌ها را به دانش‌آموزان منتقل کنند؛ چه به‌صورت شهودی و چه به‌صورت داستان. کتابی از دکتر **مهدی بهزاد** با عنوان «افسانهٔ پادشاه و ریاضیات» وجود دارد که حاوی نمایش‌نامه‌های متعددی است و برای علاقه‌مند کردن بچه‌ها به ریاضیات تألیف شده است. ما باید بتوانیم ریاضیات را با انیمیشن و تئاتر به بچه‌ها آموزش دهیم. ریاضیات خشک نیست، ما آن را خشک کرده‌ایم. چون ریاضی از حالت طبیعی خارج شده است، بچه‌ها از آن زده می‌شوند. البته هر چیزی از حالت طبیعی خود خارج شود، افراد از آن زده می‌شوند.

متأسفانه برخی از دبیران اعتقاد دارند و بیان می‌کنند که ریاضیات بسیار مشکل است و با این کار فکر می‌کنند که شخصیت خود را بالا می‌برند. در صورتی که اگر توانستید ریاضیات را آسان کنید، شخصیت شما بالا خواهد رفت. چرا باید بچه‌ها و والدین از اینکه وارد رشتهٔ ریاضی شوند، ترس داشته باشند؟ در صورتی که هر رشته‌ای بالاخره مقداری ریاضی خواهد داشت. باید ریاضی را به قدری زیبا جلوه داد که فرد عاشقانه ریاضی را دنبال کند. در کشورهای دیگر نیز بنده شاهد بوده‌ام که ریاضیات را با سایر علوم همسنگ نمی‌دانند و بالاخره آن را از سایر علوم مقداری مشکل‌تر می‌دانند، ولی ریاضیات را دوست دارند و به آن حس بدی ندارند. حتی کسانی که ریاضی هم نخوانده‌اند، ریاضی را دوست دارند و در حد اطلاعات خود از آن استفاده می‌کنند و برای کسی که ریاضی خوانده و ریاضی کار می‌کند نیز احترام بیشتری قائل‌اند. اما من این جریان را خیلی در ایران نمی‌بینم.

● آموزش ریاضی در زمانی که شما محصل یا دانشجوی ریاضی بودید، با زمان حاضر چه تفاوت‌هایی داشت؟

❍ زمانی که ما سال اول دبیرستان را پشت سر گذاشتیم و وارد مرحلهٔ انتخاب رشته شدیم، سه رشته وجود داشت: علوم طبیعی، علوم ادبی و ریاضی. به‌طور کلی درس خواندن در آن زمان برای بچه‌ها انگیزه‌های بیشتری داشت. مثلاً ریاضی خواندن با این هدف نبود که استاد ریاضی یا مهندس شویم. در آن زمان خوش‌بختانه معلمانی داشتیم که به خوبی ریاضیات را عرضه می‌کردند. البته یادگیری حالت تعاملی نداشت.

● منظور شما از اینکه حالت تعاملی نداشت، چیست؟

❍ یعنی یادگیری به گونه‌ای نبود که به بچه‌ها در کشف ریاضیات کمک کنند (روش کشفی)، ولی به قدری مسلط بودند که ریاضیات را به خوبی عرضه می‌کردند. مثلاً معلم هندسه به قدری زیبا شکل‌های هندسی را می‌کشید و قضایا را توضیح می‌داد که ما شیفتهٔ آن می‌شدیم. گفتار، روش و تسلطی که در کلاس داشت، بچه‌ها را جذب می‌کرد. سر کلاس مطالب تفهیم می‌شدند و بچه‌هایی که به درس گوش می‌دادند، از گفتار معلم لذت می‌بردند. متأسفانه امروزه این‌گونه نیست. امروزه می‌بینیم حجم ریاضیات در مدرسه‌های غیرانتفاعی زیاد شده است و این موضوع هیچ‌گاه جایگزین کیفیت نمی‌شود. در حالی که باید کیفیت تدریس ارتقا پیدا کند. مدرسه‌های غیرانتفاعی حجم مطالب را نسبت به مدرسه‌های دیگر بیشتر می‌کنند و باعث خستگی بیشتر بچه‌ها می‌شوند. حجم زیاد بچه‌ها را خسته می‌کند. در حال حاضر بچه‌ها فقط به فکر نمره‌اند و همه به دنبال نمره‌های ۱۹ یا ۲۰ هستند. در صورتی که ما به دنبال نمره نبودیم و فقط دغدغهٔ یادگیری مفاهیم را داشتیم. فلسفهٔ مدرسه این نیست که برای آزمون بنا شده باشد، بلکه برای یادگیری بنا گردید و بعد آزمون و امتحان وارد آن شد. امروزه یادگیری فراموش شده و مدرسه صرفاً مکانی برای آزمون شده است.

● در مورد نکته‌ای که فرمودید، مبنی بر اینکه بچه‌ها در آن زمان در کلاس یاد می‌گرفتند، شاید استعداد عامل تأثیرگذاری باشد و با تدریس معلم، بعضی از بچه‌ها درس را در کلاس یاد بگیرند و برخی یاد نگیرند، یا اینکه ممکن است دانش‌آموزی ده مطلب را در کلاس درک کند و موضوع یازدهم را متوجه نشود. استعداد عاملی است که همیشه وجود داشته و وجود دارد و وابسته به زمان خاصی نیست. تأثیرگذار نیز خواهد بود. البته این موضوع در مورد همهٔ درس‌ها صدق می‌کند. لطفاً راهنمایی بفرمایید که وقتی معلمان با چنین دانش‌آموزانی مواجه می‌شوند، چه کارها و اقداماتی باید انجام دهند که در پایان سال تحصیلی همهٔ دانش‌آموزان مباحث را فرا بگیرند و اگر فرضاً این یادگیری در کلاس هم اتفاق نیفتاد، معلم بتواند با تمهیداتی یادگیری درست و صحیح را رقم بزند.

❍ در ریاضیات دو بخش وجود دارد: محتوایی که ارائه می‌شود و در آن مثال‌ها و مسائلی وجود دارند، و در پایان، بخش تمرینات. یعنی فرمت کتاب درسی به گونه‌ای است که یک بخش محتوایی و یک بخش تمرینی در آن وجود دارد. اگر دانش‌آموز با محتوا مشکل دارد، باید سعی شود با روش‌های دیگر و ساده‌تر محتوا به او تفهیم شود. البته تفاوت‌های فردی وجود دارند، ولی به‌صورت فاحش نیستند. اگر در بخش مسائل و تمرینات مشکل وجود داشته باشد، می‌توان با دادن مسائل واسطه، مشابه، ساده و مکمل کتاب، توان حل تمرینات مشکل‌تر را آموزش داد. متأسفانه معلمان ما این اقدامات را انجام نمی‌دهند و گاهی حتی مسائل مشکل‌تر نیز می‌دهند و مسائل ساده‌تر نمی‌دهند و با این اقدام، کار را مشکل‌تر می‌کنند. به هر حال باید روش تشویقی را در پیش گرفت.

طبیعی است که بچه‌ها از ۱۰۰ درصد مطالب، ۸۰ درصد آن را درک کنند. اشکالی ندارد اگر برای همین درصد و با ارفاق دو نمره، به بچه‌ها نمره بدهیم و به کسی که مثلاً نمرهٔ ۱۷ کسب کرده، با دو نمرهٔ تشویقی، ۱۹ بدهیم. با این کار بچه‌ها را به درس وابسته می‌کنیم. اگر معلمان روش تشویقی را پیش بگیرند و دانش‌آموزان را بدهکار کنند، آن‌ها به درس خود وابسته می‌شوند. چون دانش‌آموز با کسب نمرهٔ تشویقی می‌داند که حق این نمره را ندارد، ولی سعی می‌کند آن را جبران کند.

شگردهای این‌چنینی یا شگرد خودآزمایی نیز وجود دارند. در نظام آموزشی ما خودآزمایی وجود ندارد، در صورتی که در کشورهای پیشرفته معلم به دانش‌آموزان یاد می‌دهد که چگونه خود را بیازمایند و با خودآزمایی اشکال‌های احتمالی خود را متوجه شوند. این روش نیز فنی است که جای خالی آن حس می‌شود.

یادگیری گروهی نیز فن مؤثری است، چون بچه‌ها از هم بهتر یاد می‌گیرند. متأسفانه ما روی این روش نیز کار نمی‌کنیم. سامان‌دهی بچه‌ها و گروه‌بندی آنان به منظور کار گروهی، حس تعاون و دوستی را به وجود می‌آورد. دانش‌آموزی که فرایند یادگیری را سریع‌تر طی کرده است، با آموزش به دوستانش، خود مطالب را بهتر درک می‌کند. این روش‌ها از قدیم وجود داشتند، به طوری که بعد از مدرسه برای درس خواندن به خانه‌های یکدیگر می‌رفتیم. متأسفانه در حال حاضر چنین چیزی وجود ندارد و اگر بچه‌ها به خانه‌های هم بروند، برای درس خواندن نمی‌روند.

پایان قسمت اول

ارتقای درک مفهومی دانش‌آموزان از مبحث تعیین علامت

به کمک مثال‌های روزمره و دست‌سازه‌های ریاضی

ارائه‌شده در شانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران (تابستان ۹۷-بابلسر)

عبدالرحمن شهیدزاده و مرضیه سعید،
دبیران ریاضی و مدرسان دانشگاه سلمان فارسی کازرون

چکیده

پژوهش حاضر با هدف ارتقای درک مفهومی دانش‌آموزان از مبحث تعیین علامت به کمک مثال‌های روزمره و دست‌سازه‌های ریاضی انجام شده است. بدین منظور، در مرحلهٔ نخست، به‌عنوان یک هدف پایه، چارچوبی برای آموزش تعیین علامت براساس مثال‌های روزمره و استفاده از دست‌سازه بر پایهٔ کار میدانی طراحی و تولید شد. از بین ۵۸ دانش‌آموز پایهٔ دهم یک مدرسه از شهرستان کازرون، به روش نمونه‌گیری ساده، دو گروه بیست نفره به‌عنوان گروه‌های آزمایش و کنترل انتخاب شدند. در این پژوهش «آموزش بر مبنای مثال‌های روزمره و دست‌سازه‌های ریاضی و آموزش به شیوهٔ کتاب درسی» متغیر مستقل، و«ارتقای درک مفهومی دانش‌آموزان از مبحث تعیین علامت» به‌عنوان متغیرهای وابسته در نظر گرفته شدند. هر یک از گروه‌های آزمایش و کنترل طی جلسات تدریس این مبحث تحت‌تأثیر متغیرهای مستقل قرار گرفتند. برای تجزیه و تحلیل اطلاعات از «آزمون یومن- ویتنی» استفاده شد. نتایج تحقیق نشان داد که تفاوت معنی‌داری بین میزان یادگیری دانش‌آموزان دو گروه آزمایش و کنترل وجود دارد و یادگیری دانش‌آموزان گروه آزمایش به‌طور قابل ملاحظه‌ای از گروه کنترل بهتر بود.

کلیدواژه‌ها: تعیین علامت، دست‌سازهٔ ریاضی، مثال روزمره، یادگیری ریاضی

مقدمه

گالیله می‌گوید: «جهان هستی همواره در برابر دیدگان حیرت‌زدهٔ انسان گسترده خواهد ماند و انسان هرگز نمی‌تواند آن را درک کند، مگر اینکه زبانی را که این جهان با آن نوشته و توضیح داده شده است، یاد بگیرد و حروف آن را بشناسد. این زبان چیزی جز ریاضیات نیست و این حروف جز مثلث، دایره و سایر اشکال هندسی چیز دیگری نیستند.»

«ریاضیات علم نظم است و موضوع آن یافتن، توصیف و درک نظمی است که در وضعیت‌های ظاهراً پیچیده نهفته است. ابزارهای اصولی این علم، مفاهیمی هستند که ما را قادر می‌سازند این نظم را توصیف کنیم.» ریاضیات تنها زبانی است که پدیده‌های طبیعی جهان هستی را به خوبی توضیح می‌دهد.

برقراری ارتباط بین مفاهیم ریاضی با سایر درس‌ها و علوم، و همچنین مسائل زندگی روزمره و کاربرد آن‌ها (ارتباط بیرونی ریاضی) موجب می‌شود که دانش‌آموز در هر لحظه بتواند پاسخ

این سؤال را که «این درس به چه درد می‌خورد؟» کسب کند.

هنگام آموزش ریاضی می‌تـوان ارتباط مفاهیم ریاضی را با زندگی، طبیعت و علوم مختلف بیان کرد. برای مثال می‌توان به استفاده از آمار در درک کدهای ژنتیکی [۹]، کاربردهای محاسبهٔ ســطح و حجم، و مثلثات در نقشه‌خوانی و نقشه‌برداری، کاربرد نماها و لگاریتم‌ها در محاسبهٔ نرخ جمعیت، محاسبهٔ نرخ بهره و نرخ رشد اقتصادی، و پیش‌بینی‌های اقتصادی که در برنامه‌ریزی‌ها نیاز است، اشاره کرد[۱۱]. از این قبیل مثال‌ها بسیار وجود دارند که می‌توان در آموزش ریاضی از آن‌ها بهره گرفت.

در استانداردهای «انجمن ملی معلمان ریاضی» اشاره شده است[۲]: برنامه‌های آموزشـــی دانش‌آموزان از پیش‌دبستانی تا دبیرستان باید به‌گونه‌ای باشد که آن‌ها بتوانند:

۱. ارتبـــاط میان مفاهیم ریاضی را تشــخیص دهند و به کار برند؟

۲. ارتباط مفاهیم ریاضی را دریابند و کل منســجمی را ایجاد کنند؟

۳. ریاضیات را در زمینه‌هایی غیر از ریاضیات تشخیص دهند و به کار برند.

هنگام تدریـــس ریاضیات می‌توان تمرین‌هایی ارائه کرد که ارتباط ریاضی با زندگی را نشان دهند. محدودهٔ تمرین‌هایی که ارتباط با زندگی را نشان می‌دهند[۱]، عبارت‌اند از:

- قیاس‌های ساده (برای مثال، ارتباط دادن عددهای منفی با درجهٔ حرارت زیر صفر)؛
- کلاسیک (برای مثال، «دو قطار ایستگاه را ترک می‌کنند اگر سرعت حرکت متفاوتی داشته باشند ...»)؛
- تجزیه و تحلیـــل داده‌های واقعی (برای مثال، پیدا کردن میانه و مد قد هم‌کلاسی‌ها)؛
- مباحث مربوط به ریاضیات در جامعه (برای مثال، ســوء استفادهٔ رسانه‌ها از آمار برای اینکه عموم را متقاعد سازند)؛
- «دست‌ســازه‌ها»؛ نمودهایی از مفاهیم ریاضیات (برای مثال، مدل‌های جامدات منظم، تاس و ...)؛
- مدل‌سازی ریاضی پدیده‌های واقعی (برای مثال، نوشتن یک فرمول برای بیان درجهٔ حرارت به‌عنوان تابعی از روز به سال).

مبانی نظری تحقیق

بعد از یادگیری یا یاددهی هر مسئله یا مطلب تئوری ریاضی، اولین سؤالی که به ذهن خطور می‌کند این است که «دانستن این موضوع چه فایدهٔ عملی می‌تواند برای ما داشته باشد؟» پاسخ‌های قانع‌کننده به این سؤال می‌تواند میزان انگیزه، توجه و احساس نیاز ما را برای یادگیری آن موضوع افزایش دهد و لذا میزان ســرعت و عمق یادگیری را بالا ببرد. یادگیری عمیق می‌تواند شانس پیدا کردن رابطه‌های جدید بین متغیرهای موجود در طبیعت یا کشف یک فایدهٔ عملی تازه برای مطالب نظری را افزایش دهد.

با ارائهٔ مثال‌های ســادهٔ عملی، می‌توان ارتباط ریاضی را با دنیای واقعی نشان داد. از طرف دیگر، بسیاری از دبیران ریاضی به خاطر ناآشنایی با ساخت و به کارگیری مناسب دست‌سازه‌های ریاضی در تدریس، کمتر از دست‌ســازه‌ها اســتفاده می‌کنند. بســیاری از آن‌ها با این تصور که تنها آزمایشگاه ریاضی، ذهن انسان است و باید دانش‌آموزان دبیرستانی را به سمت تفکر مجرد و انتزاعی ســوق داد، از به کارگیری دست‌سازه‌ها و نمودارهای مناسب در طول تدریس خودداری می‌کنند.

هدف از به‌کارگیری دست‌ســازه‌ها و نمودارها در تدریس، جایگزینی آن‌ها به جای استدلال‌های ریاضی نیست، بلکه هدف بالا بردن ســرعت و عمق یادگیری استدلال‌های مجرد ریاضی توســط دانش‌آموزان و تقویت قوهٔ تخیل آن‌هاست. همچنین، اســتفاده از دست‌ســازه‌ها نه تنها حجم توضیحات معلم برای برقــراری ارتباط بهتر بـــا دانش‌آموزان را کمتــر می‌کند، بلکه به‌صورت علمی به این ســؤال دانش‌آموزان پاســخ می‌دهد که: «نفر اولی که این قضیه یا مطلب ریاضی را ثابت کرد، از کجا به درستی آن پی برده است؟» به خصوص، این تصور نادرست را که «حل مسئله، درست فکر کردن و کشف حقایق، فقط مخصوص دانشمندان بزرگ است»، در دانش‌آموزان اصلاح می‌کند.

نقش دست‌سازه‌ها در تقویت شهود ریاضی دانش‌آموزان

۱. استفاده از شهود و تعبیر هندسی

یکی از روش‌هایی که می‌تواند درک مطالب ریاضی را برای دانش‌آموزان ساده‌تر و عمیق‌تر کند، استفاده از قوهٔ شهود و تعابیر هندسی مطالب است.

۲. روش طراحی دست‌سازه‌های ریاضی برای تدریس

طراحی و ساخت دست‌سازه‌های مناسب ریاضی توسط معلم نیازمند موارد زیر است:

۱. آشنایی با تعابیر هندسی و توانایی ساخت تعابیر هندسی مجازی؛

۲. توانایی رســم دقیق اشکال هندسی و بعضی از خطوط خاص مربوط به آن‌ها.

۳. تبحر و تسلط کامل بر محتوای آموزشی کتاب‌های درسی.

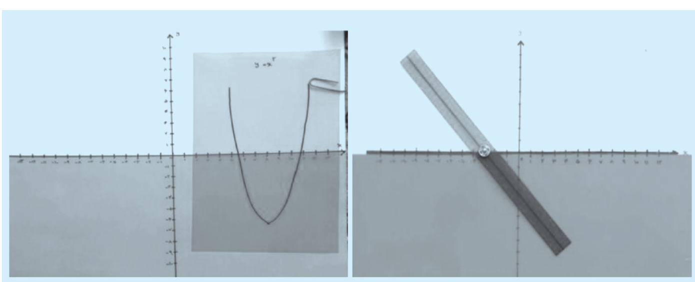
۴. آشـــنایی با طریقهٔ نوشتن طرح درس مناسب برای حل مشکلات یادگیری دانش‌آموزان.

۵. آشنایی با علل عدم یادگیری دانش‌آموزان که مهم‌ترین آن‌ها عبارت‌اند از:

گالیله می‌گوید: «جهان هستی همواره در برابر دیدگان حیرت‌زدهٔ انسان گسترده خواهد ماند و انسان هرگز نمی‌تواند آن را درک کند، مگر اینکه زبانی را که این جهان با آن نوشته و توضیح داده شده است، یاد بگیرد و حروف آن را بشناسد. این زبان چیزی جز ریاضیات نیست و این حروف جز مثلث، دایره و سایر اشکال هندسی چیز دیگری نیستند

جدول۱. نتایج آزمایش گلوکز و میزان هورمون تیروئید

پارامتر	تفسیر	میزان طبیعی	واحد	پارامتر	تفسیر	میزان طبیعی	واحد
FBS	قند خون ناشتا	۷۰ تا ۹۹	mg/dl	SerumIron (Fe)	آهن	خانم‌ها: ۲۳ تا ۱۶۵ آقایان: ۴۰ تا ۱۶۸	micg/dl
۲hpp	مقدار گلوکز دو ساعت بعد از صبحانه	کمتر از ۱۴۰	mg/dl	S.G.O.T (AST)	آنزیم کبدی	خانم‌ها: کمتر از ۳۱ آقایان: کمتر از ۳۷	U/L
HbA۱c	میانگین قند خون طی دو تا سه ماه گذشته	۳/۷ تا ۵/۳	mg/dl	S.G.P.T (ALT)	آنزیم کبدی	خانم‌ها: کمتر از ۳۱ آقایان: کمتر از ۴۱	U/L
UricAcid(UA)	اسید اوریک	خانم‌ها: ۲/۶ تا ۶/۱ آقایان: ۳/۶ تا ۸/۲	mg/dl	T۳	تیری پدوتیروئین، هورمون تیروئید	۰/۵۲ تا ۱/۸۵	ng/ml
Triglycerides (TGs)	تری گلیسرید (چربی) رسوب‌کننده در عروق	طبیعی: کمتر از ۲۰۰ حد مرز: ۲۰۰ تا ۴۰۰ بالا: بیشتر از ۴۰۰	mg/dl	T۴	تیروکسین، هورمون تیروئید	۴ تا ۱۳	ug/dl
Cholesterol	کلسترول کل	طبیعی: کمتر از ۲۰۰ حدمرز: ۲۰۰ تا ۲۴۰ بالا: بیشتر از ۲۴۰	mg/dl	T.S.H	تیروتروپین، هورمون تیروئید	۰/۳۲ تا ۵/۲	ulU/ml



تصویر ۱

دست‌سازه مربوط به تعیین علامت عبارت‌های درجهٔ ۱

تعیین علامت عبارت‌های درجهٔ ۲ را نشان می‌دهد

- ضعیف بودن قوهٔ تخیل دانش‌آموزان؛
- یاد نگرفتن پیش‌نیازها و فقیر بودن گنجینهٔ لغات و اطلاعات دانش‌آموزان؛
- علاقه نداشتن دانش‌آموزان به درس ریاضی به سبب عدم احساس نیاز به یادگیری آن؛
- مشکل بودن درک ارتباط بین اجزای بعضی از مطالب ریاضی.

۳. چگونه از دست‌سازه‌ها هنگام تدریس استفاده کنیم؟

استفاده از دست‌سازه‌ها در تدریس می‌تواند به عمل فرضیه‌سازی و استدلال برای حل مسائل کمک کند. اما میزان موفقیت برای این عمل به نحوهٔ استفاده و به‌کارگیری معلم از دست‌سازه‌ها و میزان علاقه، انگیزه و همکاری دانش‌آموزان در طول تدریس بستگی دارد. معلمی که دست‌سازه‌ای را می‌سازد و در نقطهٔ آغازین تدریس، شروع به توضیح نحوهٔ عملکرد دست‌سازه و بیان ارتباط بین هدف نهایی تدریس و دست‌سازه می‌کند، مجال فکر کردن و مشارکت را از دانش‌آموزان سلب می‌کند و ناخواسته از کارایی دست‌سازه می‌کاهد. همچنین، اگر دانش‌آموزان انگیزه و علاقه‌ای به یادگیری عمیق مطالب نداشته باشند، آن‌گاه برای پیشبرد اهداف تدریس و استفادهٔ بهینه از قابلیت‌های دست‌سازه همکاری چندانی از خود نشان نمی‌دهند. به این ترتیب، معلم مجبور می‌شود مانند سابق مطالبش را فقط به‌صورت تئوری و در قالب سخنرانی بیان کند.

روش تحقیق

در این پژوهش، برای آگاهی از میزان تأثیر استفاده از دست‌سازه و شهود، در یکی از مدرسه‌های شهرستان کازرون، از بین ۵۸ دانش‌آموز پایهٔ دهم، به روش نمونه‌گیری ساده، دو گروه بیست نفره به‌عنوان گروه آزمایش و کنترل انتخاب شدند. درگروه کنترل مبحث تعیین علامت با همان ساختار گفته‌شده در کتاب درسی و حل فعالیت‌ها و تمرین‌ها تدریس شد. اما در گروه آزمایش، به منظور ارتقای درک مفهومی دانش‌آموزان از مبحث تعیین علامت، چارچوبی برای آموزش این مبحث بر اساس دو بخش زیر ارائه شد:

- به کمک درک شهودی (استفاده از مثال‌های کاربردی و روزمره ـ استفاده از دست سازه)؛
- به کمک روابط جبری.

قبل از شروع تدریس، مثالی عینی و روزمره برای آشنایی دانش‌آموزان با موضوع مورد بحث مطرح کردیم

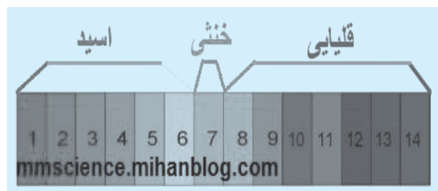
و سپس به معرفی آن پرداختیم. (جدول ۱).

بعد از آن به کمک دست‌سازه، موارد متفاوت تعیین علامت چندجمله‌ای‌هـــای درجهٔ اول و دوم را با دانش‌آموزان بررســـی کردیم و وابســـته بودن علامت هر عبـــارت را به ضریب جمله با بزرگ‌ترین درجهٔ عبارت نشان دادیم (تصویر ۱).

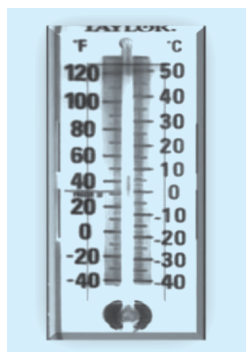
سپس مثال‌های متنوعی از تعیین علامت در زندگی روزمره ارائه شـــد که نمونه‌هایی از آن‌ها در ادامه آورده شده‌اند. از آن‌ها خواسته شد با توجه به مطالبی که یاد گرفته‌اند و مطالب ذکرشده، مثال‌های دیگری ذکر کنند. در نهایت روش‌های تعیین علامت عبارت‌های درجهٔ اول و درجهٔ دوم براساس روابط جبری، بیان و اثبات شدند.

مثال‌هایی برای تعیین علامت عبارت درجهٔ اول

۱. تصویر ۲ میزان pH را نشـــان می‌دهد. اگر عدد ۷ باشد، حالت خنثی (مقدار صفر یا ریشـــه)، کمتر از ۷ حالت اسیدی و بیشتر از ۷ حالت قلیایی (مخالف حالت اسیدی) خواهیم داشت که در واقع شبیه تعیین علامت عبارت‌های درجه اول است که در دو طرف ریشهٔ علامت‌ها مخالف هم هستند.

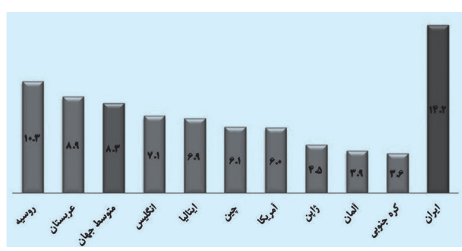


تصویر ۲



تصویر ۳

۲. تغییرات دمای هوا نیز رفتاری مشابه تعیین علامت عبارت درجهٔ اول دارد (تصویر ۳).


نمودار ۱

۳. نمودار ۱ نیز تلفات شـــبکهٔ برق در کشورهای متفاوت را نشـــان می‌دهد که رفتاری مشابه تعیین علامت عبارت‌های درجهٔ اول دارد.

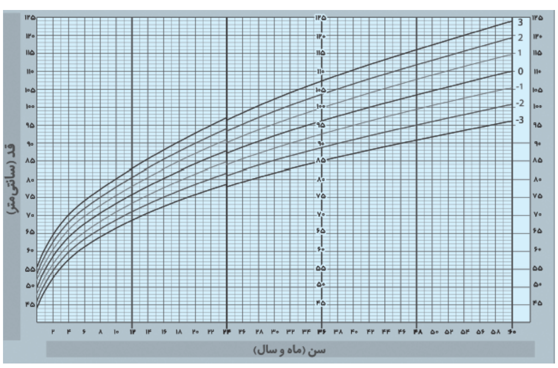
۴. تابلوی تصویر ۴ را بارها در جاده مشاهده کرده‌ایم. این تابلو حاوی پیامی بازدارنده است. به عبارت دیگر، راننده باید حداکثر ســـرعت ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت را در این مسیر رعایت کند. در غیر این صورت یک امتیاز منفی (جریمه) به وی تعلق می‌گیرد. بنابراین از این مثال می‌توان به‌عنـــوان یک عبارت درجهٔ اول با ضریب پیشرو منفی استفاده کرد.

تصویر ۴


نتایج این پژوهش مشخص کرد که استفاده از مثال‌های کاربردی و شهودی در کنار مثال‌های ریاضی، باعث تقویت انگیزه و به دنبال آن، یادگیری مفاهیم ریاضی برای دانش‌آموزان می‌شود

۵. کارنامهٔ تحصیلی دانش‌آموزان یا کارنامهٔ آزمون‌های زبان (تافـــل، تولیمو و ...)، نمونهٔ دیگـــری برای درک مفهوم تعیین علامت عبارت درجهٔ اول با ضریب جملهٔ پیشـــرو مثبت است. حـــد نصاب نمرهٔ قبولی در این آزمون‌ها در واقع همان ریشـــهٔ عبارت اســـت. قبولی در هر آزمـــون، مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $P(x) \geq 0$ محسوب می‌شود. (جدول ۲)

۶. نمودار رشـــد (قد برای ســـن) از تولد تا پنج سالگی را می‌توان به عنوان نمونـــهٔ دیگری از تعیین علامت عبارت‌های درجهٔ اول به کار برد. به این صورت که اگر منحنی رشد کودک

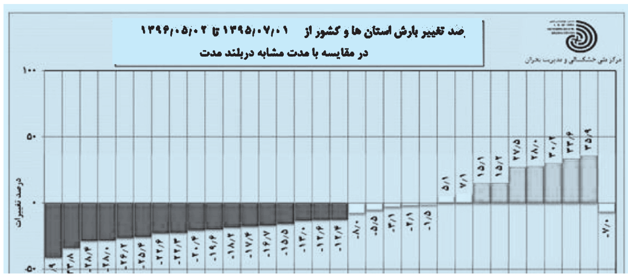
نمودار ۲ نمودار رشد (قد برای سن) پسر از تولد تا ۵ سالگی (Z-Score)


زیر منحنی ســـبز رنگ قرار گیرد، رشد کودک کمتر از حالت استاندارد است و برعکس. (نمودار ۲)

۷. درصد تغییرات بارش هر استان در مقایسه با مدت مشابه در بلندمدت، نمونهٔ دیگری از جدول تعیین علامت عبارت‌های درجهٔ اول اســـت. این درصد برای هر استان ممکن است مثبت، صفر یا منفی باشد. (نمودار ۳)

استفاده از دست‌سازه‌ها در تدریس می‌تواند به عمل فرضیه‌سازی و استدلال برای حل مسائل کمک کند

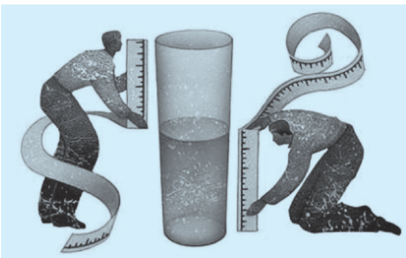
نمودار ۳ درصد تغییرات بارش استان های کشور



جدول ۲. کارنامهٔ تحصیلی

		نوبت اول		نوبت دوم			
ردیف	کد و نام درس:	مستمر	نیمه۱	مستمر	نهایی	نمره سال	نتیجه
۱	۵۴۹۱ دین و زندگی (۲)	۱۹	۱۸	۱۷	۹,۷۵	۱۳,۲۵	قبول
۲	۵۴۹۲ زبان فارسی تخصصی (انسانی)	۱۴	۱۰,۷۵	۱۲	۱۱	۱۱,۵	قبول
۳	۵۴۹۵ ادبیات فارسی تخصصی (انسانی)	۱۶	۱۲,۷۵	۱۵	۲,۵	۱۰,۲۵	قبول
۴	۵۴۹۷ عربی (۲) (علوم انسانی)	۱۸	۱۴	۱۸	۹,۷۵	۱۲,۲۵	قبول
۵	۵۵۰۰ زبان خارجی (۲)	۱۵	۷,۵	۱۴	۵,۷۵	۸	مردود
۶	۵۵۱۱ ریاضی (علوم انسانی)	۱۵	۹	۱۲	۱	۵,۲۵	مردود
۷	۵۵۱۹ جامعه‌شناسی (۲)	۱۸	۱۶,۲۵	۱۷	۱۰	۱۲,۷۵	قبول
۸	۵۵۲۱ تاریخ ایران و جهان (۲)	۱۶	۹,۲۵	۱۶	۷	۹,۲۵	مردود
۹	۵۵۲۳ جغرافیا (۲)	۱۷	۱۱,۲۵	۱۶	۴,۲۵	۸,۲۵	مردود
۱۰	۵۵۲۴ آرایه‌های ادبی	۱۵	۱۲,۷۵	۱۴	۱۲,۷۵	۱۲,۲۵	قبول
۱۱	۵۵۲۵ فلسفه و منطق	۱۶	۱۲,۵	۱۶	۱۰,۲۵	۱۲,۲۵	قبول

۸. پرداخت مالیات از دیگر مواردی اســـت که می‌توان از آن به‌عنوان تعیین علامت یک عبارت درجهٔ اول استفاده کرد. مالیات حقوق سال ۱۳۹۸ تا سقف ۲/۷۵۰/۰۰۰ تومان در ماه صفر است یعنی هر شـــخصی که ماهانه دو میلیون و هفتصد و پنجاه هزار تومان حق‌السـعی دریافت می‌کند، از پرداخت حق دولت معاف خواهد شـد. برای افرادی که دســـتمزد دریافتی آن‌ها در سال ۱۳۹۸ بیش از ۲/۷۵۰/۰۰۰ تومان در ماه است، محاسبهٔ مالیات حقوق سال ۱۳۹۸ مطابق با دستورالعمل‌هایی که از قبل مشخص شده، انجام می‌شود. (تصویر ۵)



تصویر ۵

۹. یکـی از مثال‌هــای کاربردی در زمینـهٔ تعیین علامت عبارت‌های درجهٔ اول با ضریب جملهٔ پیشرو منفی، الگوی صحیح مصرف آب اســت. به این صورت که اگر مصرف روزانه هر فرد از حد اســتاندارد الگوی مصرف بهینه کمتر باشد، به‌صورت مثبت ارزیابی می‌شود و برعکس. (تصویر ۶)

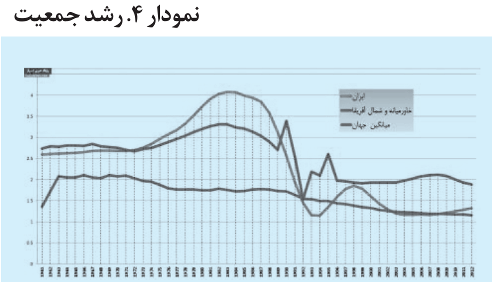
تصویر ۶

عبارت‌های درجهٔ ۲

الف) عبارت‌های درجهٔ دوم شامل دو ریشهٔ حقیقی

۱. نمودار ۴ مربوط به رشـد جمعیت است. خط آبی‌رنگ نشان‌دهندهٔ متوسط رشـد جمعیت جهان است. همان‌طور که مشاهده می‌شـود، در یک فاصلهٔ زمانی رشد جمعیت زیر خط آبی رنگ (علامت منفی) و در بقیهٔ قسمت‌ها تقریباً بالای خط آبی (علامت مثبت) است و این همانند تعیین علامت یک عبارت درجهٔ دوم است.

نمودار ۴. رشد جمعیت



۲. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، جدول مربوط به فشار خون مشابه جدول تعیین علامت عبارت‌های درجهٔ دوم است. (جدول ۳)

جدول ۳. شرایط مختلف فشار خون

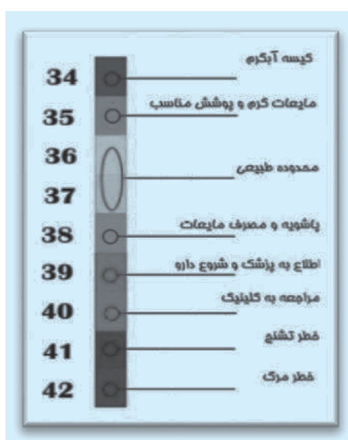
دسته‌ها	فشار انقباض		فشار انبساطی
فشار خون پایین	کمتر از ۸۰	یا	کمتر از ۶۰
فشار خون میانه	۱۲۰-۸۰	و	۸۰-۶۰
مستعد فشار خون بالا	۱۳۹-۱۲۰	یا	۸۹-۸۰
فشار خون بالا درجه ۱	۱۵۹-۱۴۰	یا	۹۹-۹۰
فشار خون بالا درجه ۲	۱۶۰ و بیشتر	یا	۱۰۰ یا بیشتر
فشار خون بالا درجهٔ ۳	بیشتر از ۱۸۰	یا	بیشتر از ۱۱۰

جدول ۵. آزمایش خون

نوع لیپید (چربی)	مقدار مطلوب (خطر پایین)	مقدار مرز mgdl	خطر بالا mgdl
کلسترول	۲۰۰>	۲۲۹-۲۰۰	۲۴۰<
کلسترول بد	۱۰۰>	۱۲۹-۱۰۰	۱۳۰<
کلسترول خوب	۳۵<	۴۵-۳۵	۳۵>

۳. در حالت طبیعی دمای درونی بدن ۳۶/۵ تا ۳۷ درجه است (مثبت) و خارج از این محدوده وضعیت طبیعی نیست (منفی) (جدول ۴).

۴. با توجه به جدول ۵ مشاهده می‌شود که محدودهٔ طبیعی کلسترول ۲۳۹-۲۰۰ است و خارج از این محدوده غیرطبیعی به شمار می‌رود.



جدول ۴. دمای بدن

۵. محدودیت تردد در تهران، به صورتی است که از شنبه تا چهارشنبه (که یکی در میان خودروهای زوج و فرد را شامل می‌شود)، اجازه تردد از ساعت ۶:۳۰ تا ۱۹:۳۰ شب برای خودروهای غیر مجاز، ممنوع است. این ممنوعیت در روزهای پنج‌شنبه تا ساعت ۱۳ است. در روزهای تعطیل رسمی و جمعه‌ها محدودیتی وجود ندارد. این طرح، در عید نوروز، از ۲۹ اسفند تا ۱۳ فروردین اجرا نمی‌شود و تردد در هر محدوده‌ای بدون در نظر گرفتن پلاک آزاد است. در ماه مبارک رمضان طرح لغو نمی‌شود و فقط از ساعت ۱۹ به ۱۷ کاهش می‌یابد. با توجه به شرایط جوی، در نیمهٔ دوم سال، یعنی از اول مهر تا پایان آذر ماه، دو ساعت کمتر می‌شود و از ساعت ۱۹ به ۱۷ انتقال می‌یابد. به دلیل آلودگی زیاد و برای داشتن هوای بهتر، در روزهایی که تحت‌عنوان «روز آلوده» شناخته می‌شوند، این طرح از ساعت ۶:۳۰ دقیقهٔ صبح تا ساعت ۱۹ اجرا می‌شود. (تصویر ۷)

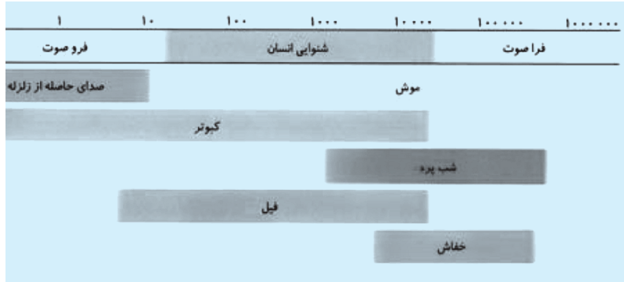
تصویر ۷

۶. میزان مصرف روزانهٔ خوراکی‌ها و رژیم غذایی را با توجه به میزان مصرف تعداد واحد در گروه‌های متفاوت غذایی، از جمله غلات، میوه‌ها، سبزیجات، پروتئین، لبنیات و روغن و چربی‌ها، در تصویر ۸ مشاهده می‌کنید.

تصویر ۸

۷. سیستم حلزونی گوش ما نسبت به فرکانس‌های متفاوت صوت پاسخ می‌دهد، اما اثر روانی آن برای ما زیر یا بم بودن صوت است. محدودهٔ قابل شنیدن برای انسان ۲۰ تا ۲۰۰۰۰ هرتز است. در گوش ما مناطقی وجود دارند که صداهای محدودهٔ شنوایی ما را تقویت و خارج از این محدوده را حذف می‌کنند. (نمودار ۴)

نمودار ۴ محدوده شنوایی انسان



ب) عبارت‌های درجهٔ دوم شامل یک ریشهٔ حقیقی

مســـواک زدن همواره برای سلامت دندان‌ها مفید است و از دوران کودکی توصیه می‌شود؛ چه قبل از بیرون آمدن دندان‌های دائمی و چه بعد از آن. (تصویر ۸)

تصویر ۸

ج) عبارت‌های درجهٔ دوم فاقد ریشهٔ حقیقی

۱. ورزش **همواره** در هر سنی برای سلامتی ضروری است. البته باید حرکات ورزشـــی متناسب با شـــرایط بدنی فرد باشد. انتخاب زمان مناســـب برای ورزش در طول شبانه روز نیز بسیار مهم است. (تصویر ۹)

تصویر ۹

۲. مصرف ســـیگار **همواره** برای سلامتی بدن انسان مضر اســـت. حتی با ترک سیگار اثرات مخرب آن بر بدن تا آخر عمر باقی می‌ماند. (تصویر ۱۰)

تصویر ۱۰

● مثال‌های بسیاری پیرامون ما وجود دارند که قابل مقایسه با تعیین علامت عبارت‌هاست. حتی اعمال و رفتار ما نیز همین گونه اســـت. برای مثال، راســـت‌گویی **همواره** عملی پسندیده (مثبت) است و یا دروغ‌گویی **همواره** عملی ناپسند (منفی) است.

● ضرب‌المثـــل «ز گهواره تا گـــور دانش بجوی» نیز نمونهٔ بارزی از تعیین علامت عبارت درجهٔ دوم فاقد ریشه است.

یـــا «کم گوی و گزیده گوی چون دُر / تا ز اندک تو جهان شود پُر» نمونه‌ای از تعیین علامت عبارت درجهٔ اول است.

یافته‌ها

برای تحلیل نمره‌های به‌دســـت‌آمده، از گـــروه کنترل(B) و آزمایـــش(A) کـــه اطلاعات مربوط به آن‌هـــا در جدول۶ و ۷ توصیف شده است، از آزمون یومن-ویتنی به منظور بررسی تأثیر روش تدریس به کمک مثال‌های روزمره و دست‌سازه بر میزان یادگیری ریاضی دانش‌آموزان کلاس دهم استفاده شد. با توجه به آزمون انجام‌شده، به نظر می‌رسد از نظر میزان یادگیری بین گروه آزمایش و کنترل تفاوت معناداری وجود دارد.

جدول ۶. آزمون یومن-ویتنی برای گروه A و B

	A	B
معتبر، صحیح	۲۰	۲۰
گمشده، ناصحیح	۰	۰
میانگین	۱۵,۵۵۰۰	۱۳,۶۰۰۰
Std. انحراف از میانگین	۶۷۳۱۷	۶۳۵۱۵
متوسط	۱۵,۵۰۰۰	۱۴,۰۰۰۰
مد	۱۴,۰۰a	۱۳,۰۰a
Std. انحراف معیار	۲,۷۴۲۹۳	۳,۱۶۴۷۷
واریانس	۷,۵۲۴	۱۰,۰۱۶
دامنه	۱۰,۵۰	۱۲,۰۰
کمترین	۹,۰۰	۷,۰۰
بیشترین	۱۹,۵۰	۱۹,۰۰
جمع	۳۱۱,۰۰	۲۷۲,۰۰

جدول ۷. مرتبه‌ها

گروه	N	میانگین رتبه	جمع رتبه‌ها
A: گروه آزمایش	۲۰	۲۴,۴۰	۴۸۸,۰۰
B: گروه کنترل	۲۰	۱۶,۶۰	۳۳۲,۰۰
جمع	۴۰		

جدول ۸. آزمون یومن ـ ویتنی

	یادگیری
Mann-Whitney U	۱۲۲,۰۰۰
Wilcoxon W	۳۳۲,۰۰۰
Z	-۲.۱۱۸
Asymp. Sig. (2-tailed)	۰,۰۳۴
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]	۰,۱۶۵b

۱. بیان معنی‌داری یا عدم معنی‌داری تفاوت میزان یادگیری بین دو گروه آزمایش و کنترل

در تفسیر نتایج «آزمون یومن-ویتنی»، برای اینکه پی ببریم آیا تفاوت میزان یادگیری بین گروه آزمایش و کنترل متفاوت است، باید از نتایج جدول۸ استفاده کنیم. با استناد به مقدار sig (۰/۰۳۴) که در سطح خطای کوچک‌تر از ۰/۰۵ معنی‌دار است، باید گفت که با اطمینان ۹۵ درصد به لحاظ آماری تفاوت میزان یادگیری بین گروه A و B معنی‌دار است. یعنی میزان یادگیری بین گروه A و B متفاوت است. این نتیجه دلالت بر تأیید فرض H_1 تحقیق دلالت دارد که مبنی است بر تفاوت میزان یادگیری بین گروه A و B و در مقابل رد فرض H_0 مبنی بر عدم تفاوت میزان یادگیری بین گروه A و B.

۲. بیان کیفیت تفاوت میزان یادگیری در بین دو گروه آزمایش و کنترل

در تفسیر نتایج آزمون یومن- ویتنی، علاوه بر تعیین تفاوت معنی‌داری تفاوت یا عدم تفاوت میزان یادگیری در دو گروه دانش‌آموزان A و B، می‌توانیم پی ببریم که میزان یادگیری در کدام یک از دو گروه بیشتر و در کدام یک کمتر است. برای رسیدن به این منظور، می‌توانیم از نتایج جدول۲ استفاده کنیم. طبق نتایج این جدول، میانگین میزان یادگیری بین گروه A (۲۳/۸) بیشتر از میزان یادگیری در گروه B (۱۷/۹۳) است. در نتیجه درگروه A که یادگیری ریاضی با استفاده از روش دست‌سازه و مثال‌های روزمره انجام شده، میزان یادگیری بیشتر از گروه B است.

نتیجه‌گیری و پیشنهاد

نتایج این پژوهش مشخص کرد که استفاده از مثال‌های کاربردی و شهودی در کنار مثال‌های ریاضی، باعث تقویت انگیزه و به دنبال آن، یادگیری مفاهیم ریاضی برای دانش‌آموزان می‌شود. به‌طور ویژه استفاده از این روش در مبحث تعیین علامت، تأثیر چشمگیری بر افزایش سطح یادگیری دانش‌آموزان (به‌خصوص دانش‌آموزان بی‌انگیزه) و

پیشنهاد می‌شود دبیران محترم در تدریس مفاهیم ریاضی، با به کارگیری شهود، سعی در تسهیل مفاهیم انتزاعی داشته باشند تا به این ترتیب همهٔ دانش‌آموزان را در فرایند یادگیری با خود همگام و همراه سازند

ارتقای درک آن‌ها از این مفهوم داشت. شایان ذکر است که با استفاده از این شیوه نباید از بیان روش‌های جبری و دقیق ریاضی غافل شد، زیرا در این صورت یادگیری دانش‌آموزان سطحی خواهد بود.

پیشنهاد می‌شود دبیران محترم در تدریس مفاهیم ریاضی، با به کارگیری شهود، سعی در تسهیل مفاهیم انتزاعی داشته باشند تا به این ترتیب همهٔ دانش‌آموزان را در فرایند یادگیری با خود همگام و همراه سازند. همچنین مؤلفان کتاب‌های درسی در صورت امکان در تدوین کتاب‌های درسی از مثال‌های روزمره و کاربردی برای درک بهتر دانش‌آموزان بیشتر استفاده کنند.

منابع

1. J. Gainsburg, (2008). "Real-world connections in secondary mathematics teaching", Journal of Mathematics Teacher Education, 2008.

2. National Council of Teachers of Mathematics, (2010). Standards for School Mathematics: Connections, Retrieved October 18, 2010, from National Council of Teachers of Mathematics Web site: http://www.nctm.org, 2010.

۳. بیژن‌زاده، محمدحسن(۱۳۹۳). آموزش و یادگیری ریاضیات، انتشارات خردمندان. تهران.

۴. **تیموری، قاسم** (۱۳۸۸). کاربردهای ریاضی در زندگی روزمره. مؤسسهٔ فرهنگی منادی تربیت. تهران.

۵. (۱۳۸۸). مقدمه‌ای بر روش تدریس هندسه دبیرستان. مؤسسه فرهنگی منادی تربیت. تهران.

۶. (۱۳۸۸). طراحی و ساخت دست‌سازه‌های جبری. مؤسسهٔ فرهنگی منادی تربیت. تهران.

۷. (۱۳۸۱). مقدمه‌ای بر روش تدریس ریاضی. مؤسسه فرهنگی منادی تربیت. تهران.

۸. سیف، علی اکبر (۱۳۹۱). تغییر رفتار و رفتار درمانی: نظریه‌ها و روش‌ها، انتشارات فروزش. تهران.

۹. فقهی، حسین (۱۳۷۱)، ریاضیات از نوع سوم، نگرشی جدید به کاربرد ریاضیات دربارهٔ جهان و انسان. نوظهور. تهران.

۱۰. لطفی، مریم؛ شمس دیلمی، هاجر؛ اکبرشاهی، اعظم؛ علیجانی، زهرا(۱۳۸۲)، مجموعه مقالات منتخب پنجمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران (تأثیر شگفتی‌ها و جنبه‌های کاربردی ریاضیات در آموزش). انتشارات عابد. تهران.

۱۱. ملک حسینی، عباس؛ صالحی، عین‌اله؛ سایه وند، خسرو(۱۳۸۵)، ریاضیات و کاربرد آن درجغرافیا. سرا. تهران.

بی‌نهایت، ازلیت و ابدیتی که چندان نمی‌شناسیم

علی‌اصغر رضائی
استادیار گروه ریاضی، دانشگاه کاشان، ایران

اشاره
در این مقاله دربارهٔ مفهوم «بی‌نهایت» از منظر ریاضی کنکاش و جنبه‌های متفاوتی از آن در ریاضیات ذکر می‌شود و از بی‌نهایت به‌عنوان مفهومی برای کمک به درک بهتر عظمت هستی و خالق آن یاد خواهیم کرد.

ریاضیات ناب‌ترین آفریدهٔ ذهن بشر و زیباترین تجلی خلاقیت فکری است

مقدمه

یکی از دغدغه‌های نگارنده به‌عنوان معلم ریاضی که افتخار همکاری با برخی دانشگاه‌های کشور را داشته‌ام، تبدیل مطالب درسی انتزاعی‌ترین علم جهان به مباحث ملموس و در عین حال روزمرهٔ زندگی بوده است. این مهم را می‌توان از دو طریق انجام داد: یکی ذکر کاربردهای مطلب مورد نظر و دیگری دعوت به اندیشیدن به مطالب ماورای ریاضی با استفاده از همان مطالب ریاضی.

شاید برای برخی‌ها پیوستگی، مشتق‌پذیری، تابع جزء صحیح، عددهای اصلی، خطوط موازی و مانند آن، مفاهیمی صرفاً ریاضی به حساب آیند، اما به نظر می‌رسد هرکدام از این‌ها تعریفی ماورایی دارند که در ریاضیات تجلی یافته‌اند. آیا کسی می‌تواند «پیوسته بودن» خط حقیقی را با تمام وجود درک کند؟ آیا کسی می‌داند تابعی که همه جا پیوسته است و هیچ جا مشتق‌پذیر نیست، چه شکلی دارد؟ کدام رایانه‌ها در جهان قادر به ترسیم چنین تابعی به معنای واقعی هستند؟

ریاضیات ناب‌ترین آفریدهٔ ذهن بشر و زیباترین تجلی خلاقیت فکری است. اگر بخواهیم سیاهه‌ای از مباحث ماورایی ریاضی تهیه کنیم، احتمالاً ناچار خواهیم بود تمامی مفاهیم ریاضی را فهرست کنیم که پرداختن به هرکدام زمان به نسبت زیادی نیاز دارد. در این نوشتار، نگاه کوتاهی خواهیم داشت بر مفهوم بی‌نهایت؛ یکی از چالشی‌ترین مفاهیمی که برای بسیاری از خوانندگان مبتدی ریاضی ناشناخته است و حتی برخی آن را به غلط یک عدد خیلی‌خیلی بزرگ می‌انگارند. ابتدا مصداق‌هایی از بی‌نهایت را در ریاضی می‌آوریم و سپس به بحث ازلی و ابدی بودن خالق هستی، به‌عنوان جلوه‌ای از بی‌نهایت، اشارهٔ مختصری می‌کنیم.

بی‌نهایت در ریاضیات

در ریاضیات، بی‌نهایت، برخلاف آنچه در فیزیک گفته می‌شود، نسبی نیست. از نظر یک ریاضی‌دان، جرم زمین، خورشید، کهکشان راه شیری و شاید تمام هستی، یک عدد متناهی است. تعبیرهایی که در ریاضیات از بی‌نهایت می‌شود، متنوع است. در اینجا به سه مورد از مهم‌ترین آن‌ها اشاره می‌کنیم: حد دنباله، توصیف مجموعه‌ها و در انتها مفهوم خط در هندسه.

حد یک دنباله یا یک تابع

اگر بگوییم حد یک دنباله به بی‌نهایت میل می‌کند، یعنی جملات آن از هر عددی بزرگ‌تر می‌شوند. به عبارت دیگر، در اینجا منظور از «میل کردن به بی‌نهایت» توضیح یک رفتار است

اگر بگوییم حد یک دنباله به بی‌نهایت میل می‌کند، یعنی جملات آن از هر عددی بزرگ‌تر می‌شوند. به عبارت دیگر، در اینجا منظور از «میل کردن به بی‌نهایت» توضیح یک رفتار است نه نزدیک شدن به یک عدد

نه نزدیک شـــدن به یک عدد. در مورد توابع نیز بحث مشابهی برقرار است. از این منظر، بی‌نهایت نه به معنای «بزرگ» است و نه به معنای «خیلی بزرگ» و نه به معنای «خیلی‌خیلی بزرگ»، بلکه مفهوم آن این است: بزرگ‌تر از هر چیزی و افزون‌تر از هر مقداری. نمادی که برای این مفهوم به‌کار می‌رود «∞» است.

توصیف مجموعه‌ها و عدد اصلی

اگر مجموعه‌ای تهی باشـــد یا تعـــداد عناصر آن یک عدد طبیعی باشـــد، آن مجموعه را «متناهـــی» گوییم. در غیر این صورت به آن «نامتناهی» گفته می‌شود. اگر مجموعه‌ای چون A نامتناهی باشد، در پاسخ به این پرسش که «چند عضو دارد»، ممکن است تعداد عناصر آن را با عبارت نادقیق «بی‌نهایت عضو» توصیف کنند. نادقیق بودن از آن جهت که اگر A و B نامتناهی باشند، «تعداد» عناصرشان لزوماً یکسان نیست. البته لازم است مفهوم «تعداد» را تشریح کنیم. در ریاضیات نوین، به جای تعداد عناصـــر در یک مجموعه، از عبـــارت دقیق‌تر «عدد اصلی یک مجموعه» استفاده می‌کنند. عدد اصلی مفهومی است که برای بیان «اندازهٔ» مجموعه‌ها به‌کار می‌رود. به عبارت دیگر، عددهای اصلی عددهایی هستند که مفهوم «تعداد عناصر یک مجموعه» را تعمیم می‌دهند. برای مجموعه‌های متناهی، عددهای اصلی همان ۰، ۱، ۲، ۳ و ... هستند و اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند که تعداد عناصر یکســـانی دارند، می‌گوییم A و B عدد اصلی یکســـانی دارند. برای مثال، اگر A بیانگر مجموعهٔ امامان شیعه(ع) و B بیانگر مجموعهٔ ماه‌های سال باشد، آن‌گاه A و B عدد اصلی یکسانی دارند.

در حالـــت نامتناهی، این مفهوم را با کمک توابع تشـــریح می‌کنیـــم. دو مجموعـــهٔ A و B مفروض‌اند. می‌گوییم A و B عدد اصلی یکســـانی دارند یا اصطلاحاً هم‌توان هستند، هرگاه تابعی یک به یک و پوشـــا از A به B موجود باشد. شرط یک به یک بودن و پوشایی تضمین می‌کند که هر عنصر از A با عضو منحصربه‌فردی از B متناظر اســـت و برعکس (در برخی متون ریاضی می‌گوینـــد A و B در تناظر یک به یک با یکدیگر قرار دارند). اگر بخواهیم با عبارت‌های غیرریاضی این مطالب را شرح دهیم، می‌توان A و B را دو کشـــور در نظر گرفت که قرار است سربازان آن دو در یک نبرد تن به تن با یکدیگر کشتی بگیرند. هم‌توانی A و B یعنی هر سرباز از A هماورد منحصربه‌فردی از B دارد و برعکس. درواقع، هیچ سربازی از A بدون حریف نیست و هر ســـرباز هم تنها و تنها یک حریف دارد. همین وضعیت در مورد کشور B نیز برقرار است. عدد اصلی مجموعهٔ A را با نماد «Card A» نمایش می‌دهیم.

شاید از نظر کسی که ریاضیات را در حد دبیرستان خوانده باشـــد، مجموعهٔ عددهای صحیح از نظر تعداد عناصر، مجموعهٔ بزرگ‌تری نسبت به مجموعهٔ عددهای طبیعی باشد. حتی ممکن است این گمان غلط به وجود آید که Z دوبرابر N عضو دارد. اما چنین نیست. عدد اصلی این دو مجموعه یکسان است. در نمودار ۱، تناظر یک به یک بین عناصر N و Z را در نظر بگیرید.

در سطر نخســـت، اعضای N و در سطر دوم اعضای Z قرار دارند. همچنان که می‌بینید، تابع با ضابطهٔ

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & (\text{زوج } n)\\[2mm] \dfrac{1-n}{2} & (\text{فرد } n)\end{cases}$$

از N به Z هم یک به یک اســـت و هم پوشا. شاید این هم‌توانی N و Z برای خوانندگان غیرحرفه‌ای ریاضی حیرت‌انگیز باشد، اما حیرت‌انگیزتر از آن هم‌توانی N و Q (مجموعهٔ عددهای گویا یا کسری) است. به نظر می‌رسد تعداد عددهای گویا یا کسری آن‌قدر زیاد اســـت که بارها و بارها از تعداد اعضای N بیشـــتر است. اما چنین نیست. توهم بیشتر بودن عددهای گویا نسبت به عددهای طبیعی، از تجربه‌های محاسباتی ما ناشی می‌شود.

در ریاضیات، بی‌نهایت، برخلاف آنچه در فیزیک گفته می‌شود، نسبی نیست. از نظر یک ریاضی‌دان، جرم زمین، خورشید، کهکشان راه شیری و شاید تمام هستی، یک عدد متناهی است

طبق تجربهٔ دانش‌آموزی ما، بین هر دو عدد گویا، هر چقدر هم که به هم نزدیک باشـــند، باز هم عدد گویایی وجود دارد. یعنی بـــا یک فرایند نامتناهی می‌توان بین عددهای گویای صفر و ۱ بی‌نهایت عدد گویای دیگر یافت. همین کار را می‌توان بین ۱ و ۲ نیز انجام داد و بین ۲ و ۳ تا آخر. بنابراین، یک نتیجهٔ نادقیق این اســـت که فقط در بازهٔ (۱ و ۰) به اندازهٔ همهٔ عددهای طبیعی، عدد گویا وجود دارد؛ چه برســـد به دیگر بازه‌ها که تعداد بازه‌ها هم نامتناهی اســـت: (۲ و ۱)، (۳ و ۲)، (۴ و ۳) و ... . اما نتیجهٔ شگفت‌انگیز آن است که Q با N هم‌توان است. درواقع، اعضای Q را «می‌توان شـــمارش کرد». یا بـــه عبارت دیگر، می‌توان به هر عضو از Q یک و تنها یک عضو از N متناظر کرد، به طوری که این تناظر دوســـویه باشد. در نمودار ۲ می‌توان این شمارش را ملاحظه کرد. توجه کنید که عددهای آبی‌رنگ قبلاً شمرده شده‌اند و در شمارش لحاظ نمی‌شوند.

اهمیت این شمارش چنان است که مجموعه‌های نامتناهی را به دو دسته تقسیم می‌کنند: آن‌هایی که با N هم‌توان هستند و آن‌هایی که با N هم‌توان نیســـتند. دستهٔ اول را مجموعه‌های شمارای نامتناهی و دستهٔ دوم را مجموعه‌های ناشمارا می‌نامند.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
۰	۱	-۱	۲	-۲	۳	-۳	۴	...

نمودار ۱

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...
۱	۱/۱	۱/۲	۱/۳	۱/۴	۱/۵	۱/۶	۱/۷	۱/۸	...
۲	۲/۱	۲/۲	۲/۳	۲/۴	۲/۵	۲/۶	۲/۷	۲/۸	...
۳	۳/۱	۳/۲	۳/۳	۳/۴	۳/۵	۳/۶	۳/۷	۳/۸	...
۴	۴/۱	۴/۲	۴/۳	۴/۴	۴/۵	۴/۶	۴/۷	۴/۸	...
۵	۵/۱	۵/۲	۵/۳	۵/۴	۵/۵	۵/۶	۵/۷	۵/۸	...
۶	۶/۱	۶/۲	۶/۳	۶/۴	۶/۵	۶/۶	۶/۷	۶/۸	...
۷	۷/۱	۷/۲	۷/۳	۷/۴	۷/۵	۷/۶	۷/۷	۷/۸	...
۸	۸/۱	۸/۲	۸/۳	۸/۴	۸/۵	۸/۶	۸/۷	۸/۸	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

نمودار ۲

برای مثال Z و Q شمارا هستند. اما R (مجموعهٔ عددهای حقیقی) ناشماراست. درواقع، اعضای R آن‌قدر «زیاد» هستند که نمی‌توان هیچ تناظر یک به یکی میان N و R به دست آورد. **کانتور** اولین کسی بود که این مطلب را ثابت کرد. به بیان نادقیق، تعداد عناصر R اکیداً بیشتر از تعداد عناصر N است و به بیان دقیق Card N<Card R. (منظور از Card R، تعداد عناصر R است)

آیا R بزرگ‌ترین مجموعه از نظر تعداد عناصر است؟ جواب منفی است. اگر مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های R را با P(R) نمایش دهیم، آن‌گاه Card R<Card P (R) . یعنی تعداد عناصر P(R) از تعداد عناصر R به مراتب بیشتر است. P(R) هم خیلی بزرگ نیست، زیرا P(P(R)) تعداد عناصر به مراتب بیشتری دارد. با ادامهٔ این فرایند، یک دنبالهٔ نامتناهی از عددهای اصلی «ترامتناهی» به‌صورت زیر به دست می‌آید:

Card N<Card R<Card P(R)<Card P(P(R))<Card P(P(P(R)))<...

بنابراین، در دنیای بی‌نهایت‌ها یک ترتیب یافته‌ایم که بزرگ‌تر از هر بی‌نهایت، یک بی‌نهایت دیگر وجود دارد. یک نکتهٔ جالب در مورد دنبالهٔ فوق این است که تاکنون کسی نتوانسته است مجموعه‌ای مانند A بیابد که عدد اصلی آن بین عدد اصلی N و عدد اصلی R باشد. یعنی مجموعه‌ای مانند A، ارائه نشده است. به طوری که Card N<Card A<Card R. در مورد دیگر نامساوی‌ها در دنبالهٔ فوق هم همین وضعیت برقرار است. این مطلب که در دنبالهٔ فوق عدد اصلی دیگری وجود دارد، به فرضیهٔ «پیوستار» موسوم است.

در دنیای بی‌نهایت‌ها یک ترتیب یافته‌ایم که بزرگ‌تر از هر بی‌نهایت، یک بی‌نهایت دیگر وجود دارد

امتداد خط‌ها

در هندسهٔ کلاسیک، خط یک مفهوم تعریف‌نشده است، اما رفتار آن را از روی «بنداشت‌ها» می‌توان بررسی کرد. شایان ذکر است در چارچوب اصل موضوعی، تمامی هندسه با استفاده از مفاهیم تعریف‌نشده و «بنداشت‌های وقوع»، «میان‌بود»، «قابلیت انطباق»، «پیوستگی» و «توازی» مطالعه می‌شود. در اینجا سه مورد از مهم‌ترین بنداشت‌هایی را که به رفتار خط مربوط‌اند ذکر می‌کنیم:

- از هر دو نقطه مانند A و B خط منحصربه‌فردی می‌گذرد که با نماد $\overleftrightarrow{AB}$ نمایش داده می‌شود.
- روی هر خط $\overleftrightarrow{AB}$ می‌توان نقاطی را بین A و B و نیز نقاطی را خارج A و B یافت (طبق این بنداشت یک خط به نقطه محدود نمی‌شود).
- هر پاره‌خط را می‌توان از هر دو طرف به اندازهٔ دلخواه امتداد داد (طبق این خاصیت «طول» خط نامتناهی است).

توجه کنید که نیم‌خط را فقط می‌توان از یک طرف امتداد داد، اما ماهیت خط «ازلی» و «ابدی» است. یعنی ابتدای خط و انتهای آن مشخص نیست. زمانی که برای نمایش عددهای حقیقی از یک خط استفاده می‌شود، «ازل همان $-\infty$» و «ابد همان $+\infty$» است. اینکه ما در چه نقطه‌ای از تاریخ خلقت قرار داریم، قطعاً یک عدد متناهی و به‌طور دقیق‌تر یک بازهٔ متناهی است و اینکه تا چه زمانی ادامه خواهیم داد، پاسخش احتمالاً ∞ یا «ابد» است (هرچند که شکل حیات ما ممکن است تغییر کند؛ همچنان که عددها هم تغییر علامت می‌دهند).

اما سؤال مهم‌تر آن است که ابتدای خلقت چه زمانی بوده و خالق از چه زمانی بوده است؟ طبق آموزه‌های دینی، «خالق» از ازل بوده است؛ از زمانی که هیچ ابتدایی نبوده. شاید خط حقیقی مثال ساده‌ای باشد برای پی بردن به عظمت هستی و کردگار. بی‌نهایت چیزی است فراتر از هر چیزی و بی‌نهایت منفی چیزی است قبل‌تر از هر چیزی.

منابع

1. Shwu-Yeng T. Lin and You-Feng Lin, *Set theory with applications.* 2nd ed. Mariner Publishing Company. 1981.
2. Greenberg, Marvin J. *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history.* Macmillan, 1993.
3. Thomas, George Brinton, et al. Thomas' calculus. Reading: Addison-Wesley, 2003.

دانش موضوعی

استفاده از چارچوب APOS-Slope برای مطالعه درک مفهوم شیب

سعید حق‌جو
دانشجوی دکتری آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران
ابراهیم ریحانی
دانشیار دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران

چکیده
هدف این پژوهش به کارگیری چارچوب «APOS-Slope» (ناگلی و همکاران، ۲۰۱۹) برای بررسی درک دانش‌آموزان و دانشجویان از مفهوم شیب است. این چارچوب ترکیبی از مؤلفهٔ «APOS» دوبینسکی (۲۰۰۱) و یازده مفهوم مرتبط با شیب توصیف‌شده توسط مور روسو، کنر، و راگ (۲۰۱۱) می‌باشد. برای درک بهتر این چارچوب نمونه‌ای در دسترس، شامل ۷۱ نفر از دانش‌آموزان پایهٔ دهم از مدرسه‌ای خاص در شهر بوشهر و ۲۲ نفر از دانشجویان دانشگاه دولتی شهر تهران در نظر گرفته شد که به سؤالات پرسش‌نامه (۴ سؤال) بر اساس چارچوب APOS-Slope پاسخ دهند. روش تحقیق، ترکیبی از روش کتابخانه‌ای و توصیفی ـ پیمایشی می‌باشد. روایی سؤالات توسط دو نفر از استادان آموزش ریاضی و دو استاد ریاضی تأیید شدند. نتایج تحقیق نشان داد که درک دانش‌آموزان از ده مفهوم مرتبط با شیب تا سطح شیء از لحاظ تابع خطی رسید، ولی درک و فهم هیچ‌کدام از دانشجویان به مرحلهٔ شیء در تابع دو متغیره در حالت سه‌بعدی نرسید. اکثر دانشجویان یازده مفهوم شیب را درک کردند. چگونگی درک دانش‌آموزان و دانشجویان از شیب و مراحل مفهوم‌سازی آن با توجه به چارچوب APOS-Slope، می‌تواند به محققان در پژوهش‌های آینده و به معلمان و استادان در آموزش بهتر مفهوم شیب کمک کند.

کلیدواژه‌ها: شیب، APOS، چارچوب APOS-Slope، تابع خطی

مقدمه و پیشینهٔ تحقیق

مفهوم «شیب» یکی از مفاهیم مهم در ریاضیات است که در برنامهٔ درسی ریاضی ایران از سال نهم قرار داده شده است. هدف ما در این مطالعه بررسی درک دانش‌آموزان پایهٔ دهم از مفهوم شیب بر اساس چارچوب «APOS-Slope» (ناگل و همکاران، ۲۰۱۹) بود. مؤلفهٔ APOS از چارچوب پیشنهادشده، شرایط بحث دربارهٔ توسعهٔ شناخت درک دانش‌آموزان از شیب را فراهم می‌کند و یازده مفهوم، یک زبان مخصوص شیب را به ارمغان می‌آورند. ترکیب این دو موضوع به ما اجازه می‌دهد تا درک مشاهده‌شدهٔ دانش‌آموزان را طبقه‌بندی و تعیین کنیم که تا چه حد ابزارهای جامع تحقیق و محتوای کلاس درس، با شیب مرتبط هستند. برای معرفی مؤلفهٔ APOS-Slope، ابتدا مؤلفهٔ APOS را معرفی و سپس یازده مفهوم شیب را ارائه می‌کنیم.

نظریهٔ APOS

این نظریه در واقع اقتباسی از ایده‌های **پیاژه** برای مطالعهٔ توسعهٔ دانش ریاضی در افراد از طریق مراحلی شامل «عمل، فرایند، شـــیء و طرحواره»[1] (APOS) اســت. **دوبینسکی** (۲۰۰۱)، APOS را بر اساس دیدگاه‌های نظری رشدشناختی پیاژه در رابطه با «انتزاع بازتابی» و بازسازی آن در حیطهٔ ریاضیات بنا نهاد. از این نظریه برای مطالعهٔ نحوهٔ ایجاد درک مفهوم دربارهٔ انواع موضوع‌های ریاضی استفاده می‌شود [Arnon, etal., 2014] .

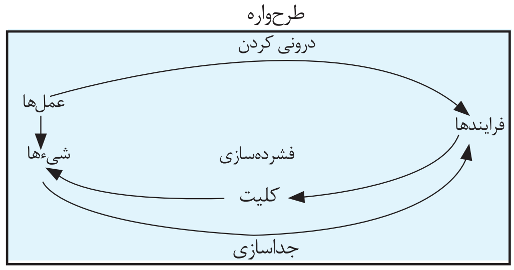
عمل: در APOS، هر عمل، تبدیلِ یک مفهوم ریاضی است که فرد آن را به‌عنوان یک مؤلفهٔ خارجی درک می‌کند.

فرایند: هنگامی که عملی تکرار می‌شود و شخص روی آن بازتاب می‌کند، ممکن است به‌صورت یک فرایند درونی‌سازی شود. فرایند در حال حاضر به‌عنوان یک مؤلفه داخلی درک می‌شود؛ به این معنی که ارتباط معنی‌داری با دانش ریاضی فرد دارد. این ارتباطات فرد را قادر می‌سازند که تبدیل را تصور برخی از گام‌هایش را حذف و نتایج آن را بدون نیاز به اجرای صریح تبدیل، پیش‌بینی کند.

سطوح انتقال بین عمل و فرایند: به کمک تعیین یا حدس زدن سطوح متفاوت در انتقال از یک عمل به مرحلهٔ فرایند، توسعهٔ یک مفهوم ریاضی امکان‌پذیر است. تعداد و مشخصهٔ سطوح انتقال، به مفهوم ریاضی مورد بحث بستگی دارد. به‌طور معمول، آن‌ها را از طریق داده‌های تجربی می‌توان معرفی کرد، اما سطوح انتقال ممکن است هنگام فکر کردن در مورد ساختارهای ذهنی متفاوتی مشخص شود که برای دانش‌آموزان به منظور رسیدن به یک مرحلهٔ فرایند توسعهٔ مفهوم ریاضی لازم است.

برای این مقاله، مفهوم ریاضی، شیب است و ما در نظر داریم سطوح انتقال از مرحلهٔ عمل به مرحلهٔ فرایند را مشخص کنیم. توجه داشته باشید که در APOS، در مورد مراحل «عمل»، «فرایند» و «شیء»، و همچنین، «سطوح بین مراحل» صحبت می‌شود. این با عبارت‌های استفاده‌شده توسط پیاژه سازگار است [پیشین]. یک مرحله نمی‌تواند حذف شود، اما سطح ممکن است چنین نباشد.

شیء: چون محدودهٔ برنامه‌های کاربردی یک فرایند، فراتر از زمینه‌ای است که ابتدا ساخته می‌شود. فرد ممکن است احساس کند به منظور مقابله با موقعیت‌های جدید لازم است عملیات زیادی را در یک فرایند به کار برد. هنگامی که فرد قادر به مشاهدهٔ فرایند به‌عنوان یک هویت است و می‌تواند به کار بردن عملیات یا یک فرایند را تصور کند، می‌توان گفت که فرایند در قالب یک شیء «فشرده»[2] شده است. در حقیقت، مرحلهٔ جدیدی از توسعهٔ بین فرایند و شیء، به نام «کلیت»[3]، پیش‌بینی‌شده است که فرد می‌تواند فرایند را به‌صورت یک هویت ببیند، اما هنوز نمی‌تواند عمل یا یک فرایند را تصور کند. برای مثال، در محاسبهٔ جزءصحیح $[\overline{0,9}]$ اگر کسی ۰ در نظر بگیرد، حد نامتناهی برای آن در سطح کلیت است و اگر ۱ (یک) در نظر بگیرد در سطح شیء است. نمودار ۱، ارتباط بین این مراحل را نشان می‌دهد.



نمودار ۱. نظریهٔ APOS همراه با کلیت (آرنون و همکاران، ۲۰۱۴)

طرحواره یک اصطلاح در روان‌شناسی است و معادل فارسی آن را انگاره یا طرح عنوان کرده‌اند. شبکه‌ای از اندیشه‌ها و روابط به هم‌پیوسته، یا شبکه‌هایی از مفاهیم که در حافظه افراد وجود دارند و آنان را قادر می‌سازد تا اطلاعات تازه را درک و جذب کنند

طرحواره (schema): مجموعهٔ منسجمی از عمل‌ها، فرایندها، شیء‌ها، و سایر **طرحواره‌هایی** است که با یک مفهوم ریاضی خاص مرتبط هستند. اگرچه ممکن است تصور شود که در نظریهٔ APOS یک پیشرفت خطی از عمل به فرایند و به شیء و سپس داشـــتن عمل‌ها، فرایندها و اشیای متفاوتی که در طرحواره سازمان‌دهی شـــده‌اند، وجود دارد، این اغلب به نظر می‌رسد شبیه به پیشرفت منطقی است که در آن تبدیلات جزئی، گذرها و بازگشت‌ها از یک نوع مفهوم به نوع دیگر وجود دارد [پیشین]. (طرحواره یک اصطلاح در روان‌شناسی است و معادل فارسی آن را انگاره یا طرح عنوان کرده‌اند. شبکه‌ای از اندیشه‌ها و روابط به‌هم پیوسته، یا شبکه‌هایی از مفاهیم که در حافظه افراد وجود دارند و آنان را قادر می‌سازد تا اطلاعات تازه را درک و جذب کنند.)

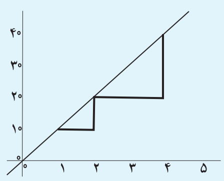
شیب

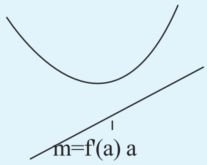
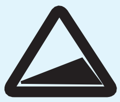
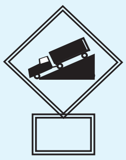
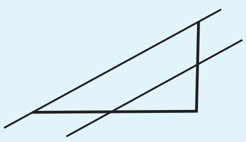
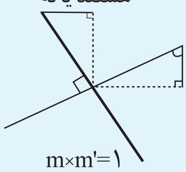
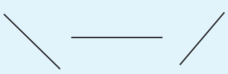
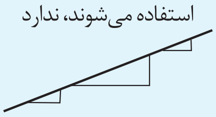
به‌طور رســـمی شیب به دانش‌آموزان کشـــور ایران در کلاس نهم ارائه می‌شود. این یکی از نقاط مهم در برنامهٔ درسی ریاضی دبیرستان اکثر کشورهاســـت. شیب مجدداً در برنامهٔ درسی ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد و با پیشرفت‌های مهمی در جهت

در این مطالعه، از نظریهٔ APOS به‌عنوان لنزی استفاده کردیم تا با در نظر گرفتن ۱۱ مفهوم شیب، بینش بیشتری در مورد یافته‌های مربوط به نحوهٔ درک از شیب ایجاد کنیم

زوایای میل در مثلثات، رگرسیون خطی در آمار، آهنگ تغییر تابعی و تغییر هم‌زمان دو متغیر در حساب دیفرانسیل و انتگرال، مشتقات در حساب دیفرانسیل و انتگرال، و مشتقات جهتی و جزئی در حساب دیفرانسیل چند متغیره [Martinez-Planell, Trigueros and McGee, 2017] توسعه می‌یابد. همچنین کلیدی در فهم سایر رشته‌هاست؛ رشته‌هایی مانند سینماتیک، محدوده‌ای از فیزیک که به شدت به استفاده و تفسیر بازنمایی‌های نموداری متکی است. تحقیقات گذشته یازده شیوه‌ای را که افراد شیب را تعریف می‌کنند، گزارش کرده‌اند (جدول ۱). تمام این مفهوم‌ها در برنامهٔ درسی تا پایهٔ دوازدهم در کشور ایران نیز پوشش داده شده است.

جدول ۱. یازده مفهوم دربارهٔ شیب از موری ـ روسو و همکارانش، ۲۰۱۱، با جرح و تعدیل

دسته	توصیف شیب به‌عنوان	مهارت رویه‌ای	درک مفهومی	پاسخ نمونه به شیب برابر است با:
خاصیت فیزیکی (P)	درک کلی از «سراشیبی»[5] یا «کجی»، «درجه»[6] یا «زیر و بمی»[7] یک خط	به‌طور شهودی سراشیبی یا سرازیری یک خط را نشان می‌دهد	آهنگ تغییر نشان‌دهندهٔ مقدار تغییر متغیر وابسته در هر واحد تغییر متغیر مستقل است	یک عدد که می‌گوید چقدر یک خط سراشیبی دارد. هر چه مقدار قدرمطلق شیب بزرگ‌تر باشد، خط سراشیبی بیشتری دارد
نسبت جبری (A)	مشخص‌شده توسط نسبت نمادین: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یا $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ **مثال:** خطی که از (۱،۲) و (۳،۴) می‌گذرد، دارای شیب ۱ است	ـ تفاضل مختصات y برای هر تغییر در y ـ تفاضل مختصات x برای هر تغییر x ـ تفاضل عرض‌ها را برای هر دو نقطه حساب کند. ـ تفاضل طول‌ها را برای هر دو نقطه حساب کند.	ـ تغییرات جهت‌دار است ـ نسبت تغییرات y روی x و x روی y برعکس هستند توضیح: منظور این است که مهم است که عرض نقطهٔ دوم را از عرض اول کم می‌کنیم و در تقسیم تفاضل طول‌ها نیز باید طول نقطهٔ دوم را از اول	تفاضل yها تقسیم بر تفاضل xها برای دو نقطهٔ روی یک خط
نسبت هندسی (G)	مشخص‌شده توسط تعیین میزان صعود (جابه‌جایی عمودی) تقسیم بر حرکت رو به جلو یک خط (جابه‌جایی افقی)	ـ شمارش واحدهای تغییر عمودی ـ شمارش واحدهای تغییر افقی ـ قرار دادن علامت برای شاخص جهت (بالا و راست مثبت، پایین و چپ منفی)	ـ بالا رفتن و جلو رفتن جهت‌دار هستند ـ نسبت‌های بالا به جلو و جلو به بالا برعکس هستند.	نسبت صعود به بالا به حرکت رو به جلو نمودار یک خط 
ضریب پارامتری (PC)	مشخص‌شده توسط ضریب m در معادلهٔ $y = mx + b$ **مثال:** شیب خط $y=-2x+5$ برابر ۲- است	ـ دستکاری جبری یک معادله به فرم شیب ـ عرض از مبدأ ـ تعیین ضریب m از x	ضریب x اطلاعات متفاوتی وابسته به فرم معادلهٔ خطی معلوم می‌کند	عدد مقابل x، مانند ۴ در $y=4x+6$ ↓ $m=4$
خاصیت تابعی (F)	بازنمایی آهنگ تغییر بین متغیرها **مثال:** چقدر یک متغیر نسبت به متغیر دیگر سریع‌تر تغییر می‌کند	جایگزینی کلامی شیب با حروف «آهنگ تغییر»	شیب توصیف‌کنندهٔ تغییر هم‌زمان دو کمیت است	اندازه‌گیری آهنگ تغییر بین دو متغیر مانند کیلومتر بر ساعت
مفهوم مثلثاتی (T)	بازنمایی شیب «زاویهٔ میل»[8] خط (خاصیتی که مرتبط با زاویه‌ای است که خط با یک خط افقی می‌سازد ـ تانژانت زاویهٔ فراز یا فرود یک خط ـ جهت مؤلفه یک بردار) **مثال:** $\tan\theta$ برابر شیب خط واصل بین (۰،۰) و $(\cos\theta,\sin\theta)$ است	ـ محاسبهٔ زاویه یک خط با جهت مثبت محور xها	تانژانت زاویهٔ میل برابر شیب‌خط مماس است	شیب زاویهٔ فراز خط با محور x $m=\tan\theta$

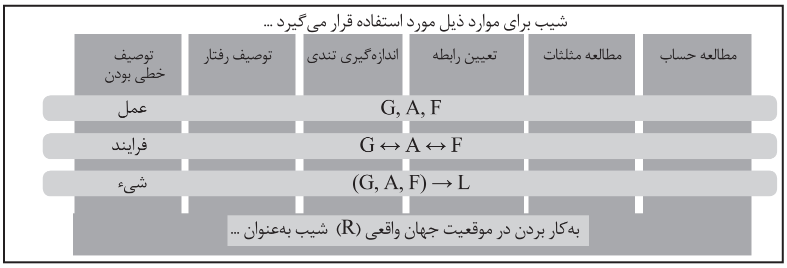
مفهوم حساب دیفرانسیل و انتگرال (C)	مرتبط با شیب‌خط منحنی در یک نقطه (حد- مشتق - اندازهٔ آهنگ تغییر لحظه‌ای برای هر تابع - خط مماس بر منحنی در هر نقطه) **مثال:** اگر $y=x^{۲}$، آن‌گاه ۲x شیب سهمی در هر نقطه x است	محاسبهٔ مشتق در یک نقطهٔ مشخص (طول نقطهٔ تماس)	مشتق به ازای طول نقطهٔ تماس برابر شیب‌خط مماس بر منحنی است	شیب در هر نقطه برای یک نمودار غیرخطی متفاوت است. شیب در هر نقطه برابر با شیب‌خط مماس بر منحنی در آن نقطه است 
موقعیت دنیای واقعی (R)	مرتبط با موقعیت‌های ایستا یا پویا شامل خطوط (موقعیت تابعی مانند رمپ صندلی چرخ‌دار) **مثال:** بلند شدن یا نشستن هواپیما - بزرگ‌راه - رمپ اسکی	تعیین کمیت دنیای واقعی مربوط به متغیر ورودی و خروجی (با استفاده از هر نوع بازنمایی)	تفسیر تغییرات به‌عنوان متغیر در دنیای واقعی 	برای حل مسائل دنیای واقعی، مانند پیدا کردن ارتفاع زمین از یک سقف یا غلظت مخلوط آب‌پرتقال، استفاده می‌شود 
خاصیت تعیین‌کننده (D)	برای تعیین خطوط موازی یا عمود (خاصیتی که تعیین می‌کند با داشتن یک نقطه روی خط و خاصیت موازی یا عمود بودن می‌توان معادلهٔ خط تعیین کرد)	- محاسبهٔ قرینه و معکوس - تشخیص اینکه شیب‌های مساوی نشان می‌دهد دو خط موازی‌اند - تشخیص اینکه شیب‌های قرینه و معکوس نشان می‌دهند دو خط بر هم عمودند	شیب نشان‌دهندهٔ تعداد نقاط به اشتراک گذاشته‌شده توسط دو رابطهٔ خطی و چگونگی تقاطع آن‌هاست 	یک ویژگی از خطوط است که می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد و بگوید آیا خطوط موازی (شیب برابر)، عمود بر هم (شیب عکس و قرینه) هستند یا نه 
شاخص رفتار (B)	شاخصی برای تعیین خط صعودی یا نزولی یا ثابت **مثال:** کدام خط شیب تندتری دارد؟ $y=۵x-۶$ یا $y=۲x+۱$	به‌طور شهودی تعیین می‌کند که یک خط صعودی یا نزولی است	- یک رابطهٔ صعودی (نزولی) این است که متغیرها در جهت (مخالف جهت) هم تغییر می‌کنند - آهنگ تغییر مثبت نشان می‌دهد دو متغیر در یک جهت تغییر می‌کنند	یک عدد که نشان می‌دهد آیا یک خط صعودی است (شیب منفی)، یا افقی (شیب صفر) 
ثابت خطی (L)	یک خاصیت ثابت و یکتا برای شکل‌های «راست یا مستقیم» که مستقل از بازنمایی است	انتخاب هر دو نقطه روی نمودار یا در یک جدول موقعی که چند نقطه داده شده‌اند	شیب مستقل از تعداد نقاط داده شده است، زیرا آهنگ تغییر بین متغیرهای وابسته و مستقل ثابت است	یک مقدار ثابت که بستگی به دو نقطه که برای محاسبهٔ آن استفاده می‌شوند، ندارد 

چارچوب APOS-Slope

ناگل و همکارانش (۲۰۱۹) استدلال می‌کنند که مفهوم شیب به کمک رابطهٔ بین نسبت هندسی (G)، نسبت جبری (A) و خاصیت تابعی (F) ایجاد می‌شود تا زمانی که ثابت خطی (L) شکل گیرد و شیء شیب نشان داده شود. این چهار مفهوم (G، A، F و L) به‌عنوان روش‌های فکر کردن در مورد شیب مطرح هستند.

نظریهٔ APOS در واقع اقتباسی از ایده‌های پیاژه برای مطالعهٔ توسعهٔ دانش ریاضی در افراد از طریق مراحلی شامل «عمل، فرایند، شیء و طرح‌واره» (APOS) است

البته هفت مفهوم دیگر پیشنهادشده را نیز به این شرح (نگاه کنید به جدول ۲) در نظر خواهیم داشت: ضریب پارامتری (PC)، شاخص رفتاری (B)، خاصیت فیزیکی (P)، خاصیت تعیین‌کننده (D)، موقعیت دنیای واقعی (R) و مفهوم مثلثاتی (T) و مفهوم حساب دیفرانسیل (C).



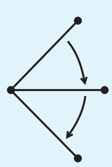
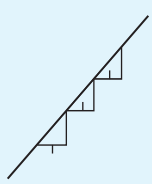
نمودار ۲. رابطه مراحل APOS و یازده مفهوم شیب

روش تحقیق و یافته‌ها

روش تحقیق در این مطالعه توصیفی از نوع پیمایشی بود که ۷۱ نفر از دانش‌آموزان مدرسه‌ای خاص و ۲۲ دانشجوی یک دانشگاه دولتی مورد بررسی قرار گرفتند. سؤالات تحقیق و چند نمونه پاسخ در پیوست آمده‌اند.

روش‌های تفکر در مورد شیب و APOS: ابتدا مفهوم ذکرشده در ردیف‌های نمودار ۲ را در نظر می‌گیریم. مفهوم مرتبط با روش‌های تفکر دربارهٔ شیب به‌عنوان یک عمل، فرایند یا شیء هستند: نسبت جبری (A)، نسبت هندسی (G)، خاصیت تابعی (F) و ثابت خطی (L). در این مطالعه به دنبال پاسخ این سؤال هستیم که «چگونه شیب را بر مبنای APOS می‌توان مفهوم‌سازی و تحلیل کرد؟» جدول ۲ این مراحل را به همراه درصد دانش‌آموزانی که در این سطوح قرار داشتند، نشان می‌دهد. دانشجویان همگی سؤالات ۱ و ۲ را پاسخ دادند، ولی سؤال ۳ را ۴۰ درصد پاسخ دادند و سؤال ۴ را هیچ‌کس پاسخ نداد.

جدول ۲. روش‌های تفکر در مورد شیب (یازده مفهوم) و تحلیل آن با APOS

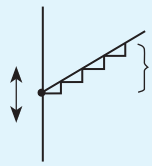
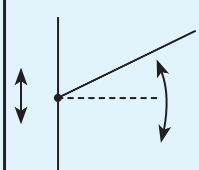
روش‌های تفکر / در مورد شیب APOS	نسبت جبری (٪) (A)	نسبت هندسی (٪) (G)	خاصیت تابعی (٪) (F)	ثابت خطی (٪) (L)
عمل (A)	(A_A) (٪ ۹۸) ـ $m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$ به‌عنوان فرمول می‌داند ـ فرمول از ذهن فرد جداست، به طوری که ارجاع هندسی وجود ندارد که امکان توجیه فرمول را فراهم کند	(A_G) (٪ ۹۰) ـ ΔV مثبت است، هنگامی که خط یا پاره‌خط صعودی است، و منفی است هنگامی که خط نزولی است	(A_F) (٪ ۷۳) ـ تمایز کلامی شیب با آهنگ تغییر (به اصطلاحات اشاره می‌شود نه مفهوم) ـ دانش‌آموز شیب را به‌عنوان آهنگ تغییر بین دو متغیر تعریف می‌کند	
سطوح انتقال عمل به فرایند (T)	(T_A) (٪ ۸۲) ـ توانایی تعمیم نسبت تفاضل یک نقطهٔ ثابت از هر نقطهٔ دیگر روی خط را دارد ـ ممکن است بتوان فرم‌های متفاوت معادلهٔ یک خط را با استفاده از فرمول به دست آورد $m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$	(T_G) (٪ ۶۵) ـ توانایی درگیر شدن در تصویر ذهنی پویای مثلث‌های متشابه که در حال حرکت به بالا و پایین یک خط برای ایجاد نسبت‌های مساوی از ΔV به ΔH هستند $(T_{A\text{-}G})$ (٪ ۴۹) ـ توانایی استدلال در هر دو سطوح (T_A) و (T_G)، با افزودن اتصال بازنمایی‌ها. برای مثال، ΔV می‌تواند به صورت $y_۲ - y_۱$ بیان شود		

ادامهٔ جدول ۲

فرایند	درک فرایندی مستقل از بازنمایی است	درک فرایندی مستقل از بازنمایی است	درک فرایندی مستقل از بازنمایی است	ـ
	ـ نیاز به درکی مستقل از بازنمایی دارد ـ رفتاری مطابق (T_{A-G}) دارد (۲۴٪)			
	ـ استقلال بازنمایی، شامل درک کلامی شیب به‌عنوان آهنگ تغییر، مطابق با مفهوم خاصیت تابعی ـ توانایی تولید تصاویر پویا بدون نیاز به انجام محاسبات صریح ـ آهنگ تغییر به‌عنوان تغییر عمودی به‌عنوان یک تابع از تغییر افقی ـ $\Delta V = m\,\Delta H$ در مورد $y = mx+b$، دانش‌آموز b را به‌عنوان ارتفاع اولیه تشـــخیص می‌دهد (محل تقاطع با محور عرض‌ها) و mx را به‌عنوان تغییر عمودی در نظر می‌گیرد ـ توانایی محاسبهٔ شیب توابع غیرخطی ـ توانایی استدلال کوواریانسی			
کلیت/شیء	ـ درک مرحلهٔ شیء از شیب، حاصل انجام یا تصور انجام عمل‌هایی در فرایند شیب است (۰٪) ـ دانشجویی که قادر به استفاده از درک فرایند شیب خود برای ساختن یک مفهوم شیب در ابعاد سه بعدی است، رفتاری مطابق با درک مرحلهٔ شیء شیب از خود نشان می‌دهد ـ او قادر به انجام عمل‌هایی روی تصورات فرایند خود از شیب در واحد کیلومتر در ساعت و یا هر ترکیبی از واحدهای مورد نیاز برای یک کاربرد دنیای واقعی (R) است ـ مفهوم ثابت خطی (L) شـــیب به‌عنوان تفکر شـــیب و یک ویژگی ثابت منحصربه‌فرد که مستقل از بازنمایی است، تعریف شده است ـ خاصیت ثابت نشان‌دهندهٔ آگاهی از عدم تغییر شیب به هر زوج خاص از نقاط مورد استفاده برای محاسبهٔ آن و تغییر آن در یک کلاس هم‌ارز از خطوط موازی است (مطابق با T_G) ـ خاصیت ثابت با تفکر شیب به‌عنوان آهنگ ثابت تغییر بین مقادیر تغییر هم‌زمان دو متغیر نیز قابل تعریف است (مطابق با T_F) ـ استقلال بازنمایی، حداقل یک سطح تفکر انتقالی T_{A-G} را نشان می‌دهد ـ منحصربه‌فرد بودن بازنمایی همچنین به درک کلامی شیب به‌عنوان آهنگ ثابت تغییر نیاز دارد (مطابق با T_F) و لزوماً به «واحد» آهنگ تغییر محدود نیست ـ تعریف مفهوم ثابت خطی به حداقل یک مرحله فرایند درک شیب نیاز دارد ـ مفهوم ثابت خطی مستلزم در نظر گرفتن شیب به‌عنوان یک فرایند و به‌عنوان یک هویت مستقل است ـ توانایی انجام عمل‌ها در فرایند، چیزی است که شیء را از کلیت متمایز می‌کند				

روش تفکر در مورد شیب (یازده مفهوم) و تحلیل آن با APOS

کاربردهای شیب / APOS	توصیف خطی بودن (ضریب پارامتری، PC) (٪)	توصیف رفتار (شـــاخص رفتار، B) (٪)	اندازه‌گیری سراشیبی (خاصیت فیزیکی، P) (٪)	تعیین روابط (خاصیت تعیین‌کننده، D) (٪)
عمل (A)	ـ شـــیب را به‌عنـــوان عـــددی در مقابل x در نظر می‌گیرند بدون در نظر گرفتن فرم معادلهٔ خطـــی که داده شـــده است ـ بـــه اشـــتباه گزارش می‌دهند که ضریب x شیب است، حتی زمانی که یـــک معادلهٔ خطی در فرم استاندارد نوشته شده باشد (۱۰۰٪)	ـ دانش‌آموز محدود به درک درســـتی از این واقعیت است که خط صعودی دارای شـــیب مثبت است، خط افقی دارای شیب صفر است و خط نزولـــی دارای شیب منفی است ـ دانش‌آمـــوز ممکن اســـت قادر بـــه بیان تفاوت بیـــن دو خط متفاوت با شـــیب‌های مثبت باشد (۹۸٪)	ـ اســـتفاده بـــا مفهوم‌سـازی خاصیت فیزیکی شیب ـ دانش‌آموز ممکن اســـت هیچ دانش یا درکی از مفهوم ریاضی شیب نداشته باشد ـ تفسیر دقیـــق A_A یا A_G از شیب نشـــان می‌دهد که دو تابع دارای شـــیب‌های یکسانی هســـتند. اما تجربیات گذشته (در سیستم مختصات همگن) بـــا اســـتفاده از شـــیب بـــرای اندازه‌گیری سراشـــیبی نشـــان می‌دهد که یک نمـــودار تندتر است و بنابراین شیب بیشتری نسبت به دیگری دارد (۸۳٪)	از شـــیب می‌تـــوان بـــرای تعیین روابط استفاده کرد، با آگاهی از این واقعیت که خطوط موازی شیب یکسان دارنـــد و خطـــوط عمودی دارای شـــیب‌هایی هستند که شیب‌ها قرینه و معکوس یکدیگرند (۷۵٪)

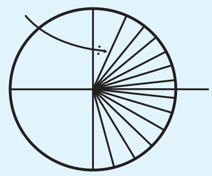
سطوح انتقال عمل به فرایند (T)	T_A: قادر به تشخیص ضریب m مربوط به شیب در هر بازنمایی نمادین داده‌شده از یک خط است T_G: دانش‌آموز ممکن است m را به‌عنوان یک پارامتر به‌صورت هندسی یا نمادین در نظر بگیرد T_{A-G}: تفسیر هندسی پارامتر m T_F: دانش‌آموز ممکن است m را به‌عنوان یک پارامتر نمادین در نظر بگیرد. این به آگاهی نیاز دارد، مبنی بر اینکه m به‌عنوان آهنگ تغییر و سطح انتقال T_F در درک شیب در نظر گرفته شود (۹۲٪)	 T_{A-G}: توانایی توجیه خاصیت و توصیف خواص عددی، نمادین و هندسی، حداقل به یک سطح انتقال T_{A-G} نیاز دارد (۷۵٪)	به‌منظور اندازه‌گیری چنین «سراشیبی» ممکن است فقط نیاز به A_A باشد (استفاده از یک فرمول حفظ‌شده)، اما برای ارتباط آن با یک خاصیت فیزیکی، به نظر می‌رسد به درک هندسی برای تجسم یک هویت فیزیکی متناظر (مانند جاده، نردبان، کوه) نیاز داریم. از این رو، برای اندازه‌گیری و همچنین ارتباط و توجیه خواص عددی و فیزیکی حداقل به سطح انتقال T_{A-G} نیاز داریم (۸۱٪)	توانایی توجیه این خصوصیات (بالا)، حداقل به یک سطح انتقال T_G نیاز دارد (۷۳٪)
فرایند	به‌عنوان یکی از دو پارامتر در $y=mx+b$ در نظر بگیرد و b را به‌عنوان ارتفاع اولیه و m را به‌عنوان شیب در یک روش پویا درک کند (۵۹٪)	(۵۶٪)	اندازه‌گیری سراشیبی نشان می‌دهد که یک نمودار تندتر است و بنابراین شیب بیشتری نسبت به دیگری دارد (۶۰٪)	
کلیت/ شیء		-	ـ دانش‌آموز ممکن است به انجام عمل‌هایی در یک فرایند شیب به‌منظور درک ایده‌های فیزیکی، مانند درجهٔ میل یک جاده نیاز داشته باشد ـ اندازه‌گیری شیب، هنگام مواجهه با نمودارهای خطوط در سیستم مختصات غیرهمگن (۵٪)	
طرحواره			عمل مقایسهٔ اختلاف بین یک خط و شیب آن را در طرحوارهٔ هندسهٔ تحلیلی با تابع خطی انجام می‌دهیم و آهنگ تغییر آن را در یک طرحواره از توابع محاسبه می‌کنیم (۰٪)	

نتایج پژوهش و پیشنهادها

در این مطالعه، از نظریهٔ APOS به‌عنوان لنزی استفاده کردیم تا با در نظر گرفتن یازده مفهوم شیب، بینش بیشتری در مورد یافته‌های مربوط به نحوهٔ درک از شیب ایجاد کنیم. نتایج نشان می‌دهند که دانش‌آموزان به مرحلهٔ شیء از شیب در حد تابع خطی رسیدند (ده مفهوم)، ولی در بیان تفسیر کاربرد واقعی آن اغلب آن‌ها ضعف داشتند. در سایر مفهوم مشکل چندانی مشاهده نشد. به‌نظر می‌رسد کتاب‌های درسی در ایران به خوبی مفهوم شیب را ارائه کرده‌اند. دانشجویان برای درک یازده مفهوم شیب در حد تابع

خطی تا مرحلهٔ شیء مشکلی نداشتند، ولی در زمینهٔ درک سه‌بعدی شیب مشکلات بسیاری داشتند؛ به‌طوری که شاید حتی چنین مسائلی ندیده بودند. درک دانشجویان از شیب در حالت سه‌بعدی در مرحلهٔ کلیت قرار داشت.

این پژوهش می‌تواند به محققان، معلمان و استادان کمک کند تا چگونگی مفهوم‌سازی شیب را تحلیل کنند؛ همچنین می‌توانند برای آموزش در کلاس درس نیز از آن استفاده کنند. این چارچوب بینش بیشتری در مورد یافته‌های اخیر **نیوتن** (۲۰۱۸)، مبنی بر اینکه مشکلات معلمان در استفاده از شیب به‌عنوان یک معیار (خاصیت فیزیکی)، با ضعف در توصیف آهنگ تغییر (خاصیت تابعی) همراه است و معلمان را به حداکثر یک سطح انتقال از استدلال شیب محدود می‌کند فراهم کند. این یافته‌ها به آن‌ها کمک می‌کند

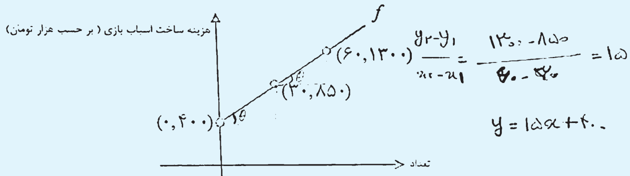
کاربردهای شیب / APOS	مطالعهٔ مثلثات (مفهوم مثلثات، T) (٪)	مطالعهٔ حساب (مفهوم حساب C) (٪)	به کار بردن در موقعیت‌های دنیای واقعی (موقعیت دنیای واقعی، R) (٪)
عمل (A)	ـ بهره‌گیری از اصطلاح «زاویه» ـ تانژانت زاویهٔ حاده مثلث برابر اندازهٔ ضلع مقابل روی ضلع مجاور (۹۱٪)	مشتق یک تابع در یک نقطهٔ معین، شیب خط مماس تابع در نقطهٔ داده شده است (ـ)	کپی کردن یا تقلید از مراحل راهبردی راه حل مطرح‌شده (۶۴٪)
سطوح انتقال عمل به فرایند (T)	دانش‌آموزان قادر به ایجاد یک تصویر پویا هستند که در آن می‌توانند ببینند که تانژانت به سمت بی‌نهایت افزایش می‌یابد، زمانی که زاویه از ۰ به ۹۰ افزایش پیدا می‌کند (۶۹٪)	(ـ)	مسائل دنیای واقعی که فقط شامل یک مفهوم از شیب هستند، مانند مسائل فیزیکی که ممکن است در دو بعد با یک تابع خطی مدل‌سازی شوند، ممکن است فقط به یک سطح انتقال $T_{A\text{-}G}$ نیاز داشته باشند (۵۲٪)
فرایند	(۵۱٪) 	دانش‌آموز به درک فرایند شیب نیاز دارد تا قادر به در نظر گرفتن مشتق در یک نقطه به‌عنوان آهنگ لحظه‌ای تغییر باشد (ـ)	مسائل دنیای واقعی با طبیعت پویا، شامل مفهوم شیب به‌عنوان آهنگ تغییرند، چون آن‌ها نیازمند فرایند شیب هستند (یادآوری این معادل با مرحلهٔ فرایند درک خاصیت تابعی شیب است) (۳۹٪)
کلیت/شیء	اگر دانش‌آموز قادر به استفاده از تصاویر پویا برای رسم نمودار تابع مماس یا تغییرات تابع تانژانت باشد، عمل را در فرایند هندسی و عددی در $T_{A\text{-}G}$ انجام خواهد داد. او می‌تواند رفتاری مطابق با مرحلهٔ شیء توسعهٔ شیب نشان دهد (۲۲٪)	ـ در هر نقطه از نمودار f، دانش‌آموز دارای تصویر پویایی از نزدیک شدن خطوط قاطع به خط مماس در نقطهٔ مزبور است (فرایند شیب) و شیب خطوط مماس تابع f ، متناظر با مقادیر 'f حرکت می‌کند (ـ)	$T_{A\text{-}G}$ و مراحل فرایند مرتبط هستند با آنچه **استامپ** (۲۰۰۱) به‌عنوان کاربرد فیزیکی (ایستا) و تابعی (پویا) کاربردهای دنیای واقعی شیب معرفی می‌کند. می‌توان انتظار داشت که برخی از مسائل دنیای واقعی در زمینه‌ای که برای دانشجو جدید است، تنظیم شوند. در این مورد راهبرد حل ممکن است به انجام عمل در یک فرایند شیب نیاز داشته باشد. در این مورد مرحلهٔ شیء از شیب مورد نیاز است (۵٪)
طرحواره	استفاده از شیب برای مطالعهٔ مثلثات ممکن است به‌عنوان رشد در طرحوارهٔ شیب دیده شود، زیرا هنگام یادگیری مثلثات، دانش‌آموزان به هماهنگ کردن فرایندها در طرحواره شیب و مثلثات نیاز دارند (۵٪)	عمل روی یک فرایند شیب برای درک هندسی مشتقات جزئی، صفحات مماس، مشتقات جهت‌دار و دیفرانسیل کامل مورد نیاز است (ـ)	(۰٪) 

طرح‌واره: مجموعهٔ منسجمی از عمل‌ها، فرایندها، شیءها، و سایر طرح‌واره‌هایی است که با یک مفهوم ریاضی خاص مرتبط هستند

به دقت تشخیص دهند فرد در کدام مرحله از درک شیب قرار دارد یا در طراحی مواد آموزشی، تدوین مجدد ایده‌های آموزشی دربارهٔ شیب را برای حرکت به سمت مراحل پیشرفته تسهیل کنند.

الف) نمونهٔ پاسخ

الف) برای شکل زیر یک معادله خط بنویسید و نمودار داده شده را تفسیر کنید.



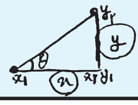
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1300-850}{60-30}=15$$

$$y=15x+400$$

برای شروع کار ۴۰۰ هزار تومان پول لازم است و به ازای هر اسباب بازی ۱۵ هزار تومان به مبلغ کل اضافه می‌شود.

$400+15$

ب) تانژانت زاویه خط با جهت مثبت محور طول‌ها را بیابید و تفسیر کنید(مختص پایه دهم و بالاتر).

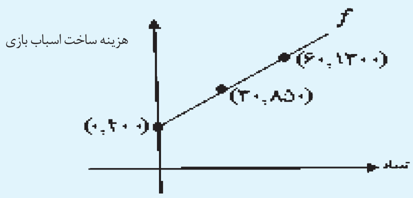


$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=a=$ در مورد الف $=15$ تانژانت زاویه با جهت مثبت محور طول‌ها برابر است با شیب خط.

سؤالات پرسشنامه

سؤال ۱: معادله خطی بنویسید که از نقطه $(-3,4)$ بگذرد و با خط $5x-2y=-3$ موازی باشد.

سؤال ۲: الف) برای شکل زیر یک معادله خط بنویسید و نمودار داده شده را تفسیر کنید.



ب) تانژانت زاویه خط با جهت مثبت محور طول‌ها را بیابید و عدد آن را تفسیر کنید.

پ) $f'(20)$ را محاسبه و رابطه آن با شیب خط و تانژانت زاویه خط با جهت مثبت محور طول‌ها بیان و تفسیر کنید. (مختص دانشجویان)

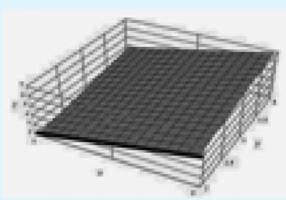
سؤال ۳: صفحه زیر را در نظر بگیرید. الف) شیب در جهت‌های x و y یعنی (m_x, m_y) را پیدا کنید.

ب) تغییرات عمودی کل (Δz) را برای $\Delta x=2$, $\Delta y=5$ محاسبه کنید.

ج) معادله صفحه را بنویسید. (راهنمایی: $z-z_0=m_x(x-x_0)+m_y(y-y_0)$)

د) اگر صفحه زیر، صفحه مماس بر نمودار تابع $z=f(x,y)$ در نقطه $(1,2,2)$ باشد. دیفرانسیل تابع در نقطه $(1,2)$ را در صورت امکان به دست آورید. $df(1,2)=?$

(مختص دانشجویان)



سؤال ۴: با توجه به نمودار زیر، علامت $\frac{\partial f}{\partial y}(4,0/7)$ $D_{<-2,1>}f(4,0)$ را مشخص کنید.

(مختص دانشجویان)

هنگامی که فرد قادر به مشاهدهٔ فرایند به‌عنوان یک هویت است و می‌تواند به کار بردن عملیات یا یک فرایند را تصور کند، می‌توان گفت که فرایند در قالب یک شیء «فشرده» شده است

تجزیه و تحلیل پاسخ‌ها آزمون بر اساس APOS-Slope

سؤال ۱: معادله خطی بنویسید که از نقطه $(۴,-۳)$ بگذرد و با خط $۵x-۲y=-۳$ موازی باشد.

حل: ضریب پارامتری $۵x-۲y=-۳ \Rightarrow m=\frac{۵}{۲}$

خاصیت تعیین‌کنندگی(موازی یا عمود) $m=m'=\frac{۵}{۲}$

نوشتن معادله خط $y+۳=\frac{۵}{۲}(x-۴) \Rightarrow y=\frac{۵}{۲}x-۱۳$

ب) تغییرات عمودی کل (Δz) را برای $\Delta x=۴\ ,\ \Delta y=۵$ محاسبه کنید.

$\Delta z=m_x\,\Delta x+m_y\,\Delta y=۳\Delta x+\Delta y=۱۲+۵=۱۷$ (نسبت جبری در فضای سه بعدی)

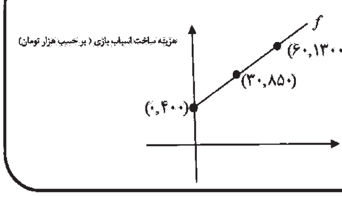
ج) معادله صفحه را بنویسید. (راهنمایی: $z-z_۰=m_x(x-x_۰)+m_y(y-y_۰)$)

$z-z_۰=m_x(x-x_۰)+m_y(y-y_۰) \Rightarrow z-۲=۳(x-۱)+m_y(y-۲)$ (نوشتن معادله)

د) اگر صفحه زیر، صفحه مماس بر نمودار تابع $z=f(x,y)$ در نقطه $(۱,۲,۲)$ باشد، دیفرانسیل تابع در نقطه $(۱,۲)$ را درصورت امکان به‌دست آورید. $df(۱,۲)=?$

$df(x,y)=m_x dx+m_y dy \Rightarrow df(۱,۲)=۳dx+۱dy$ (مفهوم حساب دیفرانسیلی و ضریب پارامتری)

سؤال ۲: الف) برای شکل زیر یک معادله خط بنویسید و نمودار داده شده را تفسیر کنید.



حل الف: نسبت جبری- ثابت خطی $m=\frac{۸۵۰-۴۰۰}{۳۰-۰}=\frac{۱۳۰۰-۸۵۰}{۶۰-۳۰}=\frac{۱۳۰۰-۴۰۰}{۶۰-۰}=۱۵$

ضریب پارامتری- نوشتن معادله خط $y=۱۵x+۴۰۰$

تفسیر: نمودار تغییرات هزینه ساخت اسباب بازی را نسبت به تعداد آن نشان می‌دهد(**خاصیت تابعی**)- هزینه ساخت با افزایش تعداد، به طور ثابت در حال افزایش است(**خاصیت رفتاری**)- به ازای افزایش هر واحد کالا،۱۵ هزار تومان به هزینه ساخت اسباب بازی اضافه می‌شود(**موقعیت دنیای واقعی- نسبت هندسی- خاصیت فیزیکی**)- هزینه ساخت اسباب بازی در شروع تولید، ۴۰۰ هزار تومان است(**نسبت هندسی**) .

ب) تانژانت زاویه خط با جهت مثبت محور طول‌ها را بیابید و تفسیر کنید(مختص پایه دهم و بالاتر).

حل: $\tan\theta=\frac{۸۵۰-۴۰۰}{۳۰-۰}=\frac{۱۳۰۰-۸۵۰}{۶۰-۳۰}=\frac{۱۳۰۰-۴۰۰}{۶۰-۰}=۱۵$

$\tan\theta$ همان شیب خط است(مفهوم مثلثاتی- نسبت جبری-ثابت خطی).

پ) $f'(۲۰)$ را محاسبه و ارتباط آن با شیب و تانژانت زاویه خط با جهت مثبت محور طول‌ها بیان و تفسیر کنید(مختص پایه دوازدهم).

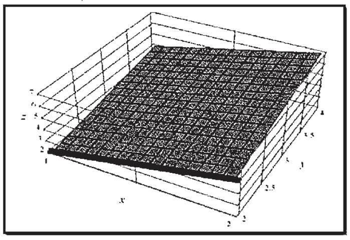
حل: $f'(۲۰)=۱۵=m=\tan\theta$ یعنی با افزایش یک واحد به تعداد تولید، ۱۵ هزار تومان برای ساخت اسباب بازی هزینه اضافه می‌شود (مفهوم حساب دیفرانسیل و انتگرال- ثابت خطی-مفهوم مثلثاتی).

پی‌نوشت‌ها

1. Action, Process, Object and Schema 2. encapsulated 3.Totality4. steepness 5. slant 6. grade 7. pitch 8. inclination

سؤال ۳:صفحه زیر را در نظر بگیرید.الف) شیب در جهت‌های x و y یعنی (m_x, m_y) را پیدا کنید.

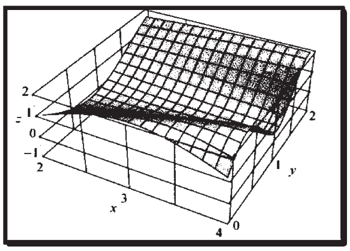
$m_x=۳\ ,\ m_y=۱$ (نسبت هندسی در فضای سه بعدی)



سؤال ۴: با توجه به نمودار زیر، علامت $\frac{\partial f}{\partial y}(۴\ ,\ ۰/۷)$ و $D_{<-۲,۱>}f(۴\ ,\ ۰)$ را مشخص کنید.

$\frac{\partial f}{\partial y}(۴\ ,\ ۰/۷)<۰$ زیرا با افزایش y ، z کاهش می‌یابد. (خاصیت رفتاری و خاصیت فیزیکی)

$D_{<-۲,۱>}f(۴\ ,\ ۰)>۰$ زیرا با افزایش در جهت بردار $<-۲,۱>$ ، مقدار f افزایش می‌یابد.



منابع

1. Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., et al. (2014). APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education. New York: Springer Verlag.
2. Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research: An ICMI study. In D. Holton (Ed.). The teaching and learning of mathematics at university level (pp. 275–282). Dordrecht: Springer.
3. Martínez-Planell, R., Trigueros, M., & McGee, D. (2017). Studentsí understanding of the relation between tangent plane and directional derivatives of functions of two variables. The Journal of Mathematical Behavior, Vol. 46, 13–41.
4. Moore, K. C., & Thompson, P. W. (2015). Shape thinking and students' graphing activity. In T. Fukawa-Connelly, N. E. Infante, K. Keene, & M. Zandieh (Eds.).
5. Moore-Russo, D., Conner, A., & Rugg, K. I. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction.Educational Studies in Mathematics, 76(1), 3–21.
6. Nagle, C., Martínez-Planell, R., & Moore-Russo, D. (2019). Using APOS theory as a framework for considering slope understanding. The Journal of Mathematical Behavior.C. Reid (2006), from zero to infinity what makes number intresting, Ak peters, Ltd, wellesley, Massachusetts.
7. Newton, X. A. (2018). Undergraduate stem majors' understanding of slope. Improving teacher knowledge in K-12 schooling. Cham, Switzerland: Palgrave Macmillan75–100

دانش موضوعی

گردو گرد است، ولی هر گردی گردو نیست

«اسرار عددهای اول»

محمدحسن بیژن‌زاده
استاد تمام ریاضی دانشگاه خوارزمی تهران

ما در ریاضیات با قضیه‌ها سر و کار داریم. قضیه‌ها حقایق ریاضیات را بیان می‌کنند. به جز احکام اولیهٔ هر رشته از ریاضیات که آن‌ها را «بنداشت» یا «اصل موضوع» می‌نامیم، بقیهٔ احکام که آن‌ها را قضیه می‌نامیم باید دارای برهان باشند. در واقع، آنچه ریاضیات را از سایر علوم بشری متمایز می‌سازد، برهان است. در واقع اگر برهانی در کار نباشد، ریاضیاتی وجود ندارد.

بیشتر قضیه‌های ریاضیات در واقع گزاره‌های شرطی هستند که از مدل «اگر p، آن‌گاه q» پیروی می‌کنند:

○ اگر مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد، آن‌گاه رابطهٔ **فیثاغورث** در آن برقرار است.

○ اگر دو زاویهٔ یک مثلث برابر باشند، دو ضلع مجاور این زاویه‌ها برابرند.

در منطق وقتی گزارهٔ

$$p \Rightarrow q \qquad (1)$$

نادرست است که p درست و q نادرست باشد. به ازای سایر ارزش‌دهی‌های p و q این گزارهٔ شرطی، درست است.

از گزاره (۱) گزارهٔ

$$q \Rightarrow p \qquad (2)$$

را می‌توان ساخت که آن را عکس گزارهٔ (۱) می‌نامیم.

ممکن است یک گزاره شرطی درست باشد، اما عکس آن درست نباشد:

(۳) اگر عددی بر ۴ قابل قسمت باشد، بر ۲ هم قابل قسمت است.

اما به وضوح پیداست که عکس این گزاره درست نیست:

اگر عددی بر ۲ قابل‌قسمت باشد، بر ۴ نیز قابل قسمت است.

پس ممکن است عکس یک گزارهٔ شرطی در مواردی درست و در مواردی نادرست باشد.

با این مقدمه به یک مسئلهٔ تاریخی در خصوص عددهای اول می‌پردازیم:

اگر p عددی اول باشد، برای هر عدد طبیعی a داریم:

$$a^p \equiv a \pmod p \qquad (\alpha)$$

این قضیهٔ را «قضیهٔ کوچک فرما» می‌نامند. این قضیه در درس جبر ۱ در مبحث گروه‌های متناهی اثبات می‌شود. معنی این قضیه آن است که باقی‌ماندهٔ تقسیم a^p بر p، با باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر p برابر است. برای مثال $۱۸۵^{۳۷}$ را امتحان کنید!

عدد $۱۸۵^{۳۷}$ بر ۳۷ قابل قسمت است.

ما این عدد را نمی‌شناسیم و شاید روزها یا ماه‌ها وقت بگیرد تا ارقام آن به دست آید. لیکن این قدرت برهان ریاضیات است که نداشتن تجربه را جبران می‌کند. این عدد بر ۳۷ قابل قسمت است، زیرا ۱۸۵ بر ۳۷ قابل‌قسمت است.

حالا این سؤال پیش می‌آید که آیا عکس قضیهٔ کوچک فرما قضیه است؟

یک‌بار دیگر رابطهٔ (α) را دقیق‌تر شرح می‌دهیم تا بهتر بتوانیم عکس آن را بیان کنیم:

اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی a داریم:

$$a^p \equiv a \pmod p \qquad \text{(رابطهٔ } \alpha\text{)}$$

پس عکس آن چنین است:

(حکم γ) اگر برای هر عدد طبیعی a داشته باشیم: $a^p \equiv a \pmod p$، آن‌گاه p عددی اول است.

جالب است بدانید، تا این اواخر کسی از ریاضی‌دانان به این فکر نیفتاده بود که عکس قضیهٔ فرما را صورت‌بندی کند و به فکر اثبات یا رد آن باشد. اگر قادر باشیم حکم (γ) را اثبات کنیم، یعنی برای آن برهانی ارائه دهیم، خود این حکم یک قضیهٔ ریاضی است و در این صورت ثابت کرده‌ایم که عکس قضیهٔ کوچک فرما یک قضیه است.

چنانچه نتوانیم برهانی برای آن اقامه کنیم، به این حدس نائل می‌شویم که این حکم درست نیست و لذا نقیض آن درست است.

با آنکه قضیهٔ کوچک فرما در سال‌های ۱۶۳۴ م، یعنی حدود چهار قرن قبل اثبات شده است، بررسی و تعیین تکلیف حکم (γ) به دههٔ اول قرن بیستم میلادی برمی‌گردد. سه نفر از جبردانان دانشگاه «جورجیا» به نام‌های **آلفرد**، **گرانویل**، و **پومرفس**، پس از سال‌ها تلاش و با استفاده از برنامه‌ریزی‌های رایانه‌ای پیشرفته توانستند حکم (γ) را نقض کنند.

می‌دانیم که یک گزاره شرطی، مثل اگر p آن‌گاه q، فقط وقتی نادرست است که p (مقدم‌گزاره) درست و q (تالی‌گزاره) نادرست باشد. لذا برای رد حکم (γ) باید عددی غیراول بیابیم که برای هر عدد طبیعی a در رابطهٔ

$$a^p \equiv a \pmod p$$

صدق کند.

کار تیم سه‌نفرهٔ دانشگاه جورجیا کاری خارق‌العاده در مبحث نظریهٔ اعداد محسوب می‌شود. چرا که وجود چنین عددهایی که در واقع خاصیت عددهای اول را دارند، اما اول نیستند، ظاهراً بسیار نادر و کمیاب هستند. *به عبارت دیگر، عددهای مرکبی وجود دارند که خاصیت‌های عددهای اول را دارا هستند*؛ یعنی در (رابطهٔ α) برای هر عدد طبیعی a صدق می‌کنند!

کوچک‌ترین این عددها که توسط **کار میشل**[1] کشف شده، عدد ۵۶۱ است که عددی مرکب است:

۵۶۱=۳×۱۱×۱۷

این عدد در سال ۱۹۱۰ توسط کار میشل کشف شد. از این‌رو، این‌گونه عددهای مرکب را که در رابطهٔ α صدق می‌کنند، «عددهای کار میشل» نیز می‌نامند. به قدرت ریاضیات توجه کنید:

$$۲۵۶۳^{۵۶۱} \equiv ۲۵۶۳ \pmod{۵۶۱}$$

این هم‌نهشتی را به زبان ساده بیان کنید. به جای a عددهای دیگری قرار دهید. نتیجه آنکه هر عدد اول در رابطهٔ

$$a^p \equiv a \pmod p$$

صدق می‌کند، لیکن هر عدد m که در

$$a^m \equiv a \pmod m$$

برای هر a صدق کند (آزمایش قضیهٔ کوچک‌فرما)، لزوماً اول نیست. هر گردو گرد است، اما هر گردی گردو نیست.

امروزه یافتن عددهای اول بزرگ و کار با «ترکیبیات»[2] آن‌ها در حوزه‌های علمی رمزنگاری و سیستم‌های امنیت رایانه‌ای کاربرد فراوانی دارد.

پی‌نوشت‌ها

1. Car micheal

۲. متخصصان علوم رایانـــه، به‌ویژه متخصصان امنیت رایانه و سیســـتم‌های امنیتی رویه‌های فنی خاصی را با استفاده از عددهای اول اعمال می‌کنند.

منابع

1. W.k.Nicholson: (Abstruct Algebra) PWS, Boston, Publishing Company. 1997.
2. What,s Happening in the mathematical Sciences, American Mathematical Society. Vol 1,1993.

نامه‌های رسیده

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی با دریافت مقاله‌ها، روایت معلمان، دیدگاه‌ها، نقد و بررسی کتاب از سوی خوانندگان گرامی، پربارتر خواهد شد. تا پایان آذر ۱۳۹۸، نامه‌ها و مطالب دوستان زیر، به‌دست ما رسیده است. ضمن تشکر از همگی آن‌ها، منتظر دریافت نامه‌های شما هستیم!

- علی‌اکبر جاویدمهر، از قم؛
- مهدی مفیدی احمدی، از زنجان؛
- نرگس یافتیان، از تهران؛
- امین کشاورز، از شیراز؛
- شیدا اچرش؛
- عباس قلعه پوراقدم، از ارومیه؛
- نگار قلعه پوراقدم، از ارومیه؛
- نسترن قلعه پوراقدم، از ارومیه؛
- فاطمه احمدی، از چهارمحال و بختیاری؛
- زهرا زارعی، از تهران؛
- مصطفی سهرابلو، از کردستان؛

IN THE NAME OF ALLAH

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning
Publications &Teaching Technology Office

134 Roshd Mathematics Education Journal

رشد آموزش ریاضی

vol.37 no.2 2020 ISSN:1606-9188

در کلاس درس

عکاس: اعظم لاریجانی


#حاج قاسم
#حماسه
#مقاومت
#شهادت
#انتقام سخت