برهان ریاضی

ISSN: 1735-4951

وزارت‌آموزش‌وپرورش
سازمان‌پژوهش‌وبرنامه‌ریزی‌آموزشی
دفتر‌انتشارات و فناوری‌آموزشی

رشد
۱۱۷
دورهٔ سی‌ام
شمارهٔ ۱
پاییز ۱۳۹۹
۴۸صفحه
۷۵۰۰۰ ریال

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵

تاریخ ریاضی

ابوعلی حبوبی خوارزمی

جعفر زیدی
دبیر ریاضی و
کارشناس ارشد
تاریخ علم

ابوعلی حسن‌بن حارث حبوبی خوارزمی، ریاضی‌دان حکیم، قاضی و دانشمند ایرانی نیمهٔ دوم قرن چهارم قمری است. از زندگانی ابوعلی اطلاعات چندانی در دست نیست.
براساس برخی شواهد و قراین، مانند نامه‌نگاری‌هایش با _ابوالوفا بوزجانی_، و ذکر اثبات‌هایی از ابوعلی حبوبی در کتاب «استخراج الاوتار» ابوریحان بیرونی، به احتمال زیاد دورهٔ فعالیت علمی ابوعلی حبوبی نیمهٔ دوم قرن چهارم بوده است.

تألیفات حبوبی

حبوبی نویسندهٔ کتاب «الاستقصاء و التجنیس فی علم حساب» است. او در این کتاب به زبان عربی به کاربرد حساب خطأین و جبر در حل مسائل مربوط به وصایا پرداخته است. از این کتاب یک نسخه که یکی از کهن‌ترین کتاب‌ها در مقولهٔ جبر و مقابله است، در آستان قدس و یک نسخه در دانشگاه آکسفورد شناخته شده است.

***

* ابوعلی حبوبی در مقدمهٔ کتاب الاستقصاء می‌گوید:
«برترین علوم شرعی پس از شناخت خداوند متعال، دانش و احکام شرایع اسلام و به‌ویژه علم مسائل مقدره است که شامل دو دانش می‌شود: نخست دانش احکام از حظر و اباحه، فساد و صحت، و دیگر علم ریاضیات شامل جبر و مقابله و اعمال هندسی.»

***

حبوبی به کتاب الجبر و المقابلهٔ محمدبن موسی _خوارزمی_ توجه خاص داشته و در برخی از موارد به اشکالات آن اشاره کرده است.

حبوبی کتاب الاستقصاء و التجنیس را تقریباً به سبک کتاب الجبر و المقابلهٔ محمدبن موسی خوارزمی نوشته است؛ با این تفاوت که در الاستقصاء تعداد مثال‌ها اندک است و هر مثال با روش‌های گوناگون حل شده است.

نظردهندگان دربارهٔ کارهای ابوعلی حبوبی و متأثران از او

* **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** در کتاب «مفتاح‌الحساب» طریقه‌ای از ابوعلی حبوبی در حل مسائل حساب فرایض، در ضمن سه مثال، آورده است.
* **ابونصر عراق** در رسالهٔ «معرفه القسی الفلکیه» از ابوعلی یاد کرده است.
* **ابوریحان بیرونی** در رسالهٔ «استخراج الاوتار» حل دو مسئلهٔ هندسی را از ابوعلی آورده است.

ابوعلی حبوبی از ابوالوفا بوزجانی دستوری برای محاسبهٔ مساحت مثلث بر حسب اضلاع خواسته و بوزجانی جواب او را طی رسالهٔ مختصری داده است. این دستور به‌نام «رابطهٔ هرون» شناخته می‌شود.

اگر a، b و c طول اضلاع مثلث مفروض ABC باشند و P نصف محیط مثلث باشد، در این صورت از روی محیط مثلث می‌توان به کمک رابطهٔ هرون مساحت آن را به‌دست داد.

$$s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ابوالوفا بوزجانی، در نامه‌ای به ابوعلی حبوبی، کشف قضیهٔ سینوس‌ها را به خود نسبت داد که البته این موضوع مورد اعتراض _ابونصر عراق_ قرار گرفت. به گفتهٔ آقای _ابوالقاسم قربانی_ در کتاب «ریاضی‌دانان اسلامی»، ظاهر امر این است که ابونصر عراق و بوزجانی هر یک جداگانه و مستقل به قضیهٔ سینوس‌ها یا شکل قضیهٔ مغنی که در مثلثات کروی اهمیت فراوانی دارد، رسیده‌اند.

* منابع
۱. قربانی ابوالقاسم (۱۳۷۹). زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ پنجم.
۲. کرامتی یونس (۱۳۴۹). مدخل ابوعلی حبوبی. دایرةالمعارف بزرگ اسلامی و دانشنامهٔ جهان اسلام.

بسم الله الرحمن الرحیم

اللهم صل علی محمد و آل محمد

رشد برهان ریاضی

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

- دورهٔ سی‌ام
- شمارهٔ پی‌درپی ۱۱۷
- پاییز ۱۳۹۹
- شمارهٔ ۱
- ۴۸ صفحه
- ۷۵۰۰۰ ریال

حرف اول

آموزشی

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

معرفی نرم‌افزارهای ریاضی

ریاضی اندیشیدن

مسائل

پاسخ مسائل

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲ ● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

- مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید.
- در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی رایانامه (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

مدیرمسئول: محمدابراهیم محمدی
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: میرشهرام صدر
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
رایانامه:
borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
weblog.roshdmag.ir/borhanmoteva-sete2
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵
نشانی دفترمجله:
تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶
تلفن دفتر مجله:
۹-۸۸۸۳۱۱۶۱-۰۲۱ (داخلی ۳۷۴)
نمابر مجله:
۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶
صندوق‌پستی دفتر مجله:
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
صندوق پستی امور مشترکین:
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ ـ ۸۸۸۶۷۳۰۸

چاپ و توزیع: شرکت افست

خوانندگان رشد برهان۲ :

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

آموزش مجازی

مزایا و معایب

چندسالی است که موضوع «مدرسهٔ هوشمند» و هوشمندسازی مدارس در آموزش‌وپرورش مطرح شده و در این راستا اقداماتی هم صورت گرفته است. شاید چون تاکنون تعریف جامع و مانعی از مدرسهٔ هوشمند ارائه نشده، برداشت‌های متفاوتی از هوشمندسازی مدرسه از طرف مدیران، معلمان و اولیای دانش‌آموزان انجام شده است. اما آنچه که تقریباً نقطهٔ مشترک همهٔ این برداشت‌هاست، و در مدارس هم اتفاق افتاده است، به‌کارگیری یک تابلو به‌اصطلاح هوشمند، و یک ویدیو پروژکتور و رایانه در کلاس است. به نظر شما صرف وجود این اشیا در کلاس درس، هوشمند شدن کلاس را تضمین می‌کند؟

البته پاسخ به این سؤال برمی‌گردد به همان تعریف از هوشمندسازی که در بالا اشاره شد. در هر حال واضح و مبرهن است که برای هوشمندسازی به این زیرساخت‌ها و وسایل مذکور نیاز داریم و درواقع وجود این سخت‌افزارها برای هوشمندسازی شرط لازم است، ولی کافی نیست!

آنچه در هوشمندسازی اهمیت بسزایی دارد، محتوا و مطالبی است که باید تولید شوند و در اختیار معلمان برای ارائه در کلاس قرار بگیرند. این محتوا می‌تواند به‌صورت فیلم، کلیپ آموزشی، فایل پاورپوینت، پی‌دی‌اف، انیمیشن آموزشی، آزمایشگاه مجازی و ... باشد.

نکته‌ای که بسیار حائز اهمیت است و شما دانش‌آموزان عزیز باید به آن توجه کنید، شرایط و وضعیتی است که به دلیل وجود ویروس منحوس کرونا در کشور ایجاد شده و شاید بتوان گفت، فرصتی به اجبار به‌دست آمده است تا از آموزش‌های مجازی یا غیرحضوری استفاده شود. البته لازمهٔ استفاده از این آموزش‌های مجازی در درجهٔ اول، تولید محتوای لازم برای آموزش است. اگرچه استفاده از فیلم تدریس به‌صورت آنلاین هیچ‌گاه نمی‌تواند جای حضور در کلاس درس و استفادهٔ حضوری از محضر معلم را بگیرد، اما شاید مزیت‌هایی نیز داشته باشد. این تفاوت‌ها را می‌توان به‌صورت زیر فهرست کرد:

الف) شما تمرکز بیشتری دارید (از مزاحمت‌های احتمالی هم‌کلاسی‌های خود در امان هستید).

ب) دبیر شما احتمالاً محتوای درس را به‌صورت فایل پی‌دی‌اف یا پاورپوینت در اختیار شما می‌گذارد تا وقت کمتری از کلاس (برای نوشتن روی تخته) گرفته شود. شما هم می‌توانید هرگاه بخواهید، از این فایل‌ها به‌عنوان جزوه استفاده کنید.

ج) اگر فیلم تدریس آنلاین ضبط شود و در اختیار شما قرار گیرد، می‌توانید بارها به آن مراجعه کنید و هر زمانی که بخواهید، از آن استفاده کنید.

معایب استفاده از تدریس‌های آنلاین را نیز می‌توان به‌صورت زیر فهرست کرد:

الف) امکان تدریس به شکل فعالیت‌محور کمتر وجود دارد و معلم نمی‌تواند موضوعی را با طرح یک پرسش یا فعالیت و مشارکت دادن دانش‌آموزان آموزش دهد.

ب) امکان طرح سؤال از طرف شما یا وجود ندارد و یا به‌سختی امکان‌پذیر است. خلاصه اینکه تقریباً تعاملی بین معلم و دانش‌آموز وجود ندارد.

ج) امکان بازبینی و تصحیح تمرین‌ها و تکالیف توسط معلم تا حدی وجود دارد!

در خاتمه از شما دانش‌پژوهان عزیز درخواست می‌کنم، اگر دربارهٔ مزیت‌ها و معایب آموزش‌های مجازی نظری دارید و یا در جهت رفع معایب راهکاری به ذهنتان می‌رسد، برای ما بنویسید و به آدرس مجله ارسال کنید.

سردبیر ـ مؤید و پیروز باشید

مهدی مفیدی احمدی،
کارشناس پژوهش‌سرای ملاصدرا
مدرس خانهٔ ریاضیات و دبیر ریاضی ناحیه ۲ زنجان

راهبرد نقطه ثابت در حل یک مسئله

پژوهش دانش‌آموزی

چکیده

با توجه به اهمیت بسیار زیاد انجام پژوهش توسط دانش‌آموزان، سعی داریم در چند قسمت به پژوهش‌های کوچک ریاضی در سطح دانش‌آموزی بپردازیم. در قسمت اول این مقاله ابتدا روش کار را توضیح می‌دهیم. سپس با ارائهٔ یک مسئله و تحلیل دقیق راهبرد حل آن، سؤال‌هایی را مطرح خواهیم کرد. با این هدف که گروه‌های پژوهشی معلمان یا دانش‌آموزان با پیگیری این سؤال‌ها موضوع را توسعه دهند و خود نیز سؤال‌های جدیدتری مطرح کنند. مسئله‌ای که «راهبرد حل» آن را در این بخش تحلیل خواهیم کرد، مسئلهٔ جالبی از توابع است: «هیچ تابعی با دامنهٔ اعداد حقیقی وجود ندارد که از ترکیب آن با خودش، تابعی با ضابطهٔ x^2-2 به دست آید.»

کلیدواژه‌ها پژوهش‌های، تابع، نقطهٔ ثابت یک تابع، ترکیب توابع

مقدمه

انجام پژوهش‌های دانش‌آموزی از آرزوهای بزرگ ما معلمان است! همواره در ذهن خود کلاسی را آرزو کرده‌ایم که دانش‌آموزان آن کلاس، نه‌تنها از لحاظ اخلاقی و تربیتی نمونه باشند، بلکه مفاهیم مطرح شده در کلاس را نیز با «جدیت» پیگیری کنند، در درس ما خلاقیت به خرج دهند، کار گروهی یکی از عادت‌های آن‌ها باشد، فقط به ظاهر مباحث علمی توجه نکنند، در آن مبحث سؤال‌های جدید طرح کنند و در یک کلام، «پژوهشگر» باشند. البته به دلایل متعدد، کلاس‌های ما این‌گونه نیست. صادقانه بگوییم، یکی از دلایل آن، دقیقاً خود ما معلمان هستیم. عادت به پژوهش- حتی پژوهش‌های مقدماتی و دانش‌آموزی- در میان ما کم‌رنگ است. بنابراین نمی‌توان خیلی از دانش‌آموز انتظار پژوهشگری داشت.

عادت به پژوهش و پرسشگری علمی در محیط مدرسه و لذت سحرآمیز و غیرقابل وصف آن را دانش‌آموز ابتدا از معلم خود آموزش می‌بینند. البته در این بین منابع پژوهشی ما نیز به شدت نقص دارند. اغلب معلمان منابع مناسب، ساده و روانی در این زمینه برای پژوهش‌های کوچک دانش‌آموزی در اختیار ندارند و باید در جهت رفع این کمبود کوشید. هدف این مقاله نیز دقیقاً همین است؛ نویسنده سعی دارد به کمک همکاران، دانش‌آموزان و دانش‌جویان عزیز پژوهشگر، در سلسله مقالاتی در حد توان، این نقیصه را برطرف کند؛ ان‌شاءالله.

به توضیحاتی پیرامون روش و محتوای این سلسله مقالات توجه فرمایید:

- نگارش مفاهیم پژوهشی در این سلسله مقالات به زبان دانش‌آموزی است و سعی ما توضیح مطالب به‌صورت ساده، همراه با تصویرهای گویا خواهد بود. می‌کوشیم علت اثبات قضایا، روش آن‌ها و چگونگی پژوهش در آن موضوع خاص را خاطرنشان کنیم. اگر در «پژوهک‌نامه»ها از نرم‌افزاری استفاده کرده

باشیم، آن را معرفی می‌کنیم و در صورت لزوم دستورات مربوط به آن را خلاصه‌وار خواهیم آورد تا تأکید کنیم که استفاده از ICT در جهان کنونی برای پژوهشگر از واجبات است.

- با اینکه بسیار سخت است، اما تلاش می‌کنیم که از مفاهیم کتاب‌های رسمی ریاضی آموزش‌وپرورش خارج نشویم؛ به گونه‌ای که معلمان و دانش‌آموزان پس از مطالعهٔ آن- با کمترین نیاز به منابع بیرونی- به ایده‌های پژوهشی «ناب» دست یابند و خودشان در گروه‌های پژوهشی، آن‌ها را دنبال کنند و به نتیجه برسانند. به همین دلیل غالباً در «انتهای موضوع» یک سؤال باز مرتبط با موضوع مطرح و حل و بحث آن به گروه‌های پژوهشی سپرده می‌شود. امیدواریم این گروه‌ها حاصل کار خودشان را برای مجله ارسال فرمایند.

- جامعهٔ هدف، دانش‌آموزان و معلمان در محیط مدرسه، دانش‌آموزان شرکت‌کننده در مسابقه‌های علمی کشوری، همچون جشنوارهٔ جوان خوارزمی، پژوهش‌سراهای دانش‌آموزی، خانه‌های ریاضیات و گروه‌های آموزشی ریاضی مستقر در ادارهٔ کل آموزش‌وپرورش استان‌هاست.

از خداوند متعال در این امر خطیر یاری می‌طلبیم که «... إِنْ أُرِيدُ إِلاَّ الإِصْلاَحَ مَا اسْتَطَعْتُ وَمَا تَوْفِيقِي إِلاَّ بِاللّهِ عَلَيْهِ تَوَكَّلْتُ وَإِلَيْهِ أُنِيبُ» (**هود، ۸۸**).

بلکه فقط تا آنجا که در توانم باشد خواستار اصلاح جامعه هستم، و البته توفیقم فقط به لطف خدا بستگی دارد، تنها بر او توکل می‌کنم و فقط به‌سوی او باز می‌گردم.

موضوع پژوهش ما از کجا آغاز شد؟

سال‌ها پیش در یکی از سایت‌ها (که آدرس آن را هم فراموش کرده‌ام!) به این مسئله و حل آن برخوردم که: «ثابت کنید هیچ تابعی با دامنهٔ عددهای حقیقی وجود ندارد که از ترکیب آن با خودش، تابع $x^2 - 2$ به‌دست آید.» مسئله‌ای شیک! با ظاهری ساده و فریبنده، اما باطنی عمیق و پردردسر! پردردسر از این لحاظ که حل آن، از این حل‌های معمولی و محاسبه‌های پیچیدهٔ تابعی نبود که فقط یک بار بررسی شود و تمام. حل آن بسیار زیرکانه و عمیق بود، به‌گونه‌ای که ذهنم را حسابی قلقلک می‌داد برای بررسی دقیق‌ترش؛ راهبردی که معمولاً برای حل این‌گونه مسائل استفاده نمی‌شود، اما به‌صورت اعجاب‌انگیزی تواناست! این راهبرد چیزی نبود

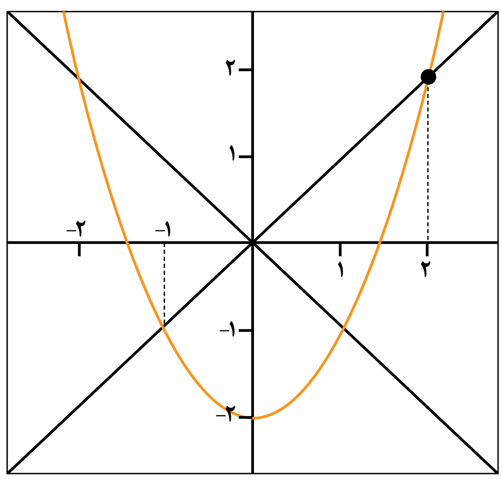
جز «نقطهٔ ثابت» که یکی از عمیق‌ترین مفاهیم ریاضیات است و ریاضی‌دان‌های زیادی را واله و شیدای خود کرده است. این مقاله و قسمت دوم آن، نتیجهٔ بررسی‌های «موشکافانهٔ» بنده است. اما این «نقطهٔ ثابت» چیست؟

اگر تابع (با دامنه و برد حقیقی) را مانند یک ماشین ورودی و خروجی در نظر بگیرید، این ماشین عددهای دامنهٔ خود را می‌گیرد و با توجه به ضابطه‌اش، عدد دیگری را تحویل می‌دهد. اگر عدد ورودی به ماشین پس از خروج تغییر نکند، آن را «نقطهٔ ثابت» تابع می‌گوییم؛ به‌طور دقیق‌تر:

تعریف. عدد c را «نقطهٔ ثابت» تابع f گوییم اگر: $f(c)=c$ یا $f(c)-c=۰$.

چند مثال. همین تابع $f(x)=x^۲-۲$ را با دامنهٔ R در نظر بگیرید. برای محاسبهٔ نقطهٔ ثابت آن، باید عدد c را چنان بیابیم که: $f(c)-c=c^۲-۲-c=۰$. یعنی نقطه‌های ۲ و ۱- «نقطه‌های ثابت» تابع f هستند. مثال زیبای دیگر، تابع $f(x)=\frac{۱}{x}+۱$ با دامنهٔ $R-\{۰\}$ با دو نقطهٔ ثابت است که یکی از آن‌ها، همان «نسبت طلایی» معروف است؛ یعنی $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$. (چرا؟) البته همهٔ توابع نقطهٔ ثابت ندارند. مثلاً $g(x)=x-۲$ نقطهٔ ثابت ندارد. (چرا؟) بعضی توابع نیز فقط یک نقطهٔ ثابت دارند، مانند تابع $h(x)=-x$. (چرا؟).

آیا می‌توان با استفاده از شکل تابع، متوجه شد که نقطهٔ ثابت دارد یا نه؟



شکل ۱

بله، کافی است ببینیم نیم‌ساز ربع اول و سوم، تابع را قطع می‌کند یا نه. (چرا؟) به تعداد نقطه‌های برخورد، نقطهٔ ثابت (حقیقی) داریم، زیرا «نقطهٔ ثابت» براساس تعریف، همان جواب معادلهٔ $f(x)-x=۰$ یا $f(x)=x$ است.» شکل ۱ که با استفاده از «نرم‌افزار جئوجبرا» رسم شده است، نقطه‌های ثابت تابع $f(x)=x^۲-۲$ را با دامنهٔ R نشان می‌دهد؛ کدام نقطه‌ها؟

در همین جا به اولین سؤال جدی مقاله پاسخ دهید:

سؤال ۱. تابع درجهٔ ۲ با ضابطهٔ $f(x)=ax^۲+bx+c$ با چه شرطی نقطهٔ ثابت دارد و برعکس، اگر تابع درجهٔ ۲ نقطهٔ ثابت داشته باشد، چه ارتباطی بین ضرایب آن وجود دارد؟

بررسی آن برعهدهٔ شما. توجه کنید که به جواب این سؤال در ادامهٔ پژوهش نیازمندیم.

حال که با نقطهٔ ثابت یک تابع تا حدی آشنا شدیم، به حل مسئلهٔ اصلی بپردازیم و ببینیم که:

اولاً این نقطه چگونه در حل مسئله به ما کمک می‌کند؟

ثانیاً آیا می‌توان با استفاده از آن، «سؤال جدید مناسبی» طرح و آن را حل کرد؟ ابتدا به دو مسئله و حل آن اشاره می‌کنیم که در طول مقاله به آن‌ها محتاجیم:

مسئلهٔ ۱: عبارت $x^۳+۲x^۲-۱$ را تجزیه کنید.

حل: کافی است عبارت مناسبی را به آن اضافه و کم کنید (تساوی‌های زیر را توضیح دهید):

$$x^۳+۲x^۲-۱=(x^۳+x^۲-x)+(x^۲+x-۱)$$
$$=(x^۲+x-۱)(x+۱)$$

مسئلهٔ ۲: ترکیب توابع شرکت‌پذیر است.

حل: توضیح دهید که چرا برای هر سه تابع f، g و h می‌توان نوشت: $fo(goh)=(fog)oh$ (البته اگر شرایط ترکیب را داشته باشند).

مسئلهٔ اصلی

تابع $f:R\to R$ با این خاصیت که $f(f(x))=x^۲-۲$ وجود ندارد.

حل: حل مسئله به روش برهان خلف است. یعنی

ابتدا فرض می‌کنیم، تابعی با این ویژگی‌ها وجود دارد و سپس با طی کردن مراحلی به تناقض اصلی می‌رسیم. پس فرض کنید تابعی مانند $f:R\to R$ وجود دارد که پس از ترکیب آن با خودش، به تابع $x^{2}-2$ رسیده‌ایم. برای درک بهتر استدلال، حل مسئله را به چند مرحله تقسیم می‌کنیم.

- **مرحلهٔ اول: ساخت تابع جدید g با استفاده از f**

ترکیب f با خودش را g بنامید؛ یعنی g=fof. پس برای هر $x\in R$ داریم: $g(x)=f(f(x))=x^{2}-2$. می‌توان نوشت: fog=gof. (چرا؟)

- **مرحلهٔ دوم: بررسی ویژگی نقطه‌های ثابت g**

نقطه‌های ثابت g را در ابتدای مقاله به‌دست آوردیم: نقطه‌های ۲ و ۱- (به شکل ۱ توجه کنید). پس: g(۲)=۲ و g(-۱)=-۱ با کمی دقت می‌توان دید که f(-۱) و f(۲) نیز نقطه‌های ثابت g هستند. برای مثال، با توجه به مرحلهٔ اول داریم:

$$g(f(-1))=f(g(-1))=f(-1)$$

پس اگر x نقطهٔ ثابت g باشد، f(x) نیز نقطهٔ ثابت g است. حال چون g دقیقاً دو نقطه ثابت دارد، می‌توان نوشت:

$$\{f(-1),f(2)\}\subseteq\{-1,2\} \qquad (*)$$

- **مرحلهٔ سوم: ساخت تابع جدید h با استفاده از g و نقطه‌های ثابت این تابع جدید**

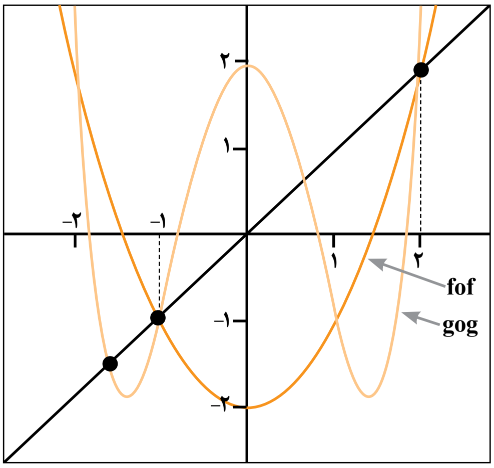
ترکیب g با خودش را h بنامید (یعنی h=gog) و نقطه‌های ثابت h را به‌دست آورید. پس باید معادلهٔ $h(x)-x=0$ را حل کنید (از مسئلهٔ ۱ کمک بگیرید):

$$(x^{2}-2)^{2}-2-x=(x-2)(x^{2}+x-1)(x+1)=0$$

بنابراین نقطه‌های ثابت h عبارت‌اند از:

$$\left\{-1,2,\frac{\sqrt{5}-1}{2},-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$$

در شکل ۲ مشخص است که نقطه‌های ثابت g=fof در میان نقطه‌های ثابت h=gog هستند. به‌عبارت دیگر در شکل ۲، دو نقطه وجود دارد که از آن‌ها هم تابع g، هم تابع h و هم نیمساز ربع اول سوم عبور می‌کنند. (کدام نقطه‌ها؟ در شکل ۲ نشان دهید.)



شکل ۲

این واقعیت را می‌توان به‌عنوان یک مسئله در حالت کلی مطرح کرد که حل آن بر عهدهٔ خودتان.

مسئلهٔ ۳: ثابت کنید برای هر تابع f، نقطه‌های ثابت f، زیر مجموعهٔ نقطه‌های ثابت fof هستند؛ به شرطی که ترکیب، قابل تعریف باشد. بنابراین ریشه‌های معادلهٔ fof(x)-x=۰ شامل همهٔ ریشه‌های معادلهٔ f(x)-x=۰ است.

حال با توجه به این دو واقعیت که مجموعهٔ $\{-1,2\}$، مجموعهٔ نقطه‌های ثابت g است و foh=hof (چرا؟)، مشابه استدلال مرحلهٔ دوم بررسی کنید که اعضای مجموعهٔ

$$\left\{f(-1),f(2),f(\frac{\sqrt{5}-1}{2}),f(-\frac{\sqrt{5}+1}{2})\right\}$$

نقطه‌های ثابت h هستند (که البته ممکن است متمایز نباشند). بنابراین:

$$\left\{f(-1),f(2),f(\frac{\sqrt{5}-1}{2}),f(-\frac{\sqrt{5}+1}{2})\right\}\subseteq$$
$$\left\{-1,2,\frac{\sqrt{5}-1}{2},-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\} \qquad (**)$$

- **مرحلهٔ چهارم: رسیدن به تناقض اصلی و تکمیل حل مسئله**

فرض کنید که: $x\in\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2},-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$.
پس x نقطهٔ ثابت g نیست؛ با توجه به (**)،

یا $f(x)\in\{-۱,۲\}$، و یا $f(x)\in\left\{\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲},-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\right\}$.

● **حالت اول:** اگر $f(x)\in\{-۱,۲\}$، پس f(x) نقطهٔ ثابت g است. لذا با توجه به (❋) در مرحلهٔ دوم، مسئلهٔ ۲ و اینکه fog=gof، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x &= h(x) = g(g(x)) = g(f(f(x))) \\ &= f(g(f(x))) = f(f(x)) = g(x) \end{aligned}$$

که تناقض است، زیرا x نقطهٔ ثابت g نیست.

● **حالت دوم:** اگر $f(x)\in\left\{\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲},-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\right\}$، پس f(x) نقطهٔ ثابت g نیست. در این حالت داریم: f(x)≠x (چرا؟). در نتیجه:

$$f(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})=-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲},f(-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

پس:

$$g(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})=fof(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})=f(-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

که تناقض است، زیرا $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ نقطهٔ ثابت g نیست.

چون تنها همین دو حالــت وجود دارند و از هر دو حالت به تناقض رسیدیم، اساساً تابع f وجود ندارد.

بررسی راهبرد حل مسئلهٔ اصلی

در حل مســـئلهٔ اصلـــی، میان نقطه‌هـــای ثابت دو بار ترکیب f با خـــودش ـ که g نامیدیم ـ نقطه‌های ثابت چهار بار ترکیب f با خودش ـ که h نامیدیم ـ ارتباط‌هایی یافتیم؛ مشخص شد که:

الف) fof دقیقاً دارای دو نقطهٔ ثابت اســـت (یا بهتر است بگوییم حداقل یک نقطهٔ ثابت دارد).

ب) «چهار بار ترکیب f با خودش» دقیقاً دارای چهار نقطهٔ ثابت اســـت (یا بهتر بگوییم دارای نقطهٔ ثابتی، غیر از نقطه‌های ثابت fof است).

سـپس بـا اسـتفاده از ایـن ارتباط‌هـا بـه تناقـض اصلـی رسـیدیم و ثابـت کردیـم هیـچ تابعـی بـا دامنهٔ R وجـود نـدارد کـه از ترکیـب آن با خـودش تابع $x^۲-۲$ به‌دســت آیـد.

نکتهٔ جالب: اگر به برهان مسئله توجه کنید، در می‌یابید که خیلی از نقطه‌های ثابت fof استفاده نکردیم، زیرا رســـیدن به تناقض اصلی، براساس یک نقطـــهٔ ثابت «چهار بار ترکیب f با خودش»، خارج از نقطه‌های ثابتِ fof بود! همین نکتهٔ مهم ممکن است در تعمیم مسئله به حالت کلی‌تر، ما را یاری کند.

حالا با توجه به حل مسئلهٔ اصلی و توضیحات بالا دو سؤال زیر را مطرح می‌کنیم:

سؤال ۲. با چـــه شرایطی یک چندجمله‌ای درجهٔ ۲، هیچ‌گاه به صورت fof نیســـت؟ (کـــه در اینجا f تابعی با دامنهٔ R است.)

سؤال ۳. آیا می‌توان گفت تابعی مانند f با دامنهٔ R که دارای خاصیت (ب) باشد، موجود نیست؟

در قسـمت بعـدی مقالـه سـعی می‌کنیـم «تاحدی» بـه دو سـؤال بـالا جـواب دهیـم، امـا قبـل از آن، دسـت بـه کار شـوید و بـا اسـتفاده از ایده‌هایـی کـه گرفته‌ایـد، خودتـان بـه این دو سـؤال پاسـخ دهید؛ ابتدا مسـئلهٔ زیر را حـل کنید:

مســـــئلهٔ ۴: ثابت کنید که تابع f:R⟶R با این خاصیت که $f(f(x))=x^۲+x-۲$ وجود ندارد.

و نکتـهٔ آخر اینکه توصیف لذت عجیبی که در حل و طرح مســـائل بالا وجود دارد (البته در کنار فایده‌های زیاد دیگـــری که دارد)، تقریباً غیرممکن اســـت و اتفاقاً همین لذت، قدرت تحمل می‌دهد و پژوهشگر را به ادامهٔ کار فرا می‌خواند! از این نکتهٔ مهم نیز غافل نشـــویم که اگر بتوان لذت پژوهش را به دانش‌آموز چشـــاند، بعید است او از آن چشم بپوشد.

حسین کریمی

دایرهٔ محاطی

اشاره

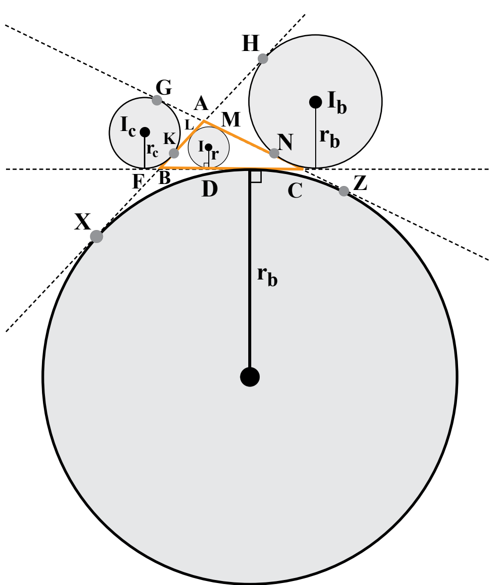
هرگاه بتوانیم دایره‌ای مماس بر تمام خط‌های واصل بین دو رأس متوالی یک n ضلعی رسم کنیم، آن دایره را «دایرهٔ محاطی» گوییم.

کلیدواژه‌ها دایره محاطی، نیمساز، مثلث، زاویه n ضلعی

شـــرط وجود دایرهٔ محاطی بـــرای یک nضلعی آن است که نیم‌ســـازهای آن شـــکل در یک نقطه به هم برســـند. آن نقطه را معمولاً با I نشان می‌دهند و نقطه را «هم‌رسی نیم‌ســـازها» یا همان مرکز دایرهٔ محاطی می‌نامند. توجه داریم که در بعضی از شـــکل‌ها چنین نقطه‌ای وجود ندارد. مثلاً در مستطیل چهار نیم‌ساز در یک نقطه به هم نمی‌رســـند. پس دایره‌ای وجود ندارد که بر هر چهار ضلع مســـتطیل مماس باشـــد. تمام n ضلعی‌های منتظم دایرهٔ محاطی دارند.

در این بیـــن، مثلث موقعیت خاصـــی دارد. تمام مثلث‌ها (از هر نوع که باشـــند) دایـــرهٔ محاطی دارند و نه‌تنها یک دایـــرهٔ محاطی، بلکه چهار دایرهٔ محاطی دارند.

دایرهٔ به مرکز I را دایرهٔ محاطی داخلی می‌نامند که I محل تلاقی سه نیم‌ساز داخلی مثلث است. سه دایرهٔ



شکل ۱

دیگر به مرکزهـــای I_a،I_b و I_c را دایره‌های محاطی خارجی می‌نامند که مرکز آن‌ها محل تلاقی دو نیم‌ساز خارجی مثلث است. (شکل ۱)

***

یادآوری: هر نقطه که روی نیم‌ساز یک زاویه باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

بـــا توجه به مطلب فوق می‌توان گفت که در صفحهٔ مثلـــث، چهار نقطه وجود دارد که از ســـه ضلع مثلث یا امتداد آن‌ها، متساوی‌الفاصله‌اند.

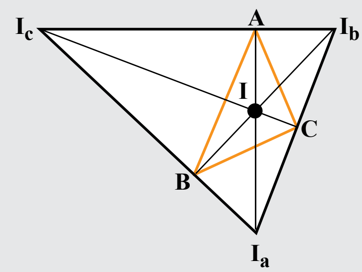
اکنون این سؤال پیش می‌آید که: اگر مثلث ABC را رسم کنیم و محل تلاقی نیمسازها را I، I_a، I_b و I_c (مراکز دایره‌های محاطی) بنامیم و سپس مثلث و نیمسازها را و یکی از آن چهار نقطه را هم پاک کنیم، آیا با در دست داشـــتن ســـه نقطه می‌توان دوباره مثلث ABC را رسم کرد؟

مسئلهٔ ۱: با در دست داشتن سه نقطهٔ I_a، I_b و I_c (ســـه مرکز دایره‌های محاطی خارجـــی مثلث ABC) مثلث ABC را رسم کنید.

مسئلهٔ ۲: با در دست داشتن سه نقطهٔ I، I_b و I_c (به ترتیب مراکز دایرهٔ محاطی داخلی و دو دایرهٔ محاطی خارجی مثلث ABC) مثلث ABC را رسم کنید.

قبل از آنکه به دو مسئلهٔ فوق جواب بدهیم، به نکتهٔ مهمی اشاره می‌کنیم.

نکته: اگر در شکل ۲ I نقطهٔ همرسی سه نیمساز داخلی مثلث ABC و نقطه‌های I_a، I_b و I_c نقطه‌های تلاقی دو نیمســـاز خارجی در مثلث ABC فرض شوند، I_b و I_c روی نیمساز خارجی زاویهٔ رأس A، و I_a روی نیمساز داخلی رأس A قرار دارند. همچنین می‌دانیم، نیمسازهای داخلی و خارجی یک زاویه بر هم عمودند. پـــس: $AI_a \perp I_bI_c$. و به همین ترتیب: $BI_b \perp I_aI_c$ و $CI_c \perp I_aI_b$



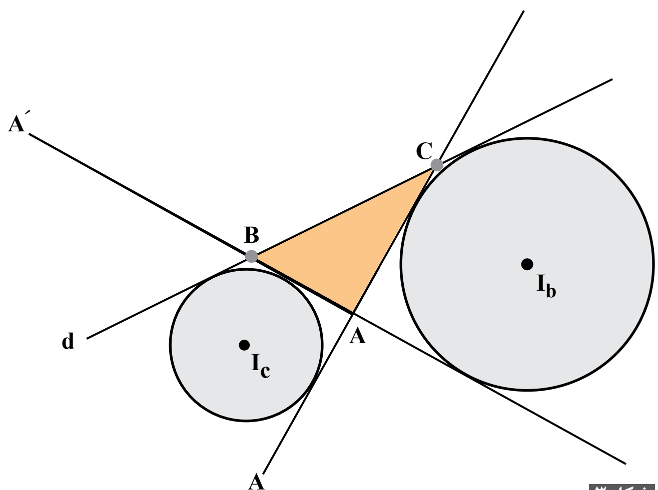
شکل ۲

نقطهٔ همرسی سه نیمساز داخلی مثلث ABC، یعنی نقطهٔ I، همان نقطهٔ همرسی سه ارتفاع مثلث $I_aI_bI_c$ است.

حل مســـئلهٔ ۱. مثلث $I_aI_bI_c$ و سه ارتفاع AI_a، BI_b و CI_c آن را رســـم می‌کنیم (شکل ۳). مثلث ABC جواب مسئله است.

حل مســـئلهٔ ۲. مثلث II_bI_c را رســـم می‌کنیم. از I_c عمودی بر امتداد II_b و از I_b عمودی بر امتداد II_c رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ I_a قطع کنند. با در دست داشتن مثلث $I_aI_bI_c$ مانند مسئلهٔ ۱ عمل می‌کنیم.

مســـئلهٔ ۳. دو دایرهٔ محاطی خارجـــی (I_b و r_b) و (I_c و r_c) از مثلث ABC داده شـــده‌اند. مثلث ABC را رسم کنید.



شکل ۳

حل. مماس‌های داخلی دو دایره (خط‌های Δ و 'Δ) را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن دو را A می‌نامیم (شکل ۳). خط d را در مقام مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ داده شده رسم می‌کنیم تا خط‌های Δ و 'Δ را در نقطه‌های B و C قطع کند. مثلث ABC جواب مسئله است.

با توجه به شـــکل ۲ و اینکـــه: AB=c، AC=b، BC=a، ۲P=محیط و S=مساحت، روابط متریک زیر را داریم:

$$r=\frac{s}{p}\ ,\ r_a=\frac{s}{p-a}\ ,\ r_b=\frac{s}{p-b}\ ,\ r_c=\frac{s}{p-c}$$

AX=AZ=BE=BH=CF=CG=P
BF=BK=CE=CN=AM=AL=P-a
AG=AK=CZ=CY=BD=BL=P-b
BY=BX=AH=AN=CD=CM=P-c

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی
علیرضا سلمانی انباردان
کارشناس ارشد ریاضی مالی، دبیر ریاضی شهرستان قدس

(قسمت هفتم)

آزمایشگاه ریاضی

مقدمه

بحث حد و پیوستگی از جمله مباحث پایه‌ای در حسابان است. در این قسمت چند فعالیت در رابطه با معرفی حد توابع مطابق با مطالب مطرح شـــده در کتاب درسی با استفاده از جئوجبرا ارائه می‌شـــود. این فعالیت‌ها مربوط به فرایندهای حدی، حد چپ و راست، حد تابع در یک نقطه و پیوستگی هستند.

فعالیت ۱. فرایندهای حدی

می‌دانیم تابع f در x=a دارای حدی چون l اســت و می‌نویسیم: $\lim_{x\to a} f(x)=l$. اگر و فقط اگر حد چپ و حد راســت تابع f در x=a وجود داشته و هر دو برابر l باشند، یعنی:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=l$$

الف. فرض کنید: $f(x)=\sqrt{x}$. مطلوب است: $\lim_{x\to ۰^+} f(x)$. آیا تابع f در x=۰ حد دارد؟

در نمودار ۱، منحنی این تابع در صفحهٔ مختصات رسم شده است که برای رسم نمودار این تابع کافی است در قسمت ...Input دستور زیر را وارد کنیم:

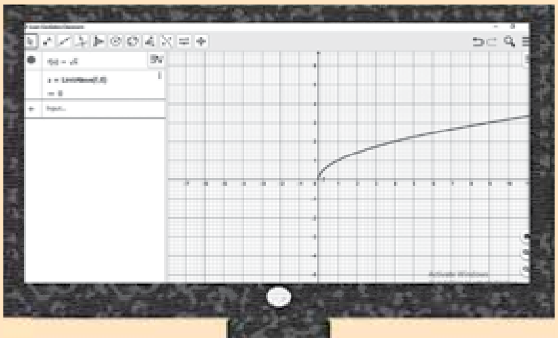
f(x)=sqrt(x)

نحوهٔ محاسبهٔ حدود فوق در جئوجبرا به‌صورت زیر است:

برای پیدا کردن حد راست تابع f در نقطهٔ صفر، دستور زیر را در قسمت ...Input وارد می‌کنیم:

LimitAbove(f(x),۰)

بعد از وارد کردن این دســـتور، مقدار حد راســـت برابر صفر مشـــخص می‌شود. ضمناً با توجه به نمودار این تابع و اینکه دامنهٔ تابع به‌صورت $[۰,+\infty)$ است، حد چپ تابع در x=۰ وجود ندارد و لذا این تابع در x=۰ دارای حد نیست.



نمودار ۱

ب. تابع g با ضابطهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$g(x)=\begin{cases} -x+۲ & x>۲ \\ -۲ & x=۲ \\ x-۳ & x<۲ \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم کنید و حد چپ و حد راست آن را در x=۲ بیابید. آیا این تابع در این نقطه دارای حد است؟

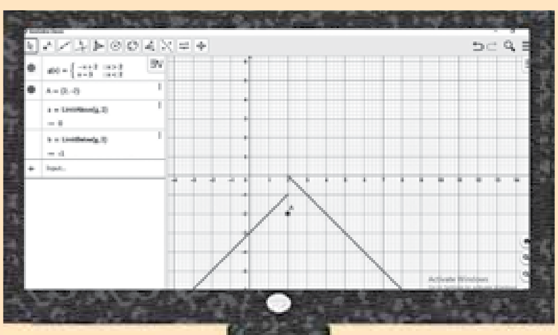
ابتدا با اســـتفاده از دستور شـــرطی که قبلاً توضیح داده شده است، تابع را رسم می‌کنیم (نمودار ۲):

g(x)=if(x>۲,-x+۲,x<۲,x-۳)

A=(۲,-۲)

برای مشخص شدن حد راست از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

LimitAbove(g(x),۰)



نمودار ۲

بعد از وارد کردن عبارت فوق مقدار صفر نمایش داده می‌شود.
اکنون برای مشخص شدن حد چپ دستور زیر را وارد می‌کنیم:

LimitBelow(g(x),۰)

بعد از وارد کردن عبارت فوق مقدار ۱- نمایش داده می‌شود، مشاهده می‌کنیم که این دو مقدار برابر نیستند پس این تابع در نقطهٔ x=۲ حد ندارد.

ج. تابع h با ضابطهٔ $h(x)=\frac{|x-۳|}{x-۳}$ مفروض است. نمودار این تابع را رسم و بررسی کنید آیا این تابع در x=۳ حد دارد؟

همانند دو مثال قبل ابتدا تابع را با استفاده از دستور زیر رسم می‌کنیم:

h(x)=Abs(x-۳) / x-۳

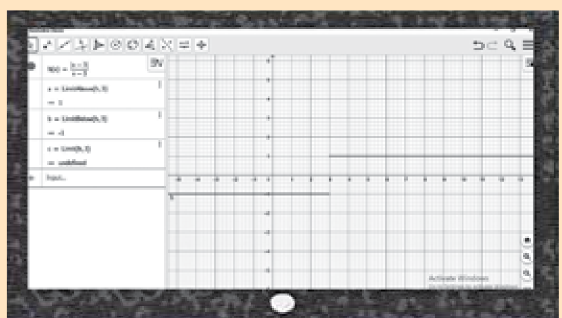
برای مشخص شدن حد راست از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

LimitAbove(h(x),۳)

بعد از وارد کردن عبارت فوق مقدار ۱ نمایش داده می‌شود، اکنون برای مشخص شدن حد چپ دستور زیر را وارد می‌کنیم:

LimitBlow(h(x),۳)

بعد از وارد کردن عبارت فوق مقدار ۱- نمایش داده می‌شود. پس تابع h در نقطهٔ x=۳ حد ندارد و اگر عبارت Limit(h(x),۳) را وارد کنیم، عبارت undefined نمایش داده خواهد شد که به معنی «تعریف نشده» است.



نمودار ۳

د. مقادیر $\lim_{x\to ۲^+}[x]$ و $\lim_{x\to ۲^-}[x]$ را به دست آورید. آیا این تابع در x=۲ حد دارد؟ در $x=\frac{۱}{۲}$ چطور؟

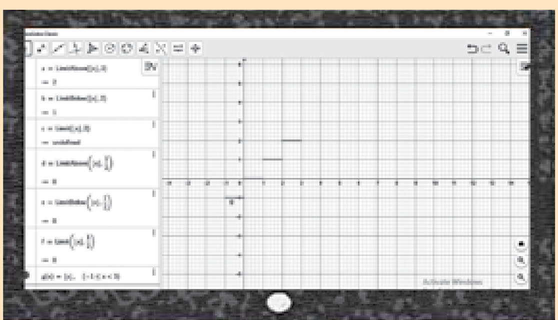
نمودار ۴ تابع جزء صحیح x را در بازهٔ [۳,۱-] نمایش می‌دهد.

به منظور رسم تابع جزء صحیح در بازهٔ داده شده از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

If(-۱<=x<۳,floor(x))

برای مشخص کردن حد راست تابع جزء صحیح x در نقطهٔ x=۲، دستور LimitAbove(floor(x),۲) را وارد می‌کنیم که پاسخ آن ۲ خواهد شد. همچنین برای مشخص کردن حد راست تابع جزء صحیح x در نقطهٔ x=۲، دستور LimitBelow(floor(x),۲) را وارد می‌کنیم که پاسخ آن ۱ خواهد شد پس نتیجه می‌شود که این تابع حد ندارد و اگر دستور Limit(floor(x),۲) را وارد کنیم، عبارت undefiend نمایش داده می‌شود.

برای مشخص شدن حد راست تابع جزء صحیح x در نقطهٔ $x=\frac{۱}{۲}$، دستور LimitAbove(floor(x),1/۲) را وارد می‌کنیم که با اجرای آن پاسخ صفر مشخص می‌شود. همچنین برای مشخص شدن حد راست تابع جزء صحیح x در نقطهٔ $x=\frac{۱}{۲}$، دستور LimitBelow(floor(x),1/۲) را وارد می‌کنیم که پاسخ آن نیز صفر خواهد شد. پس نتیجه می‌شود که این تابع حد دارد و اگر دستور Limit(floor(x),۱/۲) را وارد کنیم، مقدار صفر نمایش داده می‌شود.



نمودار ۴

فعالیت ۲. حدود یکطرفه

حاصل هریک از حدود یکطرفهٔ زیر را در صورت وجود به دست آورید:

a) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^+}\cos x$ b) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{۳}^-}\sin x$

c) $\lim_{x\to ۳^+}\frac{x}{[x]}$ d) $\lim_{x\to ۳^+}\sqrt{۲x-۶}$

برای محاسبه هریک از حدهای قبل به ترتیب دستورهای زیر را وارد می‌کنیم:

a=LimitAbove(cos(x),pi/۴)

b=LimitBelow(sin(x),-pi/۳)

c-LimitAbove(x/floor(x),۲)

d=LimitAbove(sqrt(۲x-۶),۳)

که به ترتیب پاسخ‌های زیر با اجرای هریک از این دستورها نمایش داده می‌شوند:

a=۰/۷۱ , b=-۰/87 , c=۱ , d=۰

فعالیت ۳. محاسبهٔ حدود ....

حد هریک از توابع زیر را در نقطه‌های داده شده به دست آورید:

$$a)\ \lim_{x\to ۱}\frac{x^۳-۱}{x-۱} \qquad b)\ \lim_{x\to ۳}\frac{۲x-۱}{x^۲-۴x+۱}$$

$$c)\ \lim_{x\to -۲}\frac{x^۳+۸}{x+۲} \qquad d)\ \lim_{x\to \pi}\frac{\sin x.\cos x}{۱+\cos^۲ x}$$

$$e)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin^۲ x}{۱-\sin x}$$

برای محاسبهٔ هریک از حدهای بالا به ترتیب دستورهای زیر را وارد می‌کنیم:

a=Limit((x^۳-۱)/(x-۱),۱)

b=Limit((۲x-۱)/(x^۲-۴x+۱),۳)

c=Limit((x^۳+۸)/(x+۲),-۲)

d=Limit((sin(x)cos(x))/(۱+cos^۲(x)),pi)

e=Limit((۱-sin^۲(x))/(۱-sin(x)),pi/۲)

که به ترتیب پاسخ‌های نمایش داده شده در زیر هر عبارت به‌صورت زیر است:

a=۳ , b=-۲/۵ c=۱۲ , d=۰ , e=۲

فعالیت ۴. پیوستگی ....

تابع f را در نقطهٔ x=a پیوسته نامیم هرگاه $\lim_{x\to a} f(x)$ و f(a) هر دو موجود و با یکدیگر برابر باشند. همچنین در صورتی که: $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$، تابع f را در نقطهٔ x=a پیوستهٔ راست می‌نامیم، و هرگاه: $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$، تابع f را در نقطهٔ x=a پیوستهٔ چپ می‌نامیم.

الف. پیوستگی تابع f با ضابطهٔ زیر را در نقطهٔ x=۰ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-۲x+۲ & x\le ۰\\ x^۲+۲ & x>۰\end{cases}$$

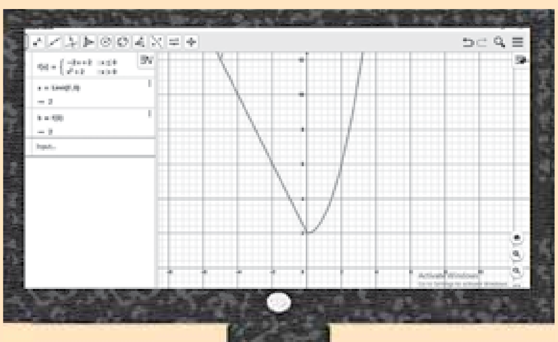
شکل این تابع در نمودار ۵ رسم شده است. برای رسم تابع f دستور زیر را وارد می‌کنیم:

f(x)=if(x<=۰,-۲x+۲,x>۰,x^۲+۲)

برای محاسبهٔ حد تابع f(x) در نقطهٔ x=۰ از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

Limit(f(x),۰)

که مقدار ۲ نمایش داده می‌شود. برای محاسبهٔ مقدار تابع f در x=۰، از دستور f(۰) استفاده می‌کنیم که مقدار ۲ نمایش داده می‌شود. چون مقدار تابع و حد تابع در x=۰ برابر است، پس تابع f در نقطهٔ x=۰ پیوسته است.



نمودار ۵

ب. فرض کنید: $f(x)=[x]$. تحقیق کنید تابع f در نقطهٔ x=۱ پیوستهٔ چپ است یا راست؟ در $x=\frac{۳}{۲}$ چطور؟ ابتدا دستور زیر را وارد می‌کنیم:

f(x)=floor(x)

حالا مقدار تابع در نقطهٔ x=۱ را با دستور a=f(۱) به دست می‌آوریم. سپس حد راست و چپ تابع f(x) در نقطهٔ x=۱ را با استفاده از دستورهای زیر به دست می‌آوریم:

b=LimitAbove(f(x),۱)

c=LimitBelow(f(x),۱)

مشاهده می‌کنیم که حد راست برابر ۱ و حد چپ تعریف نشده اعلام می‌شود. لذا تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]$ پیوستهٔ راست است.

برای نقطهٔ $x=\frac{۳}{۲}$ تمام مراحل بالا را تکرار می‌کنیم:

e=f(۳/۲)

g=LimitAbove(f(x),۳/۲)

h=LimitBelow(f(x),۳/۲)

که هر سه مقدار برابر ۱ است. پس تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]$ در نقطهٔ $x=\frac{۳}{۲}$ هم پیوستهٔ راست و هم پیوستهٔ چپ است، یعنی در این نقطه پیوستگی دارد.

ج. تابع f با ضابطهٔ زیر مفروض است:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^{۲}-۱ & -۱\leq x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم کنید و تحقیق کنید این تابع در کدام بازه‌های زیر پیوسته است؟

$[-۱,۱]$ $[-۲,۰]$

می‌دانیم تابع f در [a,b] پیوسته است، هرگاه f در بازهٔ باز (a,b) پیوسته، در x=a پیوستهٔ راست و در x=b پیوستهٔ چپ باشد.

با استفاده از دستور زیر تابع f را رسم می‌کنیم:

f(x)=if(x<-۱,۲x+۴,if(-۱<=x<۲,x^۲-۱,۲<x<۵,-x+۵))

با مشاهدهٔ نمودار ۶ متوجه خواهیم شد که تابع f در بازهٔ (-۲,۰) پیوسته نیست. پس به بررسی پیوستگی در ابتدا و انتهای بازهٔ [-۲,۰] نیازی نیست. اما در بازهٔ (-۱,۱) نمودار تابع پیوسته است. حالا به بررسی پیوستگی راست در ابتدای بازه و پیوستگی چپ در نقطهٔ انتهای بازه می‌پردازیم. برای این کار از دستورهای زیر استفاده می‌کنیم:

مقدار تابع f در نقطهٔ x=-۱ a=f(-۱)

مقدار تابع f در نقطهٔ x=۱ b=f(۱)

حد راست تابع f در نقطهٔ x=-۱

c=LimitAbove(f(x),-۱)

حد چپ تابع f در نقطهٔ x=۱

d=LimitBelow(f(x),۱)

با ورود دستورهای بالا مقادیر زیر به دست خواهند آمد:

a=۰ , b=۰ , c=۰ & d=۰

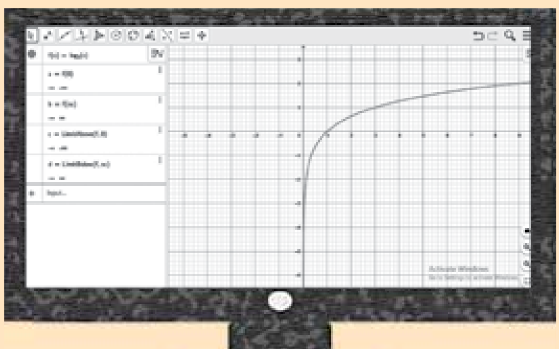
مشاهده می‌شود که مقدار a با c و مقدار b با d برابر است. پس تابع f در بازهٔ [-۱,۱] است.

نمودار ۶

د. با توجه به نمودارهای تابع‌های $y=\log_{۳}(x)$ و y=cosx، این تابع‌ها در چه بازه‌ای پیوسته هستند؟ (بزرگ‌ترین بازه را مشخص کنید.)

برای نمایش تابع $y=\log_{۳}(x)$ دستور زیر را وارد می‌کنیم:

f(x)=log(۳,x)



نمودار ۷

با توجه به نمودار ۷ تابع پیوستگی در بازهٔ (۰,∞) را بررسی می‌کنیم:

نکته: برای درج علامت بی‌نهایت در جئوجبرا از صفحه کلید برنامه استفاده کنید که در تصویر ۱ نمایش داده شده است.

تصویر ۱

بـــرای پیدا کردن مقدار تابع در نقطه‌های ابتدا و انتهای بازه از دستورهای زیر استفاده می‌کنیم:

a=f(۰)

b=f(∞)

سـپس بـرای مشـخص شـدن حـد راسـت در نقطـهٔ ابتدایی و حـد چـپ در نقطـهٔ انتهایـی، از دسـتورهای زیـر اسـتفاده می کنیـم:

c=LimitAbove(f(x),۰)

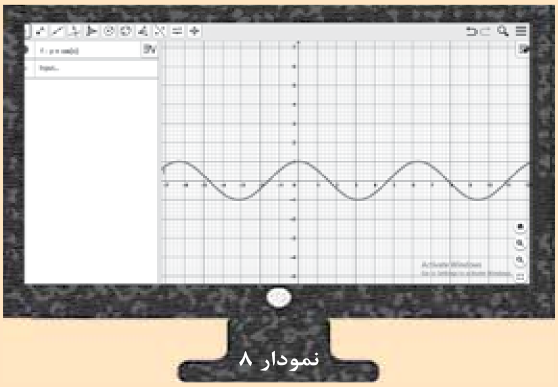
d=LimitBelow(f(x),∞)

می‌بینیم که مقدار تابع و حد راســت تابع در نقطهٔ x=۰ برابر ∞- و همچنین مقدار تابع و حد چپ تابع در x=∞ برابر ∞ هستند.

برای نمایش تابع y=cosx دستور زیر را وارد می‌کنیم:

f(x)=cos(x)

با توجه به نمودار ۸، تابع کسینوس در تمام نقطه‌های دامنه‌اش پیوسته است که می‌توان بیان کرد: تابع کسینوس در بازهٔ (∞,∞-) پیوسته است.



نمودار ۸

منابع

۱. کتاب درسی ریاضی ۲ دورهٔ دوم متوسطهٔ علوم تجربی، ۱۳۹۸.

2. www.geogebra.org

ادب ریاضی

دانــش ریاضیات همانند هر دانش دیگری در خدمت انســان اســت. آنچه در ریاضیات می‌خوانیم، «بازی با علامت‌ها و شکل‌ها» نیست. بلکه قانون‌هایی است که بر طبیعت و زندگی عملی ما حکومت می‌کند.

کار ریاضیات، وضع قانون‌های «من‌درآوردی» نیست؛ ریاضیات قانون‌های موجود و حاکم بر طبیعت و جامعه را کشف می‌کند. رابطه‌ها و شکل‌هایی که در ریاضیات، با آن‌ها سروکار داریم، دستگیره‌هایی هستند که به یاری آن‌ها می‌توان نیازهای عملی دانش‌های دیگر و به‌طور کلی، نیازهای فکری انسان را برآورده کرد.

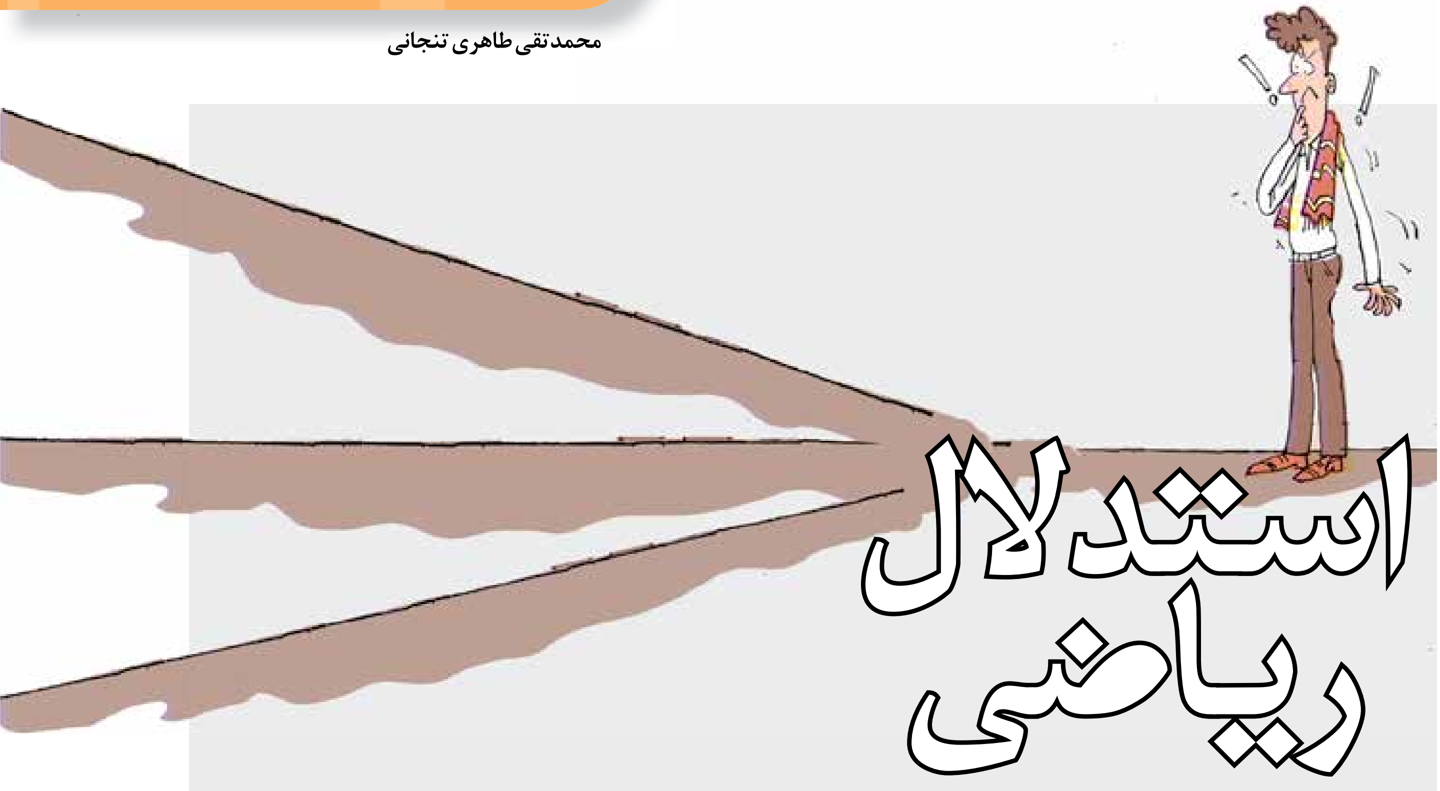
***

هرگز کلی‌گویی نکنید. دانش با شــعار دادن، سازگار نیست. جمله‌های مبهم و نامفهوم ـ هرچند به ظاهر بتوانند حقیقتی را بیان کند چیزی را به شــنونده نمی‌دهد. کســی که اهل دانش است، باید حرف‌های خود را، مشــخص و بدون هیچ ابهامی عرضه کند.

شادروان پرویز شهریاری

چهرهٔ ماندگار آموزش ریاضی کشور

محمدتقی طاهری تنجانی



استدلال ریاضی

اشاره

اثبات یک مسئله چگونه شکل می‌گیرد؟ برای حل یک مسئله از چه روشی باید استفاده کرد؟ کاربرد یک روش تا چه حد است؟ این‌ها سؤالاتی هستند که معمولاً در اثبات مسائل، خصوصاً مسائل ریاضی، پیش روی ماست.

در این نوشتار سعی بر آن است که به اختصار با روش‌های اثبات و استدلال ریاضی آشنا شویم. حل یک مسئله در وهلهٔ اول نیازمند روشی است که با اتکا به آن بتوان قدم‌به‌قدم جلو رفت و به نتیجهٔ موردنظر نایل آمد. هر مسئله از دو قسمت تشکیل می‌شود: قسمت اول مفروضات و داده‌های مسئله و قسمت دوم هدف و حکم مسئله است. منظور از حل یک مسئله آن است که با استفاده از یک سلسله قوانین و اصول، و با تکیه بر مفروضات مسئله، به هدف موردنظر برسیم؛ شیوه‌ای که می‌توان از آن استفاده کرد را «برهان» (اثبات) می‌گویند. قبل از ورود به شیوه‌های استدلال، به مفهوم «تمثیل» می‌پردازیم که غالباً در استدلال‌های عامیانه از آن استفاده می‌شود.

تمثیل

انسان برای رفتار خود استدلالی دارد و این استدلال را بر حسب تجربه آموخته است. در واقع در هر فعالیت، به دنبال نمونه‌ای است که در ذهن او نقش بسته است. این شروع قضاوت و استدلال برای انسان است. کودکان بیشتر- به‌ویژه در سال‌های نخست زندگی خود- استدلالشان را براساس شباهت پدیده‌ها می‌گذرانند. شبیه‌سازی می‌کنند و به دلیل شباهت بین دو پدیده دربارهٔ آن‌ها به نتیجهٔ یکسانی می‌رسند. این استدلال کودکانه نام علمی «تمثیل» و یا «استدلال تمثیلی» دارد.

در داوری‌ها گاهی به «عقل سلیم» تکیه می‌شود. در این روش، از تمثیل استفاده می‌کنند که به تنهایی نمی‌تواند وسیله‌ای برای کشف حقیقت باشد. هزاران سال با تکیه بر عقل سلیم می‌پنداشتند که خورشید و همهٔ ستارگان به دور زمین می‌چرخند و در نتیجه زمین مرکز عالم است. هر کس هم خلاف آن استدلال می‌کرد (مانند گالیله)، یا محکوم به آتش و یا محکوم به سکوت می‌شد.

عقل سلیم تنها زمانی می‌تواند ما را به سمت کشف حقیقت رهنمون شود که متکی بر مشاهده و تجربه باشد. پس از مشاهدات لازم، حالت‌های متفاوت را به محک تجربه بسپرد و روابط بین آن‌ها را کشف کند و حدس بزند. این حدس در دانش‌های طبیعی به یاری آزمایش و در ریاضیات با استدلال منطقی تأیید یا تکذیب می‌شود.

استدلال استنتاجی

در این روش با استفاده از حقایقی که درستی آن‌ها را از قبل پذیرفته‌ایم (نظیر تعاریف، اصول و قضایا)، به اثبات حکم موردنظر می‌پردازیم. از این روش هنگامی استفاده می‌کنیم که مطمئن باشیم حکم موردنظر همواره درست است. با ذکر چند مثال، نحوهٔ استفاده از این روش را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱. ثابت کنید مجموع هر عدد صحیح زوج و هر عدد صحیح فرد همواره عددی فرد است.

حل. اگر a عددی زوج و دلخواه باشد، آن را به‌صورت $a = 2k$، و اگر b عددی فرد و دلخواه باشد، آن را به صورت $b = 2k' + 1$ نشان می‌دهیم (k و k′ عدد صحیح هستند). می‌توان نوشت:

$$a + b = 2k + (2k' + 1) = 2\underbrace{(k + k')}_{k' \in \mathbb{Z}} + 1 = 2k'' + 1$$

یعنی a+b عددی فرد است.

مثال ۲. برای هر عدد صحیح a ثابت کنید $a^2 + a$ عددی زوج است.

حل. در دو حالت مسئله را بررسی می‌کنیم:

◆ **حالت اول:** اگر a عددی صحیح و زوج باشد، داریم: $a = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$. می‌توان نوشت:

$$a^2 + a = a(a+1) = 2k(2k+1) = 2\underbrace{(2k^2 + k)}_{k'' \in \mathbb{Z}} = 2k'$$

یعنی $a^2 + a$ زوج است.

◆ **حالت دوم:** اگر a عددی صحیح و فرد باشد، داریم: $a = 2k + 1 \ , (k \in \mathbb{Z})$ و نیز داریم:

$$a^2 + a = a(a+1) = (2k+1)(2k+2) = 2\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{k' \in \mathbb{Z}} = 2k'$$

یعنی $a^2 + a$ زوج است. پس در هر دو حالت $a^2 + a$ همواره عددی زوج است.

مثال ۳. اگر a و b دو عدد صحیح متوالی باشند، به روش استدلال استنتاجی ثابت کنید $ab + a + b$ عددی فرد است.

حل. چون a و b دو عدد صحیح متوالی‌اند، پس یکی زوج و دیگری فرد است و حاصل‌ضرب یک عدد فرد در یک عدد زوج عددی زوج است. پس ab عددی زوج است. از طرف دیگر، جمع دو عدد زوج و فرد عددی فرد است، پس عبارت $ab + a + b$ نیز عددی فرد است.

این استدلال را به زبان ریاضی به‌صورت زیر نیز می‌توان نشان داد:

$$\begin{cases} a = 2k \\ b = 2k+1 \end{cases} \Rightarrow ab + a + b = (2k)(2k+1) + [2k + (2k+1)]$$

$$k \in \mathbb{Z} \qquad = 2\underbrace{(k(k+1))}_{q \in \mathbb{Z}} + 4k + 1$$

$$= 2\underbrace{(q + 2k)}_{q \in \mathbb{Z}} + 1$$

$$= 2q' + 1$$

مثال ۴. به روش استدلال استنتاجی ثابت کنید، هر عدد فرد به یکی از صورت‌های ۴k+۱ یا ۴k-۱ نوشته می‌شود $(k \in \mathbb{Z})$.

حل. فرض کنیم a عددی فرد باشد. می‌توان نوشت:

$$a = 2m + 1 \ , \ m \in \mathbb{Z}$$

حال عدد صحیح m یا فرد است و یا زوج. این دو حالت را در نظر می‌گیریم:

اگر m زوج باشد، داریم:

$$m = 2k \Rightarrow a = 2(2k) + 1 = 4k + 1$$

اگر m فرد باشد، داریم:

$$m = 2k + 1 \Rightarrow a = 2(2k+1) + 1 = 4k + 3$$
$$= 4k + 4 - 1 = 4\underbrace{(k+1)}_{k' \in \mathbb{Z}} - 1 = 4k' - 1$$

مثال نقض

برخی از احکام به‌صورت کلی و عمومی بیان می‌شوند. مانند اینکه بگوییم مربع هر عدد حقیقی مثبت است! یا هر دو زاویهٔ متقابل به رأس مساوی‌اند و یا هر عدد اول فرد است. این‌گونه احکام (گزاره‌ها) گاهی درست و گاهی نادرست‌اند.

به مثالی که ارائه می‌شود تا درستی یک حکم (گزاره) کلی را باطل کند، مثال نقض می‌گویند.

مثال ۵. با ذکر یک مثال نقض، نادرستی گزارهٔ «مکعب هر عدد صحیح از مربع آن عدد همواره بزرگ‌تر است» را نشان دهید.

حل. فرض کنیم: $a = -2$، پس: $a^2 = 4$ و $a^3 = -8$ و درنتیجه: $a^3 > a^2$.

مثال ۶. **لایب‌نیتز**، یکی از مشهورترین ریاضی‌دانان قرن هفدهم آلمان و از ابداع‌کنندگان حسابان، ثابت کرد برای مقادیر صحیح n، عبارت $n^3 - n$ بر ۳، عبارت $n^5 - n$ بر ۵، و عبارت $n^7 - n$ بر ۷ بخش‌پذیر است. او حدس زد به ازای هر عدد فرد k و هر عدد طبیعی n، عبارت $n^k - n$ بر k بخش‌پذیر است. آیا این حدس معتبر است؟

حل. خیر، کافی است از مثال نقض $k = 9$ استفاده شود. $2^9 - 2 = 510$ که عدد ۵۱۰ بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

اثبات بازگشتی

نوعی از اثبات‌های ریاضی استدلالی است که در آن حکم را به احکام معادل تبدیل و یا به احکام جزئی‌تر تجزیه می‌کنیم تا اینکه به یک گزارهٔ همواره درست برسیم. پس اگر از این گزارهٔ همیشه درست بتوانیم به حکم اولیه برسیم، مسئله را به روش اثبات بازگشتی حل کرده‌ایم. به عبارت دیگر، در این روش باید توجه داشت که روابط همگی برگشت‌پذیر باشند. یعنی اگر از گزارهٔ A گزارهٔ B نتیجه شود، از B بتوان A را نتیجه گرفت (دو گزارهٔ معادل A و B را با نماد $A \Leftrightarrow B$ نشان می‌دهند).

مثال ۷. به روش اثبات بازگشتی نشان دهید. برای عددهای حقیقی دلخواه a و b و c داریم:

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ab + ac + bc$$

حل. معادل حکم را می‌نویسیم. می‌توان طرفین حکم را در عدد ۲ ضرب کرد و به‌صورت زیر معادل‌های حکم را نوشت:

$$۲a^۲ + ۲b^۲ + ۲c^۲ \geq ۲ab + ۲ac + ۲bc$$
$$\Leftrightarrow (a^۲ - ۲ab + b^۲) + (b^۲ - ۲bc + c^۲)$$
$$+ (c^۲ - ۲bc + a^۲) \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^۲ + (b-c)^۲ + (c-a)^۲ \geq ۰$$

عبارت اخیر مجموع مربعات اعداد حقیقی است که همواره نامنفی (مثبت یا صفر) است. پس عبارت اخیر همواره درست و در نتیجه معادل‌های آن و از جمله حکم مسئله نیز همواره درست است.

مثال ۸. اگر x، y و z اعداد حقیقی مثبت باشند و $x < y$، آن‌گاه ثابت کنید: $\frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+z}$.

حل. از روش اثبات بازگشتی استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+z} \Leftrightarrow x(y+z) < y(x+z)$$
$$\Leftrightarrow xy + xz < yx + yz$$
$$\Leftrightarrow xz < yz$$
$$\xleftrightarrow{\mathbb{Z}>۰} x < y$$

نابرابری اخیر همواره درست است، پس معادل‌های آن و از جمله حکم مسئله نیز همواره برقرار است.

مثال ۹. به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید: $۱۰ - ۴\sqrt{۵} < ۲$

حل. معادل‌های حکم را می‌نویسیم:

$$۱۰ - ۴\sqrt{۵} < ۲ \Leftrightarrow ۸ < ۴\sqrt{۵} \Leftrightarrow ۲ < \sqrt{۵} \Leftrightarrow ۴ < ۵$$

عبارت اخیر همواره درست است، پس حکم مسئله نیز همواره برقرار است.

مثال ۱۰. در یک آزمون از جمله سؤال‌ها این بوده است: اگر: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$، آن‌گاه ثابت کنید: $\frac{x^۲ - y^۲}{a^۲ - b^۲} = \frac{xy}{ab}$ (مخرج‌ها مخالف صفر فرض می‌شوند).

محصلی مسئله را چنین حل کرده است:

اگر حکم برقرار باشد، خواهیم داشت:

$$ab(x^۲ - y^۲) = xy(a^۲ - b^۲)$$

و از آنجا:

$$(ax + by)(bx - ay) = ۰$$

پس: $ax + by = ۰$ یا $bx - ay = ۰$.

اما رابطهٔ دوم بنا به فرض مسئله برقرار است. پس حکم ثابت شد! چه ایرادی به این استدلال وارد است؟ حل مسئله باید چگونه باشد؟

حل. ایراد استدلال مسئله این است که محصل از روش معادل حکم (بازگشتی) استفاده کرده است و باید به یک رابطهٔ همواره درست برسد. اما قسمت آخر معادل حکم می‌تواند توأمان درست باشد. یعنی هم $ax + by = ۰$ و هم $bx - ay = ۰$ درست باشند و در نتیجه a و b قرینهٔ هم می‌شوند و روابط برگشت‌پذیر نیستند (تقسیم بر صفر!).

☜ حل صحیح مسئله چنین است:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \Rightarrow x = \frac{a}{b}y$$

$$\frac{x^۲ - y^۲}{a^۲ - b^۲} = \frac{\frac{a^۲}{b^۲}y^۲ - y^۲}{a^۲ - b^۲} = \frac{\frac{(a^۲ - b^۲)y^۲}{b^۲}}{a^۲ - b^۲}$$

$$\xlongequal{a^۲ - b^۲ \neq ۰} \frac{y^۲}{b^۲} = \frac{y}{b} \times \frac{y}{b}$$

$$= \frac{y}{b} \times \frac{x}{a} = \frac{xy}{ab}$$

حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

دو مجموعه مساوی

با توجه به تعریف زیرمجموعه، هر مجموعه دارای دو زیرمجموعهٔ بدیهی است: خودش و $\varnothing$. دو مجموعهٔ A و B مساوی هستند، اگر دو شرط زیر درست باشند

۱. $A \subseteq B$ ۲. $B \subseteq A$

شرط اول از این دو شرط نشان می‌دهد که همهٔ اعضای A عضو B هستند. دومی نشان می‌دهد که هر عضو B عضوی از A است. بنابراین، A و B دقیقاً اعضایی مثل هم (یکسان) دارند.

مثال۱. فرض کنیم {باقی‌ماندهٔ تقسیم n بر عدد ۲ صفر است|$A=\{n \in Z$ و: {همهٔ مضارب عدد ۲} $=B$. ثابت کنید: $A=B$.

اثبات

قسمت ۱. $A \subseteq B$: فرض کنیم x عضو دلخواهی از A باشد (بنابراین، x هر عددی است که در شرایط عضو A بودن صدق می‌کند). ما نیاز داریم اثبات کنیم که x عضو B نیز هستند.

چون x عضوی از A است، می‌توان نوشت: $\frac{x}{۲}=q$ که q عددی صحیح است. بنابراین: $x=۲q$. (این تساوی بدین معنی است که x مضرب ۲ است.) بنابراین x عضوی از B است.

قسمت ۲. $B \subseteq A$: فرض کنیم x عضوی از B باشد. نیاز داریم ثابت کنیم که x عضوی از A است. چون x در B است، مضربی از ۲ است. بنابراین: $x=۲t$ که t عددی صحیح است. پس: $\frac{x}{۲}=\frac{۲t}{۲}=t$.

باقی‌ماندهٔ تقسیم x بر ۲ صفر است، پس x عضوی از A است. با استفاده از دو قسمت اثبات می‌توانیم نتیجه بگیریم که: $A=B$.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. definition .... تعریف
2. Subset .... زیرمجموعه
3. Trivial .... بدیهی
4. Condition .... شرط
5. States that .... بیان‌کردن، نشان دادن
6. Exactly .... دقیقاً
7. Belong .... متعلق
8. Element .... عضو
9. Integernumbers .... اعداد صحیح
10. Proof .... اثبات
11. To prove .... اثبات کردن
12. Therefore .... بنابراین
13. Remainder .... باقی‌مانده
14. Division .... تقسیم
15. Conclude .... نتیجه‌گرفتن

By definition of subset, every set has two trivial subsets, itself and $\varnothing$. Two sets, A and B, are equal if the following two conditions are true:

1. $A \subseteq B$, **2.** $B \subseteq A$.

The first of the two conditions states that every element of A is an element of B. The second states that every element of B is an element of A. Therefore, A and B have exactly the same elements.

EXAMPLE 1. Let $A=\{n\in Z|$the remainder of the division of n by 2 is zero$\}$ and $B=\{$all integer multiples of 2$\}$. Prove that A=B.

Proof

► Part 1. $A\subseteq B$.

Let x bea generic element of A (that is, x is any number satisfying the conditions to belong to the set A). We need to prove that x is an element of B as well.

As x is an element of A, we can write.

$$\frac{x}{2}=q,$$

where q is an integer number. Thus x=2q. This means that x is a multiple of 2. Therefore, x is an element of B.

► Part 2. $B\subseteq A$.

Let x be an element of B. We need to prove that x is an element of A as well. Because x is in B, it is a multiple of 2. Therefore, x=2t with t integer number. Thus,

$$\frac{x}{2}=\frac{2t}{2}=t.$$

As the remainder of the division of x by 2 is zero, then x is an element of A. Using both parts of this proof, we can conclude that A=B.

شما ترجمه کنید:

In some cases it is easier to compare sets after making their descriptions as explicit as possible.

Example 2. Let and $A=\{x\in R\|\frac{x}{2}-1|<5\}$ and $B=\{x\in R|$ is a number between the roots of the equation $x^2-4x-96=0\}$. Prove that the two sets are equal.

Proof. We will simplify the descriptions of the tow sets.

By definition of absolute value, the inequality $\left|\frac{x}{2}-1\right|<5$.

Is equivalent to the inequalities $-5<\frac{x}{2}-1<5$.

Adding 1 to all three parts of the preceding inequalities, we obtain $-4<\frac{x}{2}<6$,

Which is equivalent to $-8<x<12$.

Thus we can rewrite $A=\{x\in R|-8,x<12\}$.

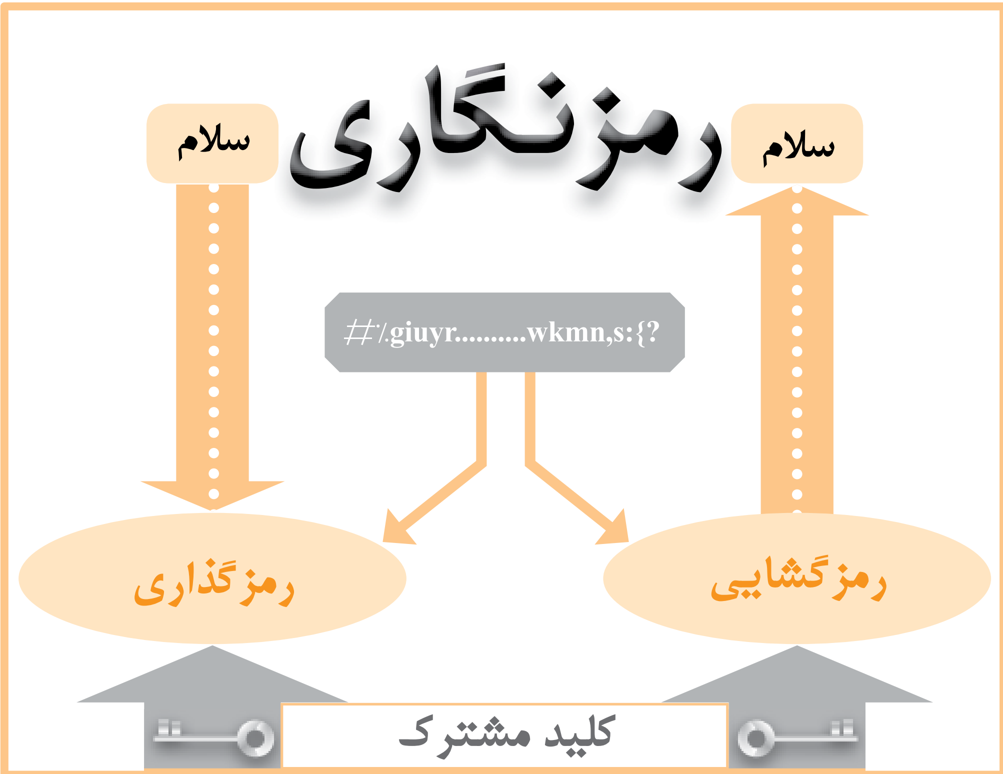
The solutions of the equation $x^2-4x-96=0$ are the numbers -8 and 12 (check this claim).

Therefore, $B=\{x\in R|-8<x<12\}$.

At this point it is evident that the two sets are equal.

لطافت امیری
دانشجوی دکتری ریاضی محض دانشگاه تربیت‌مدرس

رمزنگاری



اشاره

یکی از زیباترین و جذاب‌ترین کاربردهای نظریهٔ اعداد «رمزنگاری»[1] است. در ادامه به معرفی یکی از روش‌های سادهٔ رمزنگاری می‌پردازیم که از تعریف‌های ابتدایی هم‌نهشتی استفاده می‌کند. ابتدا تعریف هم‌نهشتی را ارائه می‌دهیم.

✱ **تعریف**: برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $(a-b)$ بر m بخش‌پذیر باشد، a هم‌نهشت با b است به پیمانهٔ m و می‌نویسیم: $a \overset{m}{\equiv} b$

مثال.

$۵ \overset{۱۲}{\equiv} -۷$ ، زیرا: $-۱۲ = (-۷-۵)$ و ۱۲- بر ۱۲ بخش‌پذیر است.

$۲ \overset{۳}{\equiv} ۱۴$، زیرا: $۱۲ = (۲-۱۴)$ و ۱۲ بر ۳ بخش‌پذیر است.

$۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۹$، زیرا: $۹-۹=۰$ و ۰ بر هر عددی بخش‌پذیر است.

تعریف اصطلاحات اولیهٔ رمزنگاری

✱ **متن ساده**[2]: پیامی را می‌گویند که می‌خواهیم به رمز بنویسیم و آن را با P نشان می‌دهیم.

✱ **سیستم رمزنویسی**[3]: روشی که برای تبدیل متن ساده به متن رمزی به‌کار می‌رود، روش‌های متفاوت و زیادی برای رمزنویسی وجود دارند که بعضی بسیار پیچیده و غیرقابل گشودن هستند (مثلاً روش بلوکی، کوله‌پشتی و ...).

✱ **متن رمزی**[4]: متنی را که با استفاده از سیستم رمزنویسی به رمز نوشته شده است، با C نشان می‌دهیم.

✱ **عملیات رمزگذاری**[5]: عملیات تبدیل متن ساده به متن رمزی.

عملیات رمزگشایی[۶]: تبدیل متن رمزی به متن ساده یا به عبارت دیگر، گشودن رمز.

کلید رمز[۷]: تبدیل مشـخصی را از بین تبدیلات ممکن معین می‌کند. این کلید رمز فقط در اختیار نگارنـدهٔ رمـز و دریافت‌کنندهٔ رمز اسـت و آن را معمولاً با k نشان می‌دهیم.

روشی که در اینجا به شـما معرفی خواهد شد، به روش «کاراکتر»[۸] معروف است.

در ایـن روش هر حرف از متن سـاده به یک حرف دیگر الفبا تبدیل می‌شـود و بـه این ترتیب متن رمزی ساخته می‌شـود. به این منظور، ابتدا حرف‌های الفبای انگلیسی را با عددهای ۰ تا ۲۵ نظیر می‌کنیم.

A	B	C	D	E
۰	۱	۲	۳	۴
F	G	H	I	J
۵	۶	۷	۸	۹
K	L	M	N	O
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
P	Q	R	S	T
۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹
U	V	W	X	Y
۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
Z				
۲۵				

در حالت کلی، این جانشـینی به !(۲۶) روش قابل انجام است.

ساده‌ترین نوع روش کاراکتر روش «تبدیل انتقالی»[۹] نام دارد.

در ایـن روش، هر حرف را بـا kامین حرف بعد از آن جایگزین می‌کنیم. به ایـن صورت که عدد متناظر با هـر حرف را با k جمع، و باقی‌مانـدهٔ آن را به پیمانهٔ ۲۶ حساب می‌کنیم. باقی‌ماندهٔ به‌دست‌آمده، عدد جدید مورد نظر ماست که حرف جدیدی متناظر با آن به ما می‌دهد.

در واقع اگر α را عدد متناظر با حرف اولیه در نظر بگیریـم، آن‌گاه β در رابطهٔ پایین عدد جدید مورد نیاز ماست: $\alpha + K \overset{26}{\equiv} \beta$

در اینجا k در واقع همان کلید رمز است که اندازهٔ انتقال هر حرف را مشـخص می‌کنـد و از این نوع ۲۶ تبدیل متفاوت امکان‌پذیر است.

مثال زیر معروف‌ترین مثال از این نوع است.

مثال.

روش **ژولیوس سزار**: این روش توسط سزار به‌کار گرفته می‌شد که در آن k=۳ است. پس: $\alpha + 3 \overset{26}{\equiv} \beta$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

عملیات رمزگذاری

i) ابتدا متن سـادهٔ P را به بلوک‌های ۵ تایی تقسـیم می‌کنیم. دلیل این تقسیم‌بندی آن است که تعداد حرف‌هـای هر کلمه نیز مشـخص نباشـد و این تقسیم‌بندی می‌تواند ۴ تایی، ۶تایی یا ... نیز باشد.

C: THIS MESSAGE IS TOP SECRET

P': THISM ESSAG EISTO PSECR ET

ii) با توجه به جدول رمزنگاری، هر حرف متن P را به عدد تبدیل می‌کنیم:

۱۹،۷،۸،۱۸،۱۲.................................... ،۴،۱۹ *

iii) تبدیل مورد نظر $\alpha + 3 \overset{26}{\equiv} \beta$ را به‌کار می‌گیریم. یعنی به عددهای بالا سـه تا می‌افزاییم و سـپس حاصـل را به پیمانهٔ ۲۶ حسـاب می‌کنیم. در این مثـال، چون تمام عددها از ۲۶ کمتر هسـتند، به پیمانهٔ ۲۶ با خودشان برابرند.

۲۲،۱۰،۱۱،۲۱،۱۵،...................................... ،۷،۲۲ **

IV) حال عددها را به کمک جدول زیر دوباره به حرف تبدیل می‌کنیم:

C:WKLVP HVVDJ HLVWR SVHFU HW

اینجا عمل رمزگذاری پایان می‌پذیرد و متن رمزی را آماده اسـت. حال برای تبدیل متن C به متن P باید عمل رمزگشایی انجام شود.

عملیات رمزگشایی

i) حرف‌هـــای متن C بـــا کمک جدول به عدد تبدیل می‌شوند و عددهای ** را خواهیم داشت.

ii) در ایـــن رابطه، هر عدد را باید منهای ســـه کنیم و ســـپس به پیمانهٔ ۲۶ حساب کنیم تا به عددهای* برســـیم. یعنی باید تبدیل $\beta-۳\overset{۲۶}{\equiv}\alpha$ را به‌کار بگیریم.

iii) و در نهایت عددها را به کمک جدول رمز به حرف تبدیل می‌کنیم.

برای مثال، برای چهار حرف WKLV از ابتدای متن C مراحل سه‌گانهٔ بالا را انجام می‌دهیم:

i) طبق جدول رمز داریم:

W	K	L	V
۲۲	۱۰	۱۱	۲۱

مشاهده می‌کنید که این ۴ عدد دقیقاً ۴ عدد ابتدای عددهای ** هستند.

ii) از تبدیـــل $\beta-۳\overset{۲۶}{\equiv}\alpha$ اســـتفاده می‌کنیم و به ترتیب β را ۲۱، ۱۱، ۱۰ و ۲۲ قرار می‌دهیم تا به αهای متناظر برسیم:

$۲۲-۲\overset{۶۴}{\equiv}۱۹$ $\qquad$ $۱۰-۳\overset{۶۴}{\equiv}۷$

$۱۱-۳\overset{۶۴}{\equiv}۸$ $\qquad$ $۲۱-۳\overset{۶۴}{\equiv}۱۸$

به ترتیب به عددهای ۱۸، ۸، ۷و ۱۹ می‌رســـیم که چهار عدد ابتدای عددهای * هستند.

iii) اکنون به کمک جـــدول رمز، حرف‌های متناظر با این عددها را پیدا می‌کنیم:

۱۹	۷	۸	۱۸
T	H	I	S

مشـــاهده می‌کنید که به چهار حرف ابتدای متن P، یعنی THIS رسیدیم.

تمرین ۱

کلمهٔ BORHAN را با کد رمز ۶= K رمزنگاری کردیم و به این حرف‌ها رسیدیم: T HUXNG . حال عملیات رمزگشایی را انجام می‌دهیم:

i) حرف‌ها را به کمک جدول رمز به عددهای متناظر آن‌ها تبدیل می‌کنیم:

ii) از تبدیل $\beta-۶\overset{۲۶}{\equiv}\alpha$ استفاده می‌کنیم:

H	U	X	N	G	T
۷	۲۰	۲۳	۱۳	۶	۱۹

$۷-۶\overset{۲۶}{\equiv}۱$ $\quad$ $۲۰-۶\overset{۲۶}{\equiv}۱۴$

$۲۳-۶\overset{۲۶}{\equiv}۱۷$ $\quad$ $۱۳-۶\overset{۲۶}{\equiv}۷$ $\quad$ $۶-۶\overset{۲۶}{\equiv}۰$ $\quad$ $۱۹-۶\overset{۲۶}{\equiv}۱۳$

iii) عددهای ۱۳، ۰،۷، ۱۷، ۱۴، ۱ را که در بالا به‌دست آوردیم، بـــه کمک جدول رمز بـــه حرف‌ها تبدیل می‌کنیم:

۱	۱۴	۱۷	۷	۰	۱۳
B	O	R	H	A	N

تمرین ۲

متن زیرا را با اســـتفاده از جدول رمز و کلید رمز k=۵ رمزگشـــایی کنید و متن رمزگشایی شده را برای ما بفرستید:

NQTAJ RFYMJ RFYNH

*پی‌نوشت‌ها

1.Cryptology
2. Ploin text
3. Cipher
4. Cipher text
5. Enciphering
6. Deciphering
7. Key
8. Character
9. Shilt transformation

سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

داستان‌های شیرین ریاضی ۱

اشاره

در این داســـتان نشان خواهیم داد که «برای حل مسئله باید به هر کلمه‌ای از صورت آن به دقت توجه کرد».
برای حل هر مســـئله باید به‌طور کامل مراقب هر کلمه از شرط‌های آن باشیم. گاهی ممکن است حل مســـئله، به کلمه‌ها و شرط‌هایی بستگی داشـــته باشد که در نظر اول بی‌اهمیت تلقی شوند.
در اینجا نمونه‌ای از این‌گونه مسئله‌ها ارائه می‌شوند که حل آن، بستگی به دقت در هر کلمه از صورت مسئله بستگی دارد.

مسئلۀ : پدری ۳ پسر داشت که همۀ آن‌ها خوب درس می‌خواندند. پدر می‌خواست بداند کدام یک از آن‌ها تیزهوش‌تر اســـت. به این منظور دست به آزمایشی زیرکانه زد: او ۵ کلاه انتخاب کرد. جلوی چشم بچه‌ها، روی ۳ کلاه ستاره قرمز و روی ۲ کلاه دیگر ستاره سفید چسبانید. بعد چشم‌های سه‌پسر را بســـت و به ســـر هر کدام از آن‌ها کلاهی گذاشـــت و ۲ کلاه باقی مانده را پنهان کرد. بعد نوار را از چشـــم‌های بچه‌ها برداشـــت و پرسید: «چه کسی می‌تواند بگوید که ستارۀ کلاهش چه رنگی است؟» بعد از کمی فکر، یکی از بچه‌ها گفت که ســـتارۀ کلاهش چه رنگ است و برای پاسخ خود هم دلیل آورد.

پرسش از شما:

ســـتارۀ کلاه این پســـر چه رنگی داشته است؟ او چگونه این مطلب را فهمیده است و چه ستاره‌هایی روی کلاه دو نفر دیگر بوده‌اند؟

توجه: *پیش از آنکه خودتان مســـئله را حل نکرده‌اید، به شرح حل آن که خواهید دید، مراجعه نکنید.*

حل: برای حل مسئله باید در نظر داشت که پســـر تنها بعد از آنکه کمـــی فکر کرد، توانست پاسخ را پیدا کند.
با توجه به ســـتاره‌هایی کـــه روی ۳ کلاه چســـبانده شـــده بودند، واضح است که سه حالت ممکن زیر احتمال دارد اتفاق بیفتند:

۱) سفید، سفید، قرمز
۲) سفید، قرمز، قرمز
۳) قرمز، قرمز، قرمز

اگر حالت ۱ را در نظر بگیریم، پسر سوم که می‌دانست بیش از ۲ ستارۀ سفید وجود ندارد، بلافاصله می‌گفت که ستارۀ کلاه او قرمز است. در این حالت هیچ فکر کردنی نیاز نیست.
اگر حالت ۲ را در نظر بگیریم، وقتی که پســـر دوم (و همراه او پسر سوم) می‌بینند که یکی از برادرهایش ســـتارۀ سفید و دیگری ستاره قرمز دارد، باید بلافاصله بگوید که روی کلاه او ستارۀ قرمز وجود دارد. زیرا اگر کلاهی با ستارۀ سفید می‌داشت، برادر سوم بلافاصله اعلام می‌کرد که ستاره او قرمز است.
بنابراین، در این حالت هم به فکر کردن نیازی نیست.
چون بنابر شـــرط مسئله، پاسخ تنها بعد از آنکه پســـر کمی فکر می‌کند، داده می‌شود، باید وضع سوم وجود داشته باشد. زیرا در این حالت باید هر کدام از پســـرها انتظار بکشند که آیا دیگران دربارۀ کلاه خودشان، اطلاعی می‌دهند یا نه.
به این ترتیب، هر سه پسر کلاهی با ستارۀ قرمز به سر داشـــتند و برای حل مسئله، در شرایط احتمال برابر بودند. در نتیجه، پسری که برای نخســـتین‌بار رنگ کلاه خود را بیان کرد، در واقع تیزهوش‌ترین آن‌ها بوده است.

توجه: *اگر در صورت مسئله، جملۀ «بعد از کمی فکر کردن» وجود نداشت، مسئله را نمی‌شود حل کرد.*

فعالیت کلاسی (بازی گروهی)

دانش‌آمـــوزان یک کلاس بـــا هماهنگی با معلم خود می‌توانند با ۵ کلاه و ۵ برچســـب با دو رنگ متفاوت و ۳ چشـــم‌بند، این بازی ریاضی را که به تجزیه و تحلیل و فکر کردن کمک می‌کند، انجام دهنـــد و نفرات برتر و تیزهوش کلاس خود را بشناســـند و آن‌ها را تشویق کنند.

دکتر غلامرضا یاسی‌پور

بی‌نهایت (۲)

این حکایت گفته شد زیر و زبر
همچو کارِ عاشقان بی‌پا و سر
سر ندارد چون ز ازل بوده است پیش
پا ندارد با ابد بوده است خویش

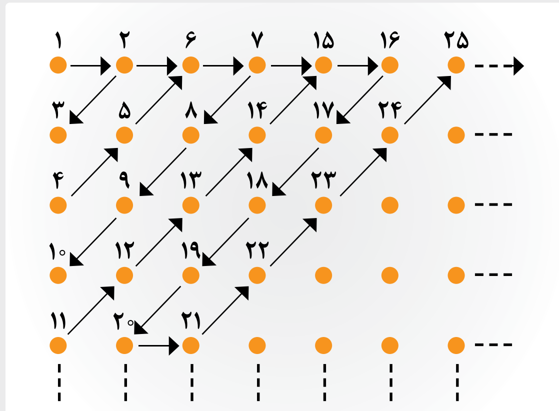
(مثنوی معنوی/ دفتر اول/ ۹۸ ـ ۲۸۹۷)

آیا کسرها بی‌نهایت ـ شمارایند؟

مجموعهٔ کسرها، یا Q، به این معنی که می‌توان N را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از Q در نظر گرفت، بزرگ‌تر از N است. اما آیا می‌توان جمیع اعضای Q را در یک فهرست نوشت؟ یعنی، آیا می‌توانیم فهرستی ارائه کنیم که هر کسر (از جمله کسرهای منفی) جایی در آن داشته باشد؟ به نظر می‌رسد، این ایده که مجموعه‌ای به این بزرگی را می‌توان در تناظری یک به یک با N قرار داد، غیرممکن باشد. با این همه، این کار را می‌توان انجام داد. طریق آغاز این کار، مجسم کردن عبارت‌های دوبُعدی است. برای شروع، ردیفی از همهٔ عددهای تمام، متناوباً مثبت و منفی، می‌نویسیم. سپس زیر آن، همهٔ کسرهایی را می‌نویسیم که مخرجشان ۲ است. اما آن‌هایی را که در سطر بالا ظاهر شده‌اند (مانند $۳ = \frac{۶}{۲}$)، می‌اندازیم. آن‌گاه زیر این سطر، کسرهایی را می‌نویسیم که مخرج ۳ دارند، و بار دیگر آن‌هایی را که قبلاً ثبت کرده‌ایم، حذف می‌کنیم.

کار را به این طریق ادامه می‌دهیم، اما در مورد آن، گرچه هیچ‌گاه پایان نمی‌پذیرد، دقیقاً می‌دانیم که در نمودارمان، هر کسر در کدام مکان ظاهر می‌شود. برای مثال، $\frac{۲۰۹}{۶۷}$ در ردیف ۶۷ام، در حدود ۲۰۰ مکان در سمت راست $\frac{۱}{۶۷}$ قرار دارد.

۱	-۱	۲	-۲	۳	-۳	۴	…
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{-۳}{۲}$	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{-۵}{۲}$	$\frac{۷}{۲}$	…
$\frac{۱}{۳}$	$\frac{-۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{-۲}{۳}$	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{-۴}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	…
$\frac{۱}{۴}$	$\frac{-۱}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{-۳}{۴}$	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{-۵}{۴}$	$\frac{۷}{۴}$	…
$\frac{۱}{۵}$	$\frac{-۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{-۲}{۵}$	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{-۳}{۵}$	$\frac{۴}{۵}$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…



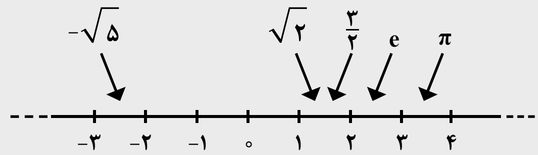
با نمایش همهٔ کسرها در این طریق، دست‌کم بالقوه می‌توانیم فهرستی یک‌بُعدی بنا کنیم. در صورتی که از سطر بالایی شروع کنیم، و در هر مرحله به راست حرکت نماییم، هرگز به سطر دوم نمی‌رسیم. اما با انتخاب یک مسیر پرپیچ و خم زیگزاگی، می‌توان به موفقیت رسید. با شروع از ۱، فهرست خطی معهود، به‌صورت زیر آغاز می‌شود:

$$۱ , -۱ , \frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۳} , -\frac{۱}{۲} , ۲ , -۲$$

که از پیکان‌ها پیروی می‌کند. هر کسر، مثبت یا منفی، در جایی از این فهرست خطی واقع است، و برعکس، موقعیتش جفتش را در فهرست دوبُعدی کسرها به دست می‌دهد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که مجموعهٔ کسرهای Q بی‌نهایت ـ شماراست و نوشت: $card (Q)=x_۰$.

فهرست کردن عددهای حقیقی

در حالی‌که مجموعهٔ کسرها جواب‌گوی اعضای بسیاری بر محور عددی حقیقی است، عددهای حقیقی‌ای نیز، از قبیل $\sqrt{۲}$، e، π موجودند که کسر نیستند. این عددها، عددهای گنگ‌اند و «رخنه‌ها را پر می‌کنند» تا محور عددی حقیقی R را به دست دهند.



به مجموعهٔ R، با رخنه‌های پر شده، به‌عنوان «پیوستار»[2] رجوع می‌شود. اما چگونه می‌توانیم فهرستی از عددهای حقیقی تشکیل دهیم؟ کانتور، در حرکتی مملو از زیرکی محض، نشان داد که حتی کوشش در قرار دادن عددهای حقیقی بین ۰ و ۱ در یک فهرست، محکوم به شکست است. این پاسخ، بدون شک، به‌صورت شوکی به اشخاصی وارد شد که به فهرست‌سازی معتاد بودند. چرا که درواقع از این به حیرت می‌افتادند که چگونه نمی‌توان مجموعه‌ای از عددها را یکی پس از دیگری نوشت.

فرض می‌کنیم به حرف کانتور اعتقاد نداشته باشید. می‌دانید که هر عدد بین ۰ و ۱ را می‌توان به‌صورت یک دهدهی گسترش یابنده، مثلاً $\frac{۱}{۲}=۰/۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰...$ و $\frac{۱}{\pi}=۰/۳۱۸۳۰۹۸۸۶۱۸۳۷۹۰۶۷۱۵۳$ بیان کرد. پس باید به کانتور بگویید: «بفرمایید، این فهرست من از جمیع عددهای بین ۰ و ۱ است»، فهرستی که آن را $r_۱$، $r_۲$، $r_۳$، $r_۴$، $r_۵$، ... می‌نامیم؛ چه در صورتی که نتوانید چنین کنید، حق با کانتور است.

تصور کنید کانتور به فهرستتان نگاه می‌کند، و عددهای واقع در قطرِ مشخص شده را با حرف سیاه علامت می‌زنند:

$$r_۱ : ۰/a_۱a_۲a_۳a_۴a_۵...$$
$$r_۲ : ۰/b_۱b_۲b_۳b_۴b_۵...$$
$$r_۳ : ۰/c_۱c_۲c_۳c_۴c_۵...$$
$$r_۴ : ۰/d_۱d_۲d_۳d_۴d_۵...$$

اما عدد $x=x_۱x_۲x_۳x_۴x_۵...$ که در آن، $x_۱$ متفاوت از $a_۱$، $x_۲$ متفاوت از $b_۲$، $x_۳$ متفاوت از $c_۳$، و به همین‌گونه در امتداد قطر است، کجاست؟ عدد ایکسِ وی از هر عدد واقع در فهرستتان در یک مکان دهدهی تفاوت دارد، و لذا نمی‌تواند در این فهرست باشد. پس حق با کانتور است.

درواقع، هیچ فهرستی در مورد مجموعهٔ عددهای حقیقی R ممکن نیست، و بنابراین R مجموعهٔ نامتناهی «بزرگ‌تر»ی از مجموعهٔ نامتناهی کسرهای Q است؛ یعنی مجموعه‌ای با مرتبهٔ نامتناهی بالاتر.

*پی‌نوشت‌ها

۱. مطربان رفتند و صوفی در سماع
عشق را آغاز هست انجام نیست

2. continuum

عنایت‌اله راستی‌زاده

اثبات به‌روش برهان خلف

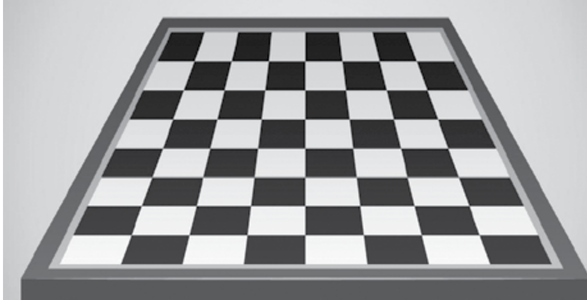
اشاره

روش اثبات به کمک برهان خلف یکی از روش‌های رایج و قوی در اثبات مسائل ریاضی به‌شمار می‌آید و دامنهٔ وسیعی از مسائل را در حوزه‌های گوناگون جبر، مثلثات، هندسه و نظریهٔ عددها در بر می‌گیرد.

در این روش اثبات، فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد و با انجام یک سلسله مراحل و عملیات ریاضی، استدلال را تا جایی ادامه می‌دهیم که برخلاف فرض یا تناقضی برسیم. در نمونه‌های زیر سعی شده است، مسائل متنوع و متفاوتی با این شیوه بررسی و اثبات شوند.

* برهـــان خُلف که اقلیدس شـــیفتهٔ آن بود، یکـــی از ظریف‌ترین سلاح‌های ریاضی‌دانان است. این کار بسیار زیباتر از طعمه‌فکنی در بازی شطرنج اســـت. یک بازیکن شطرنج ممکن است مهرهٔ پیاده یا حتی غیرپیاده‌ای را برای قربانی شدن پیش‌کش کند، اما ریاضی‌دان کل بازی را تقدیم می‌کند.

(گاد فری‌هاردی)



الف) نمونه‌های مثلثاتی

نمونهٔ ۱. ثابت کنید $\cos 1^\circ$ یک عدد گنگ است.

اثبات. فرض کنید $\cos 1^\circ$ گویا باشد، پس $\cos 2^\circ = 2\cos^2 1^\circ - 1$ نیز گویاست. با استفاده از:

$$\cos(n^\circ + 1^\circ) + \cos(n^\circ - 1^\circ) = 2\cos n^\circ \cos 1^\circ$$

و با اســـتقرا نتیجه می‌گیریم که برای تمـــام عددهای صحیح $n \geq 1$، $\cos n^\circ$ گویاســـت که نادرســـت بودن این موضوع روشـــن اســـت. زیرا برای نمونه، $\cos 30^\circ$ گویا نیست. تناقض ایجاد شده به معنای اشتباه بودن فرض (فرض خلف) است و بنابراین $\cos 1^\circ$ گویا نیست.

نمونهٔ ۲. ثابت کنید برای هر x که: $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$، داریم:

$$\sin x + \cos x \ge 1$$

اثبات. اگر چنین نباشد، یعنی برای xای در بازهٔ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ داشته باشیم: $\sin x + \cos x < 1$، چون در ناحیهٔ اول مثلثاتی $\sin x \ge 0$ و $\cos x \ge 0$، پس: $0 \le \sin x + \cos x < 1$ طرفین نابرابری اخیر را به توان دو می‌رسانیم و داریم:

$$0^2 \le \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x < 1^2$$

در نتیجه:

$$0 \le 1 + 2\sin x \cos x < 1$$

و بنابراین $2\sin x \cos x < 0$ و این نیز تناقض است.

نمونهٔ ۳. θ زاویه‌ای است حاده برحسب رادیان. به‌سادگی می‌توان دید: $\sin\theta < \theta$.

نشان دهید: $\cos\theta > 1 - \theta$.

اثبات. توجه می‌کنیم که نابرابری $\cos\theta > 1-\theta$ برای $1 < \theta < \frac{\pi}{2}$ روشن است، زیرا در این حالت cosθ مثبت و 1-θ منفی است.
درحالت $0 < \theta \le 1$ از برهان خلف استفاده می‌کنیم. اگر داشته باشیم: $\cos\theta \le 1-\theta$، می‌توانیم بنویسیم:

$$1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta \quad , \quad \sin\theta < \theta$$

در نتیجه:

$$1 < \theta^2 + (1-\theta)^2 \Rightarrow 1 < 2\theta^2 + 1 - 2\theta \Rightarrow \theta < \theta^2$$

اما $\theta < \theta^2$ با شرط $0 < \theta \le 1$ در تناقض است. این تناقض حکم را کامل می‌کند.

ب) نمونه‌های مربوط به شمارش

نمونهٔ ۴. P را عددی طبیعی و بزرگ‌تر از واحد و n و k را دو عدد طبیعی فرض می‌کنیم $(n \ge k)$. ثابت کنید دست کم یکی از عددهای $\binom{n}{k}$ و $\binom{n+1}{k}$ و ... و $\binom{n+k}{k}$ بر P بخش‌پذیر نیست.

اثبات. به روش برهان خلف، فرض کنیم این‌طور نباشد و همهٔ عددهای فوق بر P بخش‌پذیر باشند. با استفاده از اتحاد ترکیبیاتی

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

و این موضوع که تفاضل دو عدد بخش‌پذیر بر P نیز بر P بخش‌پذیر است، داریم:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} &= \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \\ \binom{n+1}{k-1} &= \binom{n+2}{k} - \binom{n+1}{k} \\ &\vdots \\ \binom{n+k-1}{k-1} &= \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

لذا عددهای $\binom{n}{k-1}$ و $\binom{n+1}{k-1}$ و .... و $\binom{n+k-1}{k-1}$ نیز همگی بر p بخش‌پذیر هستند. اگر همین روند را ادامه دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\binom{n+k-k}{k-k}$$

یعنی $\binom{n}{0} = 1$ بر P بخش‌پذیر است کــه این موضوع خلاف فرض، و تناقض آشکار است. این تناقض حکم را کامل می‌کند.

نمونهٔ ۵. دوازده نفــر در طول یک روز بدون هیچ برنامهٔ خاصی با یکدیگر شطرنج بازی کرده‌اند. می‌دانیم در مجموع ۱۹ بازی انجام شده است. ثابت کنید یکی از این افراد حداقل ۴ بار بازی کرده است.

اثبات. فرض کنیم حکم درست نباشد. پس هر یک از افراد حداکثر ۳ بار بازی کرده‌انــد. در این صورت، حداکثر $\frac{12 \times 3}{2}$ بازی، یعنی ۱۸ بازی انجام شده است. پس به تناقض رسیده‌ایم و حکم درست است.

ج) نمونه‌هایی از مسابقه‌های ریاضی

نمونهٔ ۶. زوج (x,y) از اعداد صحیح مثبت را «شـاد» نامیده‌ایم، هرگاه $x+y$ و xy هر دو مربع کامل باشنــد. مثلاً (۲۰ و ۵) شــاد اســت، چون: $5+20=25$ و $5\times 20=100$ و هر دو مربع کامل‌اند. نشان دهید، هیچ زوج شادی نیست که یکی از اعضایش عدد ۳ باشد.

اثبات. با استفاده از برهان خلف فرض کنیم xای باشد که زوج (x و ۳) شاد باشد. پس ۳x مربع کامل است و بنابراین yای هست که: $x = 3y^2$. در این صورت باید $3y^2 + 3$ نیز مربع کامل باشد. اما می‌دانیم هر عدد

مربع کامل در تقسیم بر ۴، باقی‌مانده‌ای برابر صفر یا یک دارد. پس باید، $y^2 = 4k$ یا: $y^2 = 4k+1$. امـا اگر: $y^2 = 4k$، آن‌گاه $3y^2+3$ در تقسـیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۳ خواهد داشت؛ و اگر: $y^2 = 4k+1$، آن‌گاه $3y^2+3$ در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ خواهد داشت که در هر دو حالت تناقض آشـکار است. این تناقض حکم را ثابت می‌کند.

نمونهٔ ۷. سه عدد طبیعی و متوالی غیرمشخص را در نظر بگیرید. ثابت کنید که مکعب بزرگ‌ترین آن‌ها نمی‌تواند با مجموع مکعب‌های دو عدد دیگر برابر باشد. (مسابقه‌های ریاضی مجارستان ـ ۱۹۰۹)

اثبات. : فرض کنید n-۱، n و n+۱ سه عدد طبیعی متوالی باشند.

با استفاده از روش برهان خلف فرض کنیم: $(n+1)^3 = n^3 + (n-1)^3$

یعنی: $n^3+3n^2+3n+1 = n^3+n^3-3n^2+3n-1$

در این صورت: $2 = n^3 - 6n^2 \Rightarrow 2 = n^2(n-6)$

اگر $n \le 6$، که داریم: $n^2(n-6) \le 0$ و تناقض روشن است.

اگر $n>6$، در این صورت داریم: $n^2(n-6) > 36$ که نمی‌تواند با ۲ برابر باشد و تناقض است. این تناقض اثبات را کامل می‌کند.

نمونهٔ ۸. عددهای a، b و c بین ۰ و ۱ داده شـده‌اند. ثابت کنید ممکن نیسـت عبارت‌هـای $a(1-b)$، $b(1-c)$ و $c(1-a)$، همگی بزرگ‌تر از $\frac{1}{4}$ باشند. (بیست‌ویکمین المپیاد ریاضی انگلستان ـ ۱۹۸۵)

اثبات. با استفاده از برهان خلف فرض کنیم حکم برقرار نباشد؛ یعنی تمامی عبارت‌های $a(1-b)$، $b(1-c)$ و $c(1-a)$ بزرگ‌تر از $\frac{1}{4}$ باشند.

$$\left.\begin{aligned} a(1-b) &> \tfrac{1}{4} \\ b(1-c) &> \tfrac{1}{4} \\ c(1-a) &> \tfrac{1}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a(1-a)b(1-b)c(1-c) > \frac{1}{64} \quad (I)$$

از آنجـا که: $0 < a < 1$، پس a و 1-a مثبت‌انـد. با انتخاب x=a و y=1-a و جای‌گذاری در نامسـاوی مشـهور *واسـطهٔ حسـابی و هندسـی*، یعنی $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$، نتیجه می‌شود: $\sqrt{a(1-a)} \le \frac{1}{2}$.

یعنی: $a(1-a) \le \frac{1}{4}$.

به طریق مشابه داریم: $b(1-b) \le \frac{1}{4}$ و $c(1-c) \le \frac{1}{4}$. از ضرب ۳ نابرابری اخیر نتیجه می‌شود:

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c) \le (\tfrac{1}{4})^3 = \frac{1}{64} \qquad (II)$$

نابرابـری (II) با (I) در تناقض اسـت و این تناقـض اثبات را کامل می‌کند.

نمونهٔ ۹. نشـان دهید a و b طبیعـی را نمی‌توان یافت که هم a^2+2b و هم b^2+2a *مربع کامل* باشند.

اثبات. با اسـتفاده از برهان خلف، فرض کنیـم a و b طبیعی موجود باشـند، به‌طوری که هر دو عدد a^2+2b و b^2+2a مربع کامل باشند.

از آنجـا کـه a^2+2b مربع کامل اسـت و : $a^2+2b > a^2$ و نخستین عدد بزرگ‌تر از a^2 که مربع کامل هم باشد $(a+1)^2$ است، پس لزوماً: $a^2+2b \ge (a+1)^2$.

پس: $a^2+2b \ge a^2+2b+1$. در نتیجه: $2b \ge 2a+1$.

اما: $2a+1 > 2a$. لذا: $2b > 2a$ و در نتیجه: b>a. (I)

به طریق مشابه و با فرض اینکه b^2+2a مربع کامل باشد، داریم:

$$b^2+2a > b^2 \Rightarrow b^2+2a \ge (b+1)^2$$
$$\Rightarrow b^2+2a \ge b^2+2b+1 \Rightarrow 2a \ge 2b+1$$

و: $2b+1 > 2b$ پس: 2a>2b و: $a > b$ II .

نتایج I و II تناقض آشـکارند. پس با توجه به *برهان خلف* حکم ثابت است.

تمرین

۱. نشان دهید هر دو جملهٔ متوالی دنبالهٔ فیبوناتچی نسبت به هم اول‌اند.

۲. ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.

۳. ثابت کنید $\sqrt{2}$ عددی است گنگ.

۴. a، b و c سـه عدد حقیقی غیرصفر هستند. ثابت کنید حداقل یکی از معادله‌های زیر ریشه‌های حقیقی دارند:

$$ax^2+2bx+c=0,\ bx^2+2cx+a=0,$$
$$cx^2+2ax+b=0$$

۵. ثابت کنید نمی‌توان خانه‌های جدولی ۱۰×۱۰ را با عددهایی صحیح طوری پر کرد که مجموع عددهای هر سطر جدول عددی منفی و مجموع عددهای هر ستون جدول عددی مثبت باشد.

محمد هاشمی رستمی

مکان هندسی (۲)
یک قضیه و عکس آن

اشاره

همان‌طوری که می‌دانید، با عوض کردن جای فرض و حکم یک قضیه، عکس آن قضیه به‌دست می‌آید. چون در قضایای مربوط به مکان هندسی یک مطلب و عکس آن را باید ثابت کنیم، اشاره‌ای به این مطلب می‌کنیم.

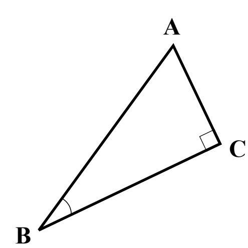
کلیدواژه‌ها مثلث، نیم‌ساز، زاویه قائمه، مکان هندسی

به مثال زیر توجه کنید:

◆**قضیه:** در مثلث ABC اگر $AB > AC$ باشد، ثابت کنید: $C > B$ است. در این قضیه داریم:

◆**فرض:** $AB > AC$

◆**حکم:** $C > B$



شکل ۱

اگــر جای فرض و حکم این قضیه را عوض کنیم، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

◆**قضیه:** در مثلث ABC، اگر $\hat{C} > \hat{B}$ باشد، ثابت کنید: $AB > AC$ است. در این قضیه داریم:

◆**فرض:** $\hat{C} > \hat{B}$

◆**حکم:** $AB > AC$

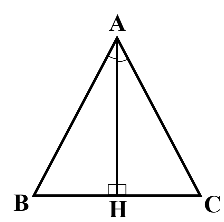
این دو قضیه عکس یکدیگرند و هر دو نیز درســت‌اند. این دو قضیه را ثابت کنید.

نکته. *حال اگر فرض و یا حکم قضیه‌ای یا هردوی آن‌ها چند قســمت داشته باشند، قضیه چند قضیهٔ عکس خواهد داشت. به مثال زیر توجه کنید:*

◆**قضیه:** در مثلث متساوی‌الســاقین ABC، ارتفاع رأس A را رسم می‌کنیم (شکل ۲). ثابت کنید که این ارتفاع نیم‌ساز زاویــهٔ رأس A و همچنین میانهٔ وارد بر قاعدهٔ BC اســت. در ایــن قضیه داریم:

◆**فرض:** $AB = AC$ و $AH \perp BC$

◆**حکم:** $HB = HC$ و $B\hat{A}H = C\hat{A}H$



شکل ۲

به‌طوری که دیده می‌شــود، این قضیــهٔ ۲ فرض و ۲ حکم دارد. با عوض کردن جای هر قســمت از فــرض و حکم یک عکس قضیه به‌دست می‌آید. مثلاً اگر داشته باشیم:

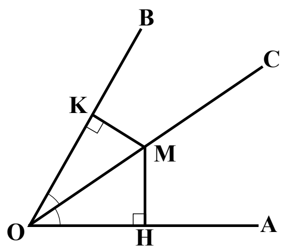
◆**فرض:** $HB = HC$ و $AH \perp BC$

◆**حکم:** $B\hat{A}H = C\hat{A}H$ و $AC=AB$

این قضیه درست است و صورت آن را چنین بیان می‌کنیم:
اگر در مثلث ABC ارتفاع رأس A میانه نظیر ضلع BC نیز باشد، اولاً آن مثلث متساوی‌الســاقین است و ثانیاً ارتفاع AH نیم‌ساز زاویهٔ BAC نیز هست.

توجه. *بقیهٔ حالت‌ها را خودتان بنویسید و اثبات کنید.*

مثالی دیگر از یک قضیه و عکس آن که با آن آشــنا هســتید، مربوط به ویژگی نیم‌ســاز یک زاویه است. می‌دانیم که هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به آن فاصله است.



شکل ۳

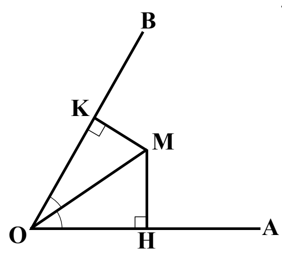
یعنی اگر OC نیم‌ســاز زاویهٔ AOB و M نقطــه‌ای دلخــواه از آن و MH و MK فاصله‌هــای نقطــهٔ M از دو ضلــع این زاویه باشــند، آن‌گاه داریم: MH=MK (شکل ۳). به صورت دیگر داریم:

◆ **فرض:** (نیم‌ســاز زاویهٔ AOB) $M \in OC$

◆**حکم:** MH=MK

◆**اثبات:** دو مثلث قائم‌الزاویه MOH و MOK به دلیل تساوی وتر و یک زاویهٔ حاده. ($M\hat{O}K = M\hat{O}H \quad OM = OM, \hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$)

بنابراین: MH=MK یعنی نقطهٔ M واقع بر نیم‌ساز زاویهٔ AOB از دو ضلع این زاویه به یک فاصله است.



شکل ۴

◆**قضیه:** هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیم‌ســاز آن زاویه قرار دارد. یعنی اگــر MH و MK فاصله‌هــا نقطهٔ M از دو ضلع زاویهٔ AOB باشــد و داشته باشیم: MH=MK، آن‌گاه M روی نیم‌ســاز ایــن زاویه قــرار دارد؛ یعنی: $M\hat{O}H = M\hat{O}K$

به بیان دیگر، در این قضیه داریم:

◆**فرض:** $MH \xrightarrow{b} OA, MK \xrightarrow{b} OB, MH = MK$

◆**حکم:** $M\hat{O}H = M\hat{O}K$ یا M روی نیمساز زاویهٔ AOB است.

◆**اثبات:** دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MOH و MOK ($\hat{K} = \hat{H} = 90^\circ$)، به دلیل تســاوی وتــر و یک ضلع (OK=OH و OM=OM) همنهشت‌اند. بنابراین $M\hat{O}H = M\hat{O}K$.. یعنی OM نیم‌ســاز زاویهٔ AOB است. یا به عبارت دیگر، نقطهٔ M که از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، روی نیم‌ساز این زاویه قرار دارد.

بنابراین می‌توان گفت:

◆**قضیه:** نیم‌ساز هر زاویه مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ آن زاویه است که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

واضح است که برای اثبات این قضیه باید دو قضیهٔ بالا را که یکی عکس دیگری است، ثابت کنیم که اثبات آن‌ها را دیدید.

نکتهٔ مهم. *اکنون این سؤال پیش می‌آید که آیا عکس هر قضیه‌ای درست است؟ شما چه فکر می‌کنید؟*

پاســخ منفی است. یعنی عکس هر قضیه‌ای ممکن است درست نباشد. به مثال زیر توجه کنید:

◆**قضیه:** هر دو زاویهٔ قائمه با هم مساوی‌اند؛ یعنی:

◆**فرض:** دو زاویهٔ قائمه‌اند

◆**حکم:** دو زاویهٔ مساوی‌اند

روشن اســت که این قضیه درست اســت. اما عکس این قضیه چنین است که: هر دو زاویهٔ مساوی، قائمه‌اند؛ یعنی:

◆**فرض:** دو زاویه مساوی‌اند

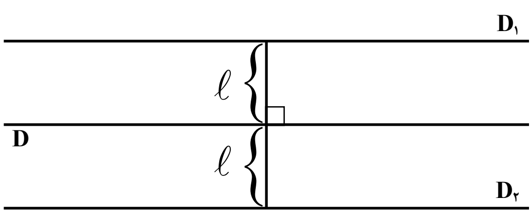
◆**حکم:** دو زاویه قائمه‌اند

روشن اســت که این قضیه درست نیست. زیرا دو زاویهٔ مساوی، الزاماً قائم نیستند. مواردی دیگر را هم می‌توان بیان کرد.

اکنون که با تعریف مکان هندســی و ویژگی‌هایی از آن آشــنا شــدید، به معرفی چند مکان هندسی پرکاربرد می‌پردازیم و سپس چگونگی حدس زدن شــکل یک مکان هندســی را بیان می‌کنیم و بعد به کاربردهایی از مکان هندسی در بخش‌های متفاوت هندسه، از جمله رسم شکل‌های هندسی می‌پردازیم.

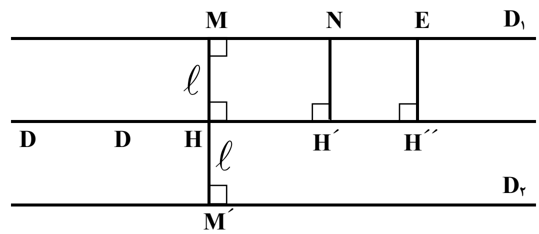
یک مکان هندسی دیگر

◆**قضیه:** مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از خط راست D واقع در آن صفحه، به فاصله‌ها ثابت ℓ باشد، دو خط راست D_1 و D_2 است.



شکل ۵

◆اثبات به روش هندسی



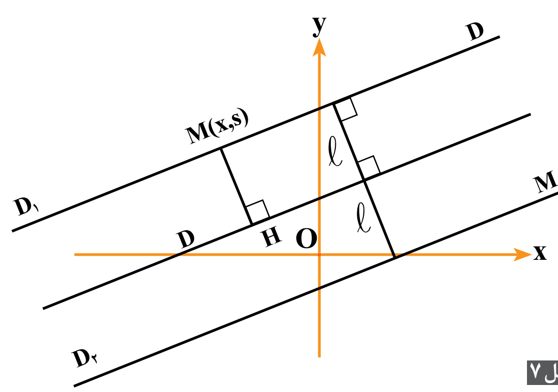
شکل ۶

خط راست D را در صفحهٔ P در نظر می‌گیریم و دو خط راست D_1 و D_2 را در دو طرف آن و به فاصلهٔ ℓ را از آن رسم می‌کنیم. برای این کار از نقطهٔ H واقع بر خط D، خط راستی عمود بر این خط اخراج و روی آن در دو طرف نقطهٔ H، پاره‌خط‌های HM و HM' را به طول ℓ جدا می‌کنیم. سپس از نقطه‌های M و M' خط‌های D_1 و D_2 را به موازات خط D می‌کشیم. این دو خط مکان هندسی مورد نظر، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای هستند که از خط D به فاصلهٔ ℓ واقع است. زیرا:

الف) هر نقطه مانند N که روی یکی از دو خط D_1 یا D_2 قرار داشته باشد، از خط D به فاصلهٔ ℓ واقع است. چرا که اگر پای عمود از نقطهٔ N بر خط D را H' بنامیم چهارضلعی MHH'N که اضلاعش دو به دو موازی‌اند، متوازی‌الاضلاع است که چون زاویه‌هایش قائمه‌اند، مستطیل است. پس داریم: ℓ=MH=NH'.

ب) هر نقطه‌ای مانند E از صفحهٔ P که از خط D به فاصلهٔ ℓ قرار داشته باشد، بر یکی از دو خط D_1 یا D_2 واقع است. زیرا با توجه به اینکه داریم: $MH \parallel EH''$ ، $MH = EH'' = \ell$ و $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$، چهارضلعی MHH''E مستطیل است و در نتیجه داریم: $HH'' \parallel ME$ یا $ME \parallel D$. پس نقطهٔ E روی خط D_1 قرار دارد (از نقطهٔ M تنها یک خط راست به موازات خط راست D می‌توان رسم کرد).

◆اثبات به روش تحلیلی



شکل ۷

خط D به معادلهٔ $D: ax+by+c=0$ را در دستگاه مختصات قائم xoy در نظر بگیریم. اگر (x و y) یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم:

$$MH = d = \ell \Rightarrow \ell = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow$$
$$|ax+by+c| = \ell\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow$$
$$D_1: ax+by+c+\ell\sqrt{a^2+b^2} = 0,$$
$$D_2: ax+by+c-\ell\sqrt{a^2+b^2} = 0$$

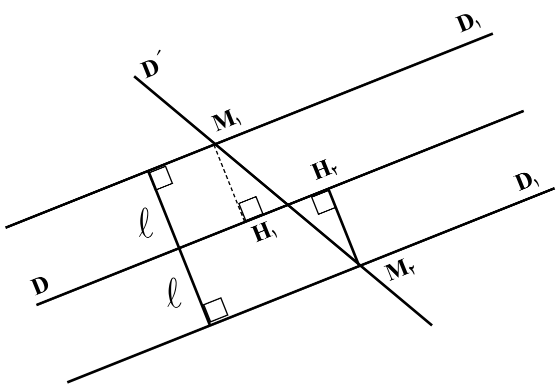
به‌طوری که دیده می‌شود، دو خط D_1 و D_2 خط‌های راستی هستند که با خط D موازی‌اند، زیرا:

$$M_{D_1} = M_{D_2} = M_D = -\frac{a}{b}$$

به عکس مشخص است هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ یکی از دو خط D_1 و D_2 صدق کند، از خط $D: ax+by+c=0$ به فاصله ℓ قرار دارد. بنابراین:

مکان هندسی نقطه‌ای که از خط راست ثابت D به فاصلهٔ معین ℓ واقع است. دو خط راست موازی این خط است که در طرفین آن واقع‌اند.

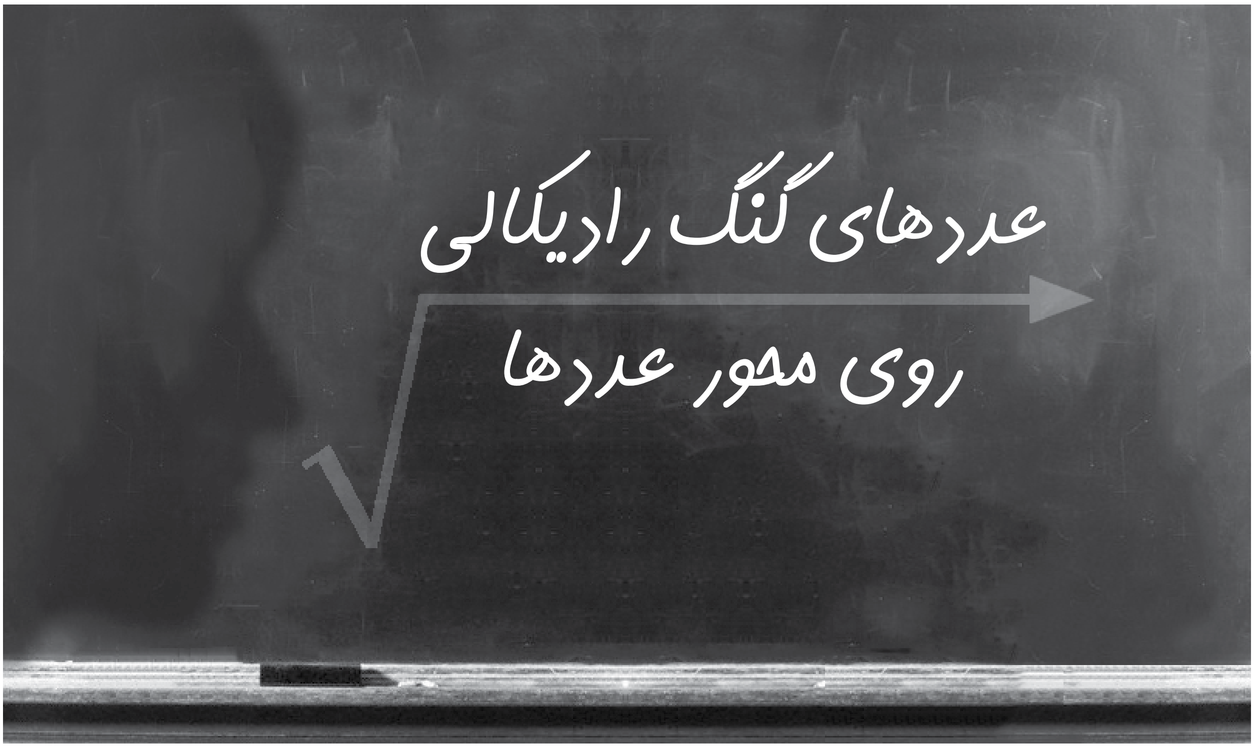
مثال ۱. دو خط D و D´ در یک صفحه داده شده‌اند روی خط D´ نقطه‌ای بیابید که از خط D به فاصلهٔ معلوم ℓ باشد.



شکل ۸

حل. دو خط D_1 و D_2 مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D به فاصلهٔ معلوم ℓ قرار دارد، رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو خط با خط D´ جواب مسئله است.

سیدجمال میرحسینی، دبیر مدارس سمپاد استان البرز



عددهای گنگ رادیکالی روی محور عددها

اشاره

می‌دانیم مجموعهٔ عددهای گنگ یا اصم مجموعه‌ای نامتناهی و ناشماراســـت، و برای مشخص کردن اعداد گنگ روی محور اعداد حقیقی روش‌هایی وجود دارد که در این مقاله از روش جالبی تعدادی از این اعداد را روی محور اعداد حقیقی مشخص می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها **عدد گنگ، محور اعداد، مثلث، پرگار**

مسئله: عـــدد $\sqrt{۷}+\sqrt{۱۱}+\sqrt{۱۹}+\sqrt{۲۰}=M$ را روی محور عددها نمایش دهید.

متداول‌ترین روش برای حل مسئلهٔ بالا این است که هر یک از عددها را جداگانه به‌وســـیلهٔ مثلث قائم‌الزاویه و رابطهٔ **فیثاغورس** تولید کنیم. ســـپس به‌وســـیلهٔ پرگار کمان‌هایی متوالی به اندازهٔ آن‌ها رسم کنیم. ولی در ادامه می‌خواهیم روشی ســـاده‌تر، قابل ترسیم‌تر و قابل درک‌تر را بیـــان کنیم که امید اســـت مورد توجـــه علاقه‌مندان و دانش‌آموزان قرار گیرد.

نخست مطالب زیر را مرور می‌کنیم که لازمهٔ حل این مسئله است.

اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه ۲n+۱ یک عدد فرد طبیعی خواهد بود. از طرف دیگر داریم:

$$\left(\sqrt{۲n+۱}\right)^{۲}=۲n+۱$$

با توجه به رابطهٔ قبل می‌توان نتیجه گرفت:

$$(n+۱)^{۲}-n^{۲}=۲n+۱$$

یعنی هر عدد فرد بزرگ‌تر از یک را می‌توان از تفاضل دو عدد مربع کامل متوالی تولید کرد.

به‌عبارت دیگر:

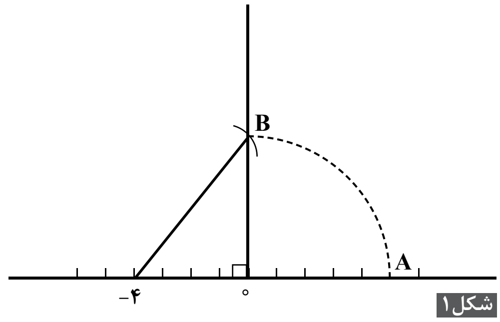
$$(n+۱)^{۲}-n^{۲}=۲n+۱=(\sqrt{۲n+۱})^{۲}$$

با این ســـه عدد می‌توان یک مثلث رسم کرد[۱] و کافی است مثلث قائم‌الزاویهٔ ساخته شده را روی محور به نمایش بگذاریم.

برای مثال، برای یافتن $\sqrt{۷}$ که در آن n=۳ اســـت، مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌توان ســـاخت که اضلاع زاویهٔ قائم آن $\sqrt{۷}$ و ۳ و وتر آن ۴ باشد (شکل ۱).

ابتدا نیم‌خط ox را عمود بر محور می‌کشـــیم. دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ وتر (۴) باز می‌کنیم و از نقطهٔ ۳- کمانی

رســـم می‌کنیم تا نیم‌خط ox را در نقطهٔ A قطع کند. در نتیجه داریم: $\overline{OA}=\sqrt{۷}$.



شکل ۱

حال اگر دهانهٔ پرگار را بــه اندازهٔ $\overline{OA}$ باز کنیم و از نقطهٔ O کمانی رسم کنیم تا جهت مثبت محور را در نقطهٔ B قطع کند، قطعاً نقطهٔ B نقطهٔ نمایش عدد $\sqrt{۷}$ اســت.

بـــرای همهٔ عددهای فرد طبیعـــی بزرگ‌تر از یک می‌توان چنین مثلثی ساخت. از طرف دیگر، برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک مانند k می‌توان نوشت:

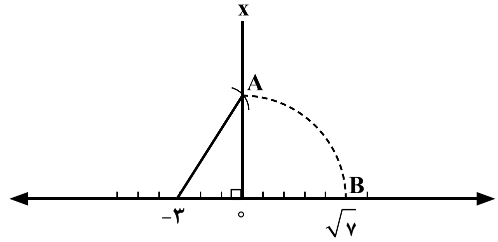
$$(k+۱)^۲-(k-۱)^۲=۴k$$

این یعنی: هر عدد زوج را که مضرب ۴ باشد، می‌توان به‌صورت تفاضل دو عدد مربع کامل نوشت. همچنین داریم:

$$k>۱\Rightarrow ۴k>۴\Rightarrow \sqrt{۴k}>۲\Rightarrow$$
$$k+\sqrt{۴k}>k+۲\Rightarrow (k-۱)+\sqrt{۴k}>k+۱$$

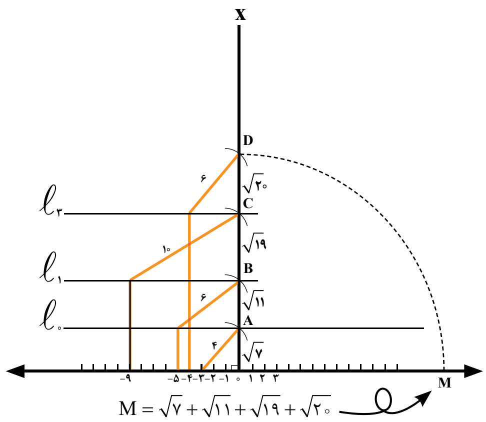
پـــس با این ســـه مقـــدار $((k+۱),(k-۱),\sqrt{۴k})$ می‌توان یک مثلث رســـم کرد. روشـــن است که این مثلث قائم‌الزاویه خواهد بود و وتر آن $k+۱$ است.

بـــرای یافتن عددی ماننـــد $\sqrt{۲۰}$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. (شـــکل ۲)، ابتدا نیم‌خـــط ox را عمود بر محور رسم می‌کنیم. سپس از نقطهٔ $-۴=-(۵-۱)=-(k-۱)$ کمانی به شعاع $۶=۱+۵=(k+۱)$ رسم می‌کنیم تا ox را در نقطهٔ B قطع کند. واضح است که: $\overline{OB}=\sqrt{۲۰}$. کافی است از نقطهٔ O کمانی به شـــعاع $\overline{OB}$ رسم کنیم تا جهت مثبت محـــور را در نقطهٔ A قطع کند. نقطهٔ A نقطهٔ نمایش عدد $\sqrt{۲۰}$ خواهد بود.



شکل ۲

حال نوبت حل مســـئلهٔ مطرح شده در ابتدای مطالب رسیده است (شکل۳)، ابتدا نیم‌خط ox را عمود بر محور رسم می‌کنیم. از نقطهٔ ۳- کمانی به شعاع ۴ رسم می‌کنیم تا ox را در نقطهٔ A قطع کند. پس: $\overline{OA}=\sqrt{۷}$.



شکل ۳

اکنون خط $l_۰$ را از نقطهٔ A عمود بر ox رسم می‌کنیم که درواقع محور جدیدی است. به عبارت دیگر، محور اولیه را به اندازهٔ $\sqrt{۷}$ بـــه نقطهٔ A منتقل کرده‌ایم. روی محور $l_۰$ از نقطـــهٔ ۵- کمانی به شـــعاع ۶ رســـم می‌کنیم تا ox را در نقطـــهٔ B قطع کند. پس: $\overline{AB}=\sqrt{۱۱}$ و در نتیجه: $\overline{OB}=\sqrt{۷}+\sqrt{۱۱}$.

بـــار دیگر خـــط $l_۱$ را از نقطهٔ B عمود بر ox رســـم می‌کنیم تـــا محور $l_۱$ به‌وجـــود بیاید. از نقطـــهٔ ۹- روی محور $l_۱$ کمانی به شـــعاع ۱۰ رســـم می‌کنیم تا ox را در نقطـــهٔ C قطع کنـــد. داریـــم: $\overline{BC}=\sqrt{۱۹}$ و در نتیجه: $\overline{OC}=\sqrt{۷}+\sqrt{۱۱}+\sqrt{۱۹}$. و دیگـــر بار محـــور $l_۲$ را از نقطهٔ C عمود بر ox رســـم می‌کنیـــم و از نقطهٔ ۴- روی محور $l_۲$ کمانی به شعاع ۶ رسم می‌کنیم تا ox را در نقطهٔ D قطع کند. به‌وضـــوح داریم: $\overline{CD}=\sqrt{۲۰}$ و در نتیجه: $\overline{OD}=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\sqrt{۷}+\sqrt{۱۱}+\sqrt{۱۹}+\sqrt{۲۰}$.

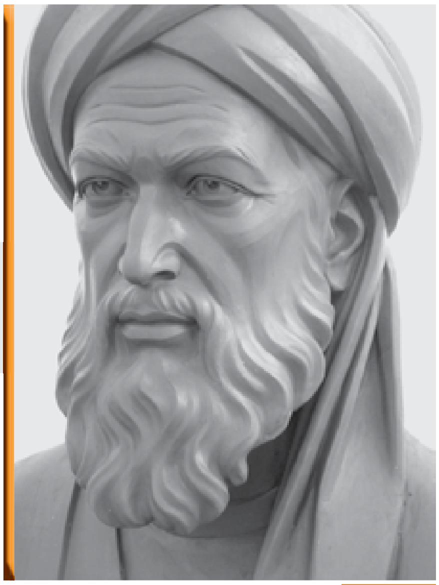
حال اگر از نقطهٔ O کمانی به شعاع $\overline{OD}$ رسم کنیم تـــا جهت مثبت محور اول را در نقطهٔ E قطع کند، متوجه خواهیم شد که E نقطهٔ نمایش عدد مورد نظر خواهد بود. روشن است که هر تعداد از این نوع عددها به آن‌ها اضافه شـــوند، می‌توان مقـــدار آن را روی محور جدا کرد و نقطهٔ نمایش آن را مشخص ساخت.

*پی‌نوشت

1. $\left[n>۱\Rightarrow ۲n>۱\Rightarrow ۲n+۱>۱\Rightarrow \sqrt{۲n+۱}>۱\Rightarrow n+\sqrt{۲n+۱}>n+۱\right]$

عباس قلعه‌پور اقدم

نگینی درخشان از میراث علمی خوارزمی



اشاره

در این مقاله به شاهکار محمدبن موسی خوارزمی پرداخته می‌شود؛ کتاب جبر و مقابلهٔ او که همچون نگینی درخشان در میراث علمی وی خودنمایی می‌کند. خوارزمی این یاقوت گران‌بها را حدود ۱۲ قرن پیش به زبان عربی تصنیف کرده است. حدود ۳۰۰ سال بعد، تنی چند آن را به لاتین ترجمه کردند و از این طریق علم جبر وارد اروپا شد. زنده‌یاد حسین خدیوجم که خدای رحمان او را از رحمت بیکران خود بهره‌مند سازد، حدود ۵۰ سال پیش این کتاب را به فارسی برگرداند. در این مقاله سعی داریم، این ترجمه را معرفی کنیم.

کلیدواژه‌ها **بندگان خاص، محمدبن موسی‌خوارزمی، سید حسین خدیوجم، جبر، مقابله، معادله، جذر، مال، عدد**

به نام آفریدگار هستی‌بخش

بندگان خاص خدا آنان‌اند که
بر زمین راه می‌روند، بی‌آزار و آهسته،
و چون نادانان ایشان را دشنام و ناروا
گویند، پاسخ دهند، نیک و بایسته.
(فرقان/۶۳)

کتاب *«المختصر فی حساب الجبر و المقابله»*، نگینی درخشان از میراث علمی خوارزمی

بی‌شک معلمان، مدرسان و دانشجویان ریاضی (که مخاطبان مجلهٔ رشد آموزش ریاضی را تشکیل می‌دهند)، با نام خوارزمی، حداقل به عنوان ریاضی‌دان و یکی از بنیان‌گذاران شاخهٔ جبر، آشنایی دارند و نام کتاب «جبر و مقابله»، اثر او را شنیده‌اند. ولی شاید اکثر آن‌ها این کتاب ذی‌قیمت را مطالعه نکرده‌اند. این کتاب ارزشمند را خوارزمی با عنوان «المختصر فی حساب الجبر و المقابلـه» (به قول خوارزمی کتابی مختصر ولی در عمل بنیادین)، در آغاز قرن سوم ق- حدود ۱۲۰۰ سال پیش- به زبان عربی تصنیف کرد و با این کار، رونقی عجیب به فرهنگ رو به گسترش اسلامی بخشید. این اثر ماندنی، پس از انتشار در قلمرو جهان اسلام، با استقبال گرم و کم‌سابقهٔ محافل علمی، چه در روزگار خوارزمی و چه در قرن‌های پس از وی، روبه‌رو شد، به‌طوری که اسم علم «جبر» (Algebra) در زبان‌های اروپایی از نام آن گرفته شد و کتاب قرن‌ها مرجع و مأخذ اروپاییان بود.

خوارزمی در این کتاب، آن‌چنان‌که در ادامهٔ مقاله شرح آن خواهد آمد، نخست تمام معادلات درجهٔ دوم شناخته‌شدهٔ زمانش را بررسی می‌کند. در مرحلهٔ دوم، روش حل هر یک از آن‌ها را شرح می‌دهد و سرانجام در مرحلهٔ سوم، این روش‌ها را به کمک علم هندسه اثبات می‌کند.

ترجمهٔ فارسی کتاب خوارزمی

کتاب جبر و مقابلهٔ خوارزمی در قرن دوازدهم میلادی چندین‌بار به لاتین ترجمه شد که از طریق این ترجمه‌ها، علم جبر وارد اروپا شد. ترجمهٔ فارسی آن حدود پنجاه سال پیش در ایران به همت ادیب، محقق و غزالی‌پژوه وارسته، زنده‌یاد سید حسین خدیوجم انجام گرفته است. اساس ترجمهٔ خدیوجم نسخه‌ای بوده است که دو استاد دانشگاه قاهره، به نام‌های *علی مصطفی مشرفة* و محمد *مرسی احمد*، در سال ۱۹۳۹ از روی اولین نسخهٔ خطی به دست آمده از

این کتاب که در «کتابخانهٔ بادلیان آکسفورد» موجود است، در مصر به چاپ رساندند.

سیدحسین خدیوجم

در سال ۱۳۰۶ شمسی در مشهد چشم به جهان گشــود و در ســال ۱۳۳۰ موفق به اخذ دیپلم ادبی شــد. در ســال ۱۳۳۸، لیســانس خود را در رشــته زبان و ادبیات فارسی از دانشــکدهٔ ادبیات دانشگاه مشهد گرفت و ســپس موفق به اخذ درجهٔ دکترا از دانشــگاه «ســن‌ژوزف» لبنان، در رشتهٔ ادبیات عرب شد. مدت‌ها در دبیرستان‌های مشهد به تدریس اشــتغال داشت، تا اینکه پس از انتقال به تهران، ابتدا در پژوهشکدهٔ فرهنــگ به تدریس پرداخت و بعد به‌عنوان محقق در کتابخانهٔ ملی به کار مشغول شد.

خدیوجم ســال‌هایی از عمر خود را به تحقیــق و مطالعــه در کتابخانه‌های دنیا، به‌خصوص کشورهای عربی گذراند و از خود بیش از ۳۰ جلد کتــاب در زمینهٔ تحقیق، تصحیــح و ترجمه به جا گذاشــت. وی از محققان برجســتهٔ آثار **امام محمد غزالی** در ایران بود. عشــق و علاقــه‌اش به غزالی باعث شــد، ۱۵ ســال از عمر خود را صرف تعمیم و ترجمــهٔ «احیاء علوم‌الدین» غزالی کند. ترجمهٔ «رســالهٔ اضحویــه» **ابن‌سینا** کــه در آن شــیخ‌الرئیس مســئلهٔ پیچیدهٔ معاد را بررســی کرده اســت (که رســالهٔ بسیار ذی‌قیمتی اســت) نیز از شاهکارهای خدیوجم اســت در پایان رسالهٔ «اضحویه»، مترجــم بحثی با عنوان «معرفت آخرت» را از «کیمیای سعادت» غزالی آورده است که حیف است مخاطبان مجلهٔ برهان متوسطه ۲ از آن بهره‌مند شوند.

خدیوجم در سال ۱۳۶۵، یعنی سه سال پس از چاپ ســوم ترجمهٔ جبر و مقابله، در مشهد درگذشت و بنا به وصیتش در بقعه‌ای که به آرامگاه غزالی مشــهور است، به خاک سپرده شد.

زندگی‌نامهٔ خوارزمی

محمدبن موسی خوارزمی متولد خوارزم (خیوه کنونی) است. درگذشتهٔ حدود ۲۳۲ق، ریاضی‌دان، منجم، جغرافی‌دان و مورخ ایرانی، یکی از بزرگ‌ترین دانشــمندان مســلمان و بزرگ‌ترین عالم زمان خود بود.

از زندگــی وی اطــلاع چندانی که قابل اعتماد باشــد، در دست نیست. آنچه حتمی است اینکه او از منجمان دربار خلافت **مأمون عباسی** (۲۱۸–۱۹۸ ق) بود. در مقدمهٔ کتاب «جبــر و مقابله»، از مأمون ســخن به میان آورده اســت. آثار خوارزمی در ریاضیات دو کتاب به نام‌های «المختصر فی‌حساب الجبر و المقابله» و کتاب «الجمع و التفریق» است. از خلال مقدمه‌ای که خوارزمی بر کتاب جبر و مقابلهٔ خود نوشــته، خــوی نیک و اخلاق پسندیدهٔ او به خوبی جلوه‌گر است.

در نظر خوارزمی، دانشــمند واقعی تنها برای رسیدن به حقیقت می‌کوشد و در شأن او نیست که برای کسب شهرت و خودنمایی و تحقیر دیگران، بــه کار دانش بپردازد. در واقع خوارزمی با بلندنظری، گشاده‌دســتی و فروتنــی تمام، هدیه‌ای ارزنــده به دنیای بشریت وقف کرده که بر اثر همین بی‌ریایی، سزاوار لقب «بنده‌ای از بندگان خاص خدای رحمان» است.

> «وَ عِبادُالرّحمنِ الّذینَ یَمشوُنَ عَلَی‌الاَرضِ هَوناً وَ اِذا خاطَبَهُمُ الجاهِلوُنَ قالوُا سَلامًا».
>
> **(فرقان / ۶۳)**

تعریف جبر و مقابله

نامی کــه خوارزمی بر کتاب خود نهاده، به مناســبت دو عملی اســت کــه در حل معادلات معمول است: یکی «جبر» و دیگری «مقابلــه». طبق اصطلاحات امــروزی، اولی نقل یک جملهٔ منفی و دومی نقل یک جملهٔ مثبت اســت از یک طــرف معادله به طرف دیگر، بــا تغییر دادن علامــت جمله‌ای که انتقال می‌یابد. برای روشن شدن مطلب، یکی از مسائل را که خوارزمی در کتاب خود آورده است، بیان می‌کنیم:

«اگر بگویی ده را به دو قســمت تقسیم کردم، پس از آن هر قســمت را در خودش ضرب کردم و ســپس حاصل‌ضرب هر دو را جمع کردم، پنجاه و هشت دِرهَم شد.»

این صورت مســئله اســت که به زبان امروزی عدد x را می‌یابیم، به نحوی که:

$$x^2+(10-x)^2=58$$

خوارزمی حل مســئله را چنیــن ارائه می‌کند: «یکی از قسمت‌ها را شیء (منظور x اســت) فرض می‌کنی و دیگری را ده منهای شیء (x-۱۰).» پس از آن ضرب‌ها را توضیح می‌دهــد و معادله را خلاصــه می‌کند که به زبان امروزی چنین می‌شود:

$$2x^2-20x+100=58$$

در ادامه چنین می‌نگارد: «صد به اضافهٔ دو مال ($2x^2+100$) را با بیست شیء ناقص ($-20x$) جبــر می‌کنــی و آن را بر پنجاه و هشت می‌افزایی» که نتیجه به زبان امروزی چنین می‌شود:

$$2x^2+100=58+20x$$

در واقع جملهٔ «$-20x$» را به طرف راست معادله منتقل می‌کند. این همان جبر است که به تعبیری جبران کاستی‌هاست. در ادامه خوارزمی طرفین را نصف می‌کند:

$$x^2+50=29+10x$$

بعــد ادامــه می‌دهد: «ســپس آن را مقابله می‌کنــی، یعنی ۲۹ را از پنجاه کم می‌کنــی.» که به زبان امروزی می‌شــود: $x^2+21=10x$. در واقع عدد ۲۹ از طرفین حذف می‌شــود. به عبارت دیگــر، مقابله، قرار دادن مقادیر مســاوی در برابر هم و حذف مشابهات اســت. توضیح اینکه حل مســئله به اینجا ختم نمی‌شــود و ادامه دارد.

کتاب جبر و مقابلهٔ خوارزمی در یک نگاه

خوارزمی در آغاز کتاب، پس از یاد خدا، سپاسگزاری به سبب نعمت‌هایش، و درود و سلام بر پیشگاه پیامبر خاتم (ص) و خاندانش، فهرست مطالب کتابش را این‌گونه شرح می‌دهد: «مطالب این کتاب شامل محاسباتی است در ارث، وصیت و مقاسمه (= تقسیم کردن اموال مشترک) و امور دیوانی و تجارت و نیز اموری مانند مساحت کردن زمین‌ها و اندازه‌گیری نهرها و هندسه (= نقشه‌کشی).»

در ادامه پس از معرفی عددها در مبنای ده، این‌گونه ادامه می‌دهد: «دریافتم که اعدادی که در **حساب جبر و مقابله** به وجود آن‌ها نیاز است، سه نوع هستند: جذرها، مال‌ها و عدد مفردی که به جذری یا مالی نسبت ندارد.»

منظور خوارزمی از «جذر» همان است که اکنون در علم جبر با حرف «x» به آن اشاره می‌شود و «مال» عبارت است از x^2 (مجذور x) و عدد مفرد، بخشی از معادله است که مستقل از x باشد. خوارزمی در بیان شکل‌های متفاوتی که این سه در ارتباط با هم معادلات را می‌سازند، این‌گونه تقسیم‌بندی می‌کند: «از این اقسام سه‌گانه، برخی با برخی دیگر برابر می‌شوند و آن هنگامی است که بگویی: چند مال با چند جذر برابر است، یا چند مال با عددی مساوی است، یا چند جذر با عددی برابر است، یا مال‌ها و جذرهایی که با عددی برابر می‌شوند، یا مال‌ها و عددی که با جذرهایی برابر می‌شوند و یا جذرها و عددی که با مال‌هایی برابر می‌شود» به زبان امروزی، به ترتیب معادلات

$ax^2+c=bx,\ ax^2+bx=c,\ bx=c,\ ax^2=c,$
$ax^2=bx$ و $bx+c=ax^2$

را بررسی کرده است. به دلیل محدودیت حجم مقاله و با این توضیح که بحث خوارزمی در حل معادلات به عددهای مثبت منحصر است و به جواب‌های منفی و صفر معادلات نمی‌پردازد، به‌طور خلاصه مثالی را از هر مورد به همراه راه‌حل از کتاب انتخاب و ارائه می‌کنیم:

«اما مال‌هایی که با جذرها برابر می‌شوند: مانند آنکه بگویی: مالی با پنج جذر از آن مال برابر است، نتیجه چنین می‌شود که جذر آن مال پنج است و اصل مال بیست‌وپنج که پنج برابر خود می‌باشد. اگر بگویی: یک‌سوم مال برابر است با چهار جذر، پس تمام مال دوازده جذر خواهد بود که صدوچهل‌وچهار است و جذرش دوازده. پس درصورتی که شمارهٔ مال‌ها زیادتر- یا کمتر- از واحد باشند، به مال واحد برگردانده می‌شوند.»

منظور به ترتیب معادله‌های $x^2=5x$ و $\frac{1}{3}x^2=4x$ هستند که به ترتیب به $x=5$ و $x=12$ می‌انجامند.

اما مال‌هایی که با عددی برابر می‌شوند: مانند آنکه بگویی: مالی برابر است با نُه، پس عدد مال نُه است و جذرش سه می‌شود. و اگر بگویی: پنج مال برابر است با هشتاد، پس یک مال برابر است با یک پنجم هشتاد که برابر می‌شود با شانزده و جذرش چهار».

منظور به ترتیب معادلات $x^2=9$ و $5x^2=80$ هستند که به ترتیب به $x=3$ و $x=4$ می‌انجامند.

اما جذرهایی که با عددی برابر می‌شوند: مانند آنکه بگویی: چهار جذر برابر است با بیست. پس یک جذر آن پنج است که مال این جذر بیست‌وپنج می‌شود.»

منظور معادلهٔ $4x=20$ است که به $x=5$ می‌انجامد.

اما مال‌ها و جذرهایی که با عددی برابر می‌شوند: اگر بگویی: یک مال، به اضافهٔ ده جذر از آن مال، با سی‌ونه درهم برابر می‌شود، مقصود آن است که اگر به مالی به اندازهٔ ده جذر از آن مال افزوده شود، مجموع آن می‌شود سی‌ونه.

راه‌حل آن چنین است: «باید جذرها را نصف کنی- مقدار نصف آن در این مسئله پنج می‌شود- و آن نصف را در مانند خودش ضرب کنی، در این صورت حاصل‌ضرب بیست‌وپنج می‌شود. آن‌گاه این عدد را بر سی‌ونه بیفزایی، مجموع شصت و چهار می‌شود. سپس جذر این عدد را می‌گیری، هشت می‌شود. آن‌گاه نیمی از شمارهٔ جذرها را که عبارت باشد از پنج، از آن کم می‌کنی که در نتیجه سه باقی می‌ماند، و همین عدد سه، جذر مال موردنظر است، و آن مال نُه است.»

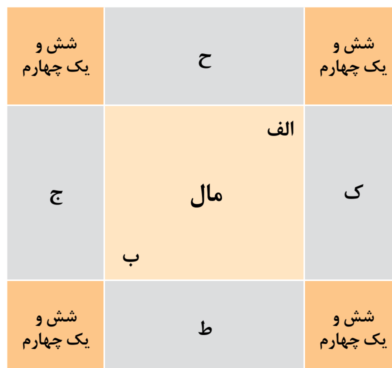
منظور حل معادلهٔ $x^2+10x=39$ است که ما امروزه این روش حل خوارزمی را با نام «مربع کامل کردن» یا همان روش خوارزمی می‌شناسیم و با زبان ریاضی امروزی این‌گونه می‌نویسیم:

$$x^2+10x+\left(\frac{10}{2}\right)^2=39+\left(\frac{10}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow (x+5)^2=64$$
$$\Rightarrow x+5=8 \Rightarrow x=3$$

(همان‌طور که دیده می‌شود، از جذر منفی ۶۴ صرف‌نظر شده است.)

همیــن معادلــه را خوارزمــی به روش هندســی حل کرده اســت (صفحــهٔ ۴۸ از ترجمهٔ جبــر و مقابله) کــه به‌طور خلاصه و با همان شــکل کتاب و همراه با نمادهای امروزی آن را در اینجا می‌آوریم:

ســطح مربع «$\overline{\text{اب}}$» (در شکل مربعی که درون آن «مال» نوشته شده است. خوارزمی با نام‌گــذاری دو رأس مقابــل، چهارضلعی را مشــخص می‌کند.)، همان مالی است که می‌خواهیــم اندازه‌اش را بدانیــم ($x^{۲}$). پس اندازهٔ هر ضلع آن به منزلهٔ جذر اســت (x). حال تعداد جذرها را بر چهار تقسیم می‌کنیم تــا عدد دو و نیم به دســت آید. حال اضلاع مربع را از هر طرف به اندازهٔ دو و نیم امتداد می‌دهیــم. چهار ســطح متســاوی‌الاضلاع (مســتطیل) به نام‌های $\overline{\text{ح}}$ ، $\overline{\text{ک}}$ ، $\overline{\text{جـ}}$ و $\overline{\text{ط}}$ بر مربع افزوده می‌شوند.



همچنیــن در چهار گوشــه چهار مربع هم‌اندازه داریم. سطح مربع‌ها برابر بیست‌وپنج چهارم یا شش و یک چهارم و سطح هر کدام از مستطیل‌ها برابر حاصل‌ضرب دو و نیم در جذر است $(\frac{۵}{۲}x)$.

حال ســطح مربع بزرگ‌تر که پیرامون مربع «$\overline{\text{اب}}$» پدید آمــده، برابر یک مال و ده جذر به اضافهٔ بیســت‌وپنج می‌شــود؛ یعنی $x^{۲}+۱۰x+۲۵$. حال بنا بر صورت مســئله، عبارت $x^{۲}+۱۰x$ برابر ۳۹ اســت. پس سطح مربعی که طول هر ضلــع آن جذر به اضافهٔ پنج اســت ($x+۵$)، برابــر ۶۴ خواهد بود که جذر آن هشت می‌شود. پس مقدار جذر (x) برابر سه می‌شود.

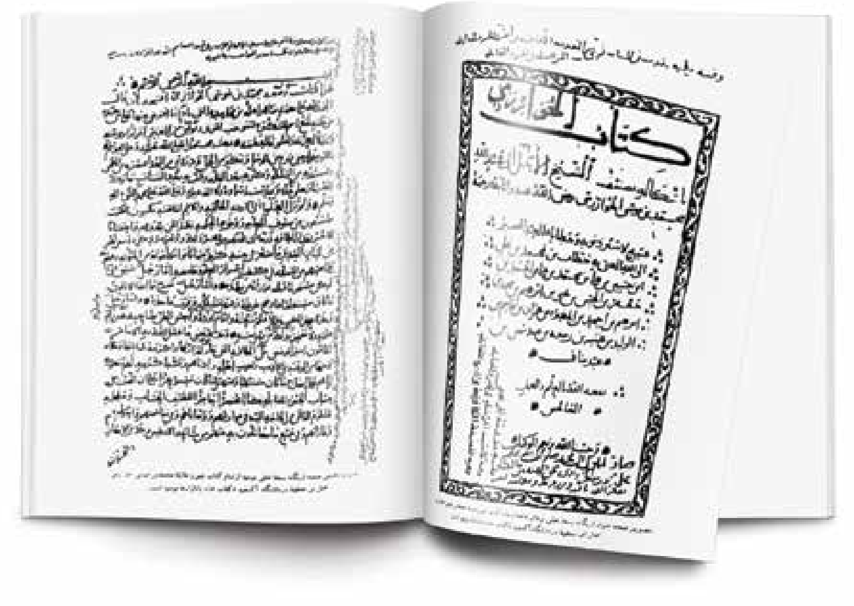
«امــا مال‌ها و عددی که بــا جذرهایی برابر می‌شــوند: مثلاً می‌گویــی: *یک مال به اضافهٔ بیســت‌ویک با ده جذر از آن مال برابر می‌شود*.»

«اما جذرها و عددی که با مال‌هایی برابر می‌شود: مانند آنکه بگویی: *سه جذر به اضافهٔ چهار با یک مال برابر می‌شود*.»

نوبت شــما: نوع‌های پنجم و ششــم به همــراه مثال ارائه شــدند. تبدیل صورت مســئله‌ها به زبان امروزی و حل آن‌ها را به شما، خوانندهٔ محترم وامی‌گذاریم.

خوارزمی پس از بررســی انواع شش‌گانهٔ معــادلات به ضــرب و تقســیم عبارت‌های جبــری و گنــگ و نحوهٔ گویا کــردن آن‌ها می‌پردازد. ســپس در این باب، ۳۴ مســئلهٔ دیگر همــراه با راه‌حل ارائه می‌کند. در ادامهٔ کتاب به ســراغ مسائل مربوط به معادلات و مساحت می‌رود و در پایان، بخشی از کتاب را با عنوان «کتاب‌الوصایا» به حل مسائل مربوط به نحوهٔ تقسیم سهم‌الارث بین وراث متوفی اختصاص می‌دهد.

نامی که خوارزمی بر کتاب خود نهاده، به مناسبت دو علمی است که در حل معادلات معمول است: یکی «جبر» و دیگری «مقابله»



و با همین بحث کتاب را خاتمه می‌دهد.

***

مــا نیــز ایــن مقالــه را در پایــان، با عبارت‌هایی که زنده‌یاد خدیوجم به زیبایی در مقدمــه‌ای که بر ترجمه نوشــته، آورده اســت، زینت می‌دهیم: «اکنون که دوازده قرن از روزگار نگارش کتاب حساب (الجمع والتفریق) و جبر او ســپری شده، می‌بینیم که خورشید بر هیچ سرزمینی نمی‌تابد، مگر آنکه فروشنده در فروشگاه، کدبانو در خانه، صنعتگر در کارگاه، دانشمند در آزمایشگاه، و رزمنــده در آوردگاه، با حســاب هندی او به محاســبه می‌پردازد، و جوانان دانش‌آموز هر شــهر و دیار، رموز جبر و مقابلهٔ او را با عشــق و علاقهٔ فراوان به خاطر می‌سپرند. خداوند محمدبــن موســی خوارزمی را از رحمت بیکــران خود بهــره‌ور گرداند و به ریزه‌خواران خوان گســتردهٔ او سعهٔ صدر و چشم حقیقت‌بین عطا فرماید.»

پی‌نوشت‌ها

1. Muhammad b. Musa al- Khwarazmi
2. Bodleian Library oxford

منبع

خدیوجم، سیدحسین(۱۳۶۳). جبر و مقابلهٔ محمدبن موسی خوارزمی. انتشارات اطلاعات، تهران. چاپ‌سوم.

حسین قاسم دامغانی
دانشجوی کارشناسی مهندسی پزشکی دانشگاه امیرکبیر

اشاره

همیشه با خود فکر می‌کردم که کشف روابط ریاضیاتی کار بسیار سختی است و با پیشرفت‌هایی که در زمینهٔ علوم ریاضی انجام شده است، دیگر جایی برای خلق مطلبی نوین، به‌خصوص برای یک دانش‌آموز، وجود ندارد؛ به‌ویژه به دلیل آنکه مطالبی که تا سطح متوسطه به ما می‌آموزند، در مقابل علم امروز بسیار ابتدایی هستند. در این راه اما قدم برداشتم تا بلکه بتوانم در مسیر افزودن به این علم موفق شوم و به نتایج جالبی رسیدم.

کلیدواژه‌ها واسطه هندسی، واسطه حسابی، اتحاد، مربع کامل

تلاش‌های ناکام، اما آموزنده

در دبستان توجهم به ضرب عددها در ۵ جلب شد. وقتی داریم: ۲۰=۵×۴، رابطهٔ خاصی بین دهگان حاصل و یکان ضریب ۵ وجود دارد و نصف آن است! رقم‌های زوج دیگر را نیز امتحان کردم و از کشف خود بسیار خوش‌حال شدم! به سراغ رقم‌های فرد رفتم و دیدم که درست است که دهگان آن، دقیقاً نصف آن نیست، اما وقتی داریم ۳۵=۵×۷، این معادله هم برقرار است: $۳/۵ = \frac{۷}{۲}$. پس به‌طور کلی نتیجه گرفتم: برای اینکه عدد را سریع‌تر در ۵ ضرب کنم، کافی است اول نصف آن را حساب کنم، سپس آن را در ۱۰ ضرب کنم (چرا که نصف کردن یک عدد از ۵ برابر کردن آن بسیار

ساده‌تر اســـت و ۱۰ برابر کردن هم اصلاً به فکر کردن نیازی ندارد!). اما به زودی متوجه شدم که کمی جلوتر خود کتاب به این موضوع اشاره کرده است!

در دوران راهنمایی با فرمول جمع عددهای پشـــت سر هم آشنا شدم که چنین بود:

$$\sum_{i=۱}^{n} i = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

و به ذهنم خطور کرد که جمع عددهای فرد پشت سر هم چگونه خواهد بود (چـــرا عددهای فرد؟ زیرا جمع عددهای زوج، دو برابر جمع عددهای پشـــت ســـر هم خواهد بود و رابطهٔ جدیدی ندارد.) پس با خودم حساب کردم:

۱+۳=۴

۱+۳+۵=۹

۱+۳+۵+۷=۱۶

...

و با پدیدهٔ جدیدی آشـــنا شدم: جمع آن‌ها عددهای مربع کامل بـــود که البته کتاب جبـــر و احتمال آب پاکـــی را روی دســـتم ریخت که رابطـــه‌ای معروف و چنین است:

$$\sum_{i=۱}^{n} (۲i-۱) = n^۲$$

جرقه‌ای نو

از ســـال اول متوســـطه که با اتحادها آشنا شدم، به دنبال این بودم که اتحـــادی جدید از خودم ارائه بدهم. تا اینکه در ســـال پیش‌دانشگاهی، روزی می‌خواستم به یاد بیاورم که برای هر دو عدد حقیقی مثبت نامســـاوی، واسطهٔ حســـابی آن‌ها بزرگ‌تر است یا واسطهٔ هندسی. پس خواستم برای خودم مثالی بیاورم که البته محاسبهٔ ذهنی آن بســـیار راحت باشـــد، پس بایـــد دو عددی را انتخاب می‌کردم که هم جفتشـــان مربع کامل باشـــند (تا واســـطهٔ هندسی راحت محاسبه شود) و هم اینکه یا جفتشان فرد باشند یا جفتشان زوج (تا واسطهٔ حسابی راحت محاسبه شود). پس ۱ و ۹ را انتخاب کردم و دیدم:

$$\frac{۱+۹}{۲} = ۵,$$
$$\sqrt{۱\times۹} = ۳$$

به یاد آوردم که واســـطهٔ حسابی همیشه بزرگ‌تر خواهد بود، اما چیز دیگری نظر مرا جلب کرد: واســـطهٔ حســـابی و هندسی درست یک واحد قبل و بعد عددی مربع کامل (۴) بودند:

$$۳ \xleftarrow{-۱} ۴ \xrightarrow{+۱} ۵$$

$$\sqrt{(۱)^۲(۳)^۲} \xleftarrow{-(۱)^۲} (۲)^۲ \xrightarrow{+(۱)^۲} \frac{(۱)^۲+(۳)^۲}{۲}$$

$$\sqrt{(۲-۱)^۲(۲+۱)^۲} \xleftarrow{-(۱)^۲} (۲)^۲ \xrightarrow{+(۱)^۲}$$

$$\frac{(۲-۱)^۲+(۲+۱)^۲}{۲}$$

دو عدد ۹ و ۴۹ را هم انتخاب کردم تا ببینم چنین چیزی اتفاق می‌افتد یا خیر:

$$\frac{۹+۴۹}{۲} = ۲۹$$
$$\sqrt{۹\times۴۹} = ۲۱$$

این‌بار نتیجه مرا شـــگفت‌زده کـــرد. زیرا عددهای حاصل‌شـــده، ۴ واحد قبل و بعـــد از مربع کاملی (۲۵) بودند و خود ۴ نیز مربع کامل بود:

$$۲۱ \xleftarrow{-۴} ۲۵ \xrightarrow{+۴} ۲۹$$

$$\sqrt{(۳)^۲(۷)^۲} \xleftarrow{-(۲)^۲} (۵)^۲ \xrightarrow{+(۲)^۲} \frac{(۳)^۲+(۷)^۲}{۲}$$

در مـــورد کمتر بودن از مربع کامل به اتحاد مزدوج رسیدم:

$$y^۲ - x^۲ = (y-x)(y+x)$$

اما برای بیشـــتر بودن از مربع کامل، ســـعی کردم رابطه‌ای میان آن‌ها پیدا کنم و از روی الگوی محاسبات به این اتحاد رسیدم:

$$x^۲ + y^۲ = \frac{(x-y)^۲ + (x+y)^۲}{۲}$$

کـــه در مثـــال اول: $y=۱$ و $x=۲$ و در مثال دوم: $y=۲$ و $x=۵$.

این اتحاد جدیدی نیســـت، اما ســـعی کردم با تعمیم دادن آن، به اتحادی «واقعاً جدید» برســـم. یا به‌عبارت

همیشه با خود فکر می‌کردم با پیشرفت‌هایی که در زمینهٔ علوم ریاضی انجام شده است، دیگر جایی برای خلق مطلبی نوین، به‌خصوص برای یک دانش‌آموز، وجود ندارد!

دیگر، سعی کردم *وسیع‌تر فکر کنم!* پس کوشیدم مخرج کسر معادله را در دل یک متغیر جدید جای بدهم. با جای‌گذاری z به‌جای ۲، قطعاً به یک اتحاد جدید نمی‌رسیم، اما می‌تواند در سه متغیره کردن این اتحاد به ما کمک کند. با جای‌گذاری داریم:

$$x^2+y^2=\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{z}$$
$$\Rightarrow zx^2+zy^2=2x^2+2y^2$$

قاعدتاً اگر z=۲ باشد، شرایط معادله ارضا می‌شود، اما به دنبال حذف این شرایط هستیم. پس باید در ضرایب yها و xها تجدیدنظر کنیم. اما باید در نظر بگیریم که *در نهایت با جای‌گذاری ۲ به جای* **z** *به اتحاد اولیه‌مان برسیم.*

ضریب y^2 در سمت چپ معادله، z است، اما اگر بخواهیم ضرایب y در $(x+y)^2$ و $(x-y)^2$ را به‌وسیلهٔ z تغییر بدهیم، در نهایت ضریب z^2 تولید می‌کنند. پس باید در سمت راست معادله هم این را ایجاد کنیم. از الان به بعد برای ملموس‌تر بودن ضرایب سمت چپ و راست معادله، z مخرج را در دو طرف معادله ضرب می‌کنیم. بعد از آن ضریب y^2 در سمت راست معادله را که ۱ است، با z-۱ جای‌گذاری می‌کنیم تا $z(z-1)$ ایجاد z^2 بکند.

$$z(x^2+(z-1)y^2)=(x-y)^2+(x+y)^2$$
$$zx^2+(z^2-z)y^2=2x^2+2y^2$$

بسیار خب، حال برای اینکه z را وارد سمت راست معادله کنیم، ابتدا همان ضریب y^2 را دستخوش تغییر می‌کنیم. ابتدا در $(y+x)^2$ ضریب y را به z-۱ تبدیل می‌کنیم تا نتایج را مشاهده کنیم:

$$z(x^2+(z-1)y^2)=(x-y)^2+(x+(z-1)y)^2$$
$$zx^2+(z^2-z)y^2=$$
$$2x^2+(1+z^2-2z+1)y^2+(-2+2z-2)xy$$

از آنجا که باید: $z^2-z=1+z^2-2z+1$، پس: z-۱=۱ که باید آن ۱ مناسب را پیدا کنیم تا جای‌گذاری مناسب را انجام دهیم. ضریب $(x-y)^2$، ۱ است و همان ۱، داخل پرانتز ضریب y^2 مشهود است.

پس به‌عنوان تغییر بعدی، ضریب $(x-y)^2$ را به z-۱ تغییر می‌دهیم:

$$z(x^2+(z-1)y^2)=(z-1)(x-y)^2+(x+(z-1)y)^2$$
$$zx^2+(z^2-z)y^2=zx^2+(z-1+z^2-2z+1)y^2$$
$$+(-2z+2+2z-2)xy$$
$$zx^2+(z^2-z)y^2=zx^2+(z^2-z)y$$

حال تمام ضرایب درست سر جای خودشان هستند و شرط z=۲ برای برقراری این معادله برداشته شد.

اکنون اگر بنویسیم:

$$z(x^2+(z-1)y^2)=(z-1)(x-y)^2+(x-(z-1)y^2)$$

آن‌گاه به ازای تمامی مقادیر z (و x و y) این معادله برقرار است. پس این یک *اتحاد* است. از آنجا که z-۱ در این اتحاد بسیار دیده می‌شود، اگر با تغییر متغیر z+۱ $\rightarrow$ z آن را زیباتر کنیم، اتحاد جبری ما به این صورت خواهد بود:

$$(z+1)(x^2+zy^2)=z(x-y)^2+(x+zy)^2$$

به یاد نیز داریم که با جای‌گذاری شرط اولیه‌مان، یعنی z=۱ $\rightarrow$ z=۲ (تغییر متغیرمان را که فراموش نکرده‌اید؟!) به اتحاد اولیه‌مان می‌رسیم:

$$x^2+y^2=\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{2}$$

سخن نهایی

پس آن‌قدر هم کشف روابط ریاضی سخت و دشوار نیست. مهم هم نیست که قبلاً کشف شده‌اند یا خیر یا این خود زیرمجموعهٔ یک اتحاد بسیار جامع‌تر است یا خیر. مهم این است که شما با اندیشهٔ خود به آن رسیده باشید. قطعاً هم تمام روابط جدیدی که در ریاضی کشف می‌شوند و مانند قضیهٔ فیثاغورس و قضیهٔ اویلر، دنیا را تغییر می‌دهند، از همین اندیشه و *وسیع فکر کردن‌ها* شروع می‌شوند. بنابراین از کشف روابط ریاضیاتی ناامید نشوید و به جست‌وجو، کاوش و بازی با متغیرها ادامه دهید!

ریاضی ۱

(پایهٔ دهم رشتهٔ ریاضی و تجربی)

فرخ فرشیان

۱. اگر U مجموعه مرجع باشد و داشته باشیم: $n(U)=40$، $n(A)=20$، $n(B)=22$ و $n(A\cap B)=4$، در این صورت حاصل $n(A'-B)+(B'-A)$ را به‌دست آورید.

۲. ثابت کنید جمله‌های دنبالهٔ $a_n=3^n$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$a_{n+2}-a_{n+1}-6a_n=0$$

۳. یک دنبالهٔ هندسی پیدا کنید که عددهای ۱۲، ۳۲۴ و ۲۶۲۴۴ جمله‌هایی از آن باشند. در ضمن قدر نسبت این دنباله عدد طبیعی است.

۴. سه عددی که مجموعی برابر ۱۳ دارند، یک دنبالهٔ هندسی تشکیل داده‌اند. ولی اگر به این سه عدد به ترتیب عددهای ۲، ۷ و ۸ را اضافه کنیم، سه عدد حاصل یک دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند. این سه عدد را پیدا کنید.

۵. درستی رابطهٔ

$$\frac{1+\tan x+\cot x}{\frac{1}{\cos^2 x}+\tan x}-\frac{\cot x}{\frac{1}{\sin^2 x}+\tan^2 x-\cot^2 x}=\sin x\cos x$$

را ثابت کنید.

۶. اگر بدانیم $\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=a\\ \sin\alpha-\cos\alpha=b\end{cases}$ چه رابطه‌ای بین a و b وجود دارد؟

۷. ثابت کنید کسر $\frac{\sin x+\tan x}{\cos x+\cot x}$ به ازای هر x به جز ($x\neq 0$ و $\frac{\pi}{2}$ و π و $\frac{3\pi}{2}$) همیشه مثبت است.

حسابان ۱

(پایهٔ یازدهم ریاضی)

محمدتقی طاهری تنجانی

۱. کدام‌یک از دو قرارداد زیر سود بیشتری برای یک فرد در ازای ۶۴ روز کاری دارد؟

الف) روزانه به‌صورت ثابت روزی یک میلیون تومان.

ب) روز اول یک ریال، روز دوم دو ریال، روز سوم ۴ ریال و هر روز دو برابر روز قبل دریافت کند.

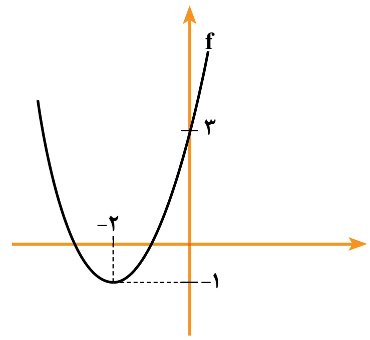
۲. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+2x-4=0$ باشند، حاصل $\alpha^2-2\beta^3+4\beta$ را به‌دست آورید.

۳. مساحت سطح محصور بین نمودار $y=|x-2|+|x+1|$ و خط $y=x+2$ را به‌دست آورید.

۴. نمودار تابع درجهٔ دوم $y=f(x)$ در شکل ۱ داده شده است.

الف) صفرهای تابع f را به‌دست آورید.

ب) معادلهٔ $f^۲(x)-۷f(x)+۶=۰$ را حل کنید.



شکل ۱

۵. نقاطی روی خط $y=۲x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن‌ها تا مبدأ مختصات و نقطهٔ A(۲و۴) برابر ۵ باشد.

۶. دامنهٔ تابع گویای $f(x)=\frac{x+۲}{x^۲+ax+b}$، مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۱\}$ است. مقادیر a و b کدام‌اند؟

۷. اگر $f(-x)+f(۲)=-۴x^۲+x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنید.

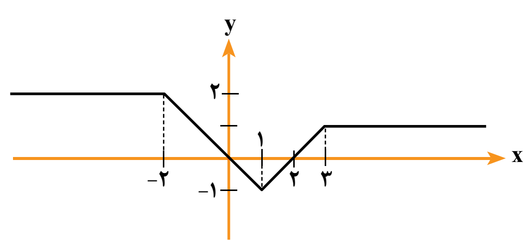
۸. تابع f با دامنهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی به‌صورت $y=\max\{x,x^۲\}$ تعریف شده است. این تابع را به‌صورت یک تابع چندضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

حسابان ۲

(پایهٔ یازدهم ریاضی)

آزاده حسین فرزان

۱. اگر نمودار $y=f(x+۱)$ به صورت شکل ۱ باشد، نمودار تابع $y=f(-۲x+۳)$ در چه بازه‌ای ثابت نیست؟



۲. همهٔ جواب‌های معادلهٔ $۴^{\cos ۲x}+۴^{\cos^۲ x}=۳$ در $\left[\frac{۳}{۴},۱\right]$ را پیدا کنید.

۳. مجموعه جواب‌های معادلهٔ $\sum_{i=۱}^{n}\sin ix=n$، با فرض $n\ge ۳$ را مشخص کنید.

۴. ثابت کنید تابع $f(x)=\sin x^۲$ متناوب نیست.

۵. در تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n، آیا می‌توان گفت که نمودار تابع به ازای $n=۳$ همواره محور xها را قطع می‌کند؟ برای مراتب بالاتر n چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۶. در تقسیم $x^{۱۵}+x^۳+۲x-۱۱$ بر $x+۱$ مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم را مشخص کنید.

هندسهٔ ۳

(پایهٔ دوازدهم ریاضی)

حسین کریمی

۱. با فرض $A=\begin{bmatrix}۳&-۶\\۱&-۲\end{bmatrix}$:

الف) حاصل $A^{۱۳۹۹}$ را به دست آورید.

ب) در ماتریس غیرصفر و غیرهمانی $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، چه شرطی بین درایه‌ها برقرار باشد تا داشته باشیم: $A^n=A$.

۲. با فرض $A=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$، حاصل $A^۲$ را به‌دست آورید. در مورد A^n چه حدسی می‌زنید؟

۳. بافرض $B=\begin{bmatrix}a&b+۳a\\c&d+۳c\end{bmatrix}$، $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}a&b\\c-۴a&d-۴b\end{bmatrix}$ مقادیر $|B|$، $|A|$ و $|C|$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای را حدس می‌زنید.

۴. شرط برقراری خاصیت جابه‌جایی ضرب دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

۵. با فرض $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ نشان دهید:

$(A\times B)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$ آیا $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$ درست است؟

۶. نشان دهید که دستگاه زیر، فاقد جواب منحصربه‌فرد است. معین کنید در چه شرایطی بی‌شمار جواب دارد و در چه شرایطی فاقد جواب است.

$$\begin{cases} 2x-y+3z=a \\ x+2y+z=b \\ 7x+4y+9z=c \end{cases}$$

آمار و احتمال و ریاضیات گسسته

(پایهٔ یازدهم و دوازدهم ریاضی)

حمیدرضا امیری

۱. اگر p گزاره‌ای درست و q ارزش نادرست داشته باشد، و نیز r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $(p\Leftrightarrow q)\Rightarrow r$

ب) $(q\Rightarrow r)\Leftrightarrow p$

ج) $(q\wedge p)\Rightarrow (p\Leftrightarrow r)$

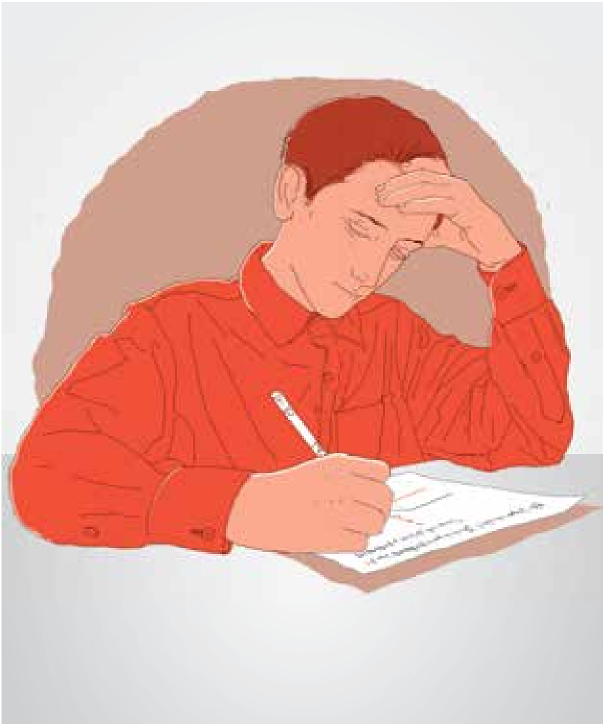
د) $(\sim q\vee r)\Leftrightarrow (\sim p\wedge r)$

۲. با استفاده از قوانین بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید (در صورتی که تساوی برقرار نیست، مثال نقض بزنید).

الف) $A-(B\cap C)=(A-B)\cap(A-C)$

ب) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

ج) $(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$



۳. با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید: $A\times\phi=\phi$

۴. اشکالی در اثبات ادعای زیر وجود دارد. آن را مشخص کنید:

ادعا: هیچ عدد اول و بزرگ‌تر از ۵۰ میلیون وجود ندارد.

حالت اول: اگر $n>50000000$ و زوج باشد، نتیجه می‌گیریم اول نیست. (چرا؟)

حالت دوم: اگر n فرد باشد و بزرگ‌تر از ۵۰ میلیون، در این صورت داریم: $a=\frac{n+1}{2}$ و $b=\frac{n-1}{2}$ و $0<b<a$ هر دو عددهای صحیح هستند (چرا؟) و می‌توان نوشت: $n=a^2-b^2$.

یعنی: $n=(a-b)(a+b)$ که این تجزیه نشان می‌دهد که n اول نیست!

۵. اگر در یک سال، هفدهم تیرماه سه‌شنبه باشد، دوم فروردین همان سال چه روزی از هفته بوده است؟

۶. اگر x عددی فرد باشد، جواب‌های عمومی معادلهٔ هم‌نهشتی زیر را به دست آورید:

$$4x^4+11x^2+13x\overset{8}{\equiv}15$$

۷. با فرض اینکه $a^n\mid b^n\Rightarrow a\mid b$ ثابت کنید:

$$\forall m,n\in N, m>n, a^m\mid b^n\Rightarrow a\mid b$$

حل ریاضی ۱

۱. می‌دانیم: $A-B=A\cap B'$ و $(A\cup B)'=A'\cap B'$. بنابراین:

$A'-B=A'\cap B'=(A\cup B)'$ و همین‌طور $B'-A=B'\cap A'=(A\cup B)'$

پس کافی است $n(A\cup B)$ را به‌دست آوریم و از آن متمم بگیریم.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=20+22-4=34$$

از طرف دیگر: $n((A\cup B)')=n(U-(A\cup B))=40-34=6$

پس: $n(A'-B)+n(B'-A)=6+6=12$

۲. چون داریم: $a_n=3^n$، بنابراین: $a_{n+2}=3^{n+2}$ و $a_{n+1}=3^{n+1}$.

در نتیجه: $3^{n+2}-3^{n+1}-6\times 3^n=3^n(9-3-6)=3^n\times 0=0$

۳. فرض می‌کنیم: $a_1=12$، $a_n=324$، $a_m=26244$.

$$\frac{a_m}{a_n}=r^{m-n}\Rightarrow \frac{26244}{324}=r^{m-n}\Rightarrow r^{m-n}=81$$

چون: $81=3^4=9^2$، دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$1)\quad r^{m-n}=3^4\xrightarrow{r=3}m-n=4\rightarrow\begin{cases}m=7\\n=3\end{cases}$$

$$2)\quad r^{m-n}=9^2\xrightarrow{r=9}m-n=2\rightarrow\begin{cases}m=4\\n=2\end{cases}$$

در حالت اول داریم: $r=3$، $a_1=12$:

۱۲, ۳۶, ۱۰۸, ۳۲۴, ۹۷۲, ۲۹۱۶, ۸۷۴۸, ۲۶۲۴۴

و حالت دوم داریم $r=9$ و $a_1=12$: ۱۲, ۱۰۸, ۹۷۲, ۸۷۴۸, ۷۸۷۳۲

که حالت دوم قابل قبول نیست، زیرا جمله‌های ۳۲۴ و ۲۶۲۴۴ در آن وجود ندارند.

۴. اگر a، b و c آن سه عدد باشند، در این صورت: $a+b+c=13$ و $b^2=a\times c$. از طرف دیگر: $c+8$ و $b+7$ و $a+2$ تشکیل دنباله حسابی می‌دهند؛ یعنی:

$$2(b+7)=a+2+c+8\Rightarrow a-2b+c=4$$

در این صورت یک دستگاه سه‌معادله و سه‌مجهول داریم:

$$\begin{cases}a+b+c=13\\a-2b+c=4\\b^2=a\times c\end{cases}$$

که اگر رابطهٔ ۲ را از ۱ کم کنیم، مقدار $b=3$ به‌دست می‌آید. پس:

$$\begin{cases}a+c=10\\a\times c=9\end{cases}$$

که در این صورت: $\begin{cases}a=1\\c=9\end{cases}$ و یا $\begin{cases}a=9\\c=1\end{cases}$ و دو دنباله به‌صورت ۹, ۳, ۱ و یا ۱, ۳, ۹ به‌دست می‌آید.

۵. می‌دانیم: $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ و $\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x$

بنابراین:

$$\frac{1+\tan x+\cot x}{1+\tan^2 x+\tan x}-\frac{\cot x}{1+\cot^2 x+\tan^2 x-\cot^2 x}$$

می‌دانیم: $\tan x.\cot x=1$، پس در مخرج کسر اول به‌جای عدد ۱ مساوی آن را مطابق فرمول گفته شده قرار می‌دهیم و در کسر دوم صورت و مخرج کسر را در $\tan x$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1+\tan x+\cot x}{\tan x.\cot x+\tan^2 x+\tan x}-\frac{(\cot x)\tan x}{(1+\tan^2 x)\tan x}$$

$$\frac{(1+\tan x+\cot x)}{\tan x(\cot x+\tan x+1)}-\frac{1}{\tan x(1+\tan^2 x)}$$

$$=\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{\tan x(1+\tan^2 x)}$$

$$=\frac{1+\tan^2 x-1}{\tan x(1+\tan^2 x)}=\frac{\tan^2 x}{\tan x(1+\tan^2 x)}$$

$$=\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{\sin x.\cos^2 x}{\cos x}=\sin x.\cos x$$

۶. وقتی می‌گوییم رابطه‌ای بین a و b وجود داشته باشد، به این معناست که نسبت‌های مثلثاتی α وجود نداشته باشد. مانند دستگاه دو معادله و دو مجهول عمل می‌کنیم و مقدار $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را بر حسب a و b به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{ll}1 & \sin\alpha+\cos\alpha=a\\ 2 & \sin\alpha-\cos\alpha=b\\ \hline + & 2\sin\alpha=a+b\Rightarrow\sin\alpha=\frac{a+b}{2}\end{array}$$

$$\xrightarrow{1}\frac{a+b}{2}+\cos\alpha=a$$

$$\cos\alpha = a - \frac{a+b}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a-b}{2}$$

از طرف دیگر می‌دانیم: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$، پس:

$$(\frac{a+b}{2})^2 + (\frac{a-b}{2})^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(a-b)^2}{4} = 1 \xrightarrow{\text{طرفین را در ۴ ضرب می‌کنیم}}$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 4$$

که پس از ساده کردن داریم: $a^2 + b^2 = 2$.

۷.

$$\frac{\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{\sin x\cos x + \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x\sin x + \cos x}{\sin x}}$$

$$= \frac{\sin x(\sin x\cos x + \sin x)}{\cos x(\cos x\sin x + \cos x)}$$

$$= \frac{\sin^2 x(\cos x + 1)}{\cos^2 x(\sin x + 1)} = \tan^2 x\frac{(1+\cos x)}{(1+\sin x)}$$

از طرف دیگر: $-1 \le \cos x \le 1$ و $-1 \le \sin x \le 1$، پس: $1 + \cos x \ge 0$ و $1 + \sin x \ge 0$، یعنی عبارت بالا همواره مثبت است.

حل حسابان ۱

۱. در قرارداد (الف)، فرد برای ۶۴ روز کاری ۶۴۰ میلیون ریال دریافت می‌کند. در قرارداد (ب)، دریافتی‌های فرد دنباله‌ای هندسی با قدر نسبت ۲ و تعداد جملات ۶۴ می‌سازد که مجموع دریافتی‌ها برابر است.

$$\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1$$

عدد 2^{64} عدد بزرگی است. در مقام مقایسه داریم:

$$100 < 2^{10} = 1024$$

$$10^3 < 2^{10} \Rightarrow (10)^3 < 2^{60} \Rightarrow 8 \times 10^{18} < 2^{64}$$

$$\frac{8 \times 10^{18}}{64 \times 10^6} = \frac{1}{8} \times 10^{11} > 10^{10}$$

و این بدان معنی است که در قرارداد (ب)، فرد حداقل ده میلیارد برابر حالت (الف) دستمزد می‌گیرد!

---

۲. طرفین معادلهٔ $x^2 + 2x - 4 = 0$ را در x ضرب می‌کنیم (واضح است که $x \neq 0$).

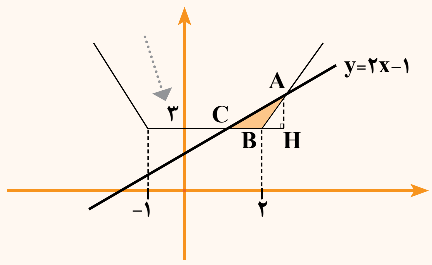
داریم: $x^3 + 2x^2 - 4 = 0$ و از آنجا $x^3 = -2x^2 + 4x$

از آنجا که β یک جواب معادله درجهٔ دوم مفروض است، پس: $\beta^3 = -2\beta^2 + 4\beta$.

حال اگر در رابطهٔ $\alpha^3 - 2\beta^2 + 4\beta$ عبارت β^3 را جایگزین $-2\beta^2 + 4\beta$ کنیم، حاصل عبارت حکم مورد نظر $\alpha^3 + \beta^3$ خواهد بود. با فرض $\alpha + \beta = S = -2$ و $\alpha\beta = p = -4$ داریم:

$$\alpha^3 + \beta^3 = s^3 - 3ps = (-2)^3 - 3(-4)(-2) = -32$$

۳. ریشه‌های عبارت‌های داخل قدر مطلق‌ها را به‌دست می‌آوریم. ضابطهٔ تابع را به‌صورت یک تابع چندضابطه‌ای می‌نویسیم.



$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & x < -1 \\ 3 & -1 \le x \le 2 \\ 2x-1 & x > 2 \end{cases}$$

ناحیهٔ محصور، مثلث ABC در شکل ۲ خواهد بود. کافی است طول قاعدهٔ AB را در ارتفاع وارد بر آن، یعنی CH به‌دست آوریم:

$$A: \begin{cases} y = x+2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow x_A = 1$$

$$B: \begin{cases} y = 2x-1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow x_B = 2$$

$$AB = 1$$

$$C: \begin{cases} y = x+2 \\ y = 3x-1 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 5 \Rightarrow CH = 5 - 3 = 2$$

واحد سطح

$$S_{ABC} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

---

۳. **الف)** فرض کنیم: $f(x) = ax^6 + bx + c$. چون نمودار محور y ها را در $y=3$ قطع کرده است، پس $c=3$. از طرف دیگر، نقطهٔ (۱- و ۲-) رأس سهمی است. پس در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} -1 = 4a - 2b + 2 \Rightarrow 2a - b = -2 \\ \text{طول نقطهٔ رأس سهمی } x = \frac{-b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 2a - 4a = -2 \Rightarrow a = 1, b = 4$$

$$f(1) = x^6 + 4x + 2$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$$

ب)

$$(f(x) - 6)(f(x) - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = 6 \Rightarrow x^6 + 4x + 2 = 6 \Rightarrow x^6 + 4x - 2 = 0 \\ f(x) = 1 \Rightarrow x^6 + 4x + 2 = 1 \Rightarrow x^6 + 4x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} = -2 \pm \sqrt{7} \\ x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

۴. نقطهٔ دلخواه M را روی خط $y = ۲x$ در نظر می‌گیریم. پس $M(a, ۲a)$:
حال باید داشته باشیم: $OM + AM = ۵$

$$\sqrt{(۰-a)^۶ + (۰-۲a)^۶} + \sqrt{(۲-a)^۶ + (۴-۲a)^۶} = ۵$$

$$\sqrt{۵}\,|a| + \sqrt{۵}\,|۲-a| = ۵ \Rightarrow |a| + |۲-a| = \sqrt{۵}$$

پس از حل معادلهٔ قدرمطلقی فوق داریم $a = ۱ \pm \frac{\sqrt{۵}}{۲}$:
در نتیجه:

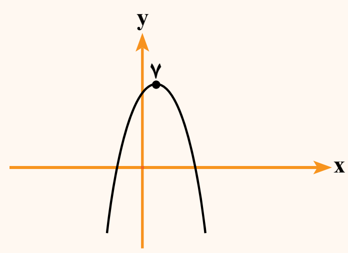
$$M(۱-\frac{\sqrt{۵}}{۲}, ۲-\sqrt{۵}), M'(۱+\frac{\sqrt{۵}}{۲}, ۲+\sqrt{۵})$$

مسئله دو جواب دارد.

۶. مخرج کسر فقط یک ریشه برابر ۱ دارد. پس مخرج مربع کامل است و باید به‌صورت $(x-۱)^۲$ و یا $k(x-۱)^۲$ باشد. از طرف دیگر، ضریب $x^۲$ در مخرج برابر یک است. پس: $k=۱$ و باید داشته باشیم: $x^۶ + ax + b = (x-۱)^۶$.
در نتیجه: $a = ۲$ و $b = ۱$.

۷. اگر x را به x- تبدیل کنیم، داریم: $f(x) + f(۲) = -۴x^۶ + x$.
کافی است f(۲) را محاسبه کنیم. با فرض x=۲ داریم:

$$f(۲) + f(۲) = -۱۶ + ۲ \Rightarrow f(۲) = -۷$$

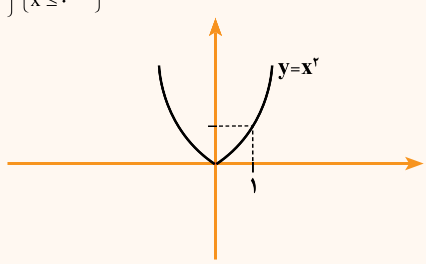


با جایگزینی داریم: $f(x) - ۷ = -۴x^۶ + x$
و در نتیجه $f(x) = -۴x^۶ + x + ۷$

نمودار تابع f یک سهمی به‌صورت شکل ۳ است. (توجه کنید که رأس سهمی نقطهٔ $(\frac{۱}{۸}, \frac{۱۱۳}{۱۶})$ است.)

۸. اگر: $x \geq ۱$ ، آن‌گاه: $x^۶ \geq x$ و اگر: $۰ < x < ۱$ ، آن‌گاه: $x^۶ < x$.
و اگر: $x \leq ۰$ ، آن‌گاه: $x^۶ \geq x$.

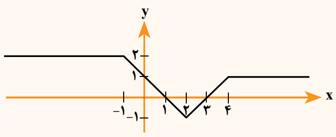
$$f(x) = \begin{cases} x^۶ & x \geq ۱ \\ x & ۰ < x < ۱ \\ x^۶ & x \leq ۰ \end{cases}$$



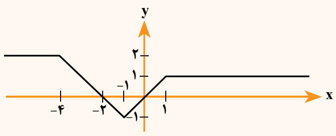
حل حسابان ۲

۱. نمودار تابع $y = f(-۲x+۳)$ را رسم می‌کنیم.
برای رسم تابع $y = f(ax+b)$ براساس نمودار تابع $y = f(x)$، ابتدا نمودار $y = f(x+b)$ و سپس نمودار $f(ax+b)$ را با انبساط یا انقباض طولی رسم می‌کنیم. بنابراین برای رسم تابع $y = f(-۲x+۳)$ راه حل زیر را انجام می‌دهیم:

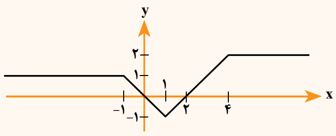
الف) نمودار داده شده را یک به واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x)$ به دست آید.



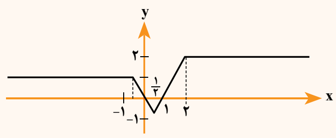
ب) نمودار $y = f(x+۳)$ را با انتقال نمودار f به اندازهٔ ۳ واحد به سمت چپ رسم می‌کنیم.



ج) با قرینه کردن نمودار نسبت به محور yها، نمودار $y = f(-x+۳)$ را مشخص می‌کنیم.



د) به کمک انقباض افقی نمودار، یعنی تقسیم تمام عددهای ۱- و ۲و۴ بر ۲، نمودار $y = f(-۲x+۳)$ مشخص می‌شود.



بنابراین نمودار تابع $y = f(-۲x+۳)$ در بازهٔ $\left[-\frac{۱}{۲}, ۲\right]$ ثابت نیست.

۲. با توجه به رابطهٔ $\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱$:

$$۴^{۲\cos^۲ x - ۱} + ۴^{\cos^۲ x} = ۳ \underset{۴^{\cos^۲ x} = t}{\Rightarrow} \frac{۱}{۴}t^۲ + t - ۳ = ۰ \Rightarrow t_۱ = -۶$$

$$t_۲ = ۲ \Rightarrow ۴^{\cos^۲ x} = -۶ \quad \Rightarrow ۴^{\cos^۲ x} = ۲ \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$

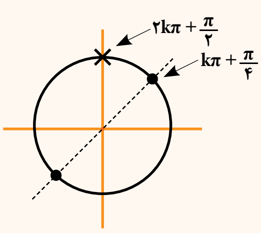
$$\cos^۲ x = \cos^۲ \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$$

بنابراین، $x = \frac{\pi}{۴}$ تنها جواب معادله در $\left[\frac{۳}{۴}, ۱\right]$ است، زیرا: $\frac{۳}{۴} < \frac{\pi}{۴} < ۱$.

۳.

$$\sin x + \sin ۲x + \ldots + \sin nx = n$$

$$\begin{cases} \sin x = ۱ \\ \sin ۲x = ۱ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \sin nx = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \; (۱) \\ x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \; (۲) \\ \circ \\ \circ \\ x = \frac{۲k\pi}{n} + \frac{\pi}{۲n} \end{cases} \xrightarrow[\text{جواب‌ها}]{\text{اشتراک میان}}$$



با توجه به آنکه ۱ و ۲ اشتراک ندارند، پس معادلهٔ فوق جواب ندارد.

۴. با توجه به تعریف تابع متناوب

$$\exists T>0, \forall x\in D_f, x\pm T\in D_f, f(x\pm T)=f(x)$$

باید به دنبال $T>0$ باشیم که معادلهٔ $f(x\pm T)=f(x)$ را برقرار کند:

$$\sin(x\pm T)^2=\sin^2 x^2 \Rightarrow (x\pm t)^2=x^2$$ غقق

$$\Rightarrow x^2+t^2\pm 2tx=x^2 \Rightarrow t^2\pm 2tx=0 \begin{cases} t=0 \\ t\neq 2x=0 \end{cases}$$

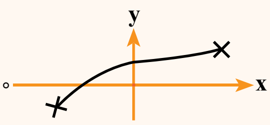
$\Rightarrow t=2x$ یا $t=-2x$

با توجه به آنکه t برحسب x به‌دست می‌آید، نمی‌تواند تابع متناوب باشد. بنابراین این تابع متناوب نیست.

۵. هر تابع به صورت $f(x)=\underset{n}{a}x^n+\underset{n-1}{a}x^{n-1}+....+a_1x+a_0$ را یک چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامند. در حالت $n=3$ داریم:

$$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

با توجه به آنکه دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است و تابع به ازای همهٔ مقادیر حقیقی تعریف می‌شود:



اگر $a_3>0$، مقدار تابع به ازای مقادیر بسیار بزرگ، مثبت و به ازای مقادیر بسیار کوچک منفی است. پس نمودار تابع باید از محور xها عبور کند. برای $a_3<0$ نیز اثبات به همین صورت برقرار است.

همین استدلال را برای هر مقدار n فرد می‌توان در نظر گرفت. (؟)

۶. با توجه به قضیهٔ تقسیم:

$$x^{15}+x^3+2x-11=(x+1)Q(x)+R$$

$$\overset{x=-1}{\Rightarrow} -1-1-2-11=0+R \Rightarrow \underline{R=-15}$$

$$\Rightarrow x^{15}+x^3+2x-11=(x+1)Q(x)-15$$

برای آنکه در یک چندجمله‌ای مجموع ضرایب را مشخص کنیم، باید به جای x مقدار $x=1$ را قرار دهیم. (چرا؟)

بنابراین:

$$\underset{x=1}{\overset{1}{\Rightarrow}} 1+1+2-11=2Q(1)-15 \Rightarrow \underline{Q(1)=4}$$

حل هندسهٔ ۳

۱. $A^2=\begin{bmatrix}3&-6\\1&-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&-6\\1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9-6&-18+12\\3-2&-6+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-6\\1&-2\end{bmatrix}=A$

اگر در $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ داشته باشیم: $\begin{cases}ad=bc\\a+d=1\end{cases}$، $A=$ آنگاه $A^n=A$.

۲. $A^2=\begin{bmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & -2\sin\theta.\cos\theta\\ 2\sin\theta.\cos\theta & -\sin^2\theta+\cos^2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}$

$$A^n=\begin{bmatrix}\cos(n\theta) & -\sin(n\theta)\\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta)\end{bmatrix}$$

۳. $|A|=ad-bc,\ |B|=ad+3ac-bc-3ac=ad-bc$

$|C|=ad-4ab-bc+4ab=ad-bc \Rightarrow |A|=|B|=|C|$

هر گاه در یک ماتریس مربعی، مضربی از یک ستون (سطر) را به ستون (سطر) دیگر اضافه کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

۴. $A\times B=B\times A \Rightarrow \begin{cases}bp=nc\\ n(a-d)=b(m-q)\\ p(a-d)=c(m-q)\end{cases} \Rightarrow \dfrac{b}{n}=\dfrac{c}{p}=\dfrac{a-d}{m-q}$

$b=0 \Leftrightarrow n=0 \quad , \quad \dfrac{c}{p}=\dfrac{a-d}{m-q}$

$c=0 \Leftrightarrow p=0 \quad , \quad \dfrac{b}{n}=\dfrac{a-d}{m-q}$

$a=d \Leftrightarrow m=q \quad , \quad \dfrac{b}{n}=\dfrac{c}{p}$

حل آمار و احتمال و ریاضیات گسسته

۱. الف) چون $p \not\equiv q$، پس: $(p \Leftrightarrow q) \equiv F$ و گزارهٔ داده‌شده به انتفای مقدم همواره درست است.

ب) چون $q \equiv F$، پس: $(q \Rightarrow r) \equiv F$ و چون $p \equiv T$، گزارهٔ داده شده نادرست است.

ج) چون $q \equiv F$، پس: $(q \wedge p) \equiv F$ و لذا گزارهٔ داده‌شده (به انتفای مقدم) همواره درست است.

د) چون $\sim q \equiv T$، پس: $(\sim q \vee r) \equiv T$ و چون: $\sim p \equiv F$، پس: $(\sim p \wedge r) \equiv F$ و گزارهٔ داده‌شده نادرست است.

۲. الف) تساوی داده‌شده برقرار نیست. با مجموعه‌های $A = \{۱, ۲, ..., ۷\}$، $B = \{۳, ۴\}$ و $C = \{۴, ۵, ۶\}$ می‌توانید مثال نقض ارائه کنید.

ب) تساوی برقرار است:

$$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)' =$$
$$(A \cap B) \cap (A' \cup C') = \left[(A \cap B) \cap A'\right] \cup \left[(A \cap B) \cap C'\right]$$
$$= \left[(B \cap A) \cap A'\right] \cup \left[A \cap (B \cap C')\right]$$
$$= \left[B \cap (\underbrace{A \cap A'}_{\phi})\right] \cup \left[A \cap (B - C)\right]$$
$$= \phi \cup \left[A \cap (B - C)\right] = A \cap (B - C)$$

ج) تساوی برقرار است:

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$$
$$= (A \cup B) \cap (A' \cup B')$$
$$= [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B']$$
$$= [(\underbrace{A \cap A'}_{\phi}) \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup (\underbrace{B \cap B'}_{\phi})]$$
$$= (B \cap A') \cup (A \cap B') = (B - A) \cup (A - B)$$
$$= (A - B) \cup (B - A)$$

۳. فرض کنیم: $A \times \phi \neq \phi$، پس داریم: $(x, y) \in A \times \phi$ که بنا به تعریف ضرب دکارتی باید $x \in A$ و $y \in \phi$ که $y \in \phi$ تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۴. در این اثبات همواره داریم: $a - b = \left(\frac{n+۱}{۲}\right) - \left(\frac{n-۱}{۲}\right) = \frac{۲}{۲} = ۱$. لذا عدد n به صورت $n = (a+b) \times ۱$ تجزیه می‌شود که تجزیه‌ای است بدیهی برای هر عدد طبیعی و عددهای اول نیز می‌توانند به صورت $P = P \times ۱$ تجزیه شوند.

۵. ابتدا جدول مربوط به روزهای هفته با فرض متناظر کردن سه‌شنبه با عدد صفر را تشکیل دهیم. پس از محاسبهٔ اختلاف دو روز داده‌شده (هفدهم تیر و دوم فروردین) و پیدا کردن باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۷، از روز سه‌شنبه به عقب برمی‌گردیم تا به روز متناظر با باقی‌ماندهٔ به‌دست‌آمده برسیم.

تیر، خرداد، اردیبهشت، فروردین

اختلاف دو روز = ۲۹ + ۳۱ + ۳۱ + ۱۷ = ۱۰۸

$۱۰۷ \overset{۷}{\equiv} ۳$

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۳	۲	۱	۰	۶	۵	۴

و چون عدد ۳ متناظر با شنبه است، پس دوم فروردین شنبه بوده است.

۶. می‌دانیم مربع هر عدد فرد به این شکل است: $(۸k+۱)$. پس: $x^۲ = ۸k + ۱$ یا $x^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱$.

بنابراین: $x^۴ \overset{۸}{\equiv} ۱$ (طرفین به توان ۲ رسیده) و داریم:

۷.

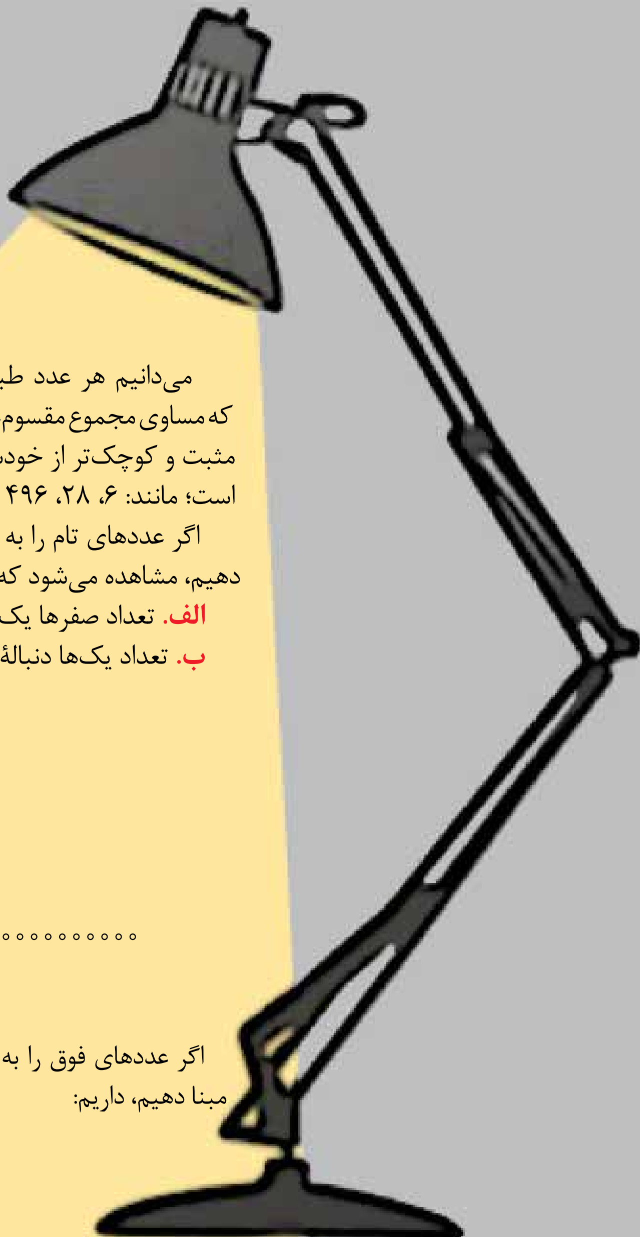
$$a^m \mid b^n \Rightarrow b^n = a^m q \overset{m>n}{=} a^n \times (a^{m-n} q_۱) = a^n q_۲ \Rightarrow a^n \mid b^n \overset{\text{فرض}}{\Rightarrow} a \mid b$$

$$۴x^۴ + ۱۱x^۲ + ۱۳x \overset{۸}{\equiv} ۱۰ \Rightarrow \underbrace{۴ \times ۱ + ۱۱ \times ۱}_{۱۵} + ۱۳x \overset{۸}{\equiv} ۱۰,$$

$$۱۵ \overset{۸}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۳x \overset{۸}{\equiv} ۱۱ \overset{۸}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۱۳x \overset{۸}{\equiv} ۳ - ۱۶ \Rightarrow ۱۳x \overset{۸}{\equiv} -۱۳ \Rightarrow x \overset{۸}{\equiv} -۱$$

علیرضا پوئید
دبیر ریاضی ناحیه ۳ شیراز

روش به دست آوردن عددهای تام از طریق مبنای ۲



می‌دانیم هر عدد طبیعی که مساوی مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت و کوچک‌تر از خودش باشد، تام است؛ مانند: ۶، ۲۸، ۴۹۶ و ... .

اگر عددهای تام را به مبنای ۲ تغییر مبنا دهیم، مشاهده می‌شود که:

الف. تعداد صفرها یک واحد کمتر از یک‌هاست.

ب. تعداد یک‌ها دنبالهٔ عددهای اول است.

۶=۱۱۰

۲۸=۱۱۱۰۰

۴۹۶=۱۱۱۱۱۰۰۰۰

۸۱۲۸=۱۱۱۱۱۱۱۰۰۰۰۰۰

۲۰۹۶۱۲۸=۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

۳۳۵۵۰۳۳۶=۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

۸۵۸۹۸۶۹۰۵۶=۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

۱۳۷۴۳۸۶۹۱۳۲۸=

۳۵۱۸۴۳۶۷۸۹۴۵۲۸=

اگر عددهای فوق را به ترتیب از مبنای ۲ به‌صورت زیر به مبنای ۱۰ تغییر مبنا دهیم، داریم:

۶=۲×۳=$(۲^{۱})(۲^{۲}-۱)$= **جملهٔ اول**

۲۸=۴×۷=$(۲^{۲})(۲^{۳}-۱)$= **جملهٔ دوم**

۴۹۶=۱۶×۳۱=$(۲^{۴})(۲^{۵}-۱)$= **جملهٔ سوم**

عدد $(۲^{n}-۱)$ اول است $(۲^{n-۱})(۲^{n}-۱)$= **جملهٔ عمومی**

سؤال: آیا تمامی عددهای تام به ترتیب به این روش قابل تولید هستند؟

گام دوم انقلاب اسلامی

THE SECOND PHASE OF
THE ISLAMIC REVOLUTION