وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

برهان ریاضی

رشد
۱۱۸
دورهٔ سی‌ام
شمارهٔ ۲
زمستان ۱۳۹۹
۴۸ صفحه
۷۵۰۰۰ ریال

ISSN: 1735-4951

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵

روش نقطهٔ اکسترِما (روش ابتکاری حل معادلهٔ درجهٔ دوم) ■ چیستی فلسفهٔ ریاضیات به زبان ساده
هر چند ساعت یک قرص بخوریم؟! ■ دورهمی ریاضی (خاستگاه تدوین منطق) ■ هندسهٔ «کاغذ» و «تا»

ابن سینا

جعفر زیدی
دبیر ریاضی و
کارشناس ارشد
تاریخ علم

ابوعلی حسین بن عبدالله بن سینا، ملقب به «شرف‌الملک»، «حجة‌الحق» و «شیخ‌الرئیس»، در سال ۳۷۰ ق در قریهٔ «افشنه» در بخارا متولد شد و در سال ۴۲۸ قمری در همدان وفات یافت. سرگذشت ۳۰ سال اول زندگی‌اش را خودش، و ادامهٔ آن را شاگردش، _عبدالواحد ابو عبید جوزجانی_ نوشته است.

ابن‌سینا طبیب و فیلسوف است. او در فنون مختلف و متنوع آثار فراوانی نوشته و توجهش به ریاضیات، بیشتر از جنبهٔ فلسفی بوده است. مهم‌ترین اثر فلسفی ابن‌سینا کتاب «شفا» است که مجموعهٔ ارزشمندی متشکل از چهار بخش است:

۱. **منطق:** که به ارغنون ارسطو مشابهت فراوان دارد.
۲. **طبیعیات:** که شامل مباحث فیزیکی است.
۳. **ریاضیات:** که در چهار موضوع هندسه، حساب، موسیقی، و هیئت است.
۴. **مابعد الطبیعه یا الهیات:** شاخه‌ای از فلسفه است که به پژوهش دربارهٔ چیستی و کُنه وجود، زندگی و جهان به‌عنوان یک کل می‌پردازند.

ابن‌سینا در موضوع هندسه، «مختصر اصول اقلیدس» را در کتاب شفا قرار داده است. از آثار دیگر هندسه ابن‌سینا می‌توان به رساله فی تحقیق الزاویه اشاره کرد که به نوشتهٔ آقای _ابوالقاسم قربانی_، در کتاب «زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان اسلامی» این رساله با عنوان «رساله فی الزاویه الی ابی سهل المسیحی» در کتابخانهٔ دانشگاه تهران موجود است. همچنین، بخش هفتم کتاب «نجات» به هندسه اختصاص دارد.

بخش حساب مبحث ریاضیات در شفا شامل چهار مقاله است: خواص العدد؛ احوال العدد من حیث اضافته الی غیره؛ احوال العدد من حیث کیفیة تألیفه من الوحدانیات؛ المتوالیات العشر. همچنین بخش هشتم کتاب نجات در علم حساب است.

فن سوم ریاضیات شفا در علم موسیقی و شامل شش مقاله است. او در فصل اول از مقالهٔ اول، موسیقی را بخشی از ریاضیات دانسته است.

بخش چهارم ریاضیات شفا در موضوع علم هیئت است که بنا به گفتهٔ ابن‌سینا شامل مختصری از «المجسطی» _بطلمیوس_ و رساله‌ای از خود ابن‌سیناست.

***

دیگر آثار ابن‌سینا در هیئت عبارت‌اند از:

۱. بخش نهم کتاب النجاة؛
۲. تحریر المجسطی؛
۳. علة قیام‌الارض فی حیّزها یا قیام‌الارض فی وسط‌السماء؛
۴. تفسیر السماء و العالم. این اثر موجود نیست، ولی در مقدمهٔ «قیام الارض فی وسط السماء» از آن یاد شده است؛
۵. مقاله فی کیفیة الرصد و مطابقة مع‌العلم الطبیعی؛
۶. کتاب الارصاد الکلیه، که ابوعبید جوزجانی در کتاب «مختصر اریثما طیقی» از آن نام برده است؛
۷. مقاله فی خواص خط الاستواء؛
۸. معرفة ترکیب الافلاک که ابوعبید جوزجانی در «مختصر اریثما طیقی» از آن یاد کرده است؛
۹. مقاله فی الطریق الذی آثره علی سائر الطرق فی اتخاذ الإلات الرصدیه که نسخه‌ای از آن در لیدن موجود است.

***

آثار ابن‌سینا در این علوم طبیعی عبارت‌اند از:

۱. الإثار العلویه یا اسباب الإثار العلویه؛
۲. مقالهٔ اول فن پنجم طبیعیات شفا دربارهٔ ژئوفیزیک، و مقالهٔ دوم دربارهٔ هواشناسی و آثار جوی است.

***

برخی دیگر از آثار ابن‌سینا به شرح زیرند:

* **دانش‌نامهٔ علائی:** به زبان فارسی در پنج دانش است: منطق، طبیعیات، هیئت، موسیقی و آنچه بیرون طبیعت است.
* **معیار العقول:** دربارهٔ جرثقیل (بالابر) و منسوب به ابن‌سیناست که در ایران با مقدمهٔ _جلال‌الدین همایی_ به چاپ رسیده است.
* **نجات:** از مشهورترین آثار فلسفی که در واقع چکیده‌ای از کتاب شفا، دیگر اثر کامل فلسفی او به شمار می‌آید. نام اصلی این کتاب «النجات من الغرق فی بحر الضلالات»، به معنی «رهایی از افتادن در دریای گمراهی‌ها» است.

منابع
۱. قربانی، ابوالقاسم (۱۳۷۹). زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ پنجم.
۲. گلیپسی، چارلز کلستون (۱۳۹۵). زندگی‌نامهٔ دانشمندان اسلامی. ترجمهٔ احمد بیرشک و دیگران. انتشارات علمی فرهنگی. تهران.
۳. دایرة‌المعارف بزرگ اسلامی، ذیل مدخل «ابن‌سینا»

رشد
برهان
ریاضی
فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

- دورهٔ سی‌ام
- شمارهٔ پی‌درپی ۱۱۸
- زمستان ۱۳۹۹
- شمارهٔ ۲
- ۴۸ صفحه
- ۷۵۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

اللهم صل علی محمد و آل محمد

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

مدیرمسئول: محمدابراهیم محمدی
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: میرشهرام صدر
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: آذر احمدی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
رایانامه:
borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
weblog.roshdmag.ir/borhanmoteva-sete2
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵
نشانی دفتر مجله:
تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶
تلفن دفتر مجله:
۹-۰۲۱-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴)
نمابر مجله:
۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶
صندوق‌پستی دفتر مجله:
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
صندوق پستی امور مشترکین:
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ ـ ۸۸۸۶۷۳۰۸
چاپ و توزیع: شرکت افست

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
● نگارش مقاله‌های کمک‌درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲ ● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

- مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید.
- در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان ۲:

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

۱۰ دستورالعمل برای معلمان و آموزشگران

به‌خصوص معلمان ریاضی

جرج پولیا[1] که از آموزشگران بنام در ریاضی است و دو کتاب ارزشمند وی به نام‌های «چگونه مسئله حل کنیم» و «خلاقیت‌های ریاضی» که به‌ترتیب توسط مرحوم **احمد آرام** و مرحوم **پرویز شهریاری** ترجمه شده‌اند، ۱۰ دستورالعمل برای معلمان و آموزشگران، به‌خصوص معلمان ریاضی دارد که شاید بتوان از هر توصیه و دستورالعمل، توصیه‌ای هم برای شما دانش‌آموزان نتیجه گرفت.

در ادامه، ۵ دستور از این ۱۰ دستور را به اختصار می‌نویسم و زیر هرکدام نتیجهٔ مربوط به شما دانش‌آموزان را ارائه می‌کنم. ان‌شاءالله مفید باشد و از آن بهره ببرید. در ضمن از هر یک از ۵ دستور دیگر، هر نتیجه‌ای را که می‌توانید استخراج کنید، برای ما بنویسید و به آدرس مجله بفرستید:

۱. **به موضوع درس خود علاقه‌مند باشید.**
- به درس ریاضی از طریق مطالعهٔ تاریخ ریاضی و کاربردهای آن علاقه‌مند شوید و با اشتیاق به یادگیری ریاضی بپردازید.

۲. **بر مادهٔ درسی خود مسلط باشید.**
- بر موضوع‌ها و مواد درسی ریاضی، مانند جبر، مثلثات و هندسه، و رابطهٔ آن‌ها با هم، تسلط داشته باشید و هر مبحث و قضیه را با دلیل و کامل یاد بگیرید.

۳. **بهترین روش یاد دادن را با استفاده از تجربهٔ شخصی خودتان به دست آورید.**
- بهترین روش مطالعه و یادگیری روشی است که خودتان با توجه به شناختی که از خودتان دارید و محدودیت‌های موجود که از آن‌ها آگاه هستید، به دست آورده‌اید.

۴. **تنها به یاد دادن مطالب قناعت نکنید. بکوشید تحصیل مهارت و عادت به کار منظم را در دانش‌آموزان تقویت کنید.**
- سعی کنید از آنچه می‌آموزید، حتی‌الامکان استفاده کنید. مهارت حل مسئله یکی از بهترین هدف‌های آموزش ریاضی، و نظم و ترتیب از ویژگی‌های بارز ریاضی است.

۵. **به چهرهٔ شاگردان خود نگاه کنید تا متوجه انتظاراتشان شوید و دشواری‌های آن‌ها را کشف کنید.**
- هنگام تدریس معلم، تمرکز داشته باشید و سراپا گوش و همواره آمادهٔ پاسخ‌گویی به سؤالات معلم باشید. سعی کنید در کلاس پرسشگر خوبی باشید.

۶. **بکوشید تا حدس زدن و پیش‌بینی‌کردن را به دانش‌آموزان بیاموزید.**

۷. **طریقهٔ اثبات کردن را به دانش‌آموزان بیاموزید.**

۸. **در مسئله‌هایی که مطرح می‌شوند، چیزی را جست‌وجو کنید که برای حل مسائل دیگر مفیدند.**

۹. **حل مسئله‌ها را بلافاصله مطرح نکنید. بگذارید دانش‌آموزان حداکثر تلاش خود را برای یافتن راه‌حل‌ها به‌کار ببرند.**

۱۰. **با راهنمایی‌های خود، دانش‌آموزان را هدایت کنید، اما هیچ‌گاه عقیدهٔ خود را به آن‌ها تحمیل نکنید.**

مؤید و پیروز باشید ـ سردبیر

1. George Polya

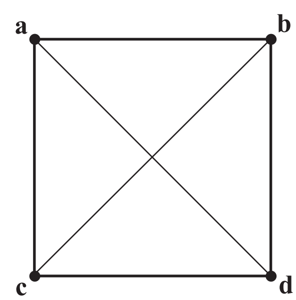
لطافت امیری
دانشجوی دکتری ریاضی محض دانشگاه تربیت‌مدرس

مجموعهٔ احاطه‌گر و کاربرد آن در رنگ‌آمیزی گراف

تعریف مجموعهٔ احاطه‌گـــر: زیرمجموعهٔ D از مجموعهٔ رأس‌های گـــراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم، هر گاه هر رأس از گراف، یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رأس‌های D مجاور باشد.

تعریـــف مجموعهٔ احاطه‌گـــر مینیمم و عدد احاطه‌گری: بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارنـــد، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱. عدد احاطه‌گری گراف زیر را بیابید.



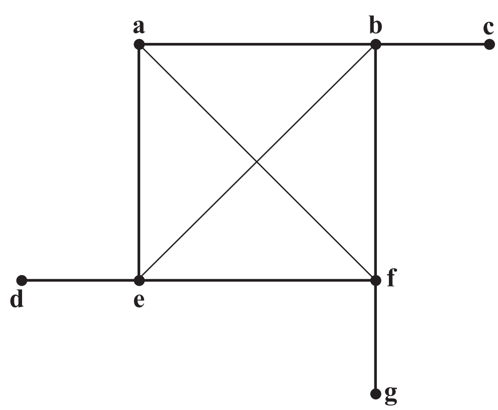
شکل ۱. گراف $K_۴$

حل: همان‌طور که در تمرینـــات پایان فصل کتاب درســـی محاســـبه کردید، گراف‌های کامل دارای عدد احاطه‌گری ۱ هستند؛ یعنی: $\gamma(K_n)=۱$. چون گراف بالا یک گراف کامل با ۴ رأس است، پس: $\gamma(K_۴)=۱$.

نکته: اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \le \gamma(G)$$

مثال ۲. عدد احاطه‌گری گراف زیر را بیابید.



شکل ۲. گراف $G_۱$

حل: با توجه به شکل ۲ داریم: $n=۷$ و $\Delta=۴$، و با استفاده از نکته داریم:

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil = \left\lceil \frac{۷}{۵} \right\rceil = ۲ \le \gamma(G_۱)$$

بنابراین مجموعه احاطه‌گر گراف $G_۱$ دارای حداقل دو رأس است. در ادامه نشان می‌دهیم که دو رأس برای احاطه‌کردن تمام رأس‌های $G_۱$ کافی نیست.

برای احاطه کردن رأس c باید b یا c در $\gamma(G_1)$ باشد. چون رأس b با رأس‌های بیشتری مجاور است و در نتیجه رأس‌های بیشتری را احاطه می‌کند، رأس b را برای بودن در $\gamma(G_1)$ انتخاب می‌کنیم.

اکنون رأس‌های g و d احاطه نشده‌اند. برای احاطه کردن d باید e یا d در $\gamma(G_1)$ باشد. مشابه استدلال بالا e را انتخاب می‌کنیم.

همچنان، رأس g احاطه نشده است و برای احاطه شدن باید g یا f در $\gamma(G_1)$ باشند. در این حالت تفاوتی بین انتخاب g یا f نیست و ما g را انتخاب می‌کنیم.

پس $\{b,e,g\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است. در نتیجه: $\gamma(G_1)=۳$.

اشاره:

به گراف‌هایی مانند گراف G_1 که رأس‌های آن قابل افراز به یک گراف کامل و یک مجموعه از رأس‌هایی است که با رأس‌های گراف کامل مجاورند، «گراف جدایی‌پذیر» گفته می‌شود.

مفاهیم سادهٔ مجموعهٔ احاطه‌گر و عدد احاطه‌گری در مسائل و مفاهیم پیچیده و سطوح بالای گراف نقش اساسی و کاربردی دارند. از مهم‌ترین کاربردهای عدد احاطه‌گری تعیین کران‌های متفاوت برای عدد رنگی در رنگ‌آمیزی‌های مختلف گراف است. برای آشنایی بیشتر شما ابتدا مفاهیم اولیهٔ رنگ‌آمیزی گراف را بیان می‌کنیم.

در مبحث رنگ‌آمیزی گراف دو نوع رنگ‌آمیزی داریم: «رنگ‌آمیزی رأسی» و «رنگ‌آمیزی یالی». در این مقاله به تعریف رنگ‌آمیزی رأسی می‌پردازیم.

تعریف: رنگ‌آمیزی رأسی معتبر یک گراف، آن‌گونه رنگ‌آمیزی است که هیچ دو رأس مجاوری رنگ یکسانی نداشته باشند. اگر به دو رأس مجاور رنگ یکسان بدهیم، رنگ‌آمیزی ما دیگر معتبر نخواهد بود.

تعریف: رنگ‌آمیزی معتبر C را که در آن از K رنگ استفاده شده است، یک K- رنگ‌آمیزی (معتبر) می‌نامیم. زیرمجموعه‌ای از رأس‌ها که با یک رنگ، رنگ‌آمیزی شده‌اند، یک کلاس رنگی نامیده می‌شوند.

تعریف: کمترین تعداد رنگ‌ها از بین تمام رنگ‌آمیزی‌های معتبر G، عدد رنگی G است که با $X(G)$ نشان داده می‌شود. به گرافی که یک k رنگ‌آمیزی معتبر را می‌پذیرد. k - رنگ‌پذیر گفته می‌شود و اگر عدد رنگی آن دقیقاً k باشد، به آن k- رنگی گفته می‌شود.

مثال ۳. عدد رنگی گراف داده شده در مثال۱ را بیابید.

حل: اگر به رأس a رنگ شماره یک را بدهیم، چون رأس a با تمام رأس‌ها مجاور است، بقیهٔ رأس‌ها باید رنگ متفاوتی بگیرند تا رنگ‌آمیزی ما معتبر باشد به همین ترتیب، رأس b رنگ شماره دو و رأس c رنگ شمارهٔ سه و رأس d رنگ شمارهٔ چهار را می‌گیرد. بنابراین، تعداد رنگ‌های مورد نیاز ما ۴ رنگ است و این تعداد رنگ، کمترین تعداد است. لذا: $X(K_۴)=۴$.

به‌طور کلی، عدد رنگی K_nها برابر با n است، چون تمام رأس‌ها با هم مجاور هستند و هر رأس باید رنگ متمایزی بگیرد.

مثال ۴. عدد رنگی گراف داده شده در مثال ۲ را بیابید.

حل: اگر رأس a رنگ شمارهٔ یک را بگیرد، رأس‌های f، b و e که با a مجاورند، باید رنگ‌های متفاوتی بگیرند. بنابراین به b رنگ شمارهٔ۲ می‌دهیم و چون b با f، e و c مجاور است، این سه رأس باید رنگ‌های متفاوتی بگیرند.

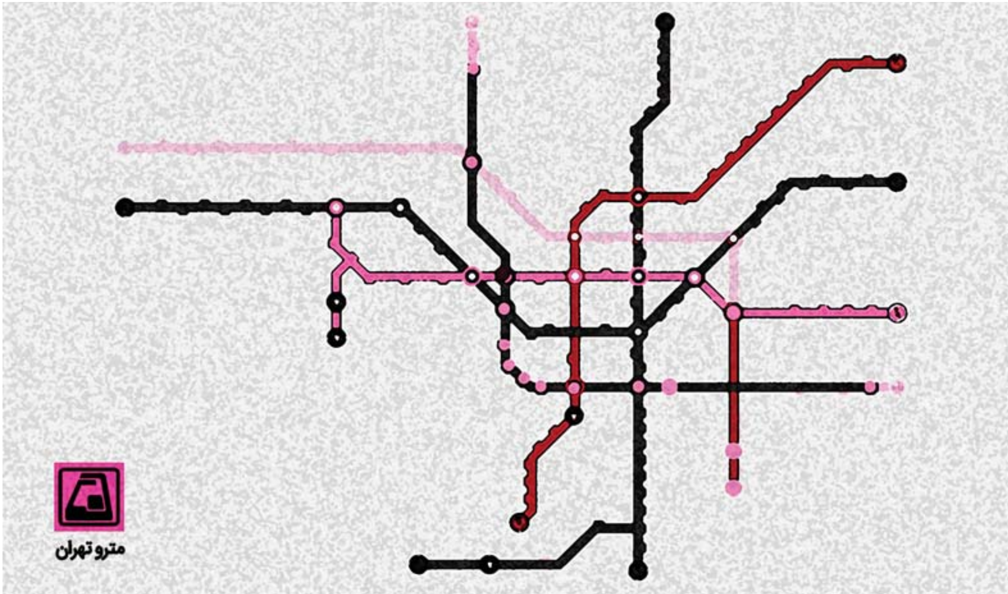
رأس c می‌تواند رنگ شماره یک را بگیرد، چون با a مجاور نیست.

رأس f رنگ شمارهٔ یک و دو را نمی‌تواند بگیرد، چون با a و b مجاور است. پس رأس f رنگ شمارهٔ ۳ را می‌گیرد. رأس‌های g و e با f مجاورند و باید رنگی متفاوت با رنگ شمارهٔ ۳ بگیرند.

رأس g فقط با f مجاور است و به جز رنگ سه می‌تواند به دلخواه رنگ یک یا دو را بگیرد. ما رنگ دو را به g می‌دهیم.

چون رأس e با b، f و c مجاور است، باید رنگی متمایز بگیرد. بنابراین رنگ شمارهٔ چهار را به e می‌دهیم.

رأس d چون با e مجاور است، به جز رنگ شمارهٔ ۴ می‌تواند به دلخواه رنگ یک، دو یا سه را بگیرد. ما رنگ



یک را به d می‌دهیم.

بنابراین: $X(G_1)=4$

کلاس رنگیِ رنگ شمارهٔ یک:	$\{a,c,d\}$
کلاس رنگیِ رنگ شمارهٔ دو:	$\{b,g\}$
کلاس رنگیِ رنگ شمارهٔ سه:	$\{f\}$
کلاس رنگیِ رنگ شمارهٔ چهار:	$\{e\}$

اکنـــون به دو کاربرد از چندیـــن کاربرد $\gamma(G)$، در یافتن کران برای $X(G)$ اشـــاره می‌کنیم که در مقالات معتبر به اثبات رسیده‌اند:

رابطهٔ ۱ $\max\{\gamma(G),X(G)\}\le\gamma(G)+x(G)$

در گراف شکل ۱، یعنی K_4 به دست آوردیم:

$\gamma(K_4)=1 \quad , \quad X(K_4)=4$

بنابراین: $\max\{\gamma(K_4),X(K_4)\}=4$ و رابطهٔ ۱ برای گراف k_4 برقرار است.

$$\max\{\gamma(K_4),X(K_4)\}=4\le\gamma(K_4)+X(K_4)=5$$
$$\Rightarrow 4\le 5$$

در گراف شکل ۲، یعنی G_1، به دست آوردیم:

$\gamma(G_1)=3 \quad , \quad X(G_1)=4$

بنابراین: $\max\{\gamma(G_1),X(G_1)\}=4$ و رابطهٔ ۱ برای گراف G_1 برقرار است.

$$\max\{\gamma(G_1),X(G_1)\}=4\le\gamma(G_1)+X(G_1)=7$$
$$\Rightarrow 4\le 7$$

رابطهٔ ۲: اگر n تعداد رأس‌های گراف G باشد، داریم:

$$\gamma(G)X(G)\le n^2/4$$

در گراف شکل ۱ داریم:

$$\gamma(K_4)=1, X(K_4)=4, n=4$$

بنابراین:

$$1\times 4\le\frac{(4)^2}{4}\Rightarrow 4\le 4$$

رابطهٔ ۲ برای K_4 برقرار است.

در گراف شکل ۲ داریم:

$$\gamma(G_1)=3, X(G_1)=4, n=7$$

بنابراین:

$$4\times 3\le\frac{(7^2)}{4}\Rightarrow 12\le 12/25$$

رابطهٔ ۲ برای G_1 نیز برقرار است.

منابع

1. Relation between the lower domination parameters and the chromatic number of a graph (Mustapha Chellali, Lutz Volkmann)
2. Dominated colorings of graphs (Housin Boumediene Merouane, Mohammad Haddad, Mustapha Chellali, Hamamache Kheddouci

حمیدرضا امیری

چیستی فلسفهٔ ریاضیات به زبان ساده

چکیده

هر علمی از علوم نظری یا علوم کاربردی، از جمله ریاضیات، فلسفه‌ای دارد که برای آشنایی با آن، ابتدا می‌باید تعریفی یا حداقل تعبیری و شناختی مختصر از خود آن علم، یعنی ریاضیات داشته باشیم.

«ریاضیات علمی است که دربارهٔ عددها، شکل‌ها، مقدارها، ویژگی‌ها و رابطه‌های بین آن‌ها بحث می‌کند.»

تحقیق، تفحص و تفکر دربارهٔ عددها، شکل‌ها، مقدارها، رقم‌ها، نسبت‌ها و رابطه‌های بین آن‌ها، قدمت چندین‌هزارساله دارد و به چینی‌ها، هندی‌ها، مصری‌ها و ایرانی‌ها برمی‌گردد. از همان زمان‌ها و در بین ریاضی‌دانان این ملت‌ها و در کنار پرسش‌هایی پیرامون عددها، شکل‌ها و مقدارها، همواره سؤال‌های دیگری ذهن‌های آن‌ها را به خود مشغول می‌کرد که رابطهٔ شفاف و مستقیمی با خود ریاضیات و فعالیت ریاضی آن‌ها نداشت؛ اگرچه از جنبه‌هایی کاملاً به علم ریاضی و بحث‌های مربوط به آن وصل می‌شد.

ریاضی‌دانان، در ریاضی ورزیدن خود، به عددها، انواع آن‌ها و رابطه‌های بین آن‌ها، همچون جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ... و یا به شکل‌های هندسی، ویژگی‌های هر یک از شکل‌ها و شباهت‌ها و تفاوت‌های بین شکل‌ها می‌اندیشند و پرسش‌هایی مطرح می‌کنند. اما در کنار این پرسش‌ها، پرسش‌های از نوع دیگری نیز برای آن‌ها مطرح می‌شوند؛ پرسش‌هایی از این قبیل:

- عددها چه موجوداتی هستند؟
- آیا عددها و شکل‌ها در خارج از ذهن ما وجود دارند؟
- آیا رابطه‌های بین عددها صرفاً قراردادی بیش نیستند؟
- ریاضیات از کجا آمده است؟
- آیا روش‌های اثبات در ریاضیات از یک پایه و اعتبار منطقی برخوردارند؟
- آیا...

بنابراین، ریاضی‌دان‌ها همواره با دو دسته پرسش روبه‌رو بوده‌اند:

دستهٔ اول، پرسش‌های مربوط به خود مبحث‌ها و موضوع‌های ریاضی؛ مانند: «آیا مجموعهٔ عددهای اول متناهی است؟»

دستهٔ دوم، مربوط به چیستی‌ها و خاستگاه‌های ریاضیات است.

پرســـش‌های دســـتهٔ دوم در واقع از بیرون دنیای ریاضـــی به آن نـــگاه می‌کنند. گویـــی «ریاضیات را در پیشـــگاه عقل خود قرار می‌دهیـــم و از بیرون به مبانی، مفاهیم، قضایا و استدلال‌های آن می‌نگریم.» پرسش‌های دستهٔ اول مربوط به ریاضیات، و پرسش‌های دستهٔ دوم مربوط به «فلسفهٔ ریاضیات» می‌شوند.

در فلسفهٔ ریاضی به این قبیل سؤال‌ها می‌پردازند:

- رابطهٔ ریاضیات با منطق چیست؟
- آیـــا مفاهیـــم ریاضی در خارج از ذهـــن ما وجود مستقل دارند؟
- ماهیت وجودی عددها و شکل‌های ریاضی چیست؟
- چـــه رابطه‌ای بین ریاضـــی و علوم دیگر، همچون فیزیک، شـــیمی، زیست‌شناسی، نجوم و ... وجود دارد؟
- مـــلاک صدق و کذب در ریاضی و قضایای ریاضی چیست؟
- آیـــا اســـتدلال‌های ریاضـــی از ارزش منطقـــی برخوردارند؟
- آیا مفهوم‌ها و قضیه‌های ریاضی بامعنی هستند؟
- آیا قضیه‌ها و اصل‌های ریاضی سودمند هستند؟
- و ...

برای پاسخ دادن به این سؤال‌ها ابتدا باید زاویهٔ نگاه و به عبـــارت دیگر، مکتب فکری و اندیشـــه‌ای خود را مشـــخص کنیم. دقیقاً همین سؤال‌ها و پاسخ به آن‌ها در طول تاریخ باعث ظهور و رشد دیدگاه‌ها و مکتب‌های مختلف فکری شده‌اند. هر یک از این مکتب‌ها، بنابر نوع نگاه، جهان‌بینی و پیش‌فرض‌های خودشان، کوشیده‌اند به این سؤال‌ها پاسخ دهند.

مثالی از جنس ریاضی می‌زنم تا این بحث برای شما کمی روشن‌تر شود و بتوانید در این حیطه چند قدمی جلوتر بیایید!

اگر مـــا دامنهٔ متغیـــر را برای گزاره‌نمـــای $x+1=0$، مجموعهٔ عددهای طبیعی تعریف کنیم، این معادله فاقد جواب است. زیرا $x=-1$ در عددهای طبیعی وجود ندارد. ولی اگر دامنه را مجموعهٔ عددهای صحیح در نظر بگیریم، معادلهٔ فـــوق دارای یک جواب منحصربه‌فرد خواهد بود.

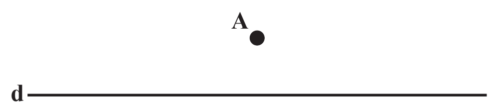
اگر اســـتدلال برای حل یک مســـئله یا اثبات یک قضیه را از دریچهٔ نگاه یک شـــهودگرا بررســـی کنیم، ممکن اســـت نتیجه‌گیری ما با نتیجه‌گیری از نگاه یک واقع‌گرا، منطق‌گرا یا ... فرق داشته باشد. سؤالی که برای یک افلاطون‌گرا بدون پاسخ است، امکان دارد برای یک صورت‌گرا پاســـخی محکم و مســـتدل (البته منطبق با پیش‌فرض‌های صورت‌گراها) داشته باشد. در شماره‌های بعد به معرفی، بررســـی و نقد تعـــدادی از مکتب‌های معروف فلسفی و به‌خصوص فلسفهٔ ریاضی می‌پردازم.

ناصر وجدی، حمیدرضا ملکی، حسین کریمی

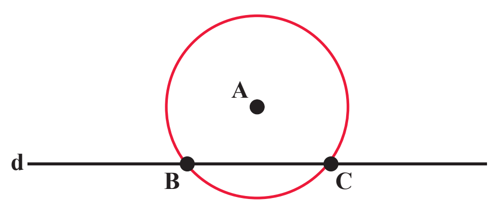
برای رسم خط موازی با یک خط
رسم حداقل چند دایره لازم است؟

می‌دانیم که در هندسهٔ اقلیدسی، از نقطهٔ A خارج خط d، یک و تنها یک خط به موازات خط d می‌توان رسم کرد. برای رسم چنین خطی، در کتاب‌های درسی با استفاده از ابزار اقلیدسی (پرگار و خط‌کش غیرمدرج) روش‌های متفاوتی بیان می‌شوند؛ از جمله:

روش اول

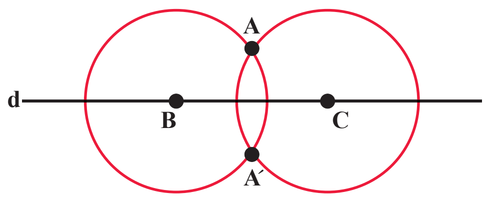


گام اول: دایره‌ای به مرکز A رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌های B و C قطع کند (شکل ۱)



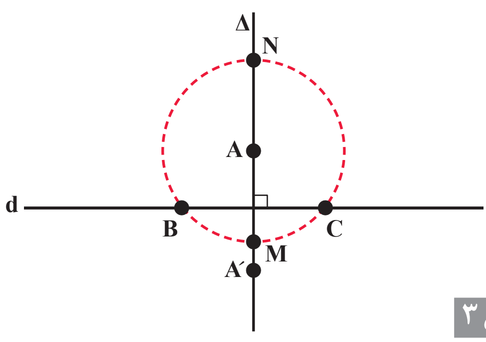
شکل ۱

گام دوم: دایره‌هایی به همان شعاع به مراکز B و C رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در A و 'A قطع کنند (شکل ۲).



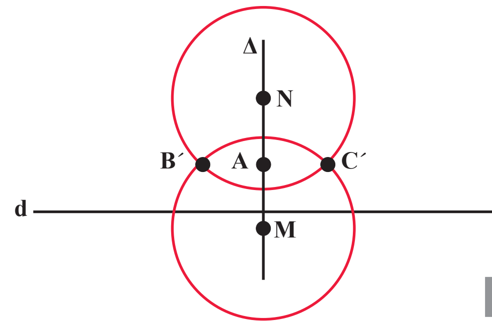
شکل ۲

گام سوم: نقطه‌های A و 'A را به هم وصل می‌کنیم تا خط Δ عمود بر d حاصل شود و نقطه‌های تلاقی Δ با دایرهٔ اول را M و N می‌نامیم (شکل ۳).



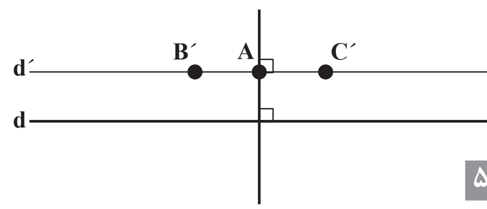
شکل ۳

گام چهارم: دو دایره به مرکزهای M و N و به شعاع بزرگ‌تر از MA=NA رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌های 'B و 'C قطع کنند (شکل ۴).



شکل ۴

گام پنجم: نقطه‌های 'B و 'C را به هم وصل می‌کنیم تا خط 'd عمود بر Δ حاصل شـود (شـکل ۵). خط 'd جواب مسئله است (زیرا $d' \perp \Delta$ و $d \perp \Delta$ و در نتیجه: d||d').

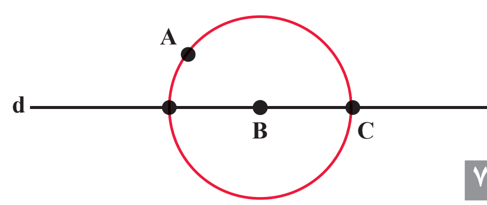


شکل ۵

روش دوم

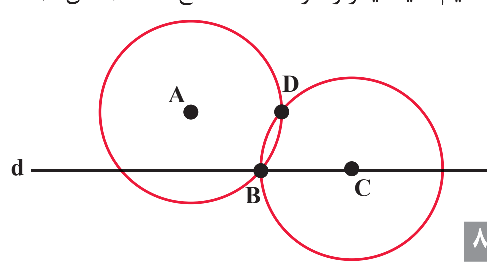
شکل ۶

گام اول: نقطـهٔ دلخـواه B را روی خـط d در نظر می‌گیریم و دایره‌ای به مرکز B و به شعاع BA رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند (شکل ۷).



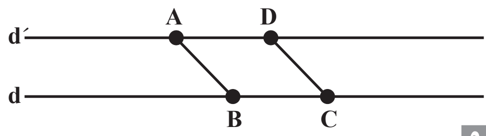
شکل ۷

گام دوم: دو دایـره به همان شـعاع به مرکزهای A و C رسـم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ D قطع کنند (شکل ۸).



شکل ۸

گام سـوم: چهـارضلعی ABCD (بـه دلیـل اینکـه AB=BC=CD=DA=R)، یک لوزی اسـت (شـکل ۹). پس: AD||BC در نتیجه 'd (امتداد AD) جواب مسئله است.



شکل ۹

در روش اول، برای رسم خط گذرا از A که موازی با خط d باشد، از رسم پنج دایره، و در روش دوم، از رسم سه دایره استفاده کردیم.

اکنون این سؤال مطرح می‌شود:

اگر A نقطه‌ای خارج خط d باشـد، برای رسم خط گذرا از A و موازی با d، به رسم حداقل چند دایره نیاز است؟

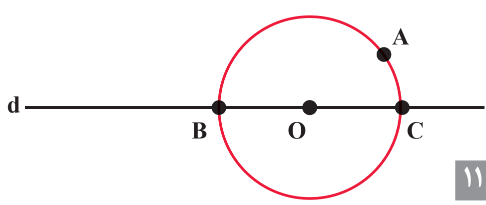
دو روش بسـیار جالب و زیبا ارائه می‌دهیم که در یکی از آن‌ها رسم یک دایره و در دیگری رسم نیم‌دایره هم کافی است!

شما می‌توانید در همین جا مکث کنید، بقیهٔ مطلب را نخوانید، و خودتان به دنبال دلیل علمی و هندسی آن باشید.

با رسم یک دایره

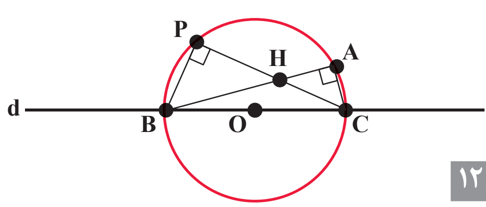
شکل ۱۰

گام اول: نقطـهٔ دلخـواه O را روی خـط d در نظر می‌گیریم و دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌های B و C قطع کند (شکل ۱۱).



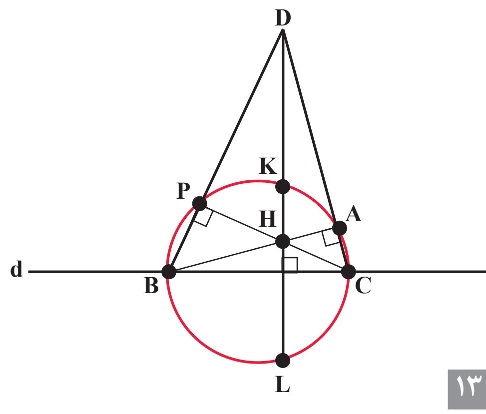
شکل ۱۱

گام دوم: نقطـهٔ دلخواه P را روی دایره در نظر می‌گیریم و از A و P به نقطه‌های B و C خطی رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی AB و CP را H می‌نامیم (شکل ۱۲).



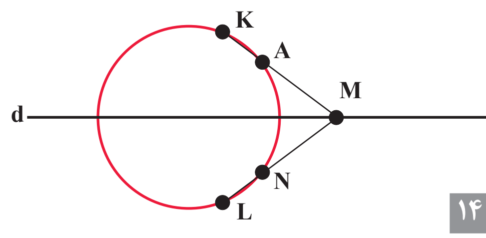
شکل ۱۲

گام سوم: در مثلث BCD (شکل ۱۳)، H نقطهٔ همرسی ارتفاع‌هاست و K و L نقطه‌های تلاقی ارتفاع سوم با دایره هستند. (نقطه‌های K و L قرینهٔ یکدیگرند نسبت به خط d، چون DKHL عمود بر خط d است).



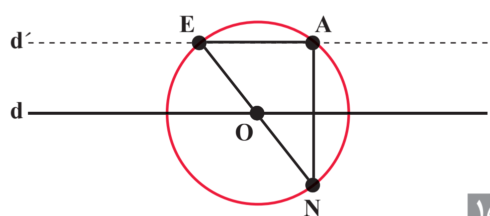
شکل ۱۳

گام چهارم: از نقطهٔ M محل تلاقی امتداد KA با خط d (شکل ۱۴)، به L وصل می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ N قطع کند. (A و N نیز قرینهٔ یکدیگرند، نسبت به خط d).



شکل ۱۴

گام پنجم: امتداد NO دایره را در E قطع می‌کند که امتداد AE همان خط 'd به موازات d است (در مثلث ANE (در شکل ۱۵)، خط d از وسط دو ضلع NE و AN می‌گذرد).



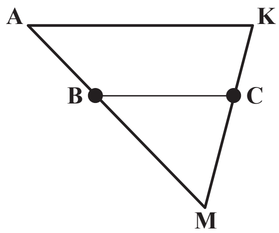
شکل ۱۵

با رسم نیم‌دایره

ابتدا یادآوری سه مطلب الزامی است:

الف. اگر در مثلث AMK (شکل ۱۶) داشته باشیم:

$\frac{AB}{AM}=\frac{KC}{KM}$ ، آن‌گاه: AK||BC و برعکس.

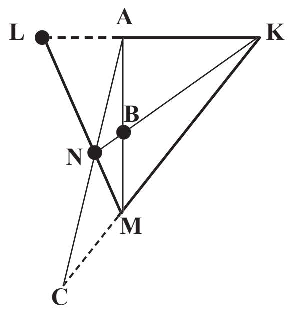


شکل ۱۶

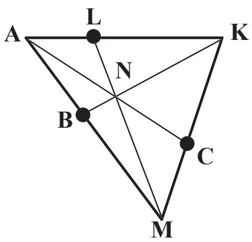
ب. قضیهٔ سوا:

اگر در مثلث AMK سه خط رسم شده از رأس‌ها در یک نقطه مانند N به هم رسیده باشند (مانند دو شکل ۱۷ و ۱۸).

داریم: $\frac{KL}{LA}\times\frac{AB}{BM}\times\frac{MC}{CK}=1$



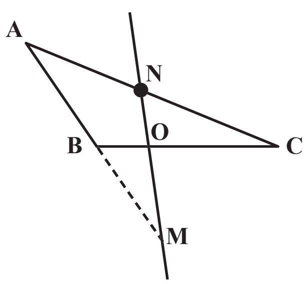
شکل ۱۷



شکل ۱۸

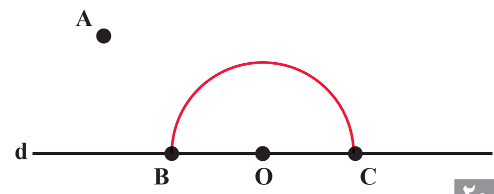
ج. قضیهٔ منلائوس:

اگر در مثلث ABC، نقطهٔ N واقع بر AC و نقطهٔ O واقع بر BC و نقطهٔ M واقع بر امتداد AB، روی یک خط واقع باشند (شکل ۱۹)، آن‌گاه: $\frac{BO}{OC}\times\frac{CN}{NA}\times\frac{AM}{MB}=1$ و برعکس.



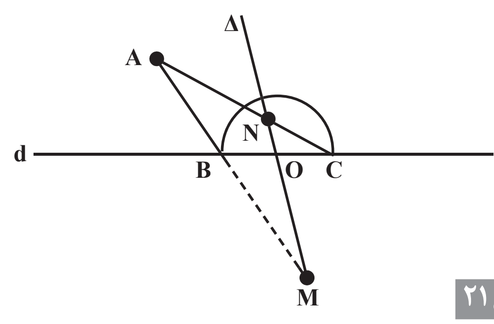
شکل ۱۹

گام اول: نقطهٔ دلخواه O را روی خط d در نظر می‌گیریم و نیم‌دایرهٔ دلخواهی به مرکز O رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌های B و C قطع کند (شکل ۲۰).



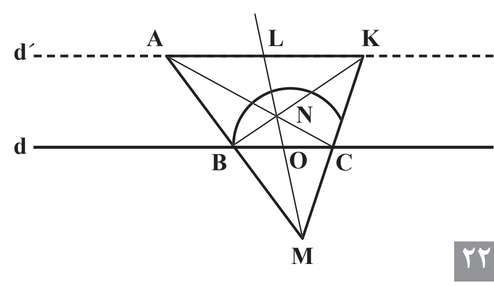
شکل ۲۰

● **گام دوم:** خط دلخواه Δ گذرا از O را رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در M و AC را در N قطع کند (شکل ۲۱).



شکل ۲۱

● **گام ســوم:** نقطهٔ تلاقی امتدادهای BN و MC را K می‌نامیم (شکل ۲۲).



شکل ۲۲

خط d' (امتداد AK) جواب مسئله است.

زیرا:

$$\Delta ACK \xrightarrow{\text{منلائوس}} \frac{KL}{LA}\times\frac{AN}{NC}\times\frac{CM}{MK}=۱ \qquad (۱)$$

$$\Delta AMK \xrightarrow{\text{سوا}} \frac{KL}{LA}\times\frac{AB}{BM}\times\frac{MC}{CK}=۱ \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow \frac{AN}{NC}=\frac{AB\times MK}{BM\times CK} \qquad (۳)$$

$$\Delta ABC \xrightarrow{\text{منلائوس}} \frac{AN}{NC}\times\frac{CO}{OB}\times\frac{MB}{MA}=۱$$

$$\xrightarrow{CO=OB} \frac{AN}{NC}=\frac{MA}{MB} \qquad (۴)$$

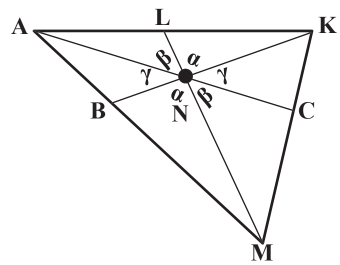
$$(۳),(۴)\Rightarrow \frac{AB\times MK}{BM\times CK}=\frac{MA}{MB}\Rightarrow \frac{AB}{AM}=\frac{KC}{KM}$$

$$\Rightarrow AK \parallel BC \Rightarrow d' \parallel d$$

اثبات قضیهٔ سوا

$$\frac{KL}{LA}=\frac{S_{NKL}}{S_{NAL}}=\frac{\frac{۱}{۲}NK.NL.\sin\alpha}{\frac{۱}{۲}NA.NL.\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{KL}{LA}=\frac{NK.\sin\alpha}{NA.\sin\beta}$$



شکل ۲۳

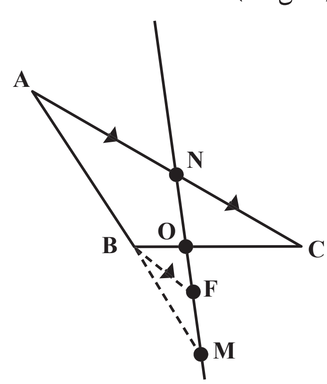
و به همین ترتیب:

$$\frac{MC}{CK}=\frac{NM.\sin\beta}{NK.\sin\gamma}\ ,\ \frac{AB}{BM}=\frac{NA.\sin\gamma}{NM.\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{KL}{LA}\times\frac{AB}{BM}\times\frac{MC}{CK}=۱$$

اثبات قضیهٔ منلائوس

از رأس B به موازات AC رســم می‌کنیم تا خط قاطع NOM را در F قطع کند (شکل ۲۴).



شکل ۲۴

$$\Delta OBF \approx \Delta ONC \Rightarrow \frac{CN}{BF}=\frac{CO}{OB} \qquad (۱)$$

$$\Delta FBM \approx \Delta NAM \Rightarrow \frac{NA}{BF}=\frac{MA}{MB} \qquad (۲)$$

از تقسیم (۱) بر (۲) داریم:

$$\frac{CN}{NA}=\frac{CO}{OB}\times\frac{MB}{MA}\Rightarrow \frac{OB}{OC}\times\frac{CN}{NA}\times\frac{MA}{MB}=۱$$

احسان یارمحمدی

بهاءالدین عاملی (شیخ بهایی)

● **کارگردان:** علی‌محمد قاسمی و اعظم نجفیان ● **تصویربردار:** علی‌محمد قاسمی ● **تدوین نهایی:** علی‌محمد قاسمی ● **طراحی و ترکیب صدا و موسیقی:** بهروز شـهامت ● **تصویربرداران بخش مصاحبه:** مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثـم جمال‌لو و اعظم نجفیان ● **گوینده و راوی:** محمود نظرعلیان
● **تهیه‌کننده:** هومن مرادی کرمانی ● **تدوین اولیه:** طاهره حسینی ● **پژوهشگر:** محبوبه کلانتری ● **انتخاب تصاویر آرشیوی:** اعظم نجفیان
■ تهیه شده در شبکهٔ مستند سیمای جمهوری اسلامی ایران

اشاره

بهاءالدین محمدبن حسین عاملی، مشهور به «شیخ بهایی»، از برجسته‌ترین و بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان، ستاره‌شناسان، مورخان، حکیمان، فقیهان، ادیبان و شاعران ایران‌شهر است که به واسطهٔ خدمات، تألیفات و تصنیفاتش، می‌توان وی را یکی از اثربخش‌ترین شخصیت‌های علمی چند قرن اخیر ایران‌زمین نامید. در این مقاله با معرفی مستند بهاءالدین عاملی از مجموعهٔ مستند «سرزمین ستاره‌ها»، قصد داریم ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت بی‌بدیل در عرصهٔ دانش و فرهنگ ایران‌زمین آشنا سازیم. به همین دلیل نخست به ارائهٔ سطرهایی از کتاب «زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی، از سدهٔ سوم تا یازدهم»، به قلم *زنده‌یاد ابوالقاسم قربانی* (۱۳۸۰–۱۲۹۰) که در سال ۱۳۷۵ در «انتشارات مرکز نشر دانشگاهی» به زیور طبع آراسته شده است، می‌پردازیم و سپس مواردی از مستند مزبور را در پی خواهیم آورد.

محمدبن حسین بهاءالدین عاملی، دانشمند بنام عهد ***شاه‌عباس اول***، در سال ۹۵۳ در بعلبک تولد یافت و در سال ۱۰۳۱ در اصفهان درگذشت. اصل وی از «جبل عامل» بود. به ایران سفر کرد و در دربار شاه‌عباس قدر و منزلت بسیار یافت. تألیفاتی به فارسی و عربی دارد که مجموع آن‌ها به ۸۸ کتاب و رساله بالغ می‌شود. کتاب «خلاصة‌الحساب» وی بسیار مشهور است.

خلاصة‌الحساب کتابی است درسی در ریاضیات مقدماتی که تقریباً همهٔ آن از نوشته‌های دیگران اقتباس و تألیف شده است. این کتاب در حدود ۲۰۰ سال در ایران، ترکیه و هندوستان از شهرت فوق‌العاده‌ای برخوردار بوده و بارها به چاپ رسیده است. اخیراً هم در سال ۱۹۷۶ کتابی با عنوان «ریاضیات بهاءالدین العاملی» توسط ***جلال شوقی*** در حلب به چاپ رسیده است. قضاوت شادروان دکتر ***مصاحب*** را دربارهٔ خلاصة‌الحساب در کتاب «مصاحب: تئوری اعداد»، جلد دوم، صفحهٔ ۱۷۱۹ خواهید یافت.

بر خلاصة‌الحساب شرح‌های متعدد به زبان‌های فارسی و عربی نوشته‌اند. از آن جمله شرحی فارسی ممزوج با متن عربی است که توسط شخصی موسوم به ***مولوی روشنعلی جونفوری*** تدوین شده و در سال ۱۲۲۷ ق، مطابق با ۱۸۱۲م، در کلکته به چاپ رسیده است. همچنین، از جملهٔ شرح‌ها و ترجمه‌های فارسی آن کتاب «کنزالحساب»، تألیف ***فرهاد میرزا معتمدالدوله*** (۱۳۰۵ـ ۱۲۳۳ ق)،

از مشاهیر، رجال و شاهزادگان عصر ناصری است که در سال ۱۲۸۷ ق در تهران به طبع رسیده است. از جمله شرح‌های عربی معروف آن نیز شرح معروف ممزوجی است که ***فاضل جواد***[1] که شاگرد شیخ بهایی بوده، نوشته و به «شرح جواد» معروف است و در سال ۱۲۷۳ ق در تهران چاپ شد.

شهرت شیخ بهایی بین مورخان ریاضی از آن نظر است که متن عربی و ترجمهٔ آلمانی کتاب خلاصة‌الحساب در سال ۱۸۴۳ توسط ***نسلمان***[2] در برلین، و ترجمهٔ فرانسوی آن، توسط ***اریستید مار***[3] در سال ۱۸۴۶ در فرانسه منتشر شد. در آن زمان که هنوز دانشمندان مغرب‌زمین از آثار مهم ریاضی دورهٔ اسلامی چندان اطلاعی نداشتند، با این کتاب آشنا شدند و نام بهاءالدین عاملی در کتاب‌های تاریخ ریاضیات وارد شد. به گفتهٔ **سوتر**، در اثر ریاضی شیخ بهایی (خلاصة‌الحساب)، نه‌تنها پیشرفت علمی دیده نمی‌شود، بلکه برعکس نوعی عقب‌افتادگی در آن مشهود است و به‌طور کلی در آثار معاصران وی و کسانی که بعد از او به فارسی یا عربی تألیفات ریاضی دارند، اثری از نبوغ، ابتکار و اصالت دیده نمی‌شود.

ظاهراً شیخ بهایی مؤلف کتاب حساب دیگری موسوم به «بحرالحساب» نیز بوده است. نسخه‌ای از این کتاب تاکنون شناخته نشده و خود شیخ بهایی در کتاب خلاصة‌الحساب اتمام آن را آرزو کرده و نوشته است: «و کمل العمل و براهین هذا الاعمال مفصله فی کتابنا الکبیر المسمی ببحر الحساب و فقنا الله تعالی لاتمامه.»

وی چند کتاب و رساله دربارهٔ هیئت، نجوم و اسطرلاب دارد که از آن جمله است «تشریح‌الافلاک» که خلاصه‌ای است در علم هیئت و بر آن شرح‌ها و حاشیه‌های متعدد نوشته‌اند.

***

خردمند را سزاوار است که به خرد خویش اندیشهٔ خردمندانه دیگران را بیفزاید و رأی حکیمان پیوند دهد؛ چه بسا تدبیر یک تن که به خطا رود و اندیشهٔ یک تن که از درستی به دور ماند. و هر که دانش را بر نادان بی‌خرد عرضه کند، تباهش کرده است و کسی که علم را از شایستگان باز دارد، ستم روا داشته است.

فناوری گره‌گشای دشواری‌های انسان است. نوآوری‌های بسیار کهن مانند چرخ هم، نمونه‌هایی از فناوری محسوب می‌شوند. از مصداق‌های فناوری نزد قدما فوت کوزه‌گری بوده است. فناوری همان تسلط و تبحر انجام کار است، کاری که دانشمندان ما در گذشته به بخشی از آن دست پیدا کرده بودند و در حوزه‌های گوناگون علمی ابداعات و اختراعاتی پدید آوردند. امروزه فناوری به تمامی ابعاد زندگی بشر وارد شده، زندگی انسان‌ها را بیش از پیش تحت‌تأثیر خود قرار داده است.

از میان دانشمندان و بزرگان علم ایرانی و مسلمان، شیخ بهاءالدین محمد عاملی منشأ خدمات ارزشمند علمی، فرهنگی و عمرانی بوده است. او علاوه‌بر علوم دینی، بر علومی همچون ریاضی،

هندسه و فیزیک مسلط بود. از شیخ بهایی تألیفات بسیاری در علوم گوناگون بر جای مانده اســت؛ مانند: نان و حلوا، شیر و شکر، جامع عباسی و کشکول. از آثار شیخ بهایی نیز می‌توان به مسجد امام، حمام شیخ بهایی، ساعت شاخص اوقات شرعی، شهر نجف‌آباد و تقسیم آب زاینده‌رود، معروف به «طومار شیخ بهایی» اشاره کرد.

ساخت «مســـجدامام» در سال ۹۹۱ شمسی آغاز شد و در سال ۹۹۷ پایان یافت. گفته می‌شود طرح بنا و نظارت بر ساختمان را شیخ بهایی بر عهده داشته است. معماری دیگر، «حمام شیخ بهایی» است. معروف است که گرمای حمام از طریق استفاده از گاز فاضلاب حمام تأمین می‌شد و شمع سوزان زیر دیگ حمام تا چند دهه روشن بوده اســت. شـــیخ خود گفته بود که اگر روزی آن فضا را بشکافند، شمع خاموش خواهد شــد و حمام از کار می‌افتــد. چون پس از مدتی به تعمیر گرمابه پرداختند و آن محوطه را شکافتند شمع فوراً خاموش شد و دیگر نتوانستند آن را بسازند.

ماجرای این حمام و گرم نگه‌داشــتن آن با یک شـــمع، به رازی نهفته در تاریخ تبدیل شده بود که با کنکاش‌هایی پی‌درپی، بالاخره راز این حمام ۴۰۰ ســـاله کشف شد. شـــیخ بهایی با استفاده از طلا که رســـانایی بالایی دارد و گرما را انتقال می‌دهد، منبع این حمام را ساخت و به دلیل استفاده از طلا و جلوگیری از سرقت آن، راز ساخت آن را پنهان نگه داشت.

طراحی و فکر ایجاد شـــهر «نجف‌آبـــاد» در ۳۰ کیلومتری غرب اصفهان نیز از شـــیخ بهایی اســـت. این شـــهر اکنون بعـــد از حدود ۴۰۰ ســـال همچنان از نظر اصول شهرســـازی و رعایت مسیر معابر و ایجاد محلات، از ســـایر شـــهرها متمایز است. همچنین طرح‌ریزی «کاریز نجف‌آباد» را که به «قنات زرین‌کمر» شـــهرت دارد و یکی از بزرگ‌ترین کاریزهای ایران اســـت، شیخ بهایی طراحی کرد. از مظهر قنات تا انتهای آبخور آن ۵۴ کیلومتری فاصله اســـت و به ۱۱ جوی بزرگ تقسیم می‌شود.

از دیگر کارهای شـــیخ بهایی تنظیم طومار تقسیم آب زاینده‌رود است. این چشـــمهٔ جوشـــان و مارپیچ از زردکوه بختیاری تا مرداب گاوخونی را ســـیراب می‌ســـازد و در این راه حدوداً ۳۰۰ کیلومتری، همواره ســـهم آب مزارع را داده است. شـــیخ بهایی در پی یافتن راه علاجی برای تقســـیم عادلانهٔ این آب، به تنظیم طومار تقســـیم آب زاینده‌رود پرداخت. کل آن را به ۳۳ سهم و ۲۷۵ سهم جزئی‌تر تقسیم نمود و با طراحی ۱۳ نخل، آن را توزیع کرد.

شـــیخ بهایی در کتاب کشـــکول چگونگی محاسبهٔ بلندی‌های کوه‌ها و ساختمان‌ها را بدون داشتن ابزار اندازه‌گیری شرح داده است. مهم‌ترین کتاب شیخ در ستاره‌شناسی کتاب «تشریح‌الافلاک» است که تا ســـال‌ها کتاب درســـی در حوزه‌های علمیه بود. چند رساله در جغرافیا و رســـاله‌ای دربارهٔ کروی بـــودن زمین از وی به یادگار مانده است.

شـــیخ بهایی هنگام مهاجرت از شـــهر بعلبک به ایران ۱۳ سال بیش‌تر نداشـــت. او در ســـفرهای طولانی خود، به عراق، حلب، شام، مصـــر و بیت‌المقدس رفت و با علما و بزرگان دیدار کرد. با لباس فقرا و درویشـــان به‌طور ناشناس سفر می‌کرد تا با بزرگان دینی و مذاهب اسلامی به بحث بپردازد. شـــیخ به کاظمین، هرات، آذربایجان، قم و شیروان نیز سفر کرده است.

شهرت علمی و موقعیت اجتماعی بهایی موجب شد تا شاگردان بســـیاری به او روی آوردنـــد. به خاطر خدمات شـــیخ بهایی به علم ستاره‌شناسی، «یونسکو» سال ۲۰۰۹ را به نام او، یعنی «سال نجوم و شیخ بهایی» نام‌گذاری کرده است. شمار آثار بهایی به یکصد می‌رسد که نسخه‌های خطی فراوانی از آن‌ها در کتابخانه‌های جهان نگهداری می‌شوند و بسیاری از آن‌ها نیز چاپ شده و شرح‌های متعددی نیز بر آن‌ها نوشته شده‌اند.

شیخ بهاءالدین عاملی در سال ۹۸۹ شمسی وفات یافت. پیکر او را طبق وصیتش به مشـــهد منتقل کردند و در جوار امام رضا (ع) به خاک سپردند.

در پایـــان از ارائهٔ مطالب بیشـــتر دربارهٔ مســـتند «ســـرزمین ســـتاره‌ها: بهاءالدین عاملی (شیخ بهایی)» خودداری می‌کنیم و شما ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات ایران‌زمین را به تهیه و تماشای این مستند تشویق می‌کنیم.

پی‌نوشت‌ها

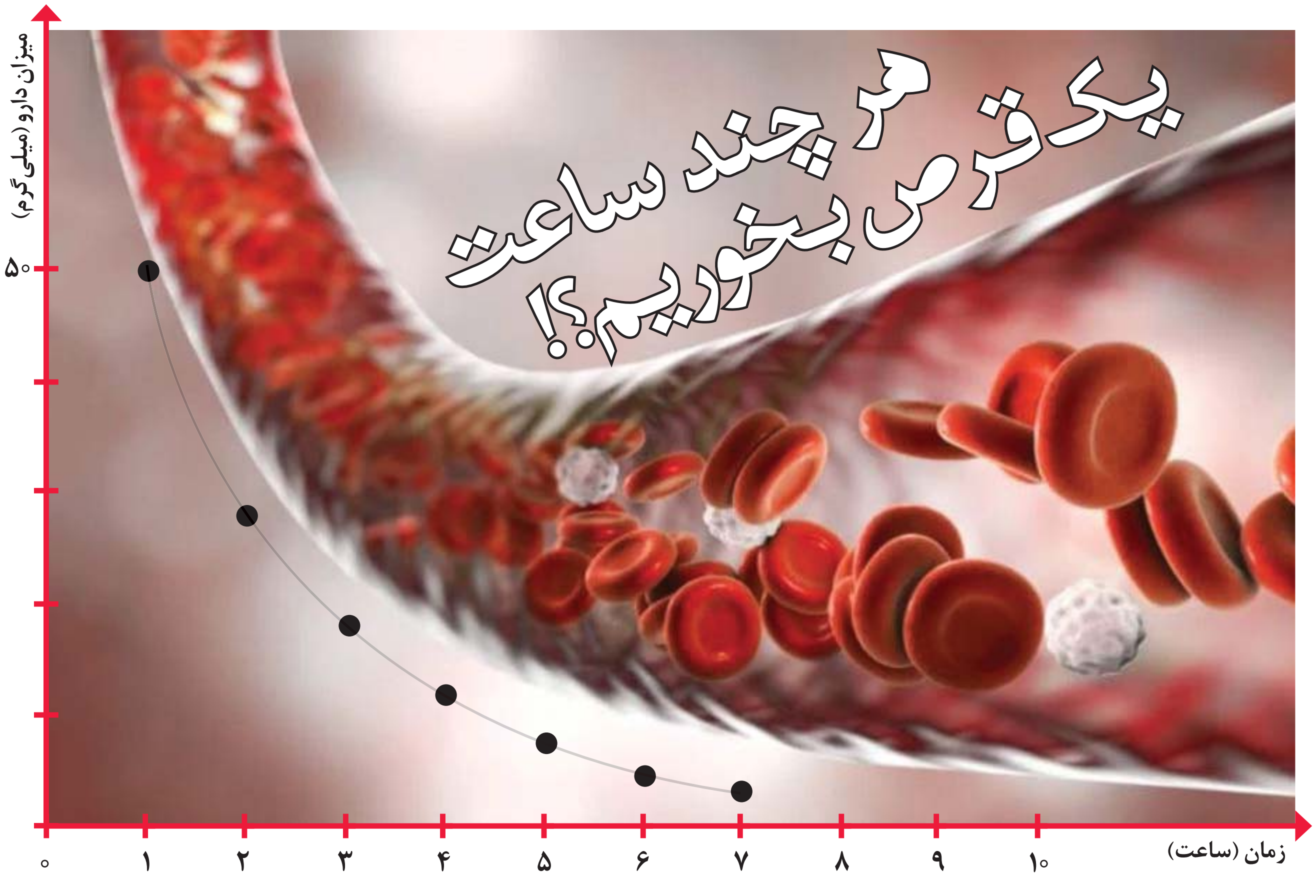
۱. جوادبن سعید بغدادی کاظمی (سدهٔ ۱۱ ق). اصلش از کاظمین بود. در اصفهان نزد شیخ بهایی تحصیل کرد و آثار دیگری نیز دارد.

2. Nesselmann

3. Aristide Marre

آزادبه حسین فرزان

یک قرص هر چند ساعت بخوریم؟!



- شخصی ۱۰۰mg دارویی را مصرف کرده است که نیمه عمر آن یک ساعت است. نمودار «میزان دارو در خون - زمان» برای آن رسم شده است.
- میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه‌عمر کمتر از ۲۰ میلی‌گرم خواهد بود؟
- آیا می‌توانید مشخص کنید، میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟
- اگر a_1 میزان اولیهٔ دارو پس از مصرف در بدن شخص و a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از nامین نیمه‌عمر باشد، رابطهٔ بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه است؟

مقدمه

همه‌گیری بیماری «کرونا» در جهان و تلاش شبانه‌روزی و گروهی دانشمندان شاخه‌های گوناگون پزشکی، محققان دارو و داروسازان، مهندسان ژنتیک و میکروبیولوژی، ویروس‌شناسان، و ... برای مقابله با این بیماری، یک بار دیگر اهمیت و ارزش «علم» را که شاید در قیل و قال روزمرگی‌هایمان کم‌رنگ شده بود، یادآوری کرده است. در این میان شاید کمتر به محاسبه‌های ریاضی پنهان در کشف دارو و واکسن کرونا یا هر داروی دیگری توجه کرده‌ایم. کشف و پیش‌بینی محاسباتی «ساختار پروتئین کپسول ویروس کرونا» برای درمان این هیولای ناخوانده، نیازمند محاسبه‌های دقیق ریاضی و آماری است که در درمان بیماری بسیار حائز اهمیت هستند.

به این بهانه و در مقالهٔ پیش رو به ارتباط میان

دو مفهوم پزشکی و ریاضی، یعنی نیمه‌عمر دارویی و دنباله‌های هندسی می‌پردازیم؛ ارتباطی که شاید جوابی ملموس برایمان به همراه داشته باشد: «علاوه بر زیبایی ذاتی مفاهیم ریاضی، در عمل و در زندگی روزمره نیز ریاضی کاربردهای بسیار حیاتی دارد.»

در مراحل درمان یک بیماری، پس از شناخت ماهیت بیماری و داروهای مورد نیاز برای مقابله با آن، یکی از مهم‌ترین مسائل، «میزان دارو» و چگونگی «ثابت نگه داشتن میزان دارو» در خون بیمار است. با گذشت زمان به دلیل دفع یا جذب دارو پس از هر بار مصرف، میزان آن در بدن کاهش می‌یابد. حال آنکه برای مقابله با میکروب یا ویروس بیماری‌زا، میزان داروی موجود در خون حتی‌الامکان باید ثابت بماند. در درصد بالایی از داروها، «مادهٔ مؤثر» آن با توجه به «نیمه‌عمر دارو» کاهش می‌یابد.

نیمه‌عمر دارو مدت‌زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف کاهش می‌یابد. نیمه‌عمر دارو به‌ویژه در بیماری‌های عفونی، درمان فشار خون، مشکلات کلسترول یا داروهای آرام‌بخش اهمیت ویژه‌ای دارد.

با توجه به تعریف دنبالهٔ a_n و نیز تعریف نیمه عمر، هر جملهٔ دنباله از ***حاصل‌ضرب عدد ثابت در جملهٔ قبلی*** به دست می‌آید؛ یعنی:

$a_{۱}=۱۰۰$

- ضابطهٔ تابعی (جملهٔ عمومی) دنباله را مشخص کنید.

$a_{۱}=۱۰۰$

$a_{۲}=\frac{۱}{۲}\times ۱۰۰$

$a_{۳}=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\times ۱۰۰)=(\frac{۱}{۲})^{۲}\times ۱۰۰$

$\Rightarrow a_n=(\frac{۱}{۲})^{n-۱}\times ۱۰۰$

به دنباله‌هایی از عددها که هر جملهٔ دنباله از ضرب یک عدد ثابت در جملهٔ قبلی به دست می‌آید، «دنبالهٔ هندسی» گفته می‌شود. عدد ثابت را «نسبت مشترک»[۱] می‌نامند و عموماً با r نشان می‌دهند.

یک دنبالهٔ هندسی دنباله‌ای است به‌صورت:
$a, ar, ar^{۲}, ar^{۳}, \ldots$
که در آن a جملهٔ اول و $r \neq ۰$ نسبت مشترک دنباله است.
جملهٔ nام این دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $a_n=a_{۱}r^{n-۱}$ به دست می‌آید.

برای درمان شخصی که به‌نوعی گلو درد عفونی مبتلاست، پزشک معالج قرص‌های آنتی‌بیوتیک حاوی ۸۰mg آنتی‌بیوتیک تجویز کرده است. با توجه به آنکه نیمه‌عمر این آنتی‌بیوتیک ۸ ساعت است و شخص بیمار موظف به مصرف این قرص‌ها در پایان هر ۸ ساعت پس از خوردن قرص قبلی است:

۱. با کامل کردن جدول ۱، میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از ۳ و ۶ بار مصرف دارو مشخص کنید.

۲. با یک «رابطهٔ بازگشتی»، میزان آنتی‌بیوتیک را در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص مشخص کنید.

۳. آیا می‌توانید رابطه‌ای میان تعداد مصرف قرص و میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار مشخص کنید؟

۴. با جایگذاری مقادیر $n=۱$ تا $n=۵$ در رابطهٔ به‌دست‌آمده از قسمت ۳، صحت عددهای

به‌دست‌آمده از جدول زیر را بررسی کنید.

حل: اگر «S_n» میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص باشد، با توجه به فرض‌های مسئله داریم:

جدول ۱

n تعداد مصرف	تاریخ مصرف	زمان مصرف	S_n
۱	۱۵ اسفند	۰۰:۰۱ بامداد	$S_1 = 80mg$
۲	۱۵ اسفند	۰۸:۰۰ صبح	$S_2 = \frac{1}{2}S_1 + 80 = 40 + 80 = 120$
۳	۱۵ اسفند	۰۴ :۰۰ بعدازظهر	$S_3 = \frac{1}{2}S_2 + 80 = 60 + 80 = 140$
۴	۱۶ اسفند	۰۰:۰۰ بامداد	$S_4 = \quad + 80 =$
۵	۱۶ اسفند	—	$S_5 = \quad =$

برای نوشتن ضابطه تابعی دنبالهٔ Sn برحسب n، برای ساده‌تر شدن محاسبات تعیین ضابطه، اگر میزان آنتی‌بیوتیک هر قرص را Amg در نظر بگیریم (در این مسئله A=80mg است)، با استفاده از رابطهٔ بازگشتی به‌دست‌آمده در قسمت قبل داریم:

$$S_1 = A$$

$$S_2 = A + \frac{1}{2}s_1 = \text{..............}$$

$$S_3 = \text{.........} + \text{.........} = A + \frac{1}{2}(A + \frac{1}{2}A)$$
$$= A + \frac{1}{2}A + (\frac{1}{2})^2 A$$

و به همین صورت برای محاسبهٔ S_6:

$$S_6 = A + \frac{1}{2}A + (\frac{1}{2})^2 A + ... + (\frac{1}{2})^5 A$$

پس برای محاسبهٔ مجموع آنتی‌بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف:

$$S_n = A + \frac{1}{2}A + (\frac{1}{2})^2 A + ... + (\frac{1}{2})^{n-1} A \qquad (1)$$

اگر طرفین رابطهٔ (۱) را در ضریب $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم:

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}A + (\frac{1}{2})^2 A + ... + (\frac{1}{2})^n A \qquad (2)$$

با تفاضل رابطهٔ (۱) از (۲) رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = A - (\frac{1}{2})^n A \Rightarrow \frac{1}{2}S_n = A(1 - (\frac{1}{2})^n)$$

$$\Rightarrow S_n = 2A(1 - (\frac{1}{2})^n)$$

بنابراین، با فرض این مسئله A=80mg، مجموع میزان آنتی‌بیوتیک پس از n بار مصرف می‌شود:

$$S_n = 160(1 - (\frac{1}{2})^n)$$

با توجه به رابطه به‌دست‌آمده برای S_n داریم:

$$S_1 = 160(1 - (\frac{1}{2})^1) = 160 \times \frac{1}{2} = 80$$

$$S_2 = ...$$

$$S_6 = ...$$

براساس آنچه که در این فعالیت برای محاسبهٔ S_n انجام شد، مجموع nجملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی را می‌توانیم مشخص کنیم:

اگر جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی به صورت $a_n = ar^{n-1}$ باشد، حاصل مجموع:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} \qquad (r \neq 1)$$

از رابطهٔ:

$$S_n = a \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

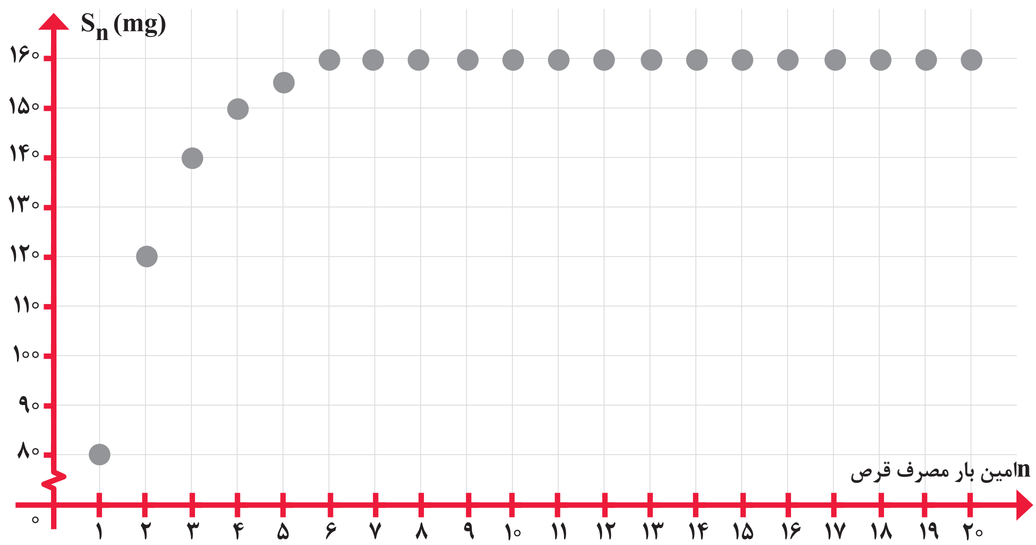
به دست می‌آید.

۵. مقادیر a و r را در فعالیت بالا مشخص کنید.

۶. ضابطه‌های دنبالهٔ a_n و s_n را بنویسید. با توجه به این ضابطه معنی a_4 و s_4 چیست؟

حل: اگر در فعالیت قبلی، به دلایلی شخص بیمار مجبور به مصرف قرص آنتی‌بیوتیک به مدت نامحدود باشد، با استفاده از جدول و نمودار ۲ میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار در طول ۲۰ بار مصرف دارو مشخص می‌شود:

مقدار مصرف n	S_n
$n=۶$	$S_{۶}=۱۵۷/۵$
$n=۷$	$S_{۷}=\frac{۱}{۲}S_{۶}+۸۰=۱۵۸/۷۵$
$n=۸$	$S_{۸}=\frac{۱}{۲}S_{۷}+۸۰=۱۵۹/۳۷۵$
$n=۹$	$S_{۹}=\frac{۱}{۲}S_{۸}+۸۰=۱۵۹/۶۸۷۵$
$n=۱۰$	$S_{۱۰}=\frac{۱}{۲}S_{۹}+۸۰=۱۵۹/۸۴۳۷$
$n=۱۱$	$S_{۱۱}=\frac{۱}{۲}S_{۱۰}+۸۰=۱۵۹/۹۲۱۸$
$n=۱۲$	$S_{۱۲}=\frac{۱}{۲}S_{۱۱}+۸۰=۱۵۹/۹۶۰۹$
$n=۱۳$	$S_{۱۳}=\frac{۱}{۲}S_{۱۲}+۸۰=۱۵۹/۹۸۰۴$
$n=۱۴$	$S_{۱۴}=\frac{۱}{۲}S_{۱۳}+۸۰=۱۵۹/۹۹۰۲$
$n=۱۵$	$S_{۱۵}=\frac{۱}{۲}S_{۱۴}+۸۰=۱۵۹/۹۹۵۱$
$n=۱۶$	$S_{۱۶}=\frac{۱}{۲}S_{۱۵}+۸۰=۱۵۹/۹۹۷۵$
$n=۱۷$	$S_{۱۷}=\frac{۱}{۲}S_{۱۶}+۸۰=۱۵۹/۹۹۸۷$
$n=۱۸$	$S_{۱۸}=\frac{۱}{۲}S_{۱۷}+۸۰=۱۵۹/۹۹۹۳$
$n=۱۹$	$S_{۱۹}=\frac{۱}{۲}S_{۱۸}+۸۰=۱۵۹/۹۹۹۶$
$n=۲۰$	$S_{۲۰}=\frac{۱}{۲}S_{۱۹}+۸۰=۱۵۹/۹۹۹۸$



جدول و نمودار ۲

۷. جملات دنبالهٔ S_n افزایش می‌یابند یا کاهش؟ کدام دو جملهٔ متوالی دنبالهٔ S_n بیشترین اختلاف را دارند؟ کدام دو جمله کمترین اختلاف را دارند؟ چرا؟

۸. آیا با افزایش تعداد دفعات مصرف دارو، میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار به عدد ثابتی نزدیک می‌شود؟

۹. با استفاده از رابطهٔ $S_n=۱۶۰(۱-(\frac{۱}{۲})^n)$، چگونه می‌توان حدس قسمت قبل را بررسی کرد؟ با افزایش n، مقادیر دنبالهٔ $(\frac{۱}{۲})^n$ چگونه بر مقادیر دنبالهٔ S_n تأثیر می‌گذارند؟

حل: با توجه به جدول و نمودار، با افزایش n جملات دنبالهٔ S_n .... می‌یابند. جدول،

جدول ۳

مقدار مصرف n	$a_n = (\frac{۱}{۲})^n$	$S_n = ۱۶۰(۱-(\frac{۱}{۲})^n)$	$۱۶۰ - S_n$
n = ۶	$a_{۶} = ۰/۰۱۵۶۲۵$	$S_{۶} = ۱۵۷/۵$	۲/۵
n = ۷	$a_{۷} = ۰/۰۰۷۸۱$	$S_{۷} = ۱۵۸/۷۵$	۱/۲۵
n = ۸	$a_{۸}$ = ...	$S_{۸}$ = ...	۰/۶۲۵
n = ۹	$a_{۹}$ = ...	$S_{۹}$ = ...	....
n = ۱۰	$a_{۱۰}$ = ...	$S_{۱۰}$ = ...	....
n = ۱۱	$a_{۱۱}$ = ...	$S_{۱۱}$ = ...	....
n = ۱۲	$a_{۱۲}$ = ...	$S_{۱۲}$ = ...	....
n = ۱۳	$a_{۱۳}$ = ...	$S_{۱۳}$ = ...	....
n = ۱۴	$a_{۱۴}$ = ...	$S_{۱۴}$ = ...	....
n = ۱۵	$a_{۱۵}$ = ...	$S_{۱۵}$ = ...	....
n = ۱۶	$a_{۱۶}$ = ...	$S_{۱۶}$ = ...	....
n = ۱۷	$a_{۱۷}$ = ...	$S_{۱۷}$ = ...	....
n = ۱۸	$a_{۱۸} = ۰/۰۰۰۰۰۳$	$S_{۱۸} = ۱۵۹/۹۹۹۳$	۰/۰۰۰۷
n = ۱۹	$a_{۱۹} = ۰/۰۰۰۰۰۱$	$S_{۱۹} = ۱۵۹/۹۹۹۶$	۰/۰۰۰۴
n = ۲۰	$a_{۲۰} = ۰/۰۰۰۰۰۰۹$	$S_{۲۰} = ۱۵۹/۹۹۹۸$	۰/۰۰۰۲

مطابق جدول جملات .... و .... بیشترین اختلاف را دارند و میزان این اختلاف mg.......... است.

اگر بیمار ۲۰ بار قرص مصرف کرده باشد، جملات .... و .... کمترین اختلاف را دارند که این میزان .... $= S_{۲۰} - S_{۱۹}$، و از تفاضل هر دو جملهٔ متوالی دیگر کمتر است.

۱۰. جملات و نمودار S_n ظاهراً نشان می‌دهند که با افزایش مصرف قرص، میزان آنتی‌بیوتیک در بدن بیمار به mg .... نزدیک می‌شود و از این مقدار افزایش پیدا نمی‌کند.

۱۱. برای حدس قسمت قبل، با کامل کردن جدول ۳ به کمک ماشین حساب داریم:

با توجه به تنها ۲۰ بار مصرف دارو کاملاً مشخص است که اگر شخص بیمار مقدار مصرف دارو را به ۵۰ یا ۱۰۰ یا .... افزایش دهد:

- جملات دنباله a_n کاهش پیدا می‌کند و به .... نزدیک می‌شوند.
- جملات دنباله S_n .... و به .... می‌شوند.
- اختلاف S_nها با عدد ثابت ۱۶۰mg، .... و به .... نزدیک می‌شود.

بنابراین، برای تعیین میزان آنتی‌بیوتیک در بدن بیمار که پس از n بار مصرف دارو از رابطهٔ $S_n = ۱۶۰(۱-(\frac{۱}{۲})^n)$ به دست می‌آید، زمانی که n عدد بزرگی است (به‌ویژه زمانی که n تا بی‌نهایت ادامه پیدا کند): به دلیل کوچک بودن مقدار دنبالهٔ $a_n = (\frac{۱}{۲})^n$، می‌توانیم از آن صرف‌نظر کنیم و میزان آنتی‌بیوتیک را ۱۶۰ mg در نظر بگیریم. بدیهی است که هر قدر عدد n افزایش یابد، مطابق محاسبات بالا، S_n به مقدار ۱۶۰ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.

*** پی‌نوشت**

1. Common ratio

غلامرضا یاسی‌پور

کلیدی بهر قفل رزق!

کلیدی کن نه زنجیری در این بند
فروخوان از کلیله نکته‌ای چند
(نظامی گنجوی/ خسرو و شیرین)[۱]

آنچه در عنوان مقاله آمده، شرح حال ریاضیات است. کلیدی کردن ریاضیات و گشودن قفل معماهای واقع در آن، نتیجهٔ تفکر متفکران بزرگ تاریخ ریاضیات است. اما این کلید را دو ویژگی مهم است:

ویژگی اول اندک‌سخن بودن ریاضیات است. این اندک بودن چنان است که اگر یک حرف از آن کم یا به آن اضافه شود، کلام مختل می‌شود. گویی ریاضیات مانند عالم در دیدهٔ عارف است؛ عارفی که اعتقاد دارد:

جهان چون خط و خال و چشم و ابروست
که هر چیزی به جای خویش نیکوست
اگر یک ذره را برگیری از جای
خلل گیرد همه گیتی سراپای[۲]

چرا که به قول ***حافظ***:

نیست در دایره یک نقطه خلاف از کم و بیش
که من این مسئله بی‌چون و چرا می‌بینم

اما، آیا می‌توان عاملی به یکی از فرمول‌های ریاضی اضافه کرد یا مطلبی از آن کم کرد؟ می‌بینیم که نمی‌شود. اندیشه‌های ریاضیات که همان فرمول‌های ریاضیات باشند، به تمام معنی کامل، یعنی منحصربه‌فردند و نشان کمالشان همین منحصربه‌فرد بودنشان است.

همانا که شرط ریاضیات همان شرط **شمس تبریزی** با شخصی اســت که همراهی او را می‌طلبید؛ شرطی که قابل خواندن و مکث کردن است:

گفت: آن‌گاه هم‌ســفر من توانی شــد کــه جوابْ مطابق‌گویی؛ هیچ زیادت نی.

چون باز آمد گفت: زن داری؟

گفت: زن دارم و دو بچه.[3]

ویژگــی دوم عملی بودن آن اســت. ریاضیات، حتی انتزاعی‌ترین آن، جای در عمل دارد. ممکن اســت کسی ادعا کند مطالبی در ریاضیات هست که جنبهٔ عملی ندارد. اما این سخن ناپخته است و علت آن ناصبوری گویندهٔ آن است. آن روز که «حساب تنسور»[4] در قرن نوزدهم اختراع شــد، هیچ‌کس جای آن را در عمل نمی‌دانست. اما چون قرن بیستم رسید و **اینشتاین** پاپور شد و آن را در نظریهٔ نسبیت خود به کار برد، عملی شد.

مثال جالــب دیگری در این مورد ســخن **هاردی** اســت. این محقق ریاضی که از کاربرد علم در ساختن و به‌کاربردن بمب اتمی توسط آمریکا در ژاپن متأثر شده بود، در کتاب معروف خــود، دفاعیهٔ یک ریاضی‌دان، از تقدیر و بخت خود از این رو سپاسگزار است که دانشش، یعنی «نظریهٔ عددها»، به‌گونه‌ای اســت که جنبهٔ عملی ندارد و کســی نمی‌تواند از آن برای آزار و اذیت بشــر سوءاســتفاده کند. این یکی هم چندی نگذشــت که مهم‌ترین جایگاه را در عمل، یعنی رایانه، به دست آورد و بالاترین کاربردها را در حال حاضر در میان رشته‌های دیگر ریاضیات حاصل کرده است.

پس به آن خام‌اندیشــهٔ بی‌صبر و حوصله، از جانب حافظ خطاب می‌کنیم که فرمود: «گریهٔ شــام و سحر ضایع نمی‌شــود.»[5] به کار رفتن ریاضیات انتزاعی مورد اشــاره‌اش، به قول مردم کوچه و بازار، دیر و زود دارد، اما سوخت و سوز ندارد. و مانند درخت دوستی حافظ[6]، یا درخت گردوی آن پیردانهٔ گردوکار[7] اســت که امروز دانــهٔ آن را می‌کاریم و فردا بَرِ آن را می‌خوریم. از آیات قرآن هم به یاد می‌آوریم که خداوند سبحان به رنجوران درازنای شب فرموده است:

«اَلَیسَ الصُّبحُ بِقَریبٍ»[8]

***

مقاله‌مــان را با داســتان شــیرین آن دزد مدعی دُهُل‌زنیِ «مثنوی معنوی» به پایان می‌رسانیم که به آن رنجور نیم‌شــب که از او پرسید: «در چه‌کاری؟» گفت: «دُهُل می‌زنم.» پرســید: «پس بانگ دُهُل کو؟» گفت: «فردا این بانگ را خواهی شنید.»[9]

پی‌نوشت‌ها

۱. این بیت از **نظامی گنجوی**، شاعر بزرگ قرن ششم هجری است، که در کتاب «خسرو و شیرین» از قول **شیرین** به **بزرگ امید حکیم** آورده، و کامل آن به‌صورت زیر است:

چو شیرین دید کان دیرینه استاد
در گنج سخن بر شاه بگشاد
ثنا گفتش که ای پیر یگانه
ندیده چون تویی چشم زمانه
چو بر خسرو گشادی گنج کانی
نصیبی ده مرا نیز ار توانی
کلیدی کن نه زنجیری در این بند
فرو خوان از کلیله نکته‌ای چند

و در جواب شیرین آمده است:

بزرگ امید چون گلبرگ بشکفت
چهل قصه به چل نکته فرو گفت

آن‌گاه در چهــل بیــت حاصــل چهل داســتان «کلیلــه و دمنــه» را بیــان می‌کنــد کــه البته در نهایــت اختصــار و نمونــه‌ای راســتین از کلام قلّ و دلّ اســت. مــا در اینجا بــه آوردن چهار بیت از آن قناعــت می‌کنیــم:

نخستین گفت کز خود بر حذر باش
چو گاو شَتْرَبه زان شیر جَمّاش
هوا بشکن کزو یاری نیاید
که از بوزینه نجّاری نیاید
به تلبیس آن توانی خورد از این راه
کز آن طبل دریده خورد روباه
مکن تا در غمت ناید درازی
چو زاهد ممسکی در خرقه بازی

(کلیات حکیم نظامی گنجوی/ تصحیح وحید دستگردی)

۲. از گلشن راز شیخ محمود شبستری، عارف بزرگ قرن هشتم هجری.

۳. مقالات شمس.

۴. tensor. تنســورها اشــیایی هســتند کــه روابـط خطی بین بردارها، اســکالرها و تنســورهای دیگر را تعریــف می‌کننــد. ایــن اشــیا از لحــاظ ریاضی، صرفاً آرایه‌هایــی از عددهــا یــا تابع‌هــا هســتند کــه طبق قواعــد خاصی، تحت تغییــر مختصات، تبدیل می‌شــوند.

۵. *گریهٔ شام و سحر شکر که ضایع نشد*
قطرهٔ باران ما گوهر یکدانه شد

۶. *تا درخت دوستی کی بردهد*
حالیا رفتیم و تخمی کاشتیم

۷. آن مرد پیر به معترض گردو کاشتن خود که می‌گفت عمر تو مرد پیر به میوهٔ این درخت وفا نمی‌کند، گفت:

دیگران کاشتند، ما خوردیم
ما بکاریم، دیگران بخورند

۸. سورهٔ هود، آیهٔ ۸۱:

آیا صبحدم نزدیک نیست؟

۹. *این مثل بشنو که شب دزدی عنید*
در بُنِ دیوار حفره می‌بُرید
نیم‌بیدَاری که او رنجور بود
تق‌تق آهسته‌اش را می‌شنود
رفت بر بام و فرو آویخت سر
گفت او را: در چه کاری ای پدر؟
خیر باشد نیم‌شب چه می‌کنی؟
تو که‌ای؟ گفتا: دهل‌زن، ای سَنی
در چه کاری؟ گفت: می‌کوبم دهل
گفت: کو بانگ دهل ای بوسبل؟
گفت: فردا بشنویِ این بانگ را
نعرهٔ یاحسرتا وا وَیْلَتا

(مثنوی معنوی/ دفتر سوم/ ۲۸۰۴ـ ۲۷۹۹)

من چو رفتم بشنوی بانگ دهل
آن زمان آگه شوی بر جزء و کل

(الحاقی)

حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متــون ریاضی

اثبات یک اتحاد

مثال ۱. تبدیل به سـینوس و کسینوس برای اثبات یک اتحاد

درستی اتحاد $\operatorname{Sin} x\times \operatorname{Cot} x\times \operatorname{Sec} x=1$ را اثبات کنید.

حل: سـمت چپ اتحاد از سمت راست پیچیده‌تر است. ما سـعی می‌کنیم از طریق بازنویسی سمت چپ برحسب سینوس و کسینوس، اتحاد را اثبات کنیم:

$$\operatorname{Sin} x.\operatorname{Cot} x.\operatorname{Sec} x$$
$$=\operatorname{Sin} x\times \frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x}\times \frac{1}{\operatorname{Cos} x}$$
$$=\frac{\operatorname{Sin} x.\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x.\operatorname{Cos} x}=1$$

سـمت چپ معادله را طوری بازنویسی کردیم که با سمت راست یکسان شد. بنابراین این معادله یک اتحاد است.

مثال ۲. استفاده از اتحاد فیثاغورث برای اثبات یک اتحاد

اتحاد $1-2\operatorname{Sin}^2 x=2\operatorname{Cos}^2 x-1$ را اثبات کنید.

حل: سمت راست معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$2\operatorname{Cos}^2 x-1=2(1-\operatorname{Sin}^2 x)-1$$
$$=2-2\operatorname{Sin}^2 x-1$$
$$=1-2\operatorname{Sin}^2 x$$

مثال ۳. فاکتورگیری برای اثبات یک اتحاد

اتحاد $\operatorname{Csc}^2 x-\operatorname{Cos}^2 x.\operatorname{Csc}^2 x=1$ رااثبات کنید.

حل: سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$(\operatorname{Csc}^2 x=\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 x})$$
$$\operatorname{Csc}^2 x-\operatorname{Cos}^2 x.\operatorname{Csc}^2 x=\operatorname{Csc}^2 x(1-\operatorname{Cos}^2 x)$$
$$=\operatorname{Csc}^2 x.\operatorname{Sin}^2 x$$
$$=\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 x}.\operatorname{Sin}^2 x=1$$

مثال ۴. ضرب کردن در یک مزدوج برای اثبات یک اتحاد

اتحاد $\frac{1-\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x}=\frac{\operatorname{Sin} x}{1+\operatorname{Cos} x}$ را اثبات کنید.

حل: صورت و مخرج سمت چپ اتحاد را در مزدوج $1+\operatorname{Cos} x$، یعنی $1-\operatorname{Cos} x$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\operatorname{Sin} x}{1+\operatorname{Cos} x}=\frac{\operatorname{Sin} x}{1+\operatorname{Cos} x}\times\frac{1-\operatorname{Cos} x}{1-\operatorname{Cos} x}$$
$$=\frac{\operatorname{Sin} x(1-\operatorname{Cos} x)}{1-\operatorname{Cos}^2 x}$$
$$=\frac{\operatorname{Sin} x(1-\operatorname{Cos} x)}{\operatorname{Sin}^2 x}$$
$$=\frac{1-\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x}$$

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Sin x	سینوس x
2. Sec x	سکانت x
3. Csc x	کُسکانت x
4. Verify	نشان دادن، ثابت کردن
5. Identity	اتحاد
6. Solution	حل، پاسخ
7. Complicate	پیچیده
8. Rewriting	بازنویسی
9. Involve	شامل
10. Identical	همانند، یکسان، مساوی
11. Equation	معادله
12. Pythagorean	فیثاغورثی
13. Factor	عامل ضرب
14. Simplify	ساده کردن

EXAMPLE 1 Change to Sines and Cosines to Verify an Identity.

Verify the identity sin x cot x sec x =1.

Solution

The left side of the identity is more complicated than the right side. We will try to verify the identiy by rewriting the left side so that it involves only sines and cosines.

$$\sin x\cot x\sec x=\sin x.\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{1}{\cos x}$$

$$=\frac{\cancel{\sin x}\ \cancel{\cos x}}{\cancel{\sin x}\ \cancel{\cos x}}$$

$$=1$$

we have rewritten the left side of the equation so that it is identical to the right side.Thus we have verified that the equation is an identity.

EXAMPLE 2 Use a Pythagorean Identity t Verify an Identity.

Verify the identity $1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1$.

Solution

Rewrite the right side of the equation.

$$2\cos^2 x-1=2(1-\sin^2 x)-1$$

$$=2-2\sin^2 x-1$$

$$=1-2\sin^2 x$$

EXAMPLE 3

Factor to Verify an Identity

Verify the identity

$$\csc^2 x-\cos^2 x\csc^2 x=1.$$

Solution

Simplify the left side of the equation.

$$\csc^2 x-\cos^2 x\csc^2 x=\csc^2 x(1-\cos^2 x)$$

$$=\csc^2 x\sin^2 x$$

$$=\frac{1}{\sin^2 x}.\sin^2 x=1 \qquad \bullet\ \csc^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

EXAMPLE 4 Multiply by a Conjugate to Verify an Identity

Verify the identity $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

Solution

Multiply the numerator and denominator of the left side of the identity by the conjugate of 1+ cos x, which is 1- cos x.

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}.\frac{1-\cos x}{1-\cos x}$$

$$=\frac{\sin x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^2 x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

شما ترجمه کنید:

Verify the identity $\dfrac{\sin x+\tan x}{1+\cos x}=\tan x.$

Solution

The left side of the identity is more complicated than right side. we will try to verify the identity by rewriting the left side so that it involves only sines and cosines.

$$\frac{\sin x+\tan x}{1+\cos x}=$$

$$\frac{\sin x+\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\cos x}=\frac{\frac{\sin x\cos x}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\cos x}$$

$$=\frac{\frac{\sin x\cos x+\sin x}{\cos x}}{1+\cos x}=\frac{\sin x\cos x+\sin x}{\cos x}\div\frac{1+\cos x}{1}$$

$$=\frac{\sin x\cos x+\sin x}{\cos x}.\frac{1}{1+\cos x}=\frac{\sin x(\cos x+1)}{\cos x}.\frac{1}{1+\cos x}$$

$$=\frac{\sin x(\cancel{1+\cos x})}{\cos x}.\frac{1}{\cancel{1+\cos x}}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$$

we have rewriten the left side of the equation so that it is identical to the right side. Thus we have verified that the equation is an identity.

In Exercises 1 to 56, verify each identity.

1. $\tan x\csc x\cos x=1$
2. $\tan x\sec x\sin x=\tan^2 x$
3. $\dfrac{4\sin^2 x-1}{2\sin x+1}=2\sin x-1$
4. $\dfrac{\sin^2 x-2\sin x+1}{\sin x-1}=\sin x-1$
5. $(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)=1-2\cos^2 x$
6. $(\tan x)(1-\cot x)=\tan x-1$
7. $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x\cos x}$
8. $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{3}{\cos x}=\dfrac{\cos x+3\sin x}{\sin x\cos x}$
9. $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\sec x+\tan x$

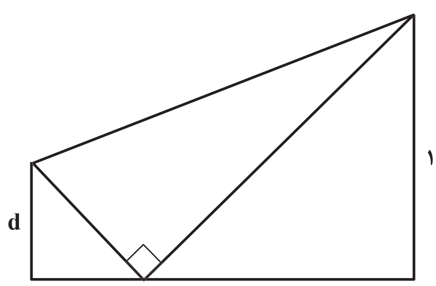
لیلا کولایی‌زاده

هندسهٔ «کاغذ» و «تا»

اشاره

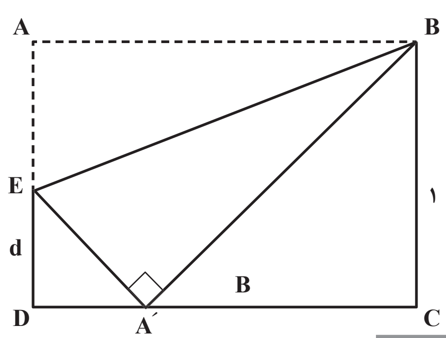
در این مقاله، مسئله‌ای از مبحث هندسهٔ کاغذ و تا طرح و حل می‌شود و در پایان موردی دیگر از این نوع مسئله‌ها مطرح و حل آن به‌عنوان تمرین به مخاطبان واگذار می‌شود.
هندسهٔ کاغذ و تا عنوان یک سلسله از مسئله‌های هندسی است. در این نوع مسئله‌ها، یک صفحه کاغذ با اندازه‌های مشخص در امتداد یک خط راست که آن را خط تا می‌نامند) تا می‌شود و یافتن یک یا چند طول مجهول در شکل تاخورده خواسته می‌شود.

مسئله: یک صفحه کاغذ مستطیل‌شکل به طول $\sqrt{۲}$ و عرض ۱ به صورتی که در شکل ۱ می‌بینید، تا شده است؛ به‌طوری که گوشهٔ سمت چپ بالای روی نقطه‌ای در ضلع پایینی نشسته است. اندازهٔ d چقدر است؟



شکل ۱

حل: شکل داده شده را با اضافه کردن بخش‌هایی از مستطیل که در اثر تا کردن دیده نمی‌شوند، بازسازی و در شکل رئوس را نام‌گذاری می‌کنیم (شکل ۲)



شکل ۲

طول مستطیل برابر $\sqrt{۲}$ است، پس داریم:

$AB = DC = \sqrt{۲}$

آیا در شکل پاره‌خط دیگری را که اندازهٔ طول آن برابر $\sqrt{۲}$ باشد، می‌بینید؟ بله! درست است؛ طول A'B نیز برابر $\sqrt{۲}$ است. زیرا A'B تصویر تاشدهٔ AB است.

حال اندازهٔ طول AE را بر حسب d پیدا می‌کنیم:

$AD = ۱ , ED = d \Rightarrow AE = ۱ - d$

آیا می‌توانید پاره‌خط دیگری را که طولش $۱ - d$ باشد، بیابید؟ درست است. از آنجا که بعد از تاکردن کاغذ، AE به A'E تبدیل می‌شود، بنابراین:

$A'E = ۱ - d$

حال به دنبال مثلث قائم‌الزاویه‌ای در شکل بگردید که اندازهٔ دو ضلع از سه ضلع آن معلوم باشند. درست متوجه شده‌اید، در مثلث A'CB داریم:

$A'B = \sqrt{۲} \; , \; BC = ۱$

ضلع سوم این مثلث، یعنی A'C را می‌توانیم به سهولت با استفاده از رابطهٔ ***فیثاغورس*** به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$A'C^{۲} = A'B^{۲} - BC^{۲}$$
$$A'C^{۲} = (\sqrt{۲})^{۲} - (۱)^{۲} = ۱$$

به وضوح داریم: $A'C > ۰$، پس: $A'C = \sqrt{۱} = ۱$

با مشخص شدن طول A'C، برای محاسبهٔ طول A'D مشکلی نخواهیم داشت:

$A'D = DC - A'C = \sqrt{۲} - ۱$

حال نوبت آن است که به سراغ مثلث EDA' برویم. در این مثلث اندازهٔ ضلع A'D را داریم و اندازهٔ دو ضلع دیگر را نیز بر حسب d به دست آورده‌ایم. چون EDA' مثلثی قائم‌الزاویه است، می‌توانیم رابطهٔ فیثاغورس را در مورد آن به‌کار بگیریم:

$$A'E^{۲} = A'D^{۲} + DE^{۲}$$
$$\Rightarrow (۱-d)^{۲} = (\sqrt{۲}-۱)^{۲} + d^{۲}$$
$$\Rightarrow ۱ - ۲d + d^{۲} = ۲ - ۲\sqrt{۲} + ۱ + d^{۲}$$
$$\Rightarrow -۲d = ۲ - ۲\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow d = \sqrt{۲} - ۱$$

البته اگر شما حوصلهٔ مجذور کردن عبارت‌هایی مانند $۱ - d$ و $\sqrt{۲} - ۱$ را نداشته باشید، راه‌حل دیگری نیز می‌توانید دنبال کنید که به شرح زیر است:

کمی به عقب برمی‌گردیم و به محاسبهٔ برخی زاویه‌ها در شکل۲ می‌پردازیم. اندازهٔ ضلع‌های مثلث A'CB برابر ۱، ۱ و $\sqrt{۲}$ است. این یعنی ما با یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین روبه‌رو هستیم. همان‌طور که می‌دانید، در چنین مثلثی دو زاویهٔ ۴۵ درجه‌ای باید موجود باشد؛ یعنی:

$\angle BA'C = \angle A'BC = ۴۵^{\circ}$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\angle DA'E = ۱۸۰ - \angle EA'B - \angle BA'C$$
$$= ۱۸۰^{\circ} - ۹۰^{\circ} - ۴۵^{\circ} = ۴۵^{\circ}$$

به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که اندازهٔ زاویهٔ DEA' نیز برابر ۴۵ درجه و در نتیجه مثلث EDA' یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است؛ یعنی:

$A'D = DE \Rightarrow DE = \sqrt{۲} - ۱ \Rightarrow d = \sqrt{۲} - ۱$

حال حل مسئلهٔ زیر را بر عهدهٔ آن دسته از شماهایی می‌گذاریم که دنبال چالش بیشتری هستید:

یک صفحه کاغذ مستطیلی‌شکل به نام ABCD، با ابعاد AB=۸ و BC=۶ را در نظر بگیرید.

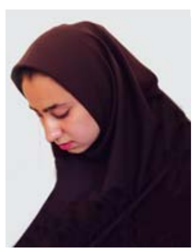
اگر این صفحه کاغذ را جوری تا کنید که گوشهٔ A با وسط ضلع DC در نقطه M برخورد کند، اندازهٔ طول خط تا را محاسبه کنید.

میرشهرام صدر

خاستگاهِ تدوینِ منطق

اشاره

به‌طور معمول در کلاس درس ریاضی، پرسش‌هایی برای دانش‌آموزان مطرح می‌شود که پاسخ به آن‌ها نیازمند زمانی بیشتر از وقت کلاس است. گاهی سؤال‌ها به گونه‌ای هستند که جواب آن‌ها، به اطلاعاتی دربارهٔ تاریخ تدوین یک موضوع، احتیاج دارد و پیش‌نیازهایی به غیر از دستور و قاعده‌های ریاضی را می‌خواهد. شاید پاسخ به این سؤال‌ها از حوصلهٔ همهٔ دانش‌آموزان کلاس خارج باشد. به همین دلیل، در این شماره با دانش‌آموزان علاقه‌مند به فلسفه و منطق ریاضی یک دورهمی تشکیل داده‌ایم که در آن، دانش‌آموزان ابهامات و پرسش‌های خود را دربارهٔ «منطق» بیان می‌کنند و معلم، ضمن پاسخ‌گویی به این پرسش‌ها، مطالبی را به منظور دانش‌افزایی ارائه می‌دهد. در ادامه، شرح گفت‌وگوی این دورهمی را دربارهٔ منطق و خاستگاه تدوین آن می‌آوریم.



دانش‌آموز اول:

در کتاب «آمار و احتمال»، آمده است که **منطق ریاضی** دستور زبان ریاضی است، و وظیفهٔ آن را مطالعهٔ ساختار جمله‌هایی که در ریاضیات به‌کار برده می‌شوند، بیان می‌کند. اما سؤال این است که: منطق یعنی چه؟

معلم:

آیا منظور شما معنی لغوی منطق است؟

دانش‌آموز اول:

بله؛ منظورم معنی لغوی منطق است. این واژه از کجا آمده و به چه معناست؟

دانش‌آموز دوم:

اگر امکان دارد، دربارهٔ انگیزه‌های تدوین منطق هم برایمان صحبت کنید.

معلم:

اول به معنی لغوی منطق می‌پردازیم. واژهٔ منطق برگرفته از کلمهٔ لاتین «logica» و کلمهٔ یونانی باستان

«λογlk» (با تلفظ logike) به معنای هنر استدلال است که از کلمهٔ «logikos» به معنای «بیان یا استدلال» و از کلمهٔ یونانی «λ'oYo؟» (به معنای دلیل، ایده و کلمه) اقتباس شده است. می‌توان این را افزود که معانی واژهٔ یونان باستان logos عبارت‌اند از: «کلمه، فکر، ایده، دلیل آوردن، بیان علت، دلیل و اصل». به‌همین شکل logike دارای معناهایی از قبیل «دارا بودن دلیل، عقلانی، منطقی و استدلالی» است.

ایرانیان عصر ساسانی (۶۵۱ - ۲۲۴ بعد از میلاد) با کارهای **ارسطو** و **افلاطون** آشنا بودند. بنابراین آن‌ها هم فلسفه و منطق را تدریس می‌کردند و یاد می‌گرفتند.

براساس نظر محققان و با استناد به مستندات گوناگون (از اوستا تا بحث‌های Paul ایرانی در باب منطق)، در ایران قبل از اسلام (به‌خصوص ایران دورهٔ ساسانی) چند کلمه برای منطق وجود داشته است:

۱. سُخون: برگرفته از «سخن» به معنای گفتار یا کلام، که ارتباط آن با سخون همانند ارتباط logic با logos است.

۲. سیم گواگیه: (سیم یعنی معنی داشتن و گواگیه یعنی استدلال یا عقلانیت).

۳. تَرکه: (کلمه‌ای از زبان سانسکریت)، همراه با فرم‌های عربی شدهٔ آن، یعنی «طرق» (traq) و «طرقا» (tarqa).

۴. منطگ (mantag): برگرفته از man یعنی دانستن، و tag که پیشوندی به معنای همراه و سازگار است.

کلمهٔ عربی مورد پذیرش برای logic هم «منطق» است که احتمالاً از کلمهٔ نطق به معنای کلام، ادای سخن و فصاحت اقتباس شده است. معنای جانبی منطق، کلام و زبان است. با استناد به متونی از قبیل «خرده اوستا» (برای مثال ص iii و ۱۰۴)، برخی محققان می‌گویند که ریشهٔ کلمهٔ ظاهراً عربی، منطق، نطق نیست، بلکه ریشهٔ آن کلمهٔ «manthra» در اوستا است که به‌معنای «هجی کردن» یا «راز نهان» است.

دانش‌آموز دوم: ....

می‌دانیم که منطق، استدلال مبتنی بر قضاوت صحیح و عقل سلیم است. با استناد به کتاب درسی، منطق ریاضی به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند.

یادم هست، در اولین دورهمی دربارهٔ «اعتبار یک استدلال» بحث کردیم. اما تا به حال از خاستگاه و انگیزه‌های تدوین منطق صحبت نکرده‌اید. لطفاً بحث را در این خصوص ادامه دهید.

معلم: ....

عقل انسان برخی از موارد عملی و بدیهی، مانند «ظلم بد است»، «عدل خوب است»، «غیبت بد است»، «توکل به خدا خوب است» و مانند این‌ها را درک می‌کند. همچنین، عقل توانایی درک موارد غیرعملی را دارد؛ مواردی مانند «کل، اعظم از جزء است»، یا «جمع نقیضین محال است». اما سؤال شما دربارهٔ تدوین منطق است. یعنی چه شد یا چه نیازهایی در عمل به‌وجود آمدند که منطق تدوین شد؟

شهرت تدوین منطق نصیب ارسطو (شاگرد افلاطون) شد. یکی از انگیزه‌های مهم تدوین منطق، وجود سوفسطایی‌ها بود که در زمان سقراط و افلاطون می‌زیستند.

دانش‌آموز سوم: ....

سوفسطایی‌ها که بودند و چه می‌کردند؟!

معلم: ....

بحث کم‌کم جذاب می‌شود، سر کلاس ریاضی، سؤالاتی نظیر کلاس تاریخ مطرح می‌فرمایید!

قبل از هر چیز، برخی از خصوصیات سوفسطایی‌ها را بیان می‌کنم:

- انسان‌های سخنوری بودند که آموزش سخنوری می‌دادند.
- در استدلال‌های خود از سفسطه و مغالطه استفاده می‌کردند و مسائل باطل را حق جلوه می‌دادند.

ایرانیان عصر ساسانی با کارهای *ارسطو* و *افلاطون* آشنا بودند. بنابراین آن‌ها هم فلسفه و منطق را تدریس می‌کردند و یاد می‌گرفتند

***ابن ندیم* با ظن قوی می‌گوید که منطق در ایران تدوین شده است و کتاب‌های مربوط به آن در ایران تألیف شده‌اند. ارسطو از ترجمهٔ آن‌ها استفاده کرده است**

- بین مـــردم دارای شــهرت و محبوبیت بودند و موقعیتی مناسب داشتند.
- معلمانی حرفه‌ای بودند که برای اولین بار در یونان باستان در مقابل تعلیم، مزد دریافت می‌کردند.
- بـــه عقاید و حقایـــق یونانی حملات شـــدیدی می‌کردند.
- رئیـــس آن‌ها، **پرتوگراس** بود و می‌گفت: خودم هستم و غیر از من حقیقتی وجود ندارد.

ارســـطو در چنین عصری و در قرن چهارم قبل از میلاد، بنا به تقاضای ***اسکندر مقدونی***، منطق را تدوین کرد. اســـکندر ۵۰۰ هزار دینار به او پاداش داد و ۱۲۰ هزار دینار حقوق سالانه برایش مقرر کرد.

دربارهٔ سوفســـطایی‌ها گفته‌اند که آن‌ها به ضوابط عقلی پایبند نبودند و سفسطه (باطل را حق جلوه دادن) می‌کردند. آن‌ها ابتدا از نظریـــه‌ای دفاع می‌کردند و به دنبال آن با همان اســـتحکام، خلاف آن نظریه را ثابت می‌کردند.

حکایت می‌کنند که یکی از سوفســـطایی‌ها به رم آمد تا هنر خود را در این مورد نشان دهد. وقتی بخش نخســـت سخنانش به پایان رســـید، همهٔ حاضران او را تحســـین کردند. اما وقتی که همـــان نظریه را رد کرد، یعنی هم خـــود نظریه و هم مخالفـــش را اثبات کرد، حاضران او را کتک مفصلی زدند.

ارســـطو در این دوره، برای مقابله با چنین افرادی، شـــروع به تدوین منطق کرد. زیرا برای اثبات حق باید معیاری در نظر می‌گرفتند و یک سلسله قواعد و اصول تعقل و تفکر بنا نهاده می‌شد.

این اصول به منطق ارســـطویی مشـــهورند. البته ارســـطو در تدوین منطق از رســـاله‌هایی که افلاطون برای استادش ***سقراط*** نوشـــته بود، بهره گرفت و آن‌ها را تکمیل کرد.

دانش آموز چهارم:

همان‌طـــور کـــه گفتید، در دورهٔ ساســـانی و قبـــل از آن، چندین کلمه مانند سُـــخون، ســـیم گواگیه، ترکه و منطگ بـــرای منطـــق وجود داشـــته است. آیا ایرانیان قبل از اسلام در تدوین منطق دست داشته‌اند؟

معلم:

در تدوین منطق یک قول دیگر از اســـتاد ***محمود شهابی***، نویســـندهٔ کتاب «رهبر خـــرد» وجود دارد. در دیباچهٔ این کتاب آمده است که منطق پیش از طلوعش در یونان، از شـــرق در ایران، مهـــد دانش و مرکز علم و معرفت متجلی شـــده اســـت. به طوری کـــه در حملهٔ اســـکندر مقدونی بـــه ایران، به وســـیلهٔ وی کتاب‌های منطقی به یونان انتقال یافتند و این کتاب‌ها به ارسطو و شـــاگردانش داده شـــدند. آن‌ها منطق را از روی این کتاب‌ها تدوین و تکمیل کردند.

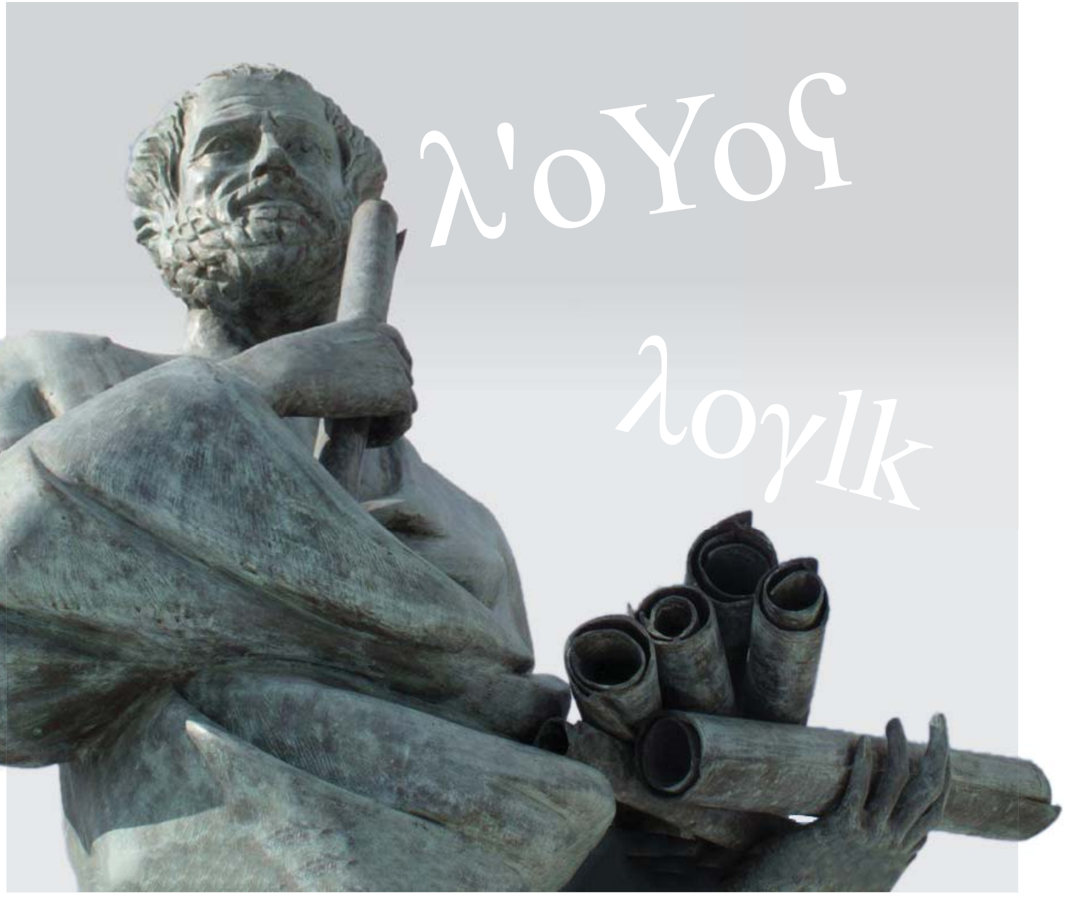
از قول ***ابن ندیم*** هم آمده اســـت که احتمال، بلکه ظن قـــوی می‌گوید که منطق در ایران تدوین شـــده است و کتاب‌های مربوط به آن در ایران تألیف شده‌اند. ارســـطو از ترجمهٔ آن‌ها اســـتفاده کـــرده و از آن پس تدوین منطق را در یونان به خود نسبت داده است. به مناسبت اوضاع آن عصر، گوی نام نیک را ربوده و این شهرت نصیب وی شده اســـت. این جمله از ارسطو بر جای مانده است که: «پیشینیان ضوابطی را برای ما به یادگار گذاشتند و ما آن‌ها را کامل کردیم.»

ایـــن جمله به‌طور صریح بیان می‌کند که ارســـطو اولین مســـتنبط منطق نیســـت. اما به هر حال شهرت تدوین منطق نصیب ایشان شده است.

بالاخره آثار منطقی ارســـطو در قرن ششم میلادی در کتابی بـــه نام «ارغنون» تدوین گشـــت. ارغنون به معنای افزار یا آلت اســـت. عده‌ای می‌گویند که ارسطو منطـــق را فن می‌دانســـت و آن را به‌عنوان علم در نظر نمی‌گرفـــت. به همین دلیل نام ایـــن کتاب را این‌گونه انتخاب کرده است.

دانش آموز پنجم:

لطفاً برخی از استدلال‌های سوفســـطایی‌ها را بیان کنید. باید جالب باشد که آن‌ها ابتدا از نظریـــه‌ای دفاع می‌کردند و ســـپس به دنبال آن با همان قوت آن نظریه را رد می‌کردند.



ضرب‌المثل «دیوار موش دارد، موش گوش دارد، پس دیوار گوش دارد»، نمونه‌ای از استدلال‌های سوفسطایی‌ها بوده است

معلم:

نمونـــه‌ای از مغالطه‌های سوفســـطایی‌ها را از کتاب «منطق صوری» دکتـــر ***محمد خوانساری*** نقل می‌کنم. همان‌طور که گفتم، پرتوگراس رئیس سوفسطایی‌ها بود. ایشان شاگردی به نام ***اوالت*** داشت. این شاگرد نزد استاد فن بیان می‌آموخت. شاگرد نصف شهریهٔ خود را پرداخته بود و پرداخـــت بقیه را به وقتی موکول کرده بود که در اولین ادعای خود نزد حریف پیروز شود.

پس از خاتمهٔ دورهٔ آموزش، برای شـــاگرد موقعیتی بـــرای اقامهٔ دعوی پیش نیامد و اســـتاد بـــرای گرفتن اجرت خود، ادعانامه‌ای علیه او تنظیم کرد و به او گفت: «تو چه در این دعوی پیروز شـــوی و چه محکوم، در هر دو صورت بقیهٔ اجرت را بایـــد بپردازی. زیرا اگر در این دعوی غالب شـــوی، چون در نخستین دعوی خود غلبه کرده‌ای، مطابق پیمانی که با هم داشتیم، باید دین خود را ادا کنی. اگر هم مغلوب شوی، قاضی تو را به ادای دین مجبور خواهد کرد.»

گویا پرتوگراس شاگرد خوب و زبده‌ای تربیت کرده بود. جواب شاگرد در مقابل استاد شنیدنی‌تر و جالب‌تر است. شاگرد در جواب استاد گفت: «چنین نیست و در هر دو صورت مرا دینی نسبت به تو نخواهد بود. زیرا اگر غالب شوم، با دلیل اثبات کرده‌ام که دینی بر عهده ندارم و قاضی مرا معاف خواهـــد کرد. در صورتی که محکوم شوم، باز هم نباید چیزی بپردازم. زیرا شرط ما این بود که در نخستین جلسه‌ای که در دعوی خود پیروز شوم، مدیون شما باشم.»

همچنین در تاریخ فلسفه آمده است که ضرب‌المثل «دیوار مـــوش دارد، موش گوش دارد، پس دیوار گوش دارد»، نمونه‌ای از این نوع استدلال‌های سوفسطایی‌ها بوده است.

***

امیدوارم از این دورهمی ریاضی لذت برده باشـــید. منتظر دریافت سؤال‌ها و ابهام‌های شـــما عزیزان در مورد موضوع‌های کتاب درسی هستیم تا در دورهمی‌های دیگر به آن‌ها بپردازیم.

منابع

۱. شـــهابی، محمـــود (۱۳۶۱). رهـــبر خرد، قسمت منطقیات. کتـــاب‌فروشی خیـــام. تـــهران. چاپ ششم.
۲. خوانســـاری، دکتـــر محمد (۱۳۷۳). منطق صوری (جلد ۱ و ۲). نشر آگاه. تهران. چاپ هفدهم.
۳. استاد باقرپور کاشانی/ کلاس تدریـــس منطـــق. فروردین ۱۳۹۵/ مشهد مدرسه آیت‌الله خویی

بهنام آیتی

ریاضیات در متن زندگی

گفت‌وگو با: غلامحسین افشاری

عضو هیئت علمی و مسئول دانشگاه فرهنگیان دزفول

اشاره

غلامحسین افشاری، عضو هیئت علمی و مسئول دانشگاه فرهنگیان، «واحد شیخ مرتضی انصاری دزفول» است. در این واحد دانشگاهی، دانشجویان در رشته‌های کارشناسی آموزش ابتدایی، مشاوره و راهنمایی تحصیلی، معارف اسلامی، عربی، جغرافیا و کودکان استثنایی به تحصیل اشتغال دارند و پس از چهار سال با مدرک کارشناسی در رشته‌ای که تحصیل و دانش‌آموخته شده‌اند، به استخدام آموزش‌وپرورش درمی‌آیند. در پی مشروح گفت‌وگو با ایشان آمده است.

■ **دانشجویان رشتهٔ آموزش ابتدایی، چگونه برای تدریس ریاضی در مدارس آموزش می‌بینند؟**

● همان‌طور که می‌دانیم، در نظر همهٔ دانش‌آموزان ایرانی و غیرایرانی درس ریاضی یکی از درس‌های مهم و دشوار برنامهٔ درسی است. در خصوص شیوهٔ آموزش آن نیز، صاحب‌نظران تعلیم‌وتربیت، ***ژان پیاژه***، ***جورج پولیا*** و ... مطالعات گسترده‌ای در مورد چگونگی آموزش به‌منظور درک و فهم دشوار این درس داشته‌اند. لذا در برنامهٔ درسی دانشجویان رشتهٔ آموزش ابتدایی دو درس به نام‌های «مبانی آموزش ریاضی دورهٔ ابتدایی» و «آموزش ریاضی دورهٔ ابتدایی» وجود دارد.

در درس مبانی، دانشجویان با چیستی و چرایی آموزش مطالب ریاضی آشنا می‌شوند. آن‌ها می‌آموزند که چگونه دانش‌آموزان را با فایده‌های یادگیری موضوع‌های ریاضی و نقشی که در زندگی واقعی دانش‌آموزان دارند، و همچنین اهمیت یادگیری دانش محتوایی مطالب ریاضی مرتبط به دورهٔ اول و دوم ابتدایی آشنا کنند. در واحد درسی آموزش ریاضی دورهٔ ابتدایی، دانشجویان در خصوص چگونگی نحوهٔ آموزش موضوع‌های ریاضی به دانش‌آموزان آشنا می‌شوند. به‌طور خلاصه لازم است که دانشجویان و استادان این واحدهای درسی هر دو با نظریه‌های روان‌شناسی تعلیم‌وتربیت و روان‌شناسی یادگیری آشنایی داشته باشند و با مطالعه و به کارگیری نظریات روان‌شناسان و ترکیب آن‌ها با مفاهیم درسی مخصوص به رشتهٔ خود، تأثیر کارشان را بالا ببرند همچنین از هنر معلمی خود نیز برای پیشگیری از بدفهمی‌های شاگردان بهره بگیرند.

امید است با طی این فرایند، شیوه‌های آموزشی مؤثر ریاضیات در جهت رشد و ارتقای فکری دانش‌آموزان مؤثر و مفید واقع شوند تا در آینده به نتایج بهتری دست یابیم.

■ **چگونه باید ریاضیات را به دانش‌آموزان آموزش داد تا دانش‌آموزان خوب و مؤثر یاد بگیرند. منظور از این یادگیری حفظ طوطی‌وار مطالب نیست بلکه فهم و بالاتر از آن، درک مفاهیم ریاضی است.**

● توصیه‌های من به‌صورت تیتروار عبارت‌اند از اینکه:

- ریاضیات را در زندگی روزمرهٔ خود به کاربگیریم.

- از ریاضی به‌عنوان وسیله‌ای برای ایجاد نظم فکری

استفاده کنیم.
- با قوانین ریاضیات آشـــنا، و آن را با قوانین زندگی اجتماعی و قوانین علمی انطباق دهیم.
- مســائل واقعی زندگــی خود را طــرح کنیم و با استفاده از ابزار ریاضی، برای این مسائل واقعیت‌مدار راه‌حل‌های درست به دست آوریم.
- مثلاً ببینند ســاعت چند اســت، چه زمانی برای رســیدن به مدرســه لازم اســت و نتیجه بگیرند، کی باید از منزل به قصد رســیدن به مدرسه خارج شوند.
-کاربرد ریاضی را باید در همهٔ ابعاد زندگی مشــاهده کنیم.
- مثلاً بازه‌های عددی ریاضی در تشخیص طبی مؤثر هستند. وقتی آزمایش تشــخیص طبی می‌دهید، با یــک بازهٔ عــددی مواجــه می‌شــوید. چنانچه جواب آزمایش شــما در این دامنهٔ عددی باشــد، وضعیت شــما طبیعی اســت و در غیر این صورت متأســفانه وضعیت سلامت شما در بخش مشخص شده، نشــانه‌ای از بیماری است. برای مثال، تست قند خــون، چربی خون، فشــار خــون و ... یا در رانندگی ســرعت مجاز و غیرمجــاز تعریف دارند و با شــاخص‌های عددی مشخص می‌شوند. در قالب پدیده‌های زندگــی کمیت‌های ریاضی وجود دارند که دانش‌آموزان می‌توانند نســبت به آن‌ها حساس باشند. از این طریق، ریاضی در زندگی روزمرهٔ آن‌ها فعال می‌شود و در ایجاد نگرش مثبت آن‌ها نسبت به درس ریاضی نقش بسزایی را ایفا می‌کند.

بنابرایــن درس ریاضی کاربرد زیــادی در زندگی روزمره مــا دارد و باید ریاضی را خوب آموزش داد تا شاگردان آن را خوب یاد بگیرند؛ چون برای سلامتی، تصمیم‌سازی درست، مدل‌سازی، محاسبه‌ها و به‌طور کلی در صنایع، بازرگانی، بهداشت و ... موردنیاز است. ریاضی با چگونه زیستن همهٔ مردم می‌تواند مرتبط باشد.

خلاصه اینکــه باید ریاضی را به‌صورت درســت به دانش‌آموزانمان درس بدهیــم، چون در زندگی روزمرهٔ آن‌ها بسیار کاربردی است.

■ **خوانندگان نشریهٔ ما دانش‌آموزان دورهٔ دوم متوسطه هستند، چه توصیه‌هایی برای آن‌ها دارید؟ چگونه آن‌ها می‌توانند بهتر ریاضی را یاد بگیرند؟ چگونه با استفاده از ریاضیات بتوانند تفکر انتقادی، تفکر خلاق و تفکر ریاضی داشته باشند؟**

● یکی از مواردی که در آموزش ریاضی بسیار اهمیت دارد، عینیت‌گرایی است. عینیت‌گرایی یعنی اینکه قابل مشاهده و آزمایش کردن باشد. جان دیویی، فیلسوف بنام تعلیم‌وتربیت، معتقد است که معلمان بهتر است دانش‌آموزان را در موقعیت واقعی یا در دنیای روزمره قرار دهند و مسئله‌ای از مسائل مبتلا به زندگی طرح کنند تا شاگردان به‌طور واقعی و ملموس درگیر و به حل آن علاقه‌مند شوند. مسئله باید با نیاز شاگرد مرتبط باشد. وقتی می‌گوییم نیاز، یعنی اگر مسئله را حل نکرد ضرر خواهد کرد. پس چون برای رفع نیاز خودش است، به تکاپو می‌افتد و در پی حل مسئله پیش می‌رود. همانند فردی که برای سلامتی خود مواد غذایی مشخصی را باید پیدا و مصرف کند تا سلامتی‌اش تأمین شود. بنابراین توصیه می‌شود که :
- دانش‌آموز سعی کند، در بطن زندگی خودش طرح مسئله کند.

درس ریاضی کاربرد زیادی در زندگی روزمره ما دارد. ریاضی با چگونه زیستن همهٔ مردم می‌تواند مرتبط باشد

- دانش‌آموزان به‌صورت مشارکتی درگیر طرح و حل مسائل شوند و از تجربیات هم برای فهم و حل مسئله استفاده کنند.
- ریاضیات را به‌صورت کاربردی یاد بگیرند. مثلاً در بحث ترافیک، بحث سلامتی، بحث معاملات، محاسبهٔ میزان درصد سود کالا، یا در میزان خریداری رنگ برای اتاق و ... .

فرمول‌های ریاضی اتفاقی به‌وجود نیامده‌اند، بلکه ابزارهایی هستند برای کمک به ما که مسائل را حل کنیم

نکتهٔ دیگر اینکه با طرح مسائل زندگی شاگردان متوجه می‌شوند که فرمول‌های ریاضی اتفاقی به‌وجود نیامده‌اند، بلکه ابزارهایی هستند برای کمک به ما که مسئله را حل کنیم. فراهم آوردن یک موقعیت یا چالش واقعی به‌منظور رسیدن به یک مسئلهٔ واقعی که می‌توان آن را با استفاده از ریاضیات مدل‌سازی و سپس حل کرد، در زمرهٔ مهم‌ترین وظایف دست‌اندرکاران مدرسه است. زیرا در امر پرورش تفکر که از اهداف عالی نظام آموزشی است، تأثیرگذار است. من به این فرایند ایمان دارم که: می‌شنوم فراموش می‌کنم، می‌بینم به‌خاطر می‌سپارم، انجام می‌دهم یاد می‌گیرم.

دکارت در صحبتی مبالغه‌آمیز می‌گوید: همهٔ مسائل جهان را می‌توان به یک مسئلهٔ ریاضی تبدیل کرد و همهٔ مسائل ریاضی قابل تبدیل به یک مسئلهٔ جبری هستند. همهٔ مسائل جبری هم قابل تبدیل به یک معادله‌اند.

■ **استاد در زمینهٔ مهارت‌های حل مسئله و جایگاه ارزشمند آن‌ها در فهم و درک مطالب ریاضی چه صحبت‌هایی دارید؟**

● مطلبی که مهم‌تر از حل مسئله است، خواندن و طرح مسئله است. نیومن، در پژوهش خود علت ۵۰ درصد ناکامی دانش‌آموزان در حل مسائل ریاضی را ناتوانی آن‌ها در درک مفهوم مسئله عنوان کرد. آن‌ها نمی‌دانستند که چه داده‌هایی را بیان کرده است و چه نتایجی را می‌پرسد. برخی از آن‌ها درگیر داده‌های اضافی مسئله می‌شوند، فریب می‌خورند و موفق نمی‌شوند. ***جورج پولیا*** برای حل مسائل ریاضی مدلی چهار مرحله‌ای را به‌صورت زیر بیان می‌کند:

- فهم مسئله
- انتخاب راهبردی که به حل مسئله منتج می‌شود.
- پیاده‌سازی آن راهبرد.
- بازخورد یا چک کردن پاسخ مسئله.

در این فرایند هم فهم مسئله جایگاه ویژه‌ای دارد. یعنی شاگرد ابتدا باید مسئله را بخواند. با زبان خود برای خودش یا دوستش آن را توضیح دهد. معلومات و مجهولات آن را مشخص کند. متغیرهای مسئله را بزرگ یا کوچک کند. حتی متغیرها را به آنچه که برای خودش و زندگی اطرافش معنادار است، تغییر دهد. چون اصل بر فهم مسئله است؛ اگر مسئله را فهمید راه رسیدن به جواب را احتمالاً پیدا خواهد کرد.

دانش‌آموزی که بنا به هر دلیل نمی‌تواند صورت مسئله را بفهمد، به تدریج از ریاضی متنفر می‌شود.

■ **استاد اطلاع داریم حضرت‌عالی در زمینهٔ آموزش «فبک» به پژوهش‌هایی دست زده‌اید. با توجه به اهداف فبک امکان دارد که این دورهٔ آموزشی در ارتقای یادگیری ریاضیات مؤثر باشد؟**

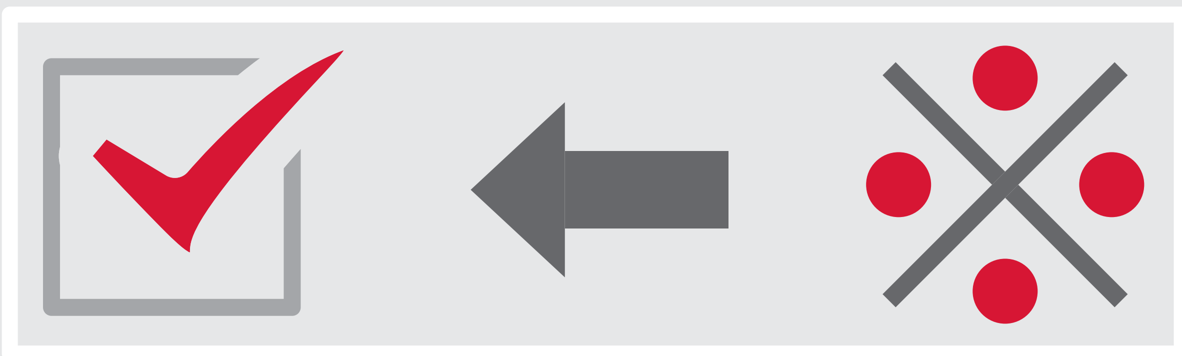
● بله، بنده به اتفاق عده‌ای از همکاران به اجرای پژوهشی در خصوص تأثیر روش حلقه‌های کندوکاو (فلسفه برای کودکان یا همان فبک) بر تفکر انتقادی و سواد خواندن دانش‌آموزان در درس مطالعات اجتماعی دورهٔ ابتدایی اقدام کردیم. پژوهش نشان داد دانش‌آموزانی که دورهٔ فبک را گذرانده بودند، در هر دو متغیر ذکر شده پیشرفت داشته‌اند.

در این خصوص لازم است توضیح دهم که آقای پروفسور ***لیپمن***، استاد دانشگاه آمریکا، در کلاس‌های درسی خود متوجه شده بود که دانشجویان کلاس‌هایش آن‌گونه که شایسته است، مهارت تحلیل، درک و پرسشگری را ندارند. لذا به این نتیجه رسید که برای بهبود و پرورش تفکر واگرا بهتر است که آموزش را از سنین پنج سالگی شروع کرد و از طریق داستان‌گویی و مشارکت دادن کودکان در واکاوی‌های منطقی، مهارت پرسش‌گری و تفکر را در حد امکان در ذهن آن‌ها فعال کرد. بنده به کارگیری این دوره را برای افزایش درک و فهم کودکان در درس ریاضی بررسی نکرده‌ام، اما احتمال می‌دهم این فرایند تأثیر مثبتی بر آموزش ریاضی هم داشته باشد.

■ **بسیار سپاسگزارم از وقتی که به ما دادید.**

محمدتقی طاهری تنجانی

برهان خلف



اشاره

یکی از روش‌های استدلال ریاضی استفاده از برهان خلف در حل مسائل است. در این روش به‌جای آنکه درستی یک گزاره را به‌طور مستقیم ثابت کنیم، راهی غیرمستقیم انتخاب می‌کنیم و ثابت می‌کنیم با نپذیرفتن درستی گزارهٔ حکم به نتیجه‌ای نامعقول می‌رسیم. به همین خاطر این شیوهٔ اثبات را روش غیرمستقیم نیز می‌گویند.

اقلیدس اولین کسی بود که از برهان خلف در کتاب مشهور خود به نام «مقدمات» استفاده کرد. او آن را معمای برهان خلف نامید. یکی از کارآمدترین روش‌های استدلال ریاضی روش برهان خلف است. در این مقاله با مثال‌های ساده و معماگونه، ورودی به شیوهٔ استفاده از برهان خلف داریم.

مثال ۱. از کیسه‌ای شامل دو کلاه قرمز و یک کلاه سیاه، دو کلاه را برمی‌داریم و بر سر دو نفر A و B قرار می‌دهیم. از آن‌ها می‌خواهیم با توجه به اطلاعات رنگ کلاه‌های داخل کیسه، رنگ کلاه خودشان را حدس بزنند.

فرد A بعد از مدتی فکر کردن گفت: «نمی‌دانم کلاهم چه رنگی است!» بلافاصله فرد B گفت: رنگ کلاه من قرمز است. فرد B چگونه استدلال کرد؟

پاسخ ۱. B با خود فکر می‌کند که اگر کلاه سرش سیاه باشد، شخص A باید فوراً جواب می‌داد و رنگ کلاهش را حدس می‌زد. اما چون او جواب نداد، پس رنگ کلاه من سیاه نیست. در نتیجه کلاهم حتماً قرمز است.

همان‌طور که در مثال ۱ مشاهده شد، فرد B به‌جای استدلال مستقیم به شیوه‌ای غیرمستقیم و اینکه اگر کلاه من سیاه بود (خلاف حکم مورد نظر) و نوع برخورد A نتیجه می‌گیرد که کلاهش قرمز است. به مثال دیگری در این زمینه توجه کنید.

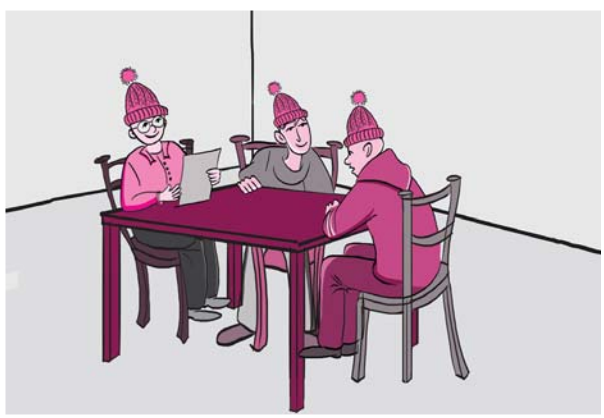
مثال ۲. سه فرد A ، B و C روی پله‌هایی به‌صورت شکل ۱ نشسته‌اند. از کیسه‌ای که شامل سه کلاه سیاه و دو کلاه قرمز است، در تاریکی روی سر هر یک از افراد A ، B و C کلاهی قرار می‌دهیم. سپس از آن‌ها می‌خواهیم رنگ کلاهشان را تشخیص دهند. C می‌گوید من رنگ کلاهم را نمی‌دانم. بلافاصله B می‌گوید من هم رنگ کلاهم را نمی‌دانم. بعد از صحبت‌های C و B، فرد A می‌گوید رنگ کلاه من سیاه است. A چگونه استدلال می‌کند؟

پاسخ ۲. (روش برهان خلف) A با خودش این‌گونه استدلال می‌کند که اگر رنگ کلاه من قرمز باشد، پس رنگ کلاه B قرمز نیست، چون در غیر این صورت شخص C باید جواب می‌داد که کلاه سر خودش سیاه است. شخص B کلاه قرمز را باید روی سر A ببیند و جواب منفی C را هم می‌شنود. پس شخص B باید متوجه سیاه بودن کلاه خودش شود، اما شخص B جواب منفی داده است. این تناقض نشان می‌دهد که فرض قرمز بودن کلاه A منتفی است. پس باید رنگ کلاه A سیاه باشد.

مثال ۳. سه فرد A ، B و C دور یک میز نشسته‌اند. از داخل کیسه‌ای که دارای سه کلاه سیاه و دو کلاه قرمز است، در تاریکی روی سر هر یک از این افراد کلاهی می‌گذاریم. با توجه به اطلاعات داخل کیسه که هر سه نفر می‌دانند، می‌خواهیم رنگ کلاهشان را حدس بزنند.

اما مدت‌زمان زیادی می‌گذرد و هر سه در فکر هستند، یکدفعه هر سه نفر یکصدا می‌گویند: «من رنگ کلاه خودم را می‌دانم». چگونه استدلال کرده‌اند؟

پاسخ ۳. این افراد از روش برهان خلف استفاده کرده‌اند. کلاه هر سه نفر سیاه است. اگر رنگ کلاه هیچ کدام از این سه نفر سیاه نباشد (فرض خلف)، حداقل کلاه یکی از آن‌ها قرمز است. در نتیجه دو حالت زیر در نظر گرفته می‌شود:



حالت اول) کلاه دو نفر قرمز باشد. این حالت ممکن نیست، چون در این صورت شخص سوم فوراً جواب می‌داد که کلاهش سیاه است.

حالت دوم) کلاه یکی از افراد (مثلاً A) قرمز باشد. این حالت نیز ممکن نیست، چون در این صورت نفر B (یا C) پیش خود فکر می‌کند که اگر کلاه سر خودش نیز قرمز باشد، شخص C (یا B) باید متوجه رنگ کلاه خودش می‌شد اما شخص C (یا B) جواب نمی‌دهد. پس کلاه A قرمز نیست. در نتیجه بعد از چند دقیقه فکر کردن شخص B (یا C) باید جواب می‌داد که کلاه سر خودش سیاه است.

بنابراین در هر دو حالت به تناقض رسیدیم. یعنی کلاه هیچ یک از آنان قرمز نیست، پس کلاه هر سه نفر سیاه است.

مثال ۴. پدری سه فرزند به نام‌های A، B و C داشت. می‌خواست باهوش‌ترین آن‌ها را شناسایی کند. از آن‌ها خواست دور میز دایره‌ای بنشینند و بر سر هر کدام در تاریکی یک کلاه از رنگ‌های سیاه یا قرمز قرار داد و به آن‌ها گفت: رنگ کلاه شما قرمز یا سیاه است. حالا هر کس کلاهی به رنگ قرمز می‌بیند، دست خود را بلند کند. هر سه نفر دست خود را بلند می‌کنند. سپس از آن‌ها می‌خواهد که هر کس رنگ کلاه خود را تشخیص داد، از جای خود بلند شود. بعد از چند دقیقه A از جای خود بلند شد. این شخص چگونه به رنگ کلاهش پی برد و کلاهش چه رنگی بود؟

پاسخ ۴. رنگ کلاه A قرمز بود. A پیش خود این‌گونه فکر می‌کند: آیا رنگ کلاهم می‌تواند سیاه باشد؟ اگر رنگ کلاهم سیاه باشد، B (یا C) می‌فهمد که کلاهش قرمز است. پس شخص B (یا C) باید از جای خود بلند می‌شد . از آنجا که هیچ‌یک از آن‌ها از جای خود بلند نشدند، پس رنگ کلاه A سیاه نیست و در نتیجه قرمز است.

مثال ۵. سه فیلسوف یونان باستان به نام‌های A، B و C زیر درختی خوابیده بودند. رهگذری پیشانی هر سه را سیاه کرد و از آنجا دور شد. این سه نفر از خواب بیدار شدند. هر یک به سیاه شدن پیشانی دو نفر دیگر می‌خندیدند. در یک لحظه C از خندیدن باز ایستاد و فهمید که پیشانی او نیز سیاه شده است. C چگونه به این نتیجه رسید.

پاسخ ۵. C این‌گونه استدلال می‌کند: اگر پیشانی من سیاه نباشد (فرض خلف)، A و B دارند می‌خندند و می‌بینند که پیشانی من سیاه نیست. پس در یک لحظه A (یا B) باید از خندیدن باز می‌ایستاد، چون می‌فهمید که B (یا A) به او می‌خندد، ولی آن‌ها خندهٔ خودشان را قطع نکردند. پس پیشانی من نیز باید سیاه باشد.

مثال ۶. سه فیلسوف A، B و C دور یک میز دایره‌ای‌شکل نشسته‌اند. بر سر هر کدام یک کلاه دارای دو برچسب رنگی قرار می‌دهیم و به آن‌ها می‌گوییم برچسب‌های کلاهشان از دو رنگ سفید و سیاه است و تعداد هیچ‌کدام از آن‌ها بیشتر از ۴ تا نیست. از A، B و C به ترتیب سؤال می‌کنیم: آیا رنگ برچسب‌های کلاهشان را می‌توانند تشخیص دهند؟ جواب هر سه نفر منفی است. برای بار دوم از A می‌پرسیم. و جوابش منفی است. سپس از B همان سؤال را می‌پرسیم در کمال ناباوری جوابش مثبت است. B چگونه به رنگ برچسب کلاهش پی برد؟

پاسخ ۶. رنگ برچسب‌های کلاه B یکی سفید و یکی سیاه است. B این‌گونه می‌اندیشد که اگر هر دو برچسب کلاهش سیاه باشد، در این‌صورت شخص A در دور دوم سؤال کردن می‌فهمید که برچسب‌های کلاهش یکی سفید و یکی سیاه است. زیرا در این حالت شخص A برای خود چنین استدلال می‌کند که اگر برچسب‌های کلاه من سیاه باشد، آن‌گاه C همان بار اول چهار برچسب سیاه می‌دید و می‌فهمید که برچسب کلاهش سفید است. پس این حالت ممکن نیست.

شخص A دوباره پیش خود فکر می‌کند: اگر برچسب‌های کلاه من سفید باشد، آن‌گاه شخص C همان بار اول می‌فهمید که برچسب‌های کلاهش یکی سفید و یکی سیاه است. در نتیجه این حالت ممکن نیست.

به همین ترتیب شخص A استدلال می‌کند که برچسب‌های کلاهش سفید نیز نیست، چون او در دور دوم متوجه می‌شد که برچسب‌های کلاهش یکی سفید و یکی سیاه است و این یک تناقض است. پس برچسب‌های کلاه فیلسوف B سیاه نیست. به همین ترتیب فیلسوف B استدلال می‌کند که برچسب‌های کلاهش سفید نیست.

***

همان‌طور که در مثال‌های بالا مشاهده شد، در روش برهان خلف فرض می‌کنیم حکم مورد نظر درست نباشد (خلافش درست باشد). این مطلب را فرض خلف در نظر می‌گیریم. سپس با استفاده از معلومات مسئله و استدلال استنتاجی به یک تناقض می‌رسیم. این تناقض می‌تواند در رابطه با یکی از معلومات مسئله و یا امری پذیرفته‌شده از قبل باشد. چرا به این تناقض رسیدیم؟ همهٔ مراحل کار که درست است! علت آن است که فرض خلف نمی‌تواند درست باشد و علت این تناقض همان درست فرض کردن خلف حکم مسئله است. پس فرض خلف باطل و حکم مسئله مورد تأیید است.

این شیوه استدلال در همهٔ مسئله‌هایی که از برهان خلف استفاده می‌شود، به کار گرفته می‌شود.

در ادامه به کاربرد برهان خلف در چند مثال در حیطهٔ مسئله‌های ریاضی می‌پردازیم.

مثال ۷. اگر x عددی گویا و y عددی گنگ باشد، ثابت کنید x+y گنگ است.

پاسخ ۷. **فرض خلف:** اگر x+y گنگ نباشد، پس گویاست و می‌توان نوشت z=x+y که در آن z عددی گویاست. در نتیجه: z-x=y. سمت چپ رابطهٔ اخیر عددی گویا و سمت راست آن عددی گنگ است و این یک تناقض است. پس فرض خلف باطل و x+y گنگ است.

مثال ۸. اگر a عددی صحیح و a^2 زوج باشد، نشان دهید a عددی زوج است.

پاسخ ۸. اگر a عددی زوج نباشد چون $a \in Z$، پس a عددی فرد است و داریم: $a = 2k+1$. در نتیجه:

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(\underbrace{2k^2+2k}_{k'})+1 = 2k'+1$$

یعنی a^2 عددی فرد است و این یک تناقض محسوب می‌شود.

مثال ۹. در صورتی که a و b دو عدد طبیعی متمایز باشند، ثابت کنید عدد $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ یک عدد صحیح نیست.

پاسخ ۹. فرض کنیم کسر مذکور برابر عدد صحیح n باشد (فرض خلف). داریم:

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = n \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2-1}$$

با مقایسهٔ طرفین تساوی اخیر باید n^2-1 مربع کامل باشد. فرض کنیم:

$$n^2-1 = q^2 \Rightarrow n^2-q^2 = 1$$

و این یک تناقض است، چون تفاضل دو مربع کامل مساوی یک نمی‌شود.

مثال ۱۰. **الف)** اگر a عددی گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{a}$ عددی گنگ است.

ب) ثابت کنید به ازای هر عدد گنگ a، عدد گنگ b دیگری وجود دارد که ab گویا باشد.

پاسخ ۱۰. **الف)** اگر $\frac{1}{a}$ عددی گنگ نباشد، پس گویاست و در نتیجه a گویاست که به خلاف فرض مسئله است.

ب) فرض کنیم a عددی گنگ باشد. پس — عددی گنگ است و می‌توان عدد b را برابر $\frac{1}{a}$ در نظر گرفت. در نتیجه:

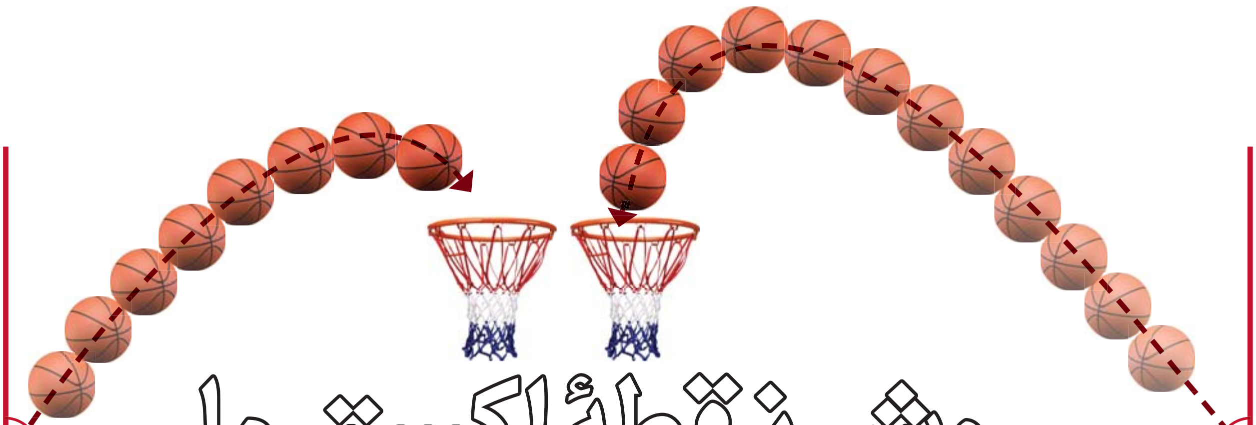
$$ab = a \times \frac{1}{a} = 1 \in Q$$

* منابع

۱. گاردنر، مارتین (۱۳۷۵). ریاضیات و سرگرمی‌ها (ج ۲). ترجمهٔ هرمز شهریاری. انتشارات آشتی.

۲. طاهری تنجانی، محمدتقی (۱۳۷۸). آموزش جبر و احتمال. انتشارات یکان.

احسان یارمحمّدی



روش نقطهٔ اِکستِرما

(روش ابتکاری حل معادلهٔ درجهٔ دوم)

هنگامی که بحث در مورد روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم به میان می‌آید، رابطهٔ Δ به‌عنوان یک روش کلی و عمومی‌تر برای حل این دسته از معادله‌ها مطرح می‌شود. در ضمن می‌دانیم که هر معادله به شکل $ax^۲+bx+c=۰$ که در آن b ، $c\in R$ و $a\in R-\{۰\}$ را یک معادلهٔ درجهٔ دوم می‌نامیم و اگر این معادله دارای دو ریشهٔ متمایز حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ باشد، آن‌گاه مقادیر این دو ریشه با استفاده از رابطهٔ Δ عبارت است از:

$$\begin{cases} x_۱=\dfrac{-b+\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \\ x_۲=\dfrac{-b-\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \end{cases} \xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac} \begin{cases} x_۱=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{-b}{۲a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{۲a} & (۱) \\ x_۲=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{-b}{۲a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{۲a} & (۲) \end{cases}$$

اشاره ۱: چنانچه در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ که در آن b ، $c\in R$ و $a\in R-\{۰\}$، داشته باشیم:

الف) $\Delta>۰$، آن‌گاه معادلهٔ درجهٔ دوم مزبور دو ریشهٔ متمایز حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ دارد.

ب) $\Delta=۰$، آن‌گاه معادلهٔ درجهٔ دوم مزبور دارای ریشهٔ مضاعف حقیقی $x_۱=x_۲$ است.

پ) $\Delta<۰$، آن‌گاه معادلهٔ درجهٔ دوم مزبور دارای ریشهٔ حقیقی نیست.

همان‌گونه که در بالا اشاره کردیم، از رابطهٔ (۱) و (۲) به‌عنوان روشی کلی برای تعیین ریشهٔ (ریشه‌های) معادلهٔ درجهٔ دوم (در صورت وجود) استفاده می‌شود که می‌توانیم آن را ***«روش دلتای کلاسیک»***[۱] بنامیم. علت نام‌گذاری روش مزبور به روش دلتای کلاسیک این است که در مقاله‌ای با عنوان **«روش دلتای تجدیدنظر شده»**[۲]، دو رابطهٔ جدید براساس $\Delta=b^۲-۴ac$، برای تعیین ریشهٔ (ریشه‌های) معادلهٔ درجهٔ دوم (در صورت وجود) ارائه شده است که با روابط (۱) و (۲) متفاوت هستند.

هدف اصلی در این مقاله تعیین روشی کلی و نوین برای تعیین ریشهٔ (ریشه‌های) معادلهٔ درجهٔ دوم (در صورت وجود) است که نه‌تنها از دو روش دلتای کلاسیک و دلتای تجدیدنظر شده متمایز است، بلکه در این روش کلی مدرن، هیچ نیازی به محاسبهٔ مقدار $\Delta=b^۲-۴ac$ برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم نیست. به بیان بهتر، برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم، با استفاده از این روش، رابطه‌های به‌دست‌آمده به گونه‌ای مُبرا و به دور از Δ هستند و از خود عبارت معادلهٔ درجهٔ دوم استخراج شده‌اند. رویهٔ رسیدن به این منظور را در ادامه بیان می‌کنیم.

تابع درجهٔ دوم با ضابطهٔ $f(x)=ax^۲+bx+c$ را که در آن داریم: b ، $c\in R$ و $a\in R-\{۰\}$ در نظر می‌گیریم. طول نقطهٔ **«اکسترما»**[۳]ی این تابع را براساس **«قضیهٔ فرما»**[۴] تعیین می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$f(x)=ax^۲+bx+c \Rightarrow$$

$$f'(x)=۲ax+b \xrightarrow{f'(x)=۰} x_E=-\frac{b}{۲a} \qquad (۳)$$

در نتیجه:

$$x_E=-\frac{b}{۲a} \Rightarrow y_E=f(x_E)=f(-\frac{b}{۲a})$$

$$=a(-\frac{b}{۲a})^۲+b(-\frac{b}{۲a})+c=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=-\frac{b^۲-۴ac}{۴a} \xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac}$$

$$y_E=f(x_E)=f(-\frac{b}{۲a})=-\frac{\Delta}{۴a} \qquad (۴)$$

بنابرایـــن، تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ که در آن $b\,, c\in R$ و $a\in R-\{0\}$، دارای این نقطهٔ اکسترماست:

$$E\left|\begin{array}{l} x_E=-\dfrac{b}{2a}\\ y_E=-\dfrac{\Delta}{4a}\end{array}\right.$$

اکنون از رابطهٔ (۴) نتیجه می‌گیریم که:

$$y_E=f(x_E)=f(-\frac{b}{2a})=-\frac{\Delta}{4a}\xrightarrow{\div a\neq 0}\frac{y_E}{a}=\frac{f(x_E)}{a}$$

$$=\frac{f(-\frac{b}{2a})}{a}=-\frac{\Delta}{4a^2}\Rightarrow -\frac{y_E}{a}=-\frac{f(x_E)}{a}=-\frac{f(-\frac{b}{2a})}{a}$$

$$=\frac{\Delta}{4a^2}\xRightarrow{\sqrt{\ }}\sqrt{-\frac{y_E}{a}}=\sqrt{-\frac{f(x_E)}{a}}=\sqrt{-\frac{f(-\frac{b}{2a})}{a}}=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}=\sqrt{-\dfrac{y_E}{a}}\\ \text{یا}\\ \sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}=\sqrt{-\dfrac{f(x_E)}{a}}\\ \text{یا}\\ \sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}=\sqrt{-\dfrac{f(-\frac{b}{2a})}{a}}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}=\sqrt{-\dfrac{y_E}{a}}\\ \text{یا}\\ \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}=\sqrt{-\dfrac{f(x_E)}{a}}\\ \text{یا}\\ \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}=\sqrt{-\dfrac{f(-\frac{b}{2a})}{a}}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\sqrt{-\dfrac{y_E}{a}}\\ \text{یا}\\ \pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\sqrt{-\dfrac{f(x_E)}{a}}\\ \text{یا}\\ \pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\sqrt{-\dfrac{f(-\frac{b}{2a})}{a}}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\pm\sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} & (5)\\ \text{یا} & \\ \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\pm\sqrt{-\dfrac{f(x_E)}{a}} & (6)\\ \text{یا} & \\ \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\pm\sqrt{-\dfrac{f(-\frac{b}{2a})}{a}} & (7)\end{array}\right.$$

از جایگذاری هریک از رابطه‌های (۵)، (۶) و (۷) در رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$x_1=\frac{-b}{2a}+\sqrt{-\frac{f(-\frac{b}{2a})}{a}}=x_E+\sqrt{-\frac{f(x_E)}{a}}=x_E+\sqrt{-\frac{y_E}{a}}\quad (8)$$

$$x_2=\frac{-b}{2a}-\sqrt{-\frac{f(-\frac{b}{2a})}{a}}=x_E-\sqrt{-\frac{f(x_E)}{a}}=x_E-\sqrt{-\frac{y_E}{a}}\quad (9)$$

بنابراین ملاحظه می‌کنیم که با استفاده از دو رابطهٔ (۸) و (۹) به یک روش کلی جدید برای تعیین ریشهٔ (ریشه‌های) معادلهٔ درجهٔ دوم (در صورت وجود) دســت یافته‌ایم که در آن هیچ نیازی به محاسبهٔ مقدار دلتا ($\Delta=b^2-4ac$) نیست. تنها با استفاده از خود عبارت معادلهٔ درجهٔ دوم و محاســبهٔ نقطهٔ اکسترما $E\left|\begin{array}{l} x_E=-\frac{b}{2a}\\ y_E=-\frac{\Delta}{4a}\end{array}\right.$، می‌توان این معادله را حل کرد.

اشاره ۲: چنانچــه در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ که در آن $c\in R$ و b و $a\in R-\{0\}$، داشته باشیم:

الف) $-\frac{y_E}{a}=-\frac{f(x_E)}{a}=-\frac{f(-\frac{b}{2a})}{a}>0$، آن‌گــاه معادلهٔ درجهٔ دوم مزبور دو ریشهٔ متمایز حقیقی x_1 و x_2 دارد.

ب) $-\frac{y_E}{a}=-\frac{f(x_E)}{a}=-\frac{f(-\frac{b}{2a})}{a}=0$، آن‌گاه معادلــهٔ درجهٔ دوم مزبور دارای ریشهٔ مضاعف حقیقی $x_1=x_2$ است.

پ) $-\frac{y_E}{a}=-\frac{f(x_E)}{a}=-\frac{f(-\frac{b}{2a})}{a}<0$، آن‌گاه معادلــهٔ درجهٔ دوم مزبور دارای ریشهٔ حقیقی نیست.

مثال ۱. ریشــهٔ (ریشــه‌های) معادلهٔ درجــهٔ دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش نقطهٔ اکسترما تعیین کنید.

$2x^2+4x-30=0$

حل: برای حل این معادله با استفاده از روش نقطهٔ اکسترما، تابع درجهٔ دوم $f(x)=2x^2+4x-30$ را در نظر می‌گیریم. پس داریم:

$$y=f(x)=2x^2+4x-30$$

$$\Rightarrow y'=f'(x)=4x+4\xrightarrow{y'=f'(x)=0}x_E=-1$$

$$x_E=-1\Rightarrow f(-1)=2(-1)^2+4(-1)-30\Rightarrow y_E=-32$$

بنابرایــن تابــع درجــهٔ دوم $y=f(x)=2x^2+4x-30$ دارای نقطهٔ اکســترمای $E\left|\begin{array}{l} x_E=-1\\ y_E=-32\end{array}\right.$ است. اکنون با استفاده از دو رابطهٔ

(۸) و (۹) داریم:

$$\begin{cases} x_1 = x_E + \sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \\ x_2 = x_E - \sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{-\dfrac{-32}{2}} \\ x_2 = -1 - \sqrt{-\dfrac{-32}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + 4 \\ x_2 = -1 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

مثال ۲. تابع درجهٔ دوم $y=f(x)=ax^2-12x-36$ دارای این نقطهٔ اکسترماست:

$$E\left|\begin{matrix} 2 \\ -48 \end{matrix}\right.$$

صفرهای تابع را (در صورت وجود) با استفاده از روش نقطهٔ اکسترما تعیین کنید.

حل:

$$y = f(x) = ax^2 - 12x - 36 \Rightarrow y' = f'(x)$$

$$= 2ax - 12 \xrightarrow{y'=f'(x)=0 \ , \ x_E=2} 2a(2) - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 4a - 12 = 0 \Rightarrow a = 3$$

اکنون باید معادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2-12x-36=0$ را با استفاده از روش اکسترما حل کنیم. با بهره‌گیری از دو رابطهٔ (۸) و (۹) داریم:

$$\begin{cases} x_1 = x_E + \sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \\ x_2 = x_E - \sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{-\dfrac{-48}{3}} \\ x_2 = 2 - \sqrt{-\dfrac{-48}{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 4 \\ x_2 = 2 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

مثال ۳. ریشهٔ (ریشه‌های) معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش نقطهٔ اکسترما تعیین کنید.

$4x^2+32x+64=0$

حل: برای حل این معادله با استفاده از روش نقطهٔ اکسترما، تابع درجهٔ دوم $f(x)=4x^2+32x+64$ را در نظر می‌گیریم. پس داریم:

$$y = f(x) = 4x^2 + 32x + 64 \Rightarrow y' = f'(x)$$

$$= 8x + 32 \xrightarrow{y'=f'(x)=0} x_E = -4$$

$$x_E = -4 \Rightarrow f(-4) = 4(-4)^2 + 32(-4) + 64 \Rightarrow$$

$$y_E = 0$$

بنابراین تابع درجهٔ دوم $y = f(x) = 4x^2 + 32x + 64$ دارای نقطهٔ اکسترمای $E\left|\begin{matrix} x_E = -4 \\ y_E = 0 \end{matrix}\right.$ است. با استفاده از دو رابطهٔ (۸) و (۹) داریم:

$$\begin{cases} x_1 = x_E + \sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \\ x_2 = x_E - \sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 + \sqrt{-\dfrac{0}{4}} \\ x_2 = -4 - \sqrt{-\dfrac{0}{4}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 + 0 \\ x_2 = -4 - 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = -4$$

مثال ۴. تابع درجهٔ دوم $y=f(x)=5x^2+10x+c$ دارای نقطهٔ اکسترمای $E\left|\begin{matrix} -1 \\ -80 \end{matrix}\right.$ است.

الف) مقدار c را به دست آورید.

ب) صفرهای این تابع را (در صورت وجود) با استفاده از روش نقطهٔ اکسترما تعیین کنید.

حل:

الف) از آنجا که تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ که در آن داریم: $b, c\in R$ و $a\in R-\{0\}$، دارای نقطهٔ اکسترمای

$$E\left|\begin{matrix} x_E = -\dfrac{b}{2a} \\ y_E = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{matrix}\right.$$

است، بنابراین داریم:

$$x_E = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a$$

$$y_E = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = -80 \Rightarrow \frac{\Delta}{4a} = 80 \Rightarrow \Delta = 320a$$

$$\xrightarrow{\Delta=b^2-4ac} b^2 - 4ac = 320a \xrightarrow{b=2a} (2a)^2 - 4ac$$

$$= 320a \Rightarrow a - c = 80 \xrightarrow{a=5} 5 - c = 80 \Rightarrow c = -75$$

ب) اکنون باید معادلهٔ درجهٔ دوم $5x^2+10x-75=0$ را با استفاده از روش اکسترما حل کنیم. با بهره‌گیری از دو رابطهٔ (۸) و (۹) داریم:

$$\begin{cases} x_1 = x_E + \sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \\ x_2 = x_E - \sqrt{-\dfrac{y_E}{a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{-\dfrac{-80}{5}} \\ x_2 = -1 - \sqrt{-\dfrac{-80}{5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + 4 \\ x_2 = -1 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

تمرین

ریشهٔ (ریشه‌های) هریک از معادله‌های درجهٔ دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش نقطهٔ اکسترما تعیین کنید.

الف) $-۴x^{۲}+۳۲x-۴۸=۰$

ب) $۹x^{۲}+۵۴x+۸۱=۰$

پ) $۵x^{۲}+۸x+۱۹=۰$

ت) $۶x^{۲}+۱۲x-۴۸=۰$

ث) $-۴x^{۲}+۴۰x-۱۰۰=۰$

ج) $-۷x^{۲}+۱۰x-۳۳=۰$

چ) $۲x^{۲}+۴x-۳۰=۰$

ح) $۳۶x^{۲}+۲۸۸x+۵۷۶=۰$

*** پی‌نوشت‌ها**

1. Classic Quadratic Formula Method
2. Revised Quadratic Formula Method

علاقه‌مندان به مطالعهٔ مقالهٔ **روش دلتای تجدیدنظر شده** می‌توانند به منبع شماره ۴ مراجعه کنند.

3. Extrema

به‌صورت کلی به نقطهٔ ماکزیمم یا نقطهٔ مینیمم تابع، نقطهٔ **اکسترما** می‌گویند. هنگامی که صحبت از نقطه‌های ماکزیمم یا نقطه‌های مینیمم تابع به میان می‌آید، از واژهٔ نقطه‌های **اکسترمم** (Extremum) استفاده می‌شود. به عبارت دیگر، واژهٔ اکسترمم در زبان انگلیسی به‌عنوان جمع برای واژهٔ اکسترما به‌کار می‌رود.

4. Fremat's Theorem

قضیهٔ فرما: اگر تابع $f(x)$ در نقطه به طول $x_۰$، اکسترمای (ماکزیمم یا مینیمم) نسبی داشته باشد و $f'(x_۰)$ موجود باشد، آن‌گاه داریم: $f'(x_۰)=۰$. به عبارت دیگر، هر نقطهٔ اکسترمای نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است.

*** منابع**

۱. کتاب درسی. ریاضی ۱. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۲. کتاب درسی. ریاضی ۲. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۳. کتاب درسی. ریاضی ۳. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۴. یارمحمدی، احسان (۱۳۹۹). «روش ابتکاری حل معادلهٔ درجهٔ دوم: روش دلتای تجدیدنظر شده». ماهنامهٔ آموزشی، تحلیلی، اطلاع‌رسانی ریاضیات یکان‌نو. دورهٔ سیزدهم (شمارهٔ ۸۵). شیراز.

ادب ریاضی

وقتی سر کلاس به درس معلم گوش می‌دهید، مسئله‌ای را حل می‌کنید، یا یک کتاب ریاضی را می‌خوانید، به واژه‌هایی که معنای ریاضی دارند، توجه کنید و همهٔ آن‌ها را روی ورق کاغذی بنویسید: «ضریب»، «جمله»، «معادله»، «دایره»، «چندضلعی منتظم»، «مخروط ناقص»، «کسر»، «نابرابری» و ... .

بعد، در منزل، سعی کنید دربارهٔ معنای ریاضی آن‌ها بیندیشید. به کتاب مراجعه کنید، از دوستان و یا دبیران خود بپرسید، و جست‌وجو کنید تا معنا و تعریف درست هر واژه را بیابید.

***

می‌توان برای «اثبات» تعلیم‌پذیری انسان و تأثیر آموزش «دلیل» آورد که:

دوستی با مردم دانا، چو زرین‌کاسه است — نشکند، گر بشکند، باید ز نو پرداختن

یا:

دوستی با مردم نادان، سفالین‌کاسه است — بشکند، گر نشکند، باید به دور انداختن

این شیوه را ادیبان ما نوعی تمثیل می‌خوانند و تمثیل یعنی مثال آوردن و درست نیست که با این روش ریاضیات را استدلال کنیم. مثال در ریاضیات فقط برای روشن‌تر کردن موضوع آورده می‌شود، نه برای اثبات آن. علاوه بر این‌ها، شکل یا مثال، اگر هم درست انتخاب شده باشد، ممکن است حالت خاصی از مسئله یا قضیه باشد و نتواند حالت‌های دیگر را توضیح بدهد.

پرویز شهریاری

ریاضی ۱

(پایهٔ دهم رشتهٔ ریاضی و تجربی)

فرخ فرشیان

۱. مخرج کسر $\dfrac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$ را گویا کنید.

۲. معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-(5-\sqrt{5})x-4-\sqrt{5}=0$ را حل کنید.

۳. با فرض $x>4$ و $k=\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{x-4})=0$، حاصل $(k+k^{-1})^{-1}$ را برحسب x به‌دست آورید.

۴. اگر $y=x+\frac{1}{x}$ باشد و $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$، در این صورت مقدار عددی y را به‌دست آورید.

۵. اگر رأس سهمی $y=ax^2+2ax-3$ روی نیم‌ساز ناحیهٔ اول و سوم (خط $y=x$) قرار داشته باشد، مقدار a را به‌دست آورید.

۶. اگر $\dfrac{-a^2x^2+(a^2-8)x-12}{ax^2+bx+c}\geq 0$ در مجموعهٔ عددهای حقیقی تنها به ازای $(1,2)\cup[-4,-3]$ برقرار باشد، حاصل $a+b+c$ را به دست آورید.

۷. عبارت $x^2+4y^2-5x+10y-4xy-24$ را تجزیه کنید.

۸. اگر $2f(x+2)+f(1-x)=2x-1$ و f تابع خطی باشد، در این‌صورت معادلهٔ این تابع خطی را به‌دست آورید.

حسابان ۱

(پایهٔ یازدهم ریاضی)

محمدتقی طاهری تنجانی

۱. هرگاه دامنهٔ تابع f بازهٔ [۰و۱] باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=f(\frac{[x]}{x})$ را بیابید.

۲. طول خط شکستهٔ $y=|x-1|-|x-2|$ را در بازهٔ [۳و۳-] به‌دست آورید.

۳. تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+a & x\geq 0\\ x+5 & x<0\end{cases}$ مفروض است. به ازای چه مقادیری از عددهای طبیعی a، تابع f یک به یک نیست؟

۴. نمودار تابع $f(x)=\left[\dfrac{[x]+2}{4}\right]$ را در بازهٔ [۴و۵-] رسم کنید.

۵. اگر $f(\sin x)=\tan 2x$ باشد، $f(\cos x)$ را به‌دست آورید.

۶. معادلهٔ $(\sqrt{x})^{-1+\log_3^x}=3$ را حل کنید.

۷. به روش هندسی نشان دهید، معادلهٔ $x\times 2^x=1$ فقط یک جواب مثبت دارد.

۸. اگر θ زاویه‌ای در موقعیت استاندارد و $p=\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ انتهای کمان متناظر آن باشد، اندازهٔ زاویهٔ θ بر حسب رادیان چقدر است؟

حسابان ۲

(پایهٔ دوازدهم ریاضی)

آزادبه حسین فرزان

۱. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{|x^۲-۴x|(x^۲-۱)}$، در چند نقطه از دامنه تعریفش فاقد حد است؟

۲. ضابطهٔ تابع g را به‌گونه‌ای مشخص کنید که در تابع با ضابطهٔ $f(x)=g(x).[x]$:

الف. تابع در x=۱ حد داشته باشد.

ب. تابع در x=۱ و x=۲ حد داشته باشد.

ج. تابع در x=۱ ، x=۲ و x=۳ حد داشته باشد.

آیا می‌توان از سه مثال فوق نتیجهٔ کلی‌تری گرفت؟ ضابطهٔ g را می‌توانید به‌گونه‌ای انتخاب کنید که تابع f در تمام نقاط حقیقی R، حد داشته باشد؟

۳. حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف. $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{(x-۱)^۲}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۳]{x}-۱)}=$

ب. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{۲^{۳-n}+۵^{۱-n}}{۲^{۱-۲n}+۲^{۱-n}}$

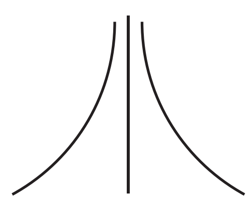
۴. با توجه به نمودار تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$، حاصل حدهای زیر را مشخص کنید:

الف. $\lim\limits_{x\to ۰}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]=$

ب. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]=$

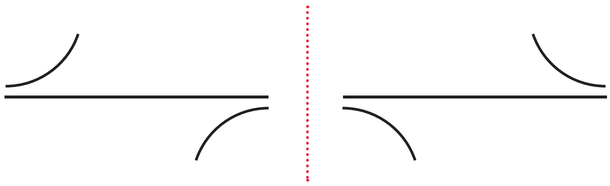
ج. $\lim\limits_{x\to ۵}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]=$

۵. اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x}{x^۲+۴ax+b}$ در همسایگی مجانب قائمش به‌صورت زیر باشد، مقادیر a و b را مشخص کنید.



x = ۲

۶. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{۲x^۲-x+۱}{x^۲+x+۱}$ در اطراف مجانب افقی تابع به کدام یک از شکل‌های زیر است؟



۷. اگر x=a مجانب قائم تابع کسری y=f(x) باشد، آیا x=a می‌تواند در دامنهٔ تابع قرار داشته باشد؟

هندسهٔ ۳

(پایهٔ دوازدهم ریاضی)

حسین کریمی

۱. در مثلث ABC داریم: $BC=۶$ و $\dfrac{AB}{AC}=۲$ مکان هندسی رأس A را بیابید.

۲. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر دو نیم‌ساز ربع اول و دوم مماس باشد و از نقطهٔ $M(\sqrt{۷},۳)$ بگذرد.

۳. معادلهٔ دایره‌های محیطی و محاطی داخلی مثلث ABC را بنویسید که در آن داریم: $A\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۳\\۰\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}۰\\۴\end{matrix}\right.$

۴. از کانون $F\left|\begin{matrix}۹\\۰\end{matrix}\right.$ نوری به نقطهٔ $M(\frac{۲۶}{۳},\frac{۴\sqrt{۱۴}}{۳})$ واقع بر بیضی می‌تابد. اگر شعاع بازتابش از کانون $F'\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.$ بگذرد، معادلهٔ خط مماس بر بیضی در نقطهٔ M را بنویسید.

۵. خط d و نقطهٔ F به فاصلهٔ ۷ سانتی‌متر از آن واقع است. مکان هندسی نقاطی از صفحه را مشخص کنید که فاصلهٔ آن نقاط از خط d همیشه ۲ سانتی‌متر بیشتر از فاصلهٔ آن نقاط تا F باشد.

۶. از کانون سهمی به معادلهٔ $y^۲=۴x-۴$ نوری که با محور تقارن سهمی زاویهٔ °۴۵ می‌سازد، می‌تابد و سهمی را در نقطهٔ M قطع می‌کند. معادلهٔ شعاع بازتابش نور را بنویسید.

ریاضیات گسسته

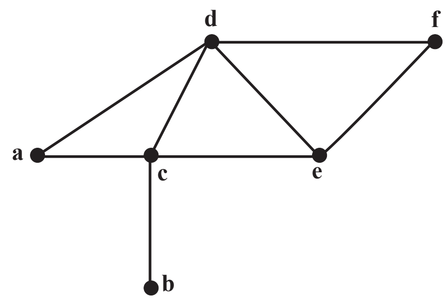
(پایهٔ دوازدهم ریاضی)

حمیدرضا امیری

۱. نمودار گراف G(V,E) را با V={۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹} و مجموعهٔ یال‌های E={{x,y}|xy=۵k} رسم کنید.

۲. اگر اندازهٔ گراف G از ۶ برابر مرتبهٔ آن ۲۰ واحد کمتر باشد و G گرافی ۴- منتظم باشد، مجموع مرتبه و اندازهٔ گراف را به دست آورید.

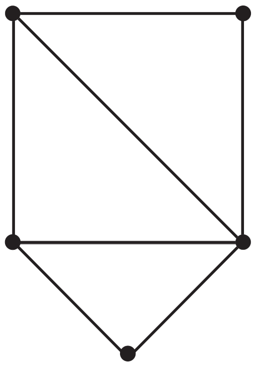
۳. با توجه به گراف شکل ۱، طرف دوم هر یک از تساوی‌های زیر را کامل کنید. (p مرتبه و q اندازهٔ گراف است).



شکل ۱

$$\text{I) } N_G[a] =$$
$$\text{II) } N_G[c] =$$
$$\text{III) } N_G[d] =$$
$$\text{IV) } N_G[b] =$$
$$\text{V) } \Delta - \delta =$$

۴. در گراف شکل ۲ چند دور متمایز وجود دارد؟



شکل ۲

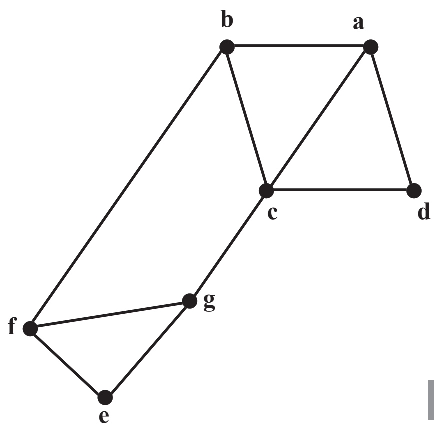
۵. گراف G از مرتبهٔ ۹ ناهم‌بند و ۲- منتظم است. این گراف چند دور دارد؟

۶. گراف G مطابق شکل ۳ مفروض است:

الف. دو مجموعهٔ احاطه‌گر برای G بنویسید.

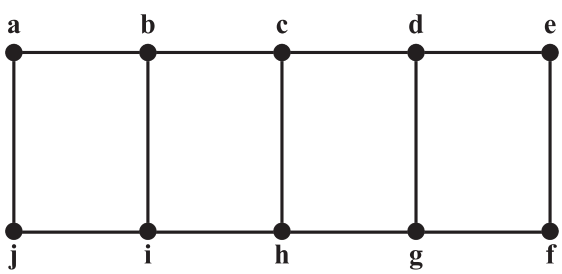
ب. یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای G بنویسید.

پ. یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای G بنویسید که مینیمم نباشد.



شکل ۳

۷. عدد احاطه‌گری گراف شکل ۴ را بیابید و یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال و غیرمینیمم برای آن تعریف کنید.



شکل ۴

پاسخ‌مسائل

ریاضی ۱

.۱

$$\frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{1}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{5})}\times\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{\left[(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2\right]\left[(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2\right]}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(3+2\sqrt{2}-3)(2-5)}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{-3\times 2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-12}$$

.۲

$$x^2-(5-\sqrt{5})x-4-\sqrt{5}=0\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-(5-\sqrt{5})\\ c=-4-\sqrt{5}\end{cases}$$

ابتدا Δ را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta=(5-\sqrt{5})^2-4(1)(-4-\sqrt{5})$$
$$=25+5-10\sqrt{5}+16+4\sqrt{5}$$
$$\Delta=46-6\sqrt{5}\Rightarrow$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{46-6\sqrt{5}}=\sqrt{(3\sqrt{5}-1)^2}=3\sqrt{5}-1$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{5-\sqrt{5}+3\sqrt{5}-1}{2(1)}\\ x_2=\dfrac{5-\sqrt{5}-3\sqrt{5}+1}{2(1)}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{4+2\sqrt{5}}{2}=\\ x_2=\dfrac{6-4\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2+\sqrt{5}\\ x_2=3-2\sqrt{5}\end{cases}$$

.۳

$$k=\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{x-4})\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{[x-(x-4)]}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}}$$

$$k=\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}}\Rightarrow$$

$$k=\frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{k}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}}{2}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$(k+k^{-1})^{-1}=(k+\frac{1}{k})^{-1}=\left[\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{x-4})+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}}{2}\right]^{-1}$$

$$=(\frac{2\sqrt{x}}{2})^{-1}=(\sqrt{x})^{-1}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

.۴

$$x^4+x^3-4x^2+x+1=0\xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{0\neq x^2}$$

$$x^2+x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}-4=0\qquad(1)$$

به کمک اتحاد فرعی $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$، حاصل $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$ به دست می‌آید. بنابراین در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$(x+\frac{1}{x})^2-2+x+\frac{1}{x}-4=0$$

$$\Rightarrow(x+\frac{1}{x})^2+(x+\frac{1}{x})-6=0$$

چون: $y=x+\frac{1}{x}$، بنابراین: $y^2+y-6=0\Rightarrow(y+3)(y-2)=0$ که در نتیجه y=۲ و y=-۳ به‌دست می‌آید.

۵. می‌دانیم طول رأس سهمی از رابطهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید. در نتیجه:

$$y=ax^2+2ax-3\left|\begin{array}{l}a=a\\ b=2a\\ c=-3\end{array}\right.\qquad x=\frac{-2a}{2a}=-1$$

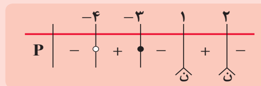
طول رأس سهمی x=-۱ در سهمی قرار می‌دهیم تا عرض آن به‌دست آید:

$$y=ax^2+2ax-3 \xrightarrow{x=-1} y=a-2a-3 \Rightarrow y=-a-3$$

پس رأس سهمی S(-۱ و -a-۳) است و باید آن را در خط y=x قرار دهیم:

$$-a-3=-1 \to a=-2$$

۶. چون عبارت در ازای $[-4,-3]\cup(1,2)$ مثبت است، بنابراین تعیین علامت آن به‌صورت



است و معادلهٔ $-a^2x^2+(a^2-8)x-12=0$ به ازای x=-۳ و x=-۴ برقرار است. بنابراین:

$$x=-3 \Rightarrow -9a^2-3a^2+24-12=0$$
$$\to -12a^2+12=0 \to a^2=1 \to a=\pm1$$

با توجه به عبارت a=۱ برقرار است. در ضمن در مخرج کسر، $ax^2+bx+c=0$ به ازای x=۱ و x=۲ برقرار است. بنابراین:

$$x^2+bx+c=0\begin{cases} x=1 & 1+b+c=0\\ x=2 & 4+2b+c=0\end{cases}$$
$$\to\begin{cases} b+c=-1\\ 2b+c=-4\end{cases}$$

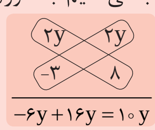
که از آنجا داریم: b=-۳ و c=۲. پس حاصل $a+b+c=1+2-3=0$ است.

۷. ابتدا عبارت را برحسب x از توان بزرگ‌تر به کوچک‌تر مرتب می‌کنیم؛ همانند معادلهٔ درجهٔ دوم:

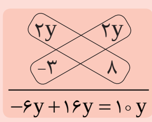
$$x^2-x(4y+5)+4y^2+10y-24$$

حال می‌خواهیم عبارت $4y^2+10y-24$ را تجزیه کنیم. ابتدا دو عبارت که ضرب آن‌ها $4y^2$ می‌شود، پیدا می‌کنیم: $(4y\times y)$ یا $(2y\times 2y)$.

بعد دو عدد که حاصل‌ضرب آن‌ها -۲۴ شود؛ (-8×3) یا (-4×6) و ... سپس آن‌ها را به صورت دو سطر به شکل $\begin{matrix}2y & 2y\\ -3 & 8\end{matrix}$ می‌نویسیم و ستونی آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم، به طوری که حاصل جمع آن‌ها وسط یعنی 10y بشود:



اگر نشود: به‌جای (-3×8) و یا $(2y\times 2y)$، عبارت دیگر را چک می‌کنیم. حال



به صورت $4y^2+10y-24=(2y+8)(2y-3)$ به دست می‌آید و آن را در عبارت اول قرار می‌دهیم:

$$x^2-x(4y+5)+(2y+8)(2y-3)$$

حالا دو عبارت باید پیدا کنیم که جمع آن‌ها $-(4y+5)$ و ضرب آن‌ها $(2y+8)(2y-3)$ شود. واضح است که:

$$x^2-x(4y+5)+(2y-3)(2y+8)$$
$$=(x-(2y-3))(x-(2y+8))$$
$$=(x-2y+3)(x-2y-8)$$

۸. تابع خطی به این صورت است: $f(x)=ax+b$. بنابراین:

$$f(x+2)=a(x+2)+b=ax+2a+b$$
$$f(1-x)=a(1-x)+b=a-ax+b$$

- اگر آن را در رابطهٔ $2f(x+2)+f(1-x)=2x-1$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$2(ax+2a+b)+a-ax+b=2x-1\Rightarrow$$
$$2ax+4a+2b+a-ax+b=2x-1$$

که پس از ساده کردن داریم:

$$ax+5a+3b=2x-1$$

از آنجا ضریب x از یک طرف با ضریب x در طرف دیگر و همین‌طور مقادیر ثابت دو طرف با یکدیگر برابرند، پس:

$$a=2$$
$$5a+3b=-1 \xrightarrow{a=2} b=\frac{-11}{3}$$

در نتیجه:

$$f(x)=2x-\frac{11}{3}$$

حسابان ۱

۱. فرض کنیم: $h(x)=\frac{[x]}{x}$ واضح است که: $D_h=\mathbb{R}-\{0\}$. پس دامنهٔ تابع $g=foh$ برابر است با:

$$D_g=\left\{x \,\middle|\, x\in D_h \,\middle|\, h(x)\in D_f\right\}$$
$$D_g=\left\{x \,\middle|\, x\in\mathbb{R}-\{0\} \,\middle|\, 0<\frac{[x]}{x}\le 1\right\}$$

اگر: $x<0$، آن‌گاه: $\frac{[x]}{x}\ge 1$ که فقط $\frac{[x]}{x}=1$ قابل قبول است.

پس: $x\in\overline{\mathbb{Z}}$ ($\overline{\mathbb{Z}}$ مجموعه عددهای صحیح منفی است)

اگر: $0<x<1$، آن‌گاه: $\frac{[x]}{x}=0$ که قابل قبول نیست.

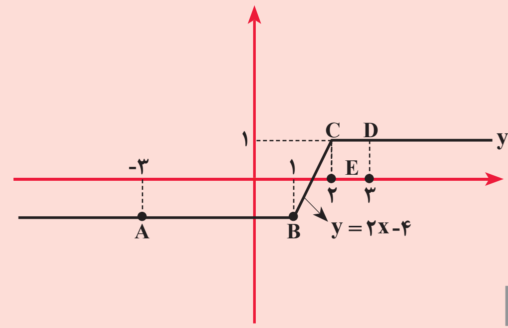
اگر: $x\ge 1$، آن‌گاه: $x-[x]<[x]$. پس: $x<2[x]$. یعنی: $\frac{[x]}{x}>\frac{1}{2}$.

از طرف دیگر: $\frac{[x]}{x}<1$. در نتیجه: $\frac{1}{2}<\frac{[x]}{x}<1$ که تمام عددهای حقیقی بزرگ‌تر مساوی یک مورد قبول هستند.

پس:

$$D_g=(۱,+\infty)\cup\{x|x\in \overline{x}\}$$

۲. نمودار تابع $f(x)=|x-۱|-|x-۲|$ را رسم می‌کنیم (نمودار ۱).



نمودار ۱

مطابق شکل باید طول خط شکسته ABCD را به‌دست آوریم.

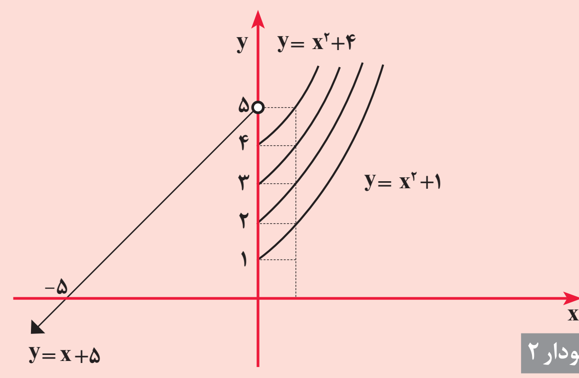
$$\begin{cases} \text{طول } AB=۴ \\ \text{طول } BC=\sqrt{۲^۲+۱^۲}=\sqrt{۵} \\ \text{طول } CD=۱ \end{cases}$$

$$\text{طول خط شکسته } ABCD = ۴+\sqrt{۵}+۱=۵+\sqrt{۵}$$

۳. چـون $a\in\mathbb{N}$ نمودارهـای $y=x^۲+۳$ ، $y=x^۲+۱$ ، $y=x^۲+۲$ و $y=x^۲+۴$ را رسم می‌کنیم (نمودار ۲)؛ ملاحظه می‌شود که خطوط افقی نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کنند.

پس f یک به یک نیست.

بنابراین به ازای $a=۱,۲,۳,۴$ ، تابع f یک به یک نیست.



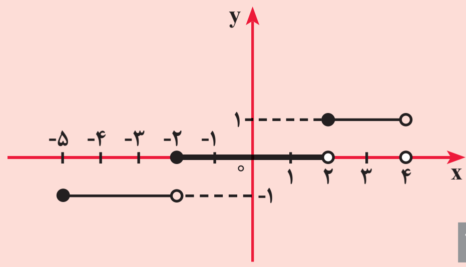
نمودار ۲

۴. اگر $-۵\le x<-۲$ ، آن‌گاه: $\left[\frac{[x]+۲}{۴}\right]=-۱$. پس: $f(x)=-۱$.

اگر: $-۲\le x<۲$ ، آن‌گاه: $\left[\frac{[x]+۲}{۴}\right]=۰$. پس: $f(x)=۰$.

اگر: $۲\le x<۴$ ، آن‌گاه: $\left[\frac{[x]+۲}{۴}\right]=۱$. پس: $f(x)=۱$.

نمودار تابع به صورت نمودار ۳ است:



نمودار ۳

۵. می‌دانیــم به‌جای متغیر تابع، هر مقدار دلخواهی از دامنهٔ آن را می‌توان قرار داد. در تابع مذکور به جای x مقدار $\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)$ را قرار می‌دهیم:

$$f\left(\sin\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)\right)=\tan\left(۲\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)\right)$$

$$f(\cos x)=\tan(\pi-۲x)$$

$$f(\cos x)=-\tan ۲x$$

۶.

$$\left(-۱+\log_۳^x\right)\log_۳^{\sqrt{x}}=\log_۳^۳$$

$$\frac{۱}{۲}(-۱+\log_۳^x)\log_۳^x=۱$$

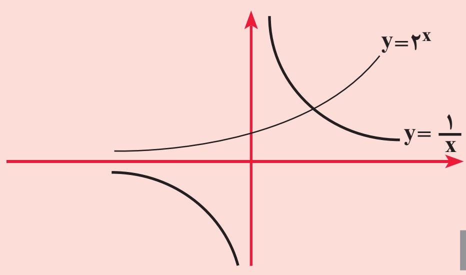
$$(\log_۳^x)^۲-\log_۳^x-۲=۰$$

$$(\log_۳^x-۲)(\log_۳^x+۱)=۰$$

$$\begin{cases}\log_۳^x=۲\Rightarrow x=۹\\ \log_۳^x=-۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

۷. توابع $y=۲^x$ ، $y=\frac{۱}{x}$ را رسم می‌کنیم.

همان‌طور که در شـکل واضح است، شـاخه مثبت $y=\frac{۱}{x}$ ، نمودار تابع $y=۲^x$ را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.



نمودار ۴

تذکر: *می‌توانستیم توابع $y=x$ ، $y=۲^{-x}$ را نیز رسم کنیم و نشان دهیم نمودار این دو تابع در یک نقطه در ناحیهٔ اول همدیگر را قطع می‌کنند.*

۸. چــون طول نقطهٔ p منفی و عرض آن مثبت اســت، پس در ربع دوم قرار دارد و:

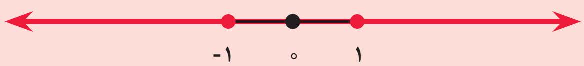
$$\cos\theta=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \sin\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۴}$$

حسابان ۲

۱. ابتدا دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{|x^2-4x|(x^2-1)}$ را مشخص می‌کنیم:

$$|x^2-4x|(x^2-1)\ge 0 \xrightarrow[\text{همواره نامنفی است و تنها باید ریشه‌های آن را در نظر گرفت}]{|x^2-4x|} \begin{cases} x^2-1\ge 0 \Rightarrow x\ge 1 \ \text{یا}\ x\le -1 \\ |x^2-4x|=0 \Rightarrow x=0 \ \text{و}\ x=4 \end{cases}$$



بـا توجه به آنکه شـرط لازم برای وجود حد تابـع در $x=a$، وجود همسـایگی راسـت و چپ $x=a$ در دامنهٔ تابع است، بنابراین تابع در سه نقطـه به طول‌های $x=1$، $x=-1$ و $x=0$ فاقد حد اسـت، زیرا به‌ترتیب همسایگی چپ، همسایگی راست و همسایگی این نقاط در دامنهٔ تابع قرار ندارند؛ هر چند این نقاط عضو دامنهٔ تابع هستند.

۲. در تابـع $f(x)=g(x)\times[x]$، با توجه به آنکه: $y=[x]$ در نقاط صحیح حد ندارد (حد راست و حد چپ تابع در تمام نقاط صحیح متفاوت است). برای قسمت الف: اگر y تابعی باشد که در $x=1$ حد داشته باشد و مقدار آن برابر صفر باشد، مانند $g(x)=x-1$:

$$f(x)=(x-1)[x]$$

تابع در $x=1$ حد دارد.

$$\lim_{x\to 1} f(x) \begin{cases} \text{حد راست} = 0\times 1 = 0 \\ \text{حد چپ} = 0\times 0 = 0 \end{cases}$$

اما این تابع در نقاط دیگر حد ندارد، زیرا:

$$\lim_{\substack{x\to k\\ k\in Z}} (x-1)[x] = \begin{cases} \text{حد راست} = (k-1)k \\ \text{حد چپ} = (k-1)(k-1) \end{cases}$$

$$\text{حد راست} = \text{حد چپ} \Rightarrow (k-1)k = (k-1)(k-1) \begin{cases} k=1 \ \text{قبلاً بررسی شد} \\ k=k-1 \quad \times \end{cases}$$

براساس مطالب فوق:

ب) $y=(x-1)(x-2)[x]$ و **ج)** $y=(x-1)(x-2)(x-3)[x]$ به ترتیب در نقاط خواسته شده حد دارند.

۳.

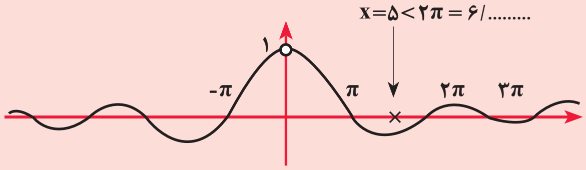
الف) $$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{(x-1)}^{1}\overbrace{(x-1)}^{2}}{\sqrt{x}-1\times\sqrt[3]{x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}^{1}\overbrace{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}^{2}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)=2\times 3=6$$

ب) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{3-n}+5^{1-n}}{2^{1-2n}+2^{1-n}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{1}{2})^n\times 8+(\frac{1}{5})^n\times 5}{(\frac{1}{4})^n\times 2+2\times(\frac{1}{2})^n}=\frac{8\times(\frac{1}{2})^n}{2\times(\frac{1}{2})^n}=4$$

۴. با توجه به نمودار تابع:



الف) نمودار تابع در همسـایگی صفـر از مقادیر کمتر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=\left[1^-\right]=0$$

ب) با توجه به نوسانی بودن نمودار تابع و منفی و مثبت شدن آن، حاصل حد از این قرار است:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin x}{x}\right] \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$$

و تابع در $+\infty$ حد ندارد.

ج) با توجه به نمودار تابع و $x=5<2\pi=6/000$ حاصل می‌شود:

$$\lim_{x\to 5}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=[A]=-1$$

$$-1<A<0$$

۵. با توجه به نمودار داده شده داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x}{x^2+4ax+b}=+\infty$$

با توجه به علامت + در صورت کسر و آنکه حد راست و حد چپ تابع در $x=2$ برابر $+\infty$ است، $x=2$ ریشهٔ مضاعف مخرج کسر است:

$$x^2+4ax+b=(x+2)^2=x^2+4x+4$$

$$\to 4x=4\to x=1$$

$$f(x)=\frac{x}{(x-2)^2} \qquad \lim_{x\to 2}f(x)=+\infty$$

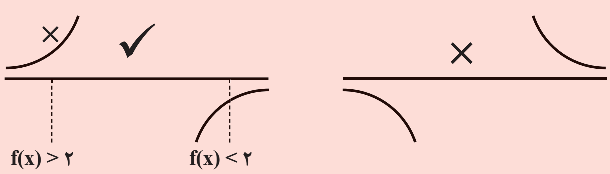
۶.

$$f(x)=\frac{2x^2-x+1}{x^2+x+1}=2+\frac{-3x-1}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}2+\frac{-3x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}2-\frac{3}{x}$$

$$\begin{cases} x\to+\infty \\ f(x)<2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\to-\infty \\ f(x)>2 \end{cases}$$

پس نمودار تابع در اطراف مجانب افقی به‌صورت زیر است:



۷. اگرچه در نگاه اول به نظر می‌رسد که x=a نباید در دامنهٔ تابع باشد، اما با توجه به تعریف مجانب قائم $\begin{cases} x\to a\\ f(x)\to\pm\infty\end{cases}$ و آنکه حد تابع در x=a ارتباطی به مقدار تابع در x = a ندارد، x = a می‌تواند در دامنهٔ تابع قرار داشته باشد.

مثال) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 5 & x=0\end{cases}$

در تابع فوق داریم: $x=0\in D_f$ و در واقع: $D_f=R$ اما: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\pm\infty$

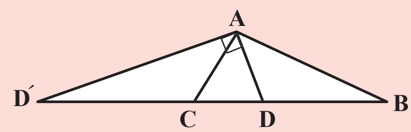
x=0 مجانب قائم تابع است.

هندسهٔ ۳

۱. فرض کنیم مثلث ABC را داشته باشیم و AD نیمساز داخلی و AD′ نیمساز خارجی باشد.

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=2$$

$$\frac{D'B}{D'C}=\frac{AB}{AC}=2$$

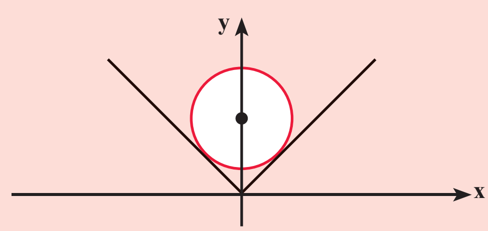


پس نقطهٔ D را روی $BC(CD=2, DB=4)$

و نقطهٔ D′ را در امتداد $BC(D'C=6, D'B=12)$ در نظر می‌گیریم.

چون: $AD\perp AD'$، پس مکان هندسی A دایره‌ای است به قطر DD′ (به جز نقاط D و D′).

۲.



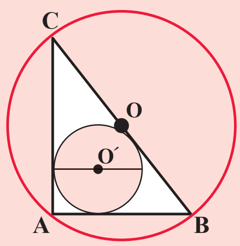
$$C: X^2+(y-R\sqrt{2})^2=R^2$$

$$M(\sqrt{7},3)\in C\Rightarrow 7+(3-R\sqrt{2})^2=R^2$$

$$\Rightarrow R^2-6\sqrt{2}R+16=0\Rightarrow R=4\sqrt{2} \text{ یا } 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_1: x^2+y^2-16y+32=0\\ C_2: x^2+y^2-8y+8=0\end{cases}$$

۳. توجه داریم که مثلث ABC قائم‌الزاویه است



مرکز دایرهٔ محیطی = $O\left|\begin{matrix}\frac{3}{2}\\ \frac{4}{2}\end{matrix}\right.$ وسط BC

شعاع دایرهٔ محیطی = $R=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{5}{2}$

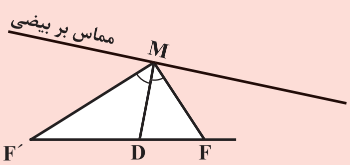
دایرهٔ محیطی: $(x-\frac{3}{2})^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$

دایرهٔ محیطی: $x^2+y^2-3x-4y=0$

شعاع دایرهٔ محاطی = $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{\frac{1}{2}(3\times 4)}{\frac{1}{2}(3+4+5)}=1\Rightarrow o'\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$

دایرهٔ محاطی داخلی: $(x-1)^2+(y-1)^2+1\Rightarrow x^2+y^2-2x-2y+1=0$

۴.



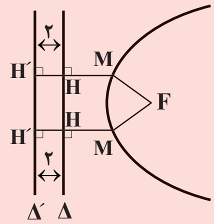
$$FM=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{224}{9}}=5 \qquad F'M=\sqrt{\frac{676}{9}+\frac{224}{9}}=10$$

نیمساز داخلی $MD\Rightarrow\dfrac{DF'}{DF}=\dfrac{MF'=10}{MF=5}=2\Rightarrow D(6,0), m_{MD}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

$F'\hat{M}F$ نیمساز خارجی = M معادلهٔ مماس بر بیضی در نقطهٔ: $y-y_M=\dfrac{-2}{\sqrt{14}}(x-x_M)$

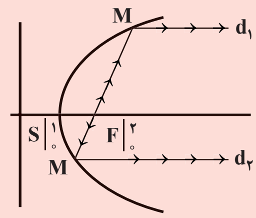
معادلهٔ مماس بر بیضی در نقطهٔ M: $2x+\sqrt{14}y-36=0$

۵. مکان، یک سهمی است به کانون F و به خط هادی Δ که در آن Δ به موازات خط d و به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متری از d قرار دارد.



$$M \in \text{سهمی} \Rightarrow MH = MF$$
$$\Rightarrow MH' - ۲ = MF$$

۶. $y^۲ = ۴x - ۴ \Rightarrow y^۲ = ۴(x-۱)$



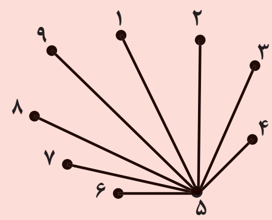
$$M:\begin{cases} \text{معادلهٔ سهمی}: y^۲ = ۴(x-۱) \\ \text{معادلهٔ تابش}: y = x - ۲ \end{cases} \Rightarrow y^۲ - ۴y - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow y_M = ۲ \pm ۲\sqrt{۲} \Rightarrow \begin{cases} d_۱ : y = ۳\sqrt{۲} \\ d_۲ : y = -\sqrt{۲} \end{cases}$$

ریاضیات گسسته

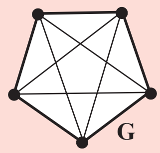
۱. با توجه به تعریف E داریم:

$$E = \{\{۱,۵\},\{۲,۵\},\{۳,۵\},\{۴,۵\},\{۶,۵\},\{۷,۵\},\{۸,۵\},\{۹,۵\}\}$$



۲. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} q = ۶p - ۲۰ \\ ۴p = ۲q \Rightarrow q = ۲p \Rightarrow ۳q = ۶p \Rightarrow \end{cases}$$
$$\Rightarrow q = ۳q - ۲۰ \Rightarrow ۲q = ۲۰ \Rightarrow q = ۱۰$$
$$\Rightarrow p = ۵ \Rightarrow p + q = ۱۵ \rightarrow$$



۳. با توجه به گراف داده شده داریم:

I) $N_G[a] = \{a, d, c\}$

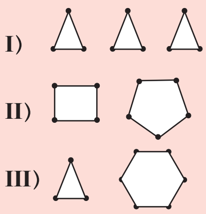
II) $N_G(c) = \{a, b, e\}$

III) $N_G[d] = \{d, f, e, c, a\}$

IV) $N_G(b) = \{c\}$, $\Delta - \delta = ۴ - ۱ = ۳$

۴. با توجه به گراف داده شده داریم:
تعداد دورها برابر است با مجموع دورهای به طول ۳، ۴ و ۵ (در صورت وجود) که در این گراف سه دور به طول ۳، دو دور به طول ۴، یک دور به طول ۵ و مجموعاً ۶=۱+۲+۳ دور وجود دارد.

۵. گراف G به صورت‌های زیر رسم می‌شود:



I) سه دور به طول ۳ =

II) دو دور به طول‌های ۴ و ۵ =

III) دو دور به طول‌های ۳ و ۶ =

۶. با توجه به گراف داده شده داریم:

الف) $D_۱ = \{b, c, e\}, D_۲ = \{c, e\}$ (دو مجموعهٔ احاطه‌گر)

ب) $D = \{c, f\}$ (احاطه‌گر مینیمم)

پ) $D = \{e, b, d\}$ (احاطه‌گر مینیمال و غیرمینیمم)

۷. $$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{۱۰}{۴} \right\rceil = ۳$$

از طرف دیگر، چون $D = \{a, h, e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، پس: $\gamma(G) = ۳$ و مجموعهٔ $K = \{a, j, d, y\}$ احاطه‌گر مینیمال و غیرمینیمم است.

نامتناهی بودن عددهای اول و قانون عددهای بزرگ

دکتر غلامرضا یاسی‌پور

تو بزرگیّ و در آیینهٔ کوچک ننمایی[1]

تو جهان را قدر دیده دیده‌ای
کو جهان؟ سبلت چرا مالیده‌ای؟
[مثنوی معنوی/ دفتر پنجم/ ۱۹۰۶]

این **اقلیدس** بود که در قرن سوم قبل از میلاد، ثابت کرد تعداد عددهای اول بی‌نهایت است. یعنی ثابت کرد، هرچند عدد اول که نوشته شود، باز عدد اول دیگری وجود دارد.

عدد اول عددی است که دقیقاً دو مقسوم‌علیه دارد: ۱ و خود عدد.

چند عدد اول نخستین عبارت‌اند از: ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ و ۱۳.

این دنباله همواره ادامه دارد. اثبات این مطلب در «مقدمات اقلیدس» آمده است. اثبات وی نشان می‌دهد که بیش از سه عدد اول موجود است، اما آن را می‌توان در مورد هر تعداد عدد گسترش داد.

اثبات با استفاده از تناقض یا برهان خُلف انجام می‌گیرد. فرض می‌کنیم تنها عددهای اول‌مان a، b و c باشند. در این صورت abc +۱ را در نظر می‌گیریم. این عدد یک واحد از مضربی از a بزرگ‌تر است و بنابراین نمی‌تواند بر a بخش‌پذیر باشد. به همین ترتیب، نمی‌تواند به b یا c نیز بخش‌پذیر باشد. بنابر قضیهٔ اصلی حساب، هر عدد می‌تواند به‌صورت حاصل‌ضرب عددهای اول نوشته شود. این عدد جدید باید بر عدد اولی بخش‌پذیر باشد که از a، b و c متفاوت باشد که متناقض این فرض است که این سه عدد تنها عددهای اول هستند.

این اثبات نشان می‌دهد که بی‌نهایت عدد اول موجود است، اما فرمولی برای فهرست کردن آن‌ها به دست نمی‌دهد. این فرمول قرار بود ۲۰۰۰ سال بعد و در آینده کشف شود.

و اما قانون عددهای بزرگ، آن‌گونه که ***ژاکوب برنولی*** در دست‌نوشته‌اش (*Ars Conjectandi*) تنظیم کرده و پس از مرگش به چاپ رسیده، به‌صورت زیر است:

زمانی که دربارهٔ «قانون میانگین[2]‌ها» از ***سریل ادوین میچینسون یوآدِ*** فیلسوف، پرسیدند، پاسخ داد:

«در صورتی که سکه‌ای را صد بار بیندازید، ۵۰ بار شیر و ۵۰ بار خط خواهد آمد.»

استاد دانشمند مزبور، باید آگاهی بیشتری در این مورد می‌داشت، زیرا احتمال دقیقاً آمدن ۵۰ شیر از صد بار انداختن سکه تنها در حدود ۰/۰۸ است. طبق قانون عددهای بزرگ که عبارت ریاضی قانون میانگین‌هاست، نسبت انداخت‌هایی که شیرها را به دست می‌دهد، به $\frac{۱}{۲}$ نزدیک می‌شود.

به عبارت دیگر، فرض می‌کنیم در آزمایشی احتمال p موفقیت داشته باشد. در این صورت، نسبت موفقیت‌ها با آزمایش‌های بیشتر و بیشتر، با احتمال یک، به p نزدیک می‌شود.

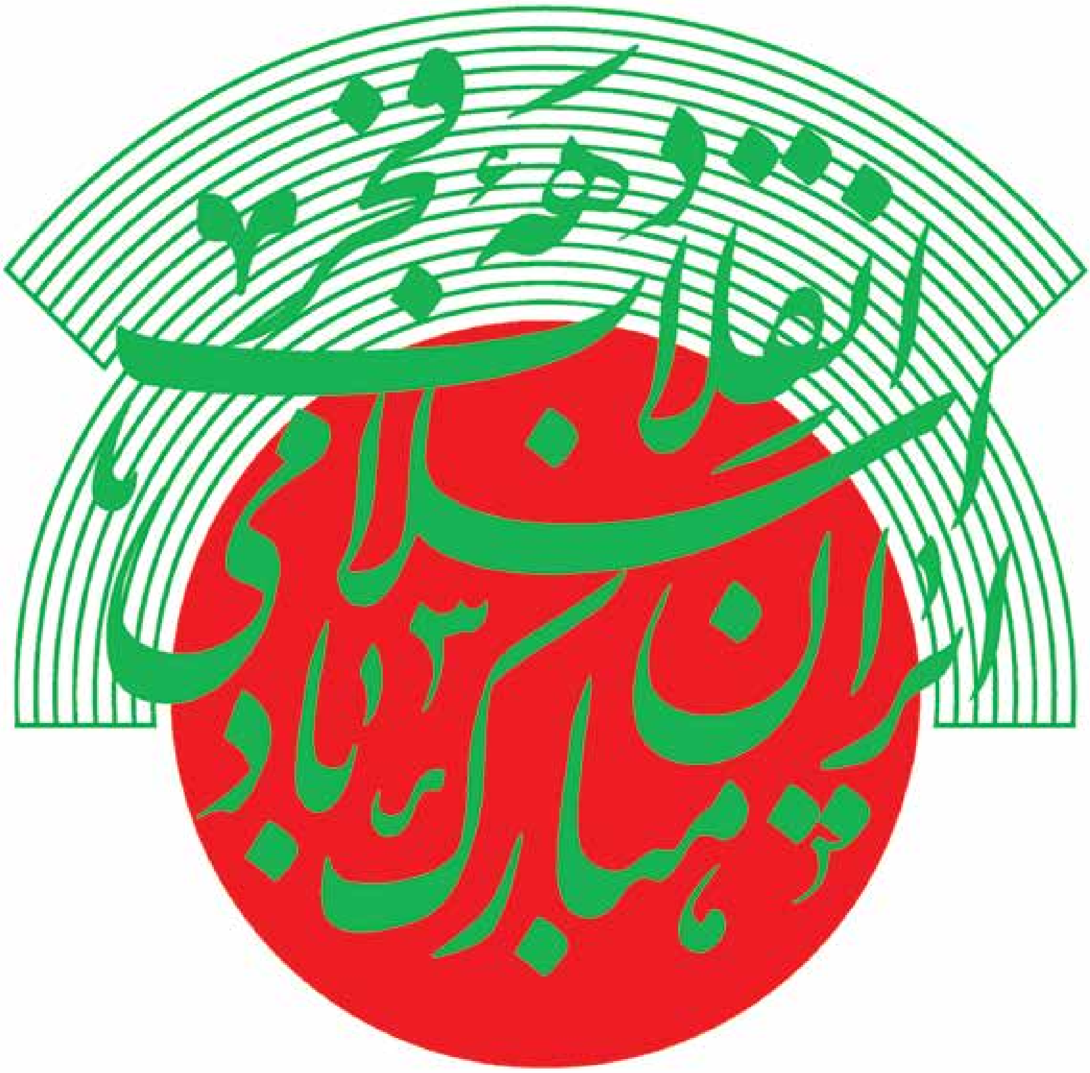
فرض می‌کنیم سکهٔ یکنواختی مکرراً انداخته شده باشد. تقریباً با تحقق بسیار نسبت شیرها به $\frac{۱}{۲}$ نزدیک خواهد شد.

پس در این مورد توهم را مرخصی می‌دهیم و دست رد بر سینهٔ تخیل می نهیم.

پی‌نوشت‌ها

۱. پرده بردار که بیگانه خود این روی نبیند
تو بزرگیّ و در آیینهٔ کوچک ننمایی
(سعدی/ غزلیات)

2. law of averages



چهل و دومین سالگرد پیروزی
انقلاب شکوهمند اسلامی ایران مبارک باد