وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

# رشد برهان ریاضی

۱۱۶
دورهٔ بیست و نهم
شمارهٔ ۳
بهار ۱۳۹۹
۶۴ صفحه
۳۹۰۰۰ ریال
ISSN: 1735-4951

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

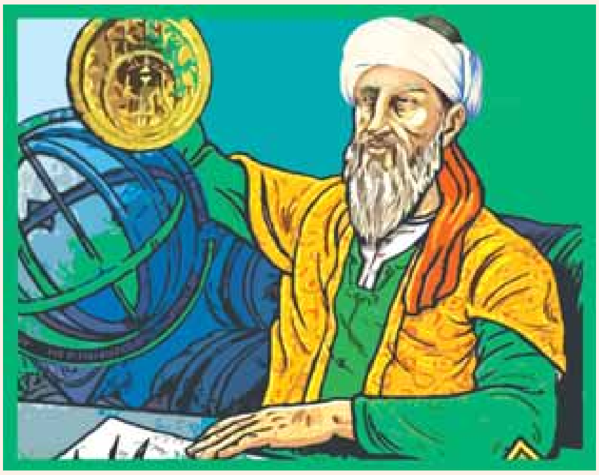
www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵

# کوشیار گیلی (جیلی)

## (کیا ابوالحسن کوشیار بن لبان بن باشهری گیلانی)

**جعفر زیدی**
دبیر ریاضی و کارشناس ارشد تاریخ علم

**از منجمان و ریاضی‌دانان بزرگ ایران است که آثار ارزندهٔ علمی خود را در نیمهٔ دوم قرن چهارم هجری پدید آورده است. حدود ۳۳۰ تا ۴۰۰ قمری را می‌توان دوران زندگی او دانست. *گیلانی* همان‌گونه که از نامش برمی‌آید، اهل گیلان بود و در منابع عربی و غربی «جیلی» خوانده شده است. نخستین زندگینامه‌نویسی دربارهٔ کوشیار را *ابوالحسن بیهقی* (۵۶۵ ـ ۴۹۳ ق) نوشته است. به گفتهٔ بیهقی، او در بغداد می‌زیست و در حدود ۳۵۰ ق درگذشت.**



### تألیفات کوشیار:

**✱ کتاب «فی اصول حساب‌الهند»**

این کتاب که به زبان عربی و نسخهٔ خطی آن موجود است، دو مقاله دارد: مقالهٔ اول که از ۹ فصل تشکیل شده، دربارهٔ قاعده‌های عادی شناخته‌شدهٔ حساب است. مقالهٔ دوم هم که ۱۶ فصل دارد، عمل‌های حساب با عددهای مثبت در دستگاه شصتگانی را شرح می‌دهد و جدول‌های ضرب و ریشهٔ دوم را در همان دستگاه می‌آورد.

**✱ کتاب «دربارهٔ عمل‌ها در حساب هندی» یا «عیون‌الاصول فی‌الحساب»**

تنها نسخهٔ خطی شناخته‌شدهٔ آن در کتابخانهٔ دانشگاه تهران نگهداری می‌شود. جایگاه یکتای کوشیار در پیشبرد حساب هندی هنوز به درستی شناخته نشده است.

**✱ شرح تجریدی اصول تنظیم جدول سینوس‌ها**

نسخهٔ خطی آن در استانبول کتابخانهٔ «جارالله» نگهداری می‌شود.

**✱ احکام سهمیات یا مقدار سهم‌ها**

نسخهٔ خطی آن در تهران، در کتابخانهٔ **محمدفرهاد معتمد** نگهداری می‌شود.

**✱ زیج جامع یا الزیج الجامع، مشهور به کتاب زیج جامع و زیج کوشیار**

یک نسخهٔ خطی آن در اسکندریه، در کتابخانهٔ بلدیه موجود است.

**✱ زیج بالغ**

این اثر به زبان عربی نوشته شده و دومین نوشتهٔ بزرگ اخترشناسی کوشیار است. متأسفانه این کتاب به‌طور کامل به ما نرسیده است. نسخهٔ خطی بخش به‌جامانده از آن در برلین نگهداری می‌شود.

**✱ رسالهٔ فاصله‌ها و اندازه‌های جرم‌ها یا رساله فی ابعاد و الاجرام**

نسخهٔ خطی آن در هندوستان، در «کتابخانهٔ عمومی خاورشناسی بانکی‌پور» موجود است.

**✱ رساله اسطرلاب و انتخاب روزها یا رساله در اسطرلاب و اختیارات**

نسخهٔ خطی این کتاب که به زبان فارسی است، در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی نگهداری می‌شود.

**✱ کتاب مدخل در صنعت احکام نجوم یا کتاب‌المدخل فی صناعه احکام‌النجوم مشهور به مدخل احکام نجوم و مجمل‌الاصول**

به زبان عربی است و ترجمهٔ فارسی آن به نام «مدخل صنعت احکام نجوم» وجود دارد.

**✱ زیج عضدالدینی (زیج عضدی)**

به زبان فارسی و موجود است.

**✱ اصلاح تعدیل مریخ**

بیهقی از آن یاد کرده است.

**✱ مِن و عَن**

نوشته‌ای دربارهٔ دستور زبان فارسی که به نام **بیرونی** نوشته شده و نام آن در «الفهرست» آمده است.

### نظردهندگان دربارهٔ کارهای کوشیار و متأثران از او:

✱ **علی‌بن احمد نسوی**، حساب‌دان متولد ۳۹۳ ق که در حدود ۴۷۳ ق درگذشت، از پیروان شایستهٔ اوست.

✱ **ابوریحان بیرونی** بارها به کارها و برهان‌های کوشیار در نوشته‌های خود استناد کرده است. کوشیار گیلی کتاب «مِن و عَن» در دستور زبان فارسی را به نام بیرونی نوشته است.

✱ در نوشته‌های **خواجه نصیر طوسی** نام کوشیار و قضیه‌های ریاضی‌اش را می‌توان دید.

✱ کوشیار کارهای **بوزجانی** و **بتانی** را در مطالعهٔ تابع‌های مثلثاتی ادامه داده است.

✱ از زیج کوشیار در نوشته‌های اخترشناسان مشهوری، چون **قطب‌الدین شیرازی، شمس‌الدین بخاری، نظام‌الدین بیرجندی، فرید دهلوی و ...** نام برده شده است.

✱ **نظامی عروضی سمرقندی** در «چهار مقاله» خود، یکی از شرایط هر منجم را آشنایی او با «مجمل‌الاصول» کوشیار می‌داند.

✱ **سعدی شیرازی**، در باب چهارم «بوستان»، در بحث «تواضع»، از کوشیار منجم با ارادت یاد می‌کند.

رشد
# برهان ریاضی
فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

- دورهٔ بیست‌ونهم
- شمارهٔ پی‌درپی ۱۱۶
- بهار ۱۳۹۹
- شمارهٔ ۳
- ۶۴ صفحه
- ۳۹۰۰۰ ریال


بسم الله الرحمن الرحیم

اللهم صل علی محمد و آل محمد




وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

**مدیرمسئول:** مسعود فیاضی
**سردبیر:** حمیدرضا امیری
**مدیر داخلی:** میرشهرام صدر
**ویراستار ادبی:** بهروز راستانی
**طراح گرافیک:** شاهرخ خره‌غانی
**تصویرگر:** میثم موسوی





**وبگاه:**
www.roshdmag.ir
**پیام‌نگار:**
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
**نشانی وبلاگ مجله:**
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
**پیامک:**
۳۰۰۰۸۹۹۵
**نشانی دفترمجله:**
تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶
**تلفن دفتر مجله:** ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱-۰۲۱(داخلی ۳۷۴)
**نمابر مجله:** ۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶
**صندوق‌پستی دفتر مجله:**
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
**صندوق پستی امور مشترکین:**
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
**تلفن امور مشترکین:**
۰۲۱ ـ ۸۸۸۶۷۳۰۸
**چاپ و توزیع:**
شرکت افست
**شمارگان:**
۳۸۰۰ نسخه


**مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:**

● نگارش مقاله‌های کمک‌درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲ ● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

- مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق رایانامه مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید.
- در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

**خوانندگان رشد برهان ۲:**

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

**نشانی:** تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
**تلفن:** ۵۷۷۲-۸۸۳۰-۰۲۱

# سکوی پرش!

برای جهش در هر زمینه‌ای به یک سکوی مناسب نیاز داریم. اگر بخواهیم در زمینهٔ ورزشی پیشرفت و جهشی داشته باشیم، باید در آن زمینه فعالیت کنیم و سکویی برای این پرش و پیشرفت بسازیم که مناسب، به‌روز و دارای پایه‌های قوی و محکم باشد. اگر بخواهیم در حوزهٔ دانش و تحصیل علم پیشرفت چشم‌گیر و جهشی داشته باشیم، باید با تلاش و سخت‌کوشی، پیوستگی و استمرار در یادگیری، و تمرین و تمرکز سکویی بسازیم تا ما را جهش دهد و ما را به قله‌های علم و تولید علم برساند. اگر بخواهیم در راستای تهذیب نفس حرکتی روبه‌بالا داشته باشیم نیز باید از توکل و تقوا یاری جوییم و به کمک رهنمودهای معصومین، ابرار و بزرگان به این مهم دست یابیم.

عزیزان دانش‌پژوه، مقام معظم رهبری در یکی از دیدارهای خود با جمعی از جوانان (۷۷/۲/۷) می‌فرمایند:

«اگر در یک جملهٔ کوتاه از من بپرسند که شما از جوان چه می‌خواهید؟ خواهم گفت: تحصیل، تهذیب و ورزش. من فکر می‌کنم که جوانان باید این سه خصوصیت را دنبال کنند.»

اگر این جملهٔ کوتاه و حکیمانهٔ ایشان را در کنار نام‌گذاری سال ۱۳۹۹ (سال جهش تولید) قرار دهیم، وظیفهٔ شما جهش و پیشرفت در هر سه زمینهٔ تحصیل، تهذیب و ورزش است که می‌تواند رشد و تعالی کشور را در آینده توسط شما آینده‌سازان این نظام مقدس تضمین کند.

ان‌شاءالله مطالب علمی و آموزشی که در مجله‌های رشد، از جمله مجله ریاضی رشد برهان متوسطهٔ ۲ مطالعه می‌کنید، بتواند بخشی از نیازهای شما را برای ساختن این سکوهای جهش تأمین کند و البته ما منتظر پیشنهادها و نظرات شما در جهت بهبود مطالب هستیم.

مؤید و پیروز باشید ـ سردبیر

محمدهاشم رستمی

# مکان هندسی

**اشاره**

**دانش «هندسه» یکی از پنج استاندارد موضوعی در برنامهٔ درسی اغلب کشورهای جهان است که مفاهیم آن باید از پیش‌دبستان تا سال دوازدهم متوسطه، با توجه به سن دانش‌آموزان در هر پایهٔ تحصیلی تدریس شود. این موضوع اهمیت دانش هندسه را نشان می‌دهد. چهار استاندارد موضوعی دیگر عبارت‌اند از: عددها و عملیات؛ جبر؛ اندازه‌گیری؛ آمار و تحلیل داده‌ها.**

**یکی از مهم‌ترین بخش‌های هندسه، «مکان هندسی» است. مکان‌های هندسی علاوه بر آنکه خود شامل قضیه‌ها و مسئله‌های جالبی هستند، در بخش‌های دیگر هندسه و به‌خصوص در رسم شکل‌های هندسی (در ترسیمات هندسی یا ساختمان‌های هندسی) نقشی مؤثر و تعیین‌کننده دارند. ساختمان‌های هندسی را برخی عنصر اصلی آموزش ریاضی و وسیله‌ای نیرومند و قوی برای پرورش استعدادها در زمینهٔ هندسه و به‌طور کلی ریاضی می‌دانند که این مطلب خود اهمیت مکان‌های هندسی را بیشتر نمایان می‌سازد.**

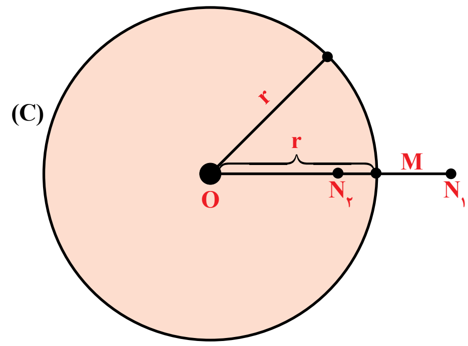
**اکنون ببینیم تعریف مکان هندسی چیست. نخست به تعریف مکان هندسی نقطه می‌پردازیم. در این مورد و به‌طور کلی در مورد تعریف هر مکان هندسی، اولین عاملی که باید مشخص شود، فضا یا جایگاهی است که نقطه یا شکل مورد نظری که می‌خواهیم مکان هندسی آن را تعریف کنیم، در آن قرار دارد. ما این فضا را (H) می‌نامیم.**

**تعریف:** مکان هندسی نقطه در فضای (H)، مجموعهٔ نقطه‌هایی از این فضاست که دارای خاصیت مشترکی باشند، به طوری که:

**۱.** هر نقطه از فضای (H) این خاصیت مشترک را داشته باشد.

**۲.** هر نقطه از فضای (H) که این خاصیت مشترک را دارا باشد، به این مجموعه تعلق داشته باشد.

**برای مثال. الف)** مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از نقطهٔ ثابتی واقع در آن صفحه به فاصلهٔ ثابتی قرار داشته باشد، یک دایره است که آن نقطهٔ ثابت مرکز آن دایره و آن مقدار ثابت شعاع آن دایره است. دایره به مرکز O و به شعاع r را به‌صورت C(O,r) نشان می‌دهند (C حرف اول کلمهٔ «Circle» به معنی دایره است).




**شکل ۱**

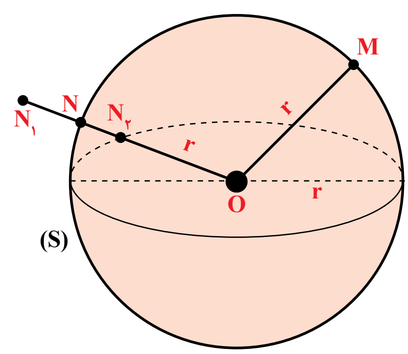
بدیهی است که:

۱. اگر M نقطه‌ای دلخواه واقع بر این دایره باشد، OM=r است.

۲. هر نقطهٔ دلخواه N واقع در صفحهٔ این دایره که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ r باشد، روی این دایره قرار دارد.

**ب)** مکان هندسی نقطه‌هایی از فضای سه‌بعدی ($R^3$) که از نقطهٔ ثابت O واقع در این فضا به فاصلهٔ ثابت r باشند، یک کره به مرکز O و به شعاع r است.

کره به مرکز O و به شعاع r را به‌صورت S(O,R) نشان می‌دهند (S حرف اول کلمهٔ «Sphere» به معنی کره است)




**شکل ۲**

بنابر تعریف روشن است که:

**۱.** هر نقطه‌ای که روی این کره باشد، از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ r است:

$$M \in S(O,R) \Rightarrow OM = r$$

**۲.** هر نقطه‌ای از فضای $R^3$ که به فاصلهٔ r از نقطهٔ ثابت O باشد، روی کرهٔ (S) قرار دارد:

$$ON = r \Rightarrow M \in S(O,r)$$

**نکته.** به طوری که دیده می‌شود، مکان هندسی نقطه‌ای که از یک نقطهٔ ثابت واقع در یک صفحه به فاصلهٔ ثابتی باشد، در فضای $R^2$، یک دایره و در فضای $R^3$ یک کره است.

همین، مکان هندسی در فضایی دیگر، شکل دیگری خواهد بود. مکان هندسی را در برخی از کتاب‌ها، «مشخص‌ساز» نامیده‌اند.

اکنون می‌توانیم تعریف کلی‌تری از مکان هندسی نقطه را بیاوریم:

**تعریف:** مکان هندسی نقطه‌هایی از فضای (H) که دارای خاصیت ($\alpha$) باشند، شکل (f) است، هرگاه:

**۱.** هر نقطه از شکل (f) دارای خاصیت ($\alpha$) باشد.

**۲.** هر نقطه از فضای (H) که خاصیت ($\alpha$) را دارا باشد، متعلق به شکل (f) باشد.

در تعریف بالا، اگر فضای (H) صفحهٔ $R^2$ و خاصیت ($\bar{a}$) به یک فاصله بودن نقطه‌ها از یک نقطهٔ ثابت باشد، مکان هندسی یک دایره است.

**تمرین**

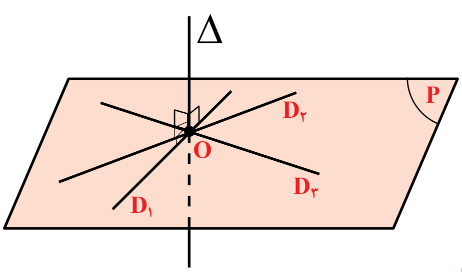
با انتخاب فضای (H) و خاصیت ($\alpha$) مکان‌های هندسی را که می‌شناسید تعریف کنید؛ مانند عمودمنصف یک پاره‌خط و نیمساز یک زاویه.

**تمرین**

اگر فضای (H) یک خط راست باشد، مکان‌های هندسی را که می‌شناسید، بررسی کنید؛ مانند مکان هندسی نقطه‌ای که از یک نقطه ثابت به فاصلهٔ ثابتی باشد.

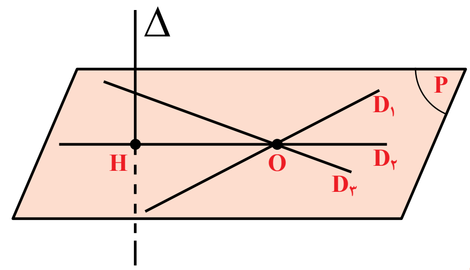
**نکتهٔ مهم.** اگر در تعریف مکان هندسی نقطه، به جای نقطه خط، صفحه و یا شکل‌های هندسی دیگری که خاصیت مشترکی در فضای (H) دارند، قرار دهیم، تعریف مکان هندسی خط، صفحه و ... به‌دست می‌آید. به مثال بعدی توجه کنید:

**تعریف:** مکان هندسی خط‌هایی از فضای $R^3$ که از یک نقطهٔ ثابت واقع در این فضا بر خط ثابتی واقع در این فضا عمود می‌شوند، یک صفحه است که از آن نقطه ثابت می‌گذرد و بر آن خط ثابت عمود است.




**شکل ۳**

برای مثال، مکان هندسی خط‌هایی از فضای $R^3$ که از نقطهٔ ثابت O واقع در این فضا، عمود بر خط Δ از این فضا عمود می‌شوند، صفحهٔ P است که از نقطهٔ O می‌گذرد. این صفحه منحصربه‌فرد است.




**شکل ۴**

بدیهی است که بنابر تعریف مکان هندسی:

**۱.** هر خطی که از نقطهٔ O در صفحهٔ P بگذرد، بر خط ثابت Δ عمود است.

**۲.** هر خطی که از نقطهٔ ثابت عمود بر خط Δ رسم شود، در صفحهٔ P واقع است.

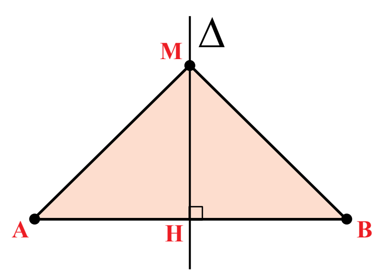
**پرسش:** آیا می‌توانید تعریفی کلی برای مکان هندسی یک شکل هندسی ارائه کنید؟ پاسخ را بنویسید. (به چند نفر از کسانی که کامل‌ترین تعریف را بنویسند و به آدرس مندرج در مجله ارسال کنند، چند جلد از دایرةالمعارف هندسه هدیه خواهد شد.)

**نکته.** از تعریف مکان هندسی مشخص می‌شود که برای اثبات هر قضیهٔ مربوط به یک مکان هندسی، دو قضیه را باید ثابت کنیم (یک قضیه و عکس آن قضیه را).

به مثال زیر توجه کنید:

**قضیه.** مکان هندسی نقطه‌هایی از یک صفحه که از دو نقطهٔ ثابت واقع در آن صفحه به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خطی است که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند.

**اثبات:** دو نقطهٔ ثابت A و B از صفحهٔ P را در نظر می‌گیریم، از A به B وصل می‌کنیم، عمودمنصف پاره‌خط AB را می‌کشیم و آن را خط Δ می‌نامیم. نقطهٔ برخورد خط Δ با AB را که وسط پاره‌خط AB است، H می‌نامیم. اکنون دو قضیهٔ بعد را باید ثابت کنیم:




**شکل ۵**

**الف)** اگر M نقطه‌ای دلخواه واقع بر خط Δ عمودمنصف پاره خط AB باشد، آن‌گاه: MA=MB ؛ یعنی نقطهٔ M از دو نقطهٔ ثابت A و B به یک فاصله است؛ یعنی در این قضیه داریم:

$$\begin{cases} \text{فرض} : M \in \Delta \\ \text{حکم} : MA = MB \end{cases}$$

**ب)** اگر N نقطه‌ای از صفحهٔ P باشد که از دو نقطهٔ ثابت A و B به یک فاصله باشد، یعنی NA=NB باشد، آن‌گاه نقطهٔ N روی خط Δ، عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد؛ یعنی در این قضیه داریم:

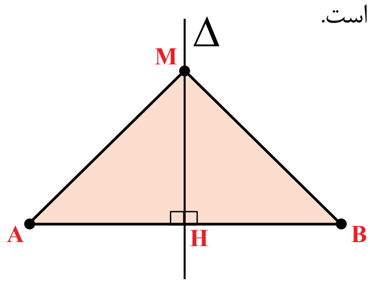
$$\begin{cases} \text{فرض} : NA = NB \ \text{یا} \ MA = MB \\ \text{حکم} : N \ \text{یا} \ M \in \Delta \end{cases}$$

به طوری که دیده می‌شود، این دو قضیه عکس یکدیگرند. دربارهٔ یک قضیه و عکس آن قضیه بیشتر خواهیم گفت.

**اثبات: الف.** دو مثلث قائم‌الزاویه MHA و MHB هم‌نهشت‌اند؛ زیرا:

$$\begin{cases} \widehat{MHA} = \widehat{MHB} = 90^\circ \\ MH = MH \\ HA = HB \quad (\text{نقطهٔ H وسط پاره‌خط AB است}) \end{cases}$$

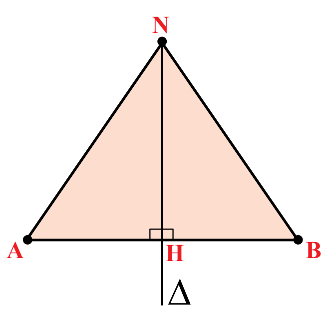
از هم‌نهشت بودن این دو مثلث نتیجه می‌شود که: MA=MB. یعنی نقطهٔ M واقع بر عمودمنصف پاره‌خط AB، از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است.




**شکل ۶**

**اثبات به روش دیگر:** در مثلث MAB، ارتفاع وارد بر ضلع AB و میانهٔ نظیر این ضلع بر هم منطبق‌اند. پس این مثلث متساوی‌الساقین است؛ یعنی: MA=MB.

**پرسش:** آیا قضیه‌ای در این مورد می‌توانید بیان کنید؟




**شکل ۷**

**اثبات: ب.** از نقطهٔ N به دو نقطهٔ A و B وصل می‌کنیم. دو مثلث NHA و NHB به دلیل تساوی سه ضلع نظیر به نظیر هم‌نهشت‌اند؛ زیرا: NA=NB و NH=NH و HA=HB

بنابراین: $\widehat{NHA} = \widehat{NHB} = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ) = ۹۰^\circ$

یعنی NH عمود بر AB اســت و چون پاره‌خط AB را نصف هم کرده، پس عمودمنصف پاره‌خط AB، یعنی همان خط Δ اســت. در نتیجه، نقطهٔ N که از دو نقطهٔ ثابت A و B به یک فاصله است، روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

**تمرین**

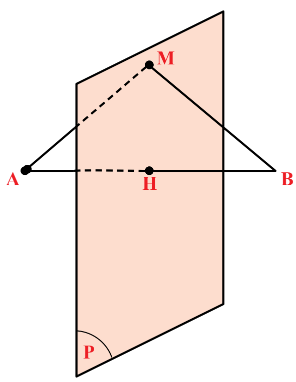
بـا اسـتفاده از ویژگی مثلث متساوی‌السـاقین اثبات دیگری برای قسمت (ب) بیابید.

**توجه:** صورت این قضیه را چنین می‌توان بیان کرد:

**قضیه.** مکان هندســی نقطه‌ای از یک صفحه که از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در این صفحه به یک فاصله باشد، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

اکنون فضایی را که نقطهٔ M در آن قرار دارد، فضای ســه‌بعدی، یعنی $R^۳$، و خاصیت این مکان هندسی را که به یک فاصله بودن نقطه در فضای $R^۳$ از دو نقطهٔ ثابت واقع در این فضاست، در نظر می‌گیریم. در این مورد قضیهٔ زیر را خواهیم داشت:

**قضیه.** مـکان هندســی نقطه‌هایی از فضای ســه‌بعدی $R^۳$ که از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در این فضا به یک فاصله باشــند، صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB است.




شکل ۸

**نکته.**

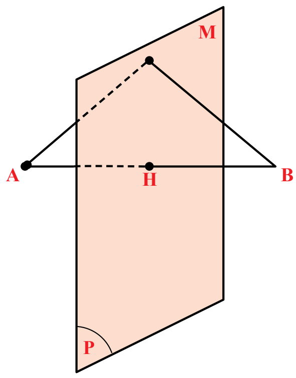
۱. صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB صفحه‌ای اســت که از وسط پاره‌خط AB می‌گذرد و بر خط AB عمود است (شکل ۸).

۲. در این مورد نیز باید دو قضیه (یک قضیه و عکس آن) را ثابت کنیم.

**الف)** هر نقطه واقع در صفحهٔ P، یعنی صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB، از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است.

**ب)** هر نقطــه‌ای از فضای $R^۳$ که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد، روی صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

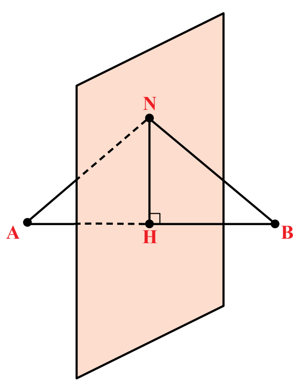
**اثبــات: الــف.** صفحهٔ عمودمنصــف پاره‌خط AB را P می‌نامیــم. نقطهٔ دلخواه M از ایــن صفحه را بــه دو نقطهٔ ثابــت A و B وصل می‌کنیم. می‌خواهیــم ثابــت کنیــم: MA=MB.




شکل ۹

بــرای اثبــات از نقطهٔ M به نقطهٔ H وســط پاره‌خط AB وصل می‌کنیم. MH عمود بر AB اســت؛ زیرا بنابر یک قضیه که درستی آن را می‌پذیریــم، هرگاه خطی بر یک صفحه عمود باشــد، بر تمام خط‌های آن صفحه عمود اســت. بنابرایــن خط AB بر خط MH از صفحهٔ P عمود اســت. از آنجا دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MAH و MBH هم‌نهشت‌اند. زیرا: $\widehat{NHA} = \widehat{NHB} = ۹۰^\circ$؛ در هر دو مشترک =MH؛ و HA=HB (H وسط پاره‌خط AB است). در نتیجه وترهای این دو مثلث مساوی‌اند، یعنی MA=MB و حکم ثابت شد.

**اثبات: ب.** نقطهٔ دلخواه N در فضای $R^۳$ را که از دو نقطهٔ ثابت A و B به یک فاصله است، در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم که این نقطه روی صفحهٔ P، یعنی صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. برای اثبات از نقطهٔ N به نقطهٔ H وسط پاره‌خط AB وصل می‌کنیم. دو مثلث NAH و NBH به دلیل تساوی سه ضلع نظیرشان هم‌نهشت‌اند؛ NH=NH و NA=NB و HA=HB




شکل ۱۰

از هم‌نهشت بودن این دو مثلث نتیجه می‌شود که:

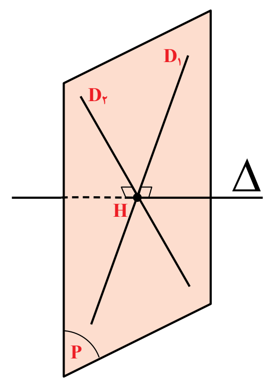
$$N\hat{H}A = N\hat{H}B = \frac{۱}{۲}A\hat{H}B = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ) = ۹۰^\circ$$

بنابرایـــن خط NH در نقطهٔ H بر خط AB عمود اســـت و چون صفحهٔ P نیز در نقطهٔ H بر خط AB عمود است، در نتیجه خط NH و از آنجا نقطهٔ N در صفحهٔ P قرار دارد و حکم ثابت است؛ یعنی هر نقطه‌ای از فضای $R^۳$ که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشـــد، در صفحهٔ P قرار دارد.

پس می‌توان گفت: «مکان هندسی نقطه‌هایی از فضای $R^۳$ که از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در این فضا به یک فاصله هســـتند، صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB است».

**نکته.**

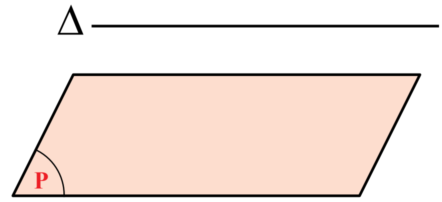
**۱.** در اثبات قســـمت ب از این ویژگی خط عمود بر صفحه استفاده شد که اگر خط Δ در نقطهٔ H بر صفحهٔ P عمود باشد، هر خطی که از نقطهٔ H بر خط Δ عمود شود، در صفحهٔ P قرار دارد.




**شکل ۱۱**

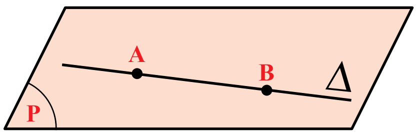
**۲.** برای روشن‌تر شـــدن مطالب مربوط به این قضیه، وضع نسبی خط و صفحه در فضا را بررسی می‌کنیم.

خط Δ و صفحهٔ P در فضا نسبت به هم سه حالت دارند:




**شکل ۱۲**

**حالت اول:** خط Δ هیچ نقطهٔ مشترکی با صفحهٔ P ندارد. در این صورت خط Δ را موازی صفحهٔ P می‌نامند.




**شکل ۱۳**

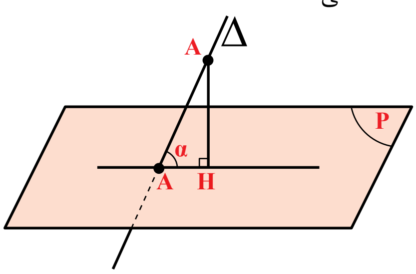
**حالت دوم:** خط Δ حداقل دو نقطهٔ مشترک با صفحهٔ P دارد. در این صورت خط Δ روی صفحهٔ P است.

**توجه: ۱.** همین مطلب یک تعریف برای صفحه است:

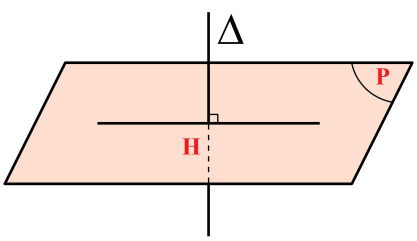
**تعریف:** صفحه سطحی است که اگر دو نقطه از خط راستی در آن قرار گیرند، تمام نقطه‌های آن خط در آن صفحه قرار گیرند.

**۲.** در برخی کتاب‌ها صفحه را جزء مفاهیم تعریف‌نشده در نظر می‌گیرند؛ مثل نقطه، خط و ... .

**حالت سوم:** خط تنها یک نقطهٔ مشترک با صفحه دارد. در این حالت خط را متقاطع با صفحه می‌نامند. اگر A نقطهٔ مشترک خط Δ و صفحهٔ P باشد و از نقطهٔ دلخواه M واقع بر خط Δ عمود MH را بر صفحـــهٔ P فرود آوریم و از A به H وصل کنیم، زاویهٔ MAH را زاویهٔ خط Δ با صفحهٔ P می‌نامند. اگر این زاویه ۹۰ درجه باشد، خط Δ را عمود بر صفحهٔ P می‌نامند.




**شکل ۱۴**




**شکل ۱۵**

خط و صفحه و به‌خصوص خط و صفحهٔ عمود بر هم ویژگی‌های فراوانی دارند، اما در اینجا امکان بررسی همهٔ آن‌ها نیست. یک نمونهٔ آن تعیین مکان هندســـی خط‌هایی است که در یک نقطهٔ آن صفحه را قطـــع می‌کنند و با آن صفحه زاویهٔ ثابت α می‌ســـازند. این مکان هندسی را خودتان بررسی کنید.

محمدحسین سهیل نقشی

# هفت مسئله حل نشده ریاضی با ظاهری ساده

## مقدمه

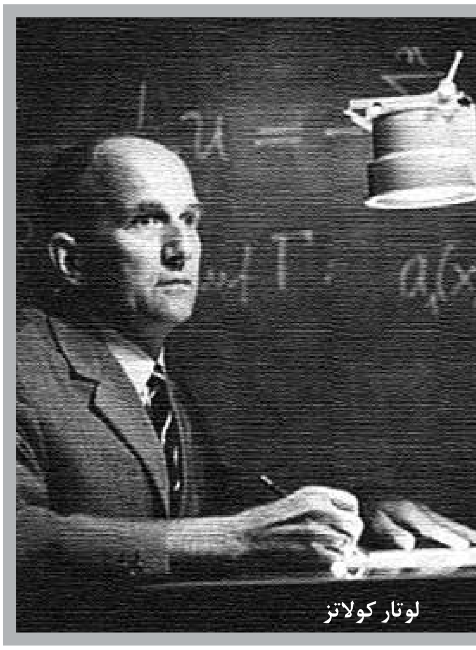
همان‌طور که می‌دانیم، ریاضیات مملو از مسئله‌هایی است که هنوز بعد از گذشت سال‌ها بی‌پاسخ مانده‌اند، اما بعضی از این مسئله‌ها ظاهری بسیار ساده دارند و برای همهٔ افراد قابل درک هستند.

در ریاضیات به مسئله‌هایی که تاکنون اثبات یا رد نشده‌اند، «*مسئله‌های باز*» گفته می‌شود. اغلب این مسئله‌ها در سطوح بالای ریاضی مطرح می‌شوند و دارای ظاهری مشکل هستند؛ مانند «*مسئله‌های هزاره*» که حل هر کدام از آن‌ها یک میلیون دلار به جیب شما سرازیر می‌کند؛ اما شاید اهمیت حل آن‌ها بیشتر از جایزه باشد؛ همان‌طور که *گریگوری پرلمان* وقتی در سال ۲۰۰۶ یکی از مسئله‌های هزاره را حل کرد، یک میلیون دلار را نپذیرفت. او گفت: «من همهٔ آنچه را که می‌خواهم در اختیار دارم. من می‌توانم هستی را کنترل کنم، پس به من بگویید چرا باید دنبال یک میلیون دلار باشم؟»

یکی دیگر از همین مسئله‌ها که به «*فرضیهٔ ریمان*» معروف است، از مشهورترین و مهم‌ترین مسئله‌های حل نشدهٔ ریاضی به شمار می‌رود و نتایجی را در ارتباط با توزیع عددهای اول در بردارد. این مسئله نیز یکی از مسئله‌های حل‌نشدهٔ هزاره و با جایزهٔ یک میلیون دلاری است. اما فارغ از تمام موارد یاد شده، مسائلی وجود دارند که با وجود ظاهری ساده و قابل فهم، نه رد و نه اثبات شده‌اند و هنوز حل نشده باقی مانده‌اند؛ مسئله‌هایی که «هر کس با دانش دبیرستانی می‌تواند آن‌ها را درک و روی کاغذ امتحان کند».

در این مقاله به هفت نمونه از چنین مسئله‌هایی خواهیم پرداخت و از همه درخواست داریم که پس از درک مسئله‌ها، زمانی برای حل آن‌ها بگذارند. ممکن است حلال یکی از این مسئله‌ها خود شما باشید.

## ۱. حدس کولاتز



لوتار کولاتز

یک عدد طبیعی انتخاب کنید. اگر زوج بود، آن را بر **۲** تقسیم کنید و اگر فرد بود، آن را **۳** برابر و با **۱** جمع کنید. برای عدد جدید به دست آمده همین فرایند را تکرار کنید. اگر این کار را ادامه دهید، در نهایت به عدد ۱ خواهید رسید. برای مثال:

$$۷ \xrightarrow{\text{فرد}} ۷\times ۳+۱=۲۲ \xrightarrow[\div ۲]{\text{زوج}} ۱۱ \xrightarrow{\text{فرد}}$$
$$۱۱\times ۳+۱=۳۴ \xrightarrow[\div ۲]{\text{زوج}} ۱۷ \xrightarrow{\text{فرد}} ۱۷\times ۳+۱=۵۲$$
$$\xrightarrow[\div ۲]{\text{زوج}} ۲۶ \xrightarrow[\div ۲]{\text{زوج}} ۱۳ \xrightarrow{\text{فرد}} ۱۳\times ۳+۱=۴۰ \xrightarrow[\div ۲]{\text{زوج}}$$
$$۲۰ \xrightarrow[\div ۲]{\text{زوج}} ۱۰ \xrightarrow[\div ۲]{\text{زوج}} ۵ \xrightarrow[\div ۲]{\text{فرد}} ۵\times ۳+۱=۱۶$$
$$\xrightarrow[\div ۲]{\text{زوج}} ۸ \xrightarrow[\div ۲]{\text{زوج}} ۴ \xrightarrow[\div ۲]{\text{زوج}} ۲ \xrightarrow[\div ۲]{\text{زوج}} ۱$$

با این فرایند عدد نهایی همیشه یک است.

این موضوع در سال **۱۹۳۷** توسط **«لوتار کولاتز»** مطرح شد و کماکان بعد از گذشت چندین دهه، حلی برای آن در دسترس نیست. درستی این حدس تا عدد $۲^{۶۰}$ توسط اَبَر رایانه‌ها بررسی شده است، اما هنوز اثباتی برای آن وجود ندارد.

## ۲. عددهای اول دو قلو

همان‌طور که می‌دانید، عدد اول عددی است که تنها بر ۱ و خودش بخش‌پذیر است. عددهای اولی که با هم ۲ واحد اختلاف دارند، «عددهای اول دو قلو» نامیده می‌شوند؛ مانند: (۵ و۳) و (۷ و ۵) و (۱۳و ۱۱) و (۱۹و ۱۷) و ...

یکی از بزرگ‌ترین عددهای دوقلوی کشف شده چنین است:

$$۲۹۹۶۸۶۳۰۳۴۸۹۵\times ۲^{۱۲۹۰۰۰۰}\pm ۱$$

این عدد در سپتامبر ۲۰۱۶ کشف شد. تعداد جفت‌های عددهای دو قلو تا عدد $۱۰^{۱۸}$ برابر است با:

۸۰۸۶۷۵۸۸۸۵۷۷۴۳۶

آیا تعداد عددهای اول دوقلو نامتناهی است؟ این پرسش تاکنون بی‌پاسخ مانده است.

عددهای اول سه قلو به سه عدد فرد متوالی گفته می‌شود که هر سهٔ آن‌ها اول باشند. تنها عددهای اول سه قلو (۷،۵،۳) هستند؛ چرا؟

## ۳. حدس گلدباخ

یکی از معروف‌ترین و قدیمی‌ترین مسئله‌های حل‌نشده در ریاضیات، «حدس گلدباخ» است که با وجود صورت بسیار ساده‌ای که دارد، حدود **۲۷۰** سال است که ذهن ریاضی‌دانان را به خود مشغول کرده است. آرزوی هر ریاضی‌دانی این است که آن را حل کند.

حدس گلدباخ بیان می‌کند که هر عدد صحیح زوج بزرگ‌تر از **۲** را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت:

۴=۲+۲ ؛ ۶=۳+۳ ؛ ۸=۳+۵ و ...

این حدس در سال **۱۷۴۲** میلادی توسط **کریستین گلدباخ** در نامه‌ای به **لئونارد اویلر** مطرح شد. تلاش‌های بسیاری برای اثبات این حدس انجام گرفته‌اند؛ تلاش‌هایی که به کشف قضیه‌هایی بسیار مهم‌تر منجر شده‌اند. اما این حدس کماکان حل نشده باقی مانده است.

در سال **۱۹۹۲**، مؤسسهٔ انتشاراتی مشهور «Faber & Faber»، کتاب داستان پرفروش با عنوان «عمو پتروس و حدس گلدباخ» منتشر کرد

**یکی از معروف‌ترین و قدیمی‌ترین مسئله‌های حل نشده در ریاضیات، «حدس گلدباخ» است که با وجود صورت بسیار ساده‌ای که دارد، حدود ۲۷۰ سال است که ذهن ریاضی‌دانان را به خود مشغول کرده است**

دکارت گفت: «عددهای کامل همچون انسان‌های کامل کمیاب هستند.» عدد کامل عددی است که برابر جمع مقسوم‌علیه‌های به غیر خودش باشد

که در آن تاریخ ریاضیات در قالبی جذاب و داستانی شرح داده شده بود. بعد از چند سال انتشارات مزبور به‌منظور تبلیغ برای فروش بیشتر، «**جایزه‌ای یک میلیون دلاری**» برای کسی تعیین کرد که از تاریخ ۲۰ مارس ۲۰۰۰ (روز جهانی ریاضیات)، حداکثر به مدت دو هفته حدس گلدباخ را اثبات کند. اما تا پایان تاریخ مقرر و پس از آن، تاکنون هنوز هیچ ریاضی‌دانی از پس اثبات این حدس به ظاهر آسان بر نیامده است.

در سال **۲۰۱۴** توسط اَبَررایانه نشان داده شد که این حدس برای عددهای زوج کوچک‌تر از $۴\times۱۰^{۱۸}$ درست است، اما هر قدر این بررسی جلو برود، کافی نخواهد بود و در پایان تنها چاره‌ای که باید اندیشید، تلاش برای اثبات آن است.

## ۴. عددهای کامل

دکارت

**دکارت** گفت: «عددهای کامل همچون انسان‌های کامل کمیاب هستند.» عدد کامل عددی است که برابر جمع مقسوم‌علیه‌های به غیر از خودش باشد. برای مثال، مقسوم‌علیه‌های عدد ۶ به غیر از خودش ۶ است:

$۱+۲+۳=۶$

چند عدد کامل ابتدایی از این قرارند:

۲۸ ,۴۹۶ ,۸۱۲۸ ,۳۳۵۵۰۳۳۶

در ژانویهٔ سال **۲۰۱۶**، چهل و نهمین عدد کامل کشف شد. این عدد دارای ۲۳۵، ۶۷۷، ۴۴ رقم است:

$$۲^{۷۴۲۰۷۲۸۰}\times\left(۲^{۷۴۲۰۷۲۸۱}-۱\right)=\text{چهل‌ونهمین عدد کامل}$$

$p=۷۴۲۰۷۲۸۱$ (اول)

$$۲^{p-۱}\left(۲^{p}-۱\right)=\text{چهل‌ونهمین عدد کامل}$$

در واقع فرمول عددهای کامل چنین است:

($p$ عدد اول است)

$$N_p=۲^{p-۱}\left(۲^{p}-۱\right)\quad (N_p \text{ عدد کامل است})$$

یکی از ویژگی‌های عددهای کامل این است که آن‌ها را می‌توان به‌صورت جمع عددهای طبیعی متوالی یا جمع مکعب عددهای فرد متوالی نشان داد:

$p=۲: ۶=۲^{۲-۱}(۲^{۲}-۱)=۱+۲+۳$

$p=۳: ۲۸=۲^{۳-۱}(۲^{۳}-۱)=۱^{۳}+۳^{۳}=۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷$

$p=۵: ۴۹۶=۲^{۵-۱}(۲^{۵}-۱)=۱+۲+۳+\dots+۳۱$
$=۱^{۳}+۳^{۳}+۵^{۳}+۷^{۳}$

$p=۷: ۸۱۲۸=۲^{۷-۱}(۲^{۷}-۱)=۱+۲+۳+\dots+۱۲۷$
$=۱^{۳}+۲^{۳}+۳^{۳}+\dots+۱۵^{۳}$

به همین ترتیب:

$p=۱۳: ۳۳۵۵۰۳۳۶$
$=۲^{۱۲}(۲^{۱۳}-۱)=۱+۲+۳+\dots+۸۱۹۱=۱^{۳}+۳^{۳}+۵^{۳}+۷^{۳}\dots+۱۲۷^{۳}$

همچنان این پرسش‌ها مطرح هستند و بی‌پاسخ مانده‌اند:

- آیا عدد کامل فرد وجود دارد؟
- آیا تعداد عددهای کامل نامتناهی است؟
- **پرسش از شما:** به نظر شما آیا عددی وجود دارد که دو برابر جمع مقسوم‌علیه‌های به غیر از خودش باشد؟ نترسید! این پرسش حل شده است و پاسخ آن را به عهدهٔ خودتان می‌گذاریم. به این نوع عددها، عدد کامل از مرتبهٔ **۳** گفته می‌شود.

## ۵. حدس لژاندر

این حدس بیان می‌کند: «بین مجذور هر دو عدد طبیعی متوالی، حداقل یک عدد اول وجود دارد.» این مسئله در سال **۱۹۱۲** توسط **لژاندر** بیان شد و حدود یک‌صد سال است که برای آن اثباتی بیان نشده است. جالب است بدانید حل این حدس اگر چه به حل فرضیهٔ

ریمان منجر نمی‌شود، اما قوی‌تر از یکی از نتایج فرضیهٔ ریمان است. برای مثال:

- بیـــن $2^2$ و $3^2$ یعنی ۴و۹، عددهـــای اول ۵ و ۷ واقع هستند.
- بین $3^2$ و $5^2$، یعنـــی ۹ و ۲۵، عددهای اول ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹ و ۲۳ واقع هستند.
- بیـــن $5^2$ و $7^2$ یعنی ۲۵ و ۴۹، عددهای اول ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷ واقع هستند.

و بـــه همین ترتیب، آیا بین مجذور دو عدد طبیعی متوالی، حداقل یک عدد اول وجود دارد؟


لژاندر

### ۶. گنگ بودن $\pi+e$ و $\pi e$

همان‌طور که می‌دانید به عددی گنگ گفته می‌شود که نتوان آن را به صورت کســری نوشــت، یا به عبارت ساده‌تر، وقتی به صورت اعشاری نوشته شود، دارای الگوی مشـــخصی نباشـــد. اثبات گنگ بودن عددی مانند $\sqrt{2}$ راحت است. اما در حالت کلی اثبات گنگ بودن یک عدد، مسئلهٔ سختی به شمار می‌رود. مثلاً اثبات گنگ بودن عدد $\pi$(پی) در قرن ۱۸ توســط **لمبرت** و بعد از اثبات گنگ بودن عدد e (عدد نپر) اتفاق افتاد. اما تاکنون اثبات نشده است که این دو عدد: $\pi.e$، $\pi+e$ گنگ هستند و یا گویا؟

نکتهٔ بسیار جالب در مورد این موضوع آن است که ما می‌دانیم حداقل یکی از دو عبارت $\pi+e$ یا $\pi.e$ گنگ است؛ اما کدام‌یک؟ هنوز معلوم نشده است.

### ۷. حدس اردیش ـ استراوس

این حدس در سال **۱۹۴۸** تـــوسط دو ریاضـــی‌دان به‌همین نام ارائه شد. این حدس بیان می‌کند:

«هر عـــدد گویـــا به‌صـــورت ۴ روی n را می‌توان به‌صورت جمع سه کسر به شکل زیر نوشت:

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

برای مثال:

$$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$$

$$\frac{4}{1801}=\frac{1}{451}+\frac{1}{295364}+\frac{1}{3249004}$$

درستی این حدس توسط اَبَررایانه‌ها تا عدد **۱۰۱۷** تأیید شده است، اما کماکان اثباتی برای آن وجود ندارد.

شاید صورت ســادهٔ بعضی از این مسئله‌ها شما را به فکر حل آن‌ها با طرح پرســش حل نشـــده‌ای به نام خودتان انداخته باشد.

**تمرین**

نشـــان دهید که حدس اردیش- استراوس برای وقتی که n زوج باشـــد و یا n مضربی از ۳ باشد، اثبات شده است.

$n=2k$
$n=3k$

با اطمینان می‌توان گفت روزی این مسئله‌ها حل خواهند شـــد، حتی اگر یافتن راه‌حل، همچون قضیهٔ آخر فرما (حکم بزرگ‌فرما)، **۳۵۸** ســـال طول بکشد. اما به هر حال همواره پرسش‌های حل‌نشده‌ای هستند که ذهن پرسشگر انسان را به چالش‌های بزرگ بکشند؛ پرسش‌هایی مانند:

- آیا ممکن اســـت دانش ریاضـــی جدید ما کاملاً غلط باشد؟
- آیا رمز زیبایی‌های طبیعت آشکار و رمزگشایی می‌شود؟

و دیگر پرســـش‌های چالش برانگیزی که رســـیدن به پاسخ آن‌ها ســـال‌های متمادی نیاز دارد و ریاضی‌دانان، متفکران، اندیشـــمندان و محققان بســـیاری را طلب می‌کند تا از رازهای این جهان هستی رمزگشایی کنند.

**آیا ممکن است دانش ریاضیِ جدید ما کاملاً غلط باشد؟ آیا رمز زیبایی‌های طبیعت آشکار و رمزگشایی می‌شود؟**

**حسین عباسی ـ علی قانع‌صمدی ـ محمد داورزنی**
مدرسهٔ شهید بهشتی ناحیهٔ یک شهرری (دوره دوم)

# مرکز ثقل از مفهوم تا کاربرد

### مقدمه

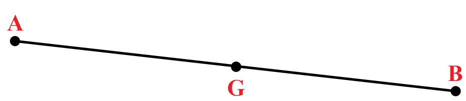
**هر جسمی به جسم دیگر نیرو وارد می‌کند، اما در سطح زمین به خاطر گستردگی اشیا، برایند نیروها تقریباً صفر است، اما برایند نیروها در کهکشان هم صفر است؟ آیا جرم‌های فضایی نیز بر هم نیرو وارد می‌کنند؟ ماه و زمین چطور؟ در چه نقطه‌ای این نیروها با هم برابر می‌شوند؟ جواب مرکز ثقل است. این نقطه کجا قرار دارد؟ در این مقاله، مفهوم نظریهٔ ثقل را از پایه بیان کرده و با اثبات مرکز ثقل در جسم‌های دو و سه‌بعدی، به سراغ مرکز ثقل در اجسام وزن‌دار رفته و با بیان روش محاسبهٔ مرکز ثقل در آن‌ها، به چند کاربرد مهم از مرکز ثقل اشاره کرده‌ایم؛ از جمله، نقش مرکز ثقل در جزر و مد، پرواز پرندگان و صنعت خودروسازی به تشریح بیان شده است.**

### مرکز ثقل

مفهوم مرکز ثقل به‌رغم پیچیدگی، در جسم‌های متفاوت معنای یکسان دارد و آن نقطه‌ای است که در توازن جرمی جسم قرار دارد. این مفهوم در جسم‌های دوبعدی به این معنی است که اگر از آن نقطه جسم را آویزان کنیم، آن جسم به‌صورت افقی قرار می‌گیرد. در جسم‌های سه‌بعدی، این مفهوم کمی متفاوت است. در ادامه به بیان مفهوم مرکز ثقل پرداخته و سعی شده است که تمام نظریه‌ها اثبات شوند و شواهدی نیز برای آن‌ها بیان شود.

### ۱. مرکز ثقل در شکل‌های یک‌بعدی

در یک جسم به شکل پاره‌خط (یک میله)، اگر جرم به‌طور یکسان پخش شده باشد، مرکز ثقل دقیقاً وسط آن پاره‌خط واقع شده است (شکل ۱).




شکل ۱

پس:

$$G=\frac{1}{2}(A+B)$$

## ۲. مرکز ثقل در جسم‌های دوبعدی

مرکز ثقل در جسم دوبعدی که جرم به‌طور یکنواخت در آن توزیع شـــده، نقطه‌ای اســـت که اگر از آن نقطه آویزان شـــود، آن جسم به‌طور افقی قرار می‌گیرد. مرکز ثقل بسیاری از شکل‌های هندسی، مرکز آن‌هاست؛ مانند مربع، دایره، شش‌ضلعی منتظم و... . اگر شکل هندسی مثلث باشد، افقی قرار گرفتن آن پس از آویزان شدن از مرکز ثقل ( نقطهٔ G در شکل۲)، این ایده را می‌دهد که اگـــر پاره‌خط‌هایی از مرکز ثقل به رأس‌های مثلث وصل شود، مثلث‌های ایجادشده، مساحت برابر دارند (چرا که جرم به طور یکنواخت پخش شـــده اســـت). با توجه به اینکـــه میانه در هر مثلث، آن مثلث را به دو قســـمت با مساحت برابر تقسیم می‌کند، به نظر می‌آید که این نقطه روی برخورد میانه‌ها قرار دارد. این مطلب را در دو قضیهٔ بعد اثبات می‌کنیم.

**قضیهٔ ۱.** اگر میانه‌های مثلث را رســـم کنیم، شـــش مثلث با مساحت برابر پدید می‌آید.

**اثبات:** فرض کنیم AM، 'BM و "CM میانه‌های مثلث باشند. در مثلث‌های GBM و GCM اندازهٔ قاعده و ارتفاع برابر است، بنابراین: $S_۱=S_۶$. به‌طور مشابه داریم:

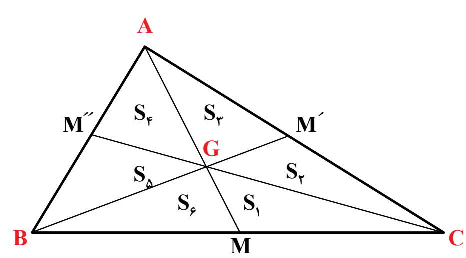
$$S_۴=S_۵\ ,\ \ S_۲=S_۳ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، مثلث‌های ABM و ACM نیز ارتفاع و قاعدهٔ برابر دارند، بنابراین مساحت آن‌ها نیز با یکدیگر برابر است. پس:

$$S_۱+S_۲+S_۳=S_۴+S_۵+S_۶$$

و چـــون: $S_۱=S_۶$، پس: $S_۲+S_۳=S_۵+S_۴$ و با توجه به رابطهٔ (۱): $S_۲=S_۴$. با این نتیجه، تساوی $S_۱=S_۶$ و رابطهٔ (۱)، داریم:

$$S_۱=S_۲=S_۳=S_۴=S_۵=S_۶$$




شکل ۲

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که مرکز ثقل در یک مثلث، چه فاصله‌ای از رأس‌ها و ضلع‌های مثلث و همچنین چه ارتباطی با مختصات رأس‌ها دارد.

**قضیهٔ ۲.** اگر G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC در یک صفحه باشد، سپس:

$$G=\frac{۱}{۳}(A+B+C)$$

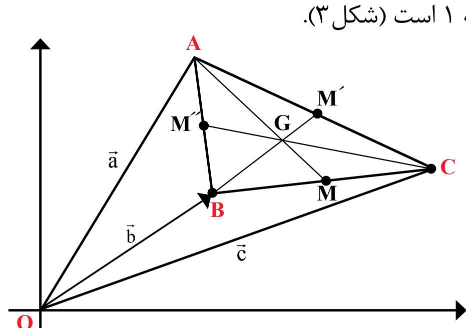
**اثبات:** اگر بخواهیم از نقطهٔ O (مبدأ مختصات) بـــه نقطهٔ G که محل برخـــورد میانه‌های مثلث ABC است، برســـیم، می‌توانیم مســـیرهای متفاوتی را طی کنیـــم که همهٔ آن‌ها از لحاظ برداری با یکدیگر برابرند. از جملـــه مســـیرهای $\vec{a}+u(\overrightarrow{AM})$، $\vec{b}+v(\overrightarrow{BM'})$ و $\vec{c}+t(\overrightarrow{CM''})$ کـــه در آن u، v و t عددهـــای حقیقی مناسبی هستند. با توجه به برابری این بردارها داریم:

$$G=\vec{a}+u(\overrightarrow{AM})=\vec{b}+v(\overrightarrow{BM'})$$
$$\Rightarrow \vec{a}+u(M-A)=\vec{b}+v(M'-B)$$
$$\Rightarrow \vec{a}+u(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{۲}-\vec{a})=\vec{b}+v(\frac{\vec{a}+\vec{c}}{۲}-\vec{b})$$
$$\Rightarrow \vec{a}(۱-u)+\frac{u}{۲}\vec{b}+\frac{u}{۲}\vec{c}=\vec{b}(۱-u)+\frac{v}{۲}\vec{a}+\frac{v}{۲}\vec{c}$$
$$\Rightarrow ۱-u=\frac{v}{۲},\frac{u}{۲}=\frac{v}{۲}$$
$$\Rightarrow u=v=\frac{۲}{۳}$$

با لحاظ کردن این مقدارها داریم:

$$G=\vec{a}+u(\overrightarrow{AM})=\vec{a}+\frac{۲}{۳}(M-A)$$
$$=\vec{a}+\frac{۲}{۳}(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{۲}-\vec{a})=\frac{۱}{۳}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

پـــس: $G=\frac{۱}{۳}(A+B+C)$ و ایـــن نتیجه اثبات قضیـــه را به پایان می‌رســـاند. همچنین با توجه به این قضیه، نسبت فاصلهٔ مرکز ثقل از رأس به ضلع مقابل، ۲ به ۱ است (شکل۳).




شکل ۳

مرکز ثقل بسیاری از شکل‌های هندسی، مرکز آن‌هاست؛ مانند مربع، دایره، شش‌ضلعی منتظم و ...

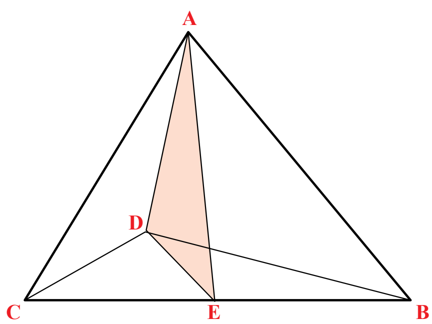
## ۳. مرکز ثقل جسم‌های سه‌بعدی

مرکز ثقل در بسیاری از جسم‌های سه‌بعدی توپر که جرم به‌طور یکنواخت در آن‌ها توزیع شده است، به راحتی مشخص می‌شود. مثلاً در کره، استوانه و شکل‌های دیگری که دارای مرکز تقارن هستند، مرکز ثقل همان مرکز تقارن است. در شکل‌های هندسی دیگر، مرکز ثقل به حجم آن‌ها مربوط است. اگر شکل هندسی یک هرم با قاعدهٔ مثلث باشد، مرکز ثقل را به‌صورت تحلیلی به‌دست می‌آوریم.

**در کره، استوانه و شکل‌های دیگری که دارای مرکز تقارن هستند، مرکز ثقل همان مرکز تقارن است. در شکل‌های هندسی دیگر، مرکز ثقل به حجم آن‌ها مربوط است**

اگر میانهٔ یک وجه را بکشیم و یک صفحه به‌گونه‌ای رسم کنیم که از این میانه و رأس مقابل بگذرد، به آن «صفحهٔ عمود منصف» می‌گوییم. در شکل ۴، DE میانهٔ مثلث BDC و صفحهٔ عمودمنصف از رأس A و خط DE گذشته است (شکل ۴).

صفحهٔ عمودمنصف این ویژگی را دارد که حجم هرم را نصف می‌کند؛ زیرا مساحت قاعده‌ها و طول ارتفاع در هر دو بخشی که ایجاد کرده، برابر است. شبیه آنچه در قضیهٔ ۲ در جسم‌های دوبعدی اثبات شد، می‌توان مرکز ثقل را در این هرم، از برخورد صفحات عمود منصف به‌دست آورد. فاصلهٔ این نقطه از رأس و صفحهٔ مقابل در قضیهٔ ۳ آمده است.




شکل ۴

**قضیهٔ ۳.** اگر S محل برخورد صفحه‌های عمودمنصف در هرم چهاروجهی باشد، سپس:

$$S=\frac{۱}{۳}(A+B+C+D)$$

**اثبات:** نقطهٔ برخورد صفحه‌های عمودمنصف، نقطهٔ برخورد خط‌هایی است که یک رأس را به مرکز ثقل وجه مقابل وصل می‌کند. به همین خاطر، کافی است که محل برخورد این خط‌ها را به‌دست آوریم. در شکل ۵، فرض کنیم M و M' به ترتیب مرکز ثقل مثلث‌های BDC و ABD باشند. با توجه به قضیهٔ ۲ داریم:

$$M=\frac{۱}{۳}(B+D+C)\ ,\ M'=\frac{۱}{۳}(A+B+D)$$

اگر S محل برخورد AM و CM' باشد، با انتخاب عددهای حقیقی مناسب u و v داریم:

$$S=\vec{a}+u(\overrightarrow{AM})=\vec{c}+v(\overrightarrow{CM'})$$

اکنون می‌توانیم u و v را به‌دست آوریم:

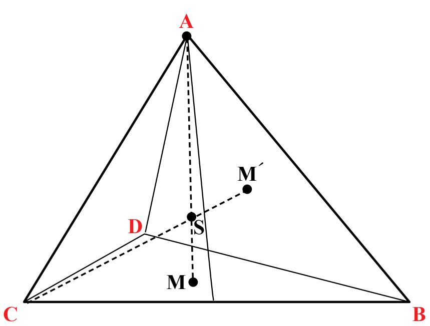
$$S=\vec{a}+u(\overrightarrow{AM})=\vec{c}+v(\overrightarrow{CM'})$$
$$\Rightarrow \vec{a}+u(M-A)=\vec{c}+v(M'-C)$$
$$\Rightarrow \vec{a}+u(\frac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{c}}{۳}-\vec{a})=\vec{c}+v(\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}}{۳}-\vec{c})$$
$$\Rightarrow \vec{a}(۱-u)+\frac{u}{۳}\vec{b}+\frac{u}{۳}\vec{d}+\frac{u}{۳}\vec{c}=$$
$$\vec{c}(۱-u)+\frac{v}{۳}\vec{a}+\frac{v}{۳}\vec{b}+\frac{v}{۳}\vec{d}$$
$$\Rightarrow ۱-u=\frac{v}{۳},\frac{u}{۳}=\frac{v}{۳}$$
$$\Rightarrow u=v=\frac{۳}{۴}$$

با لحاظ کردن این مقدارها داریم:

$$S=\vec{a}+u(\overrightarrow{AM})=\vec{a}+\frac{۳}{۴}(M-A)$$
$$=\vec{a}+\frac{۳}{۴}(\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{۳}-\vec{a})=\frac{۱}{۴}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

پس: $S=\frac{۱}{۴}(A+B+C+D)$ و این نتیجه اثبات قضیه را به پایان می‌رساند.

با توجه به قضیهٔ بالا، نسبت فاصلهٔ مرکز ثقل یک هرم چهار وجهی، از رأس به صفحهٔ مقابل، ۳ به ۱ است.

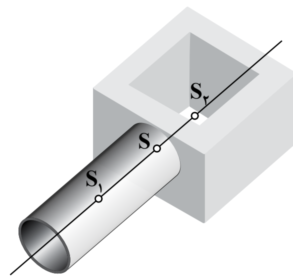



شکل ۵

## ۴. مرکز ثقل در جسم‌های پیچیده

بسیاری از جسم‌های سه‌بعدی پیچیده، ترکیبی از چند جسم هندسی کوچک‌تر هستند. شکل ۶ از یک استوانه و یک مکعب توخالی تشکیل شده است. اگر $S_۱$ و $S_۲$ مرکز ثقل این دو جسم باشند، مرکز ثقل کل

جســـم، نقطه‌ای مانند S خواهد بود که بین آن‌ها قرار دارد. هرقدر جرم یک قسمت بیشتر باشد، مرکز ثقل به آن قسمت نزدیک‌تر است. (شکل ۶)




**شکل ۶**

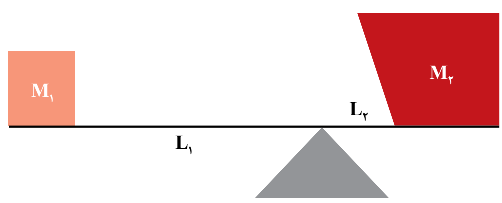
در حالت کلی، اگر دو جســـم با جرم‌های متفاوت، مانند $M_۱$ و $M_۲$، (شـــکل ۷) روی یک میله به طول L قرار داشته باشند، به‌طوری که: $M_۲>M_۱$، مرکز ثقل در نقطه‌ای بین آن‌ها که به جرم $M_۲$ نزدیک‌تر اســـت، واقع شده است. با توجه به اصل توازن اهرم داریم:

$$M_۱ \times L_۱ = M_۲ \times L_۲$$
$$\Rightarrow M_۱ \times L_۱ = M_۲ \times (L - L_۱)$$
$$\Rightarrow L_۱(M_۱ + M_۲) = M_۲ \times L$$
$$\Rightarrow L_۱ = \frac{M_۱}{M_۱ + M_۲} \times L$$

مرکز ثقل برای یک جسم پیچیده به‌صورت میانگین جرم نقطه‌ها در آن تعریف می‌شود. به‌طور دقیق‌تر، برای یک جسم سه‌بعدی، مرکز ثقل آن نقطهٔ $(x,y,z)$ است که:

$$x = \frac{\sum x_i \times m_i}{M}, \quad y = \frac{\sum y_i \times m_i}{M}, \quad z = \frac{\sum z_i \times m_i}{M}$$

و در آن، M جـــرم کل جســـم اســـت و $(x_i,y_i,z_i)$ موقعیت هر نقطهٔ جســـم در فضا و $m_i$ نیز جرم آن نقطه اســـت. در این حالت نیازی نیست که جرم جسم به‌طور یکنواخت در آن توزیع شده باشد. محاسبهٔ مرکز ثقل به این روش کمی پیچیده اســـت و به استفاده از ابزارهای ریاضی مانند «انتگرال» نیز نیاز دارد (شکل ۷).




**شکل ۷**

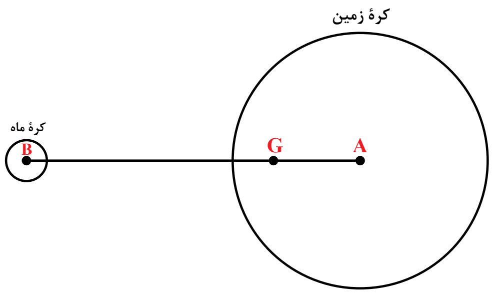
## کاربردهای مرکز ثقل

مرکز ثقـــل در عالم خلقت نقـــش مهمی در وقایع طبیعی دارد. بـــرای مثال، جزر و مد نتیجهٔ مســـتقیم کشـــش بین ماه و زمین اســـت. همچنین تعیین مرکز ثقل در جسم‌های ساختهٔ دست بشر، نقش بسیاری در نگهداری و استفاده از آن‌ها دارد. مثلاً مرکز ثقل در یک خودرو یا یک هواپیما نقطهٔ بسیار مهمی برای استفاده از آن وسیله است. در حیوانات و به‌خصوص پرندگان، حفظ یک موقعیت خاص، به مرکز ثقل جرم آن حیوان بستگی دارد. این مطالب را به تفصیل در ادامه بررسی می‌کنیم.

**فاصلهٔ بین ماه و زمین، ۳۸۴۰۰۰ کیلومتر و جرم زمین ۸۱ برابر جرم ماه است**

### ۱. جزر و مد

ماه و زمین بر یکدیگر نیرو وارد می‌کنند، پس قاعدتاً مرکز ثقلی میان آن‌ها وجود دارد. اگر کره‌های زمین و مـــاه را کره‌های توپر در نظـــر بگیریم، با توجه به اینکه مرکز ثقل هرکدام، مرکز آن‌هاســـت و جرم زمین بسیار بیشتر از ماه است. با توجه به «اصل توازن»، مرکز ثقل این دو کره، نقطه‌ای نزدیک مرکز کرهٔ زمین خواهد بود.

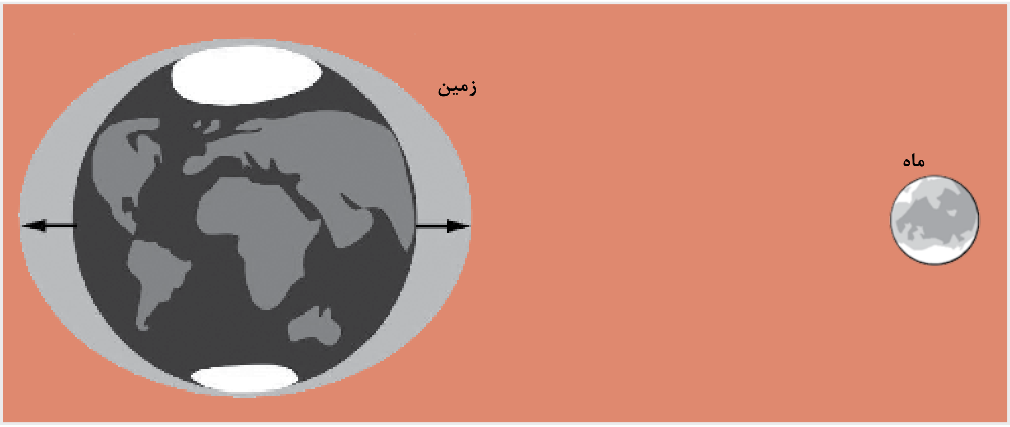



**شکل ۸**

می‌دانیم کـــه فاصلهٔ بین مـــاه و زمین، ۳۸۴۰۰۰ کیلومتر و جرم زمین ۸۱ برابر جرم ماه است. بنابراین، با توجه به رابطه‌ای که در قسمت قبل به‌دست آوردیم، فاصلهٔ مرکز ثقل از مرکز کرهٔ زمین عبارت است از:

$$L_۲ = \frac{M_۲}{M_۱ + M_۲} \times L$$
$$= \frac{M_۲}{M_۱ + ۸۱M_۱} \times L$$
$$= \frac{M_۲}{۸۱M_۱} \times L$$
$$= \frac{۸۱}{۸۲} \times ۳۸۴۰۰۰$$
$$= ۴۶۸۲/۹$$

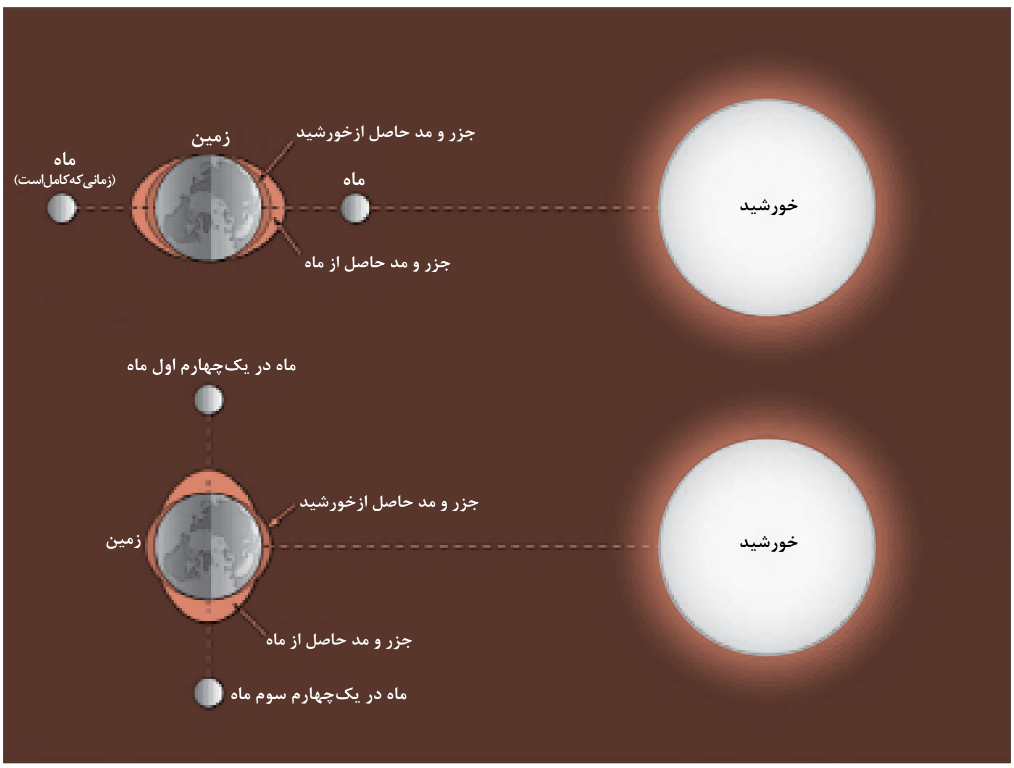
مرکز ثقل بین ماه و زمین، نقطه‌ای است درون کرهٔ زمین. همین عامل باعث به وجود آمدن جزر و مد دریاها روی کرهٔ زمین می‌شود




شکل ۹

چون شعاع کرهٔ زمین ۶۳۷۰ کیلومتر است، مرکز ثقل بین ماه و زمین، نقطه‌ای اســت درون کرهٔ زمین. همیـــن عامل باعث به وجود آمـــدن جزر و مد دریاها روی کرهٔ زمین می‌شود. در حقیقت، قسمتی از دریاها که نزدیک خط واصل بین مراکز ماه و زمین هســـتند، دچار بیشترین تلاطم می‌شوند و نقطه‌های دیگری که روی خـــط عمود بر این خط قرار دارند، دچار کمترین تلاطم هستند (شکل ۹).

تنها ماه نیست که بر جزر و مد زمین اثر می‌گذارد، خورشـــید هم اثراتی بر این امـــر دارد. البته با توجه به فاصلهٔ زیاد خورشـــید تا زمین، اثر این جزر و مد بسیار کمتر از اثر ماه اســـت. در زمان‌هایی که ماه کامل است، به خاطر هم‌سو شـــدن نیروهای ماه و خورشید، جزر و مد بیشتری روی کرهٔ زمین اتفاق می‌افتد (شکل ۱۰).




شکل ۱۰

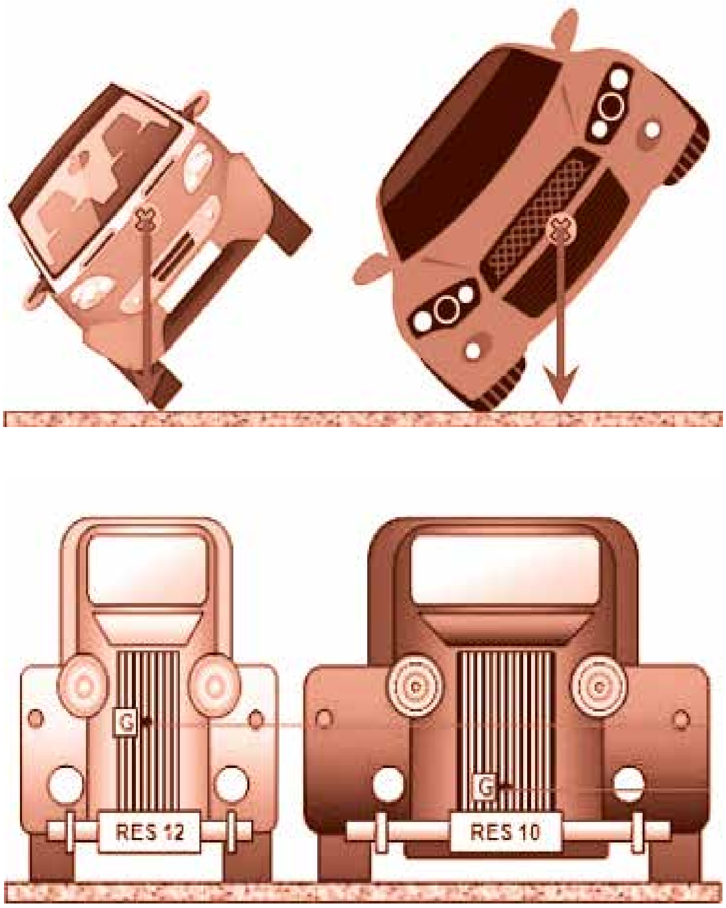
## ۲. تعادل در پرواز کردن

مرکــز ثقــل در نحوهٔ پــرواز و نحــوهٔ قرارگیری پرندگان نقش بســیار مهمــی دارد؛ برای مثال، مرکز ثقل در یک «فلامینگو» که می‌خواهد به صورت شکل ۱۱ پرواز کند، نزدیک جناق این پرنده و روی محوری قرار دارد که از درون بــدن این پرنده می‌گذرد. برای قــرار گرفتن مرکز ثقل در این موقعیت، فلامینگو باید پاهای خود را به‌صورت مداوم، کشیده نگه دارد و اگر یک لحظه پاهای خود را جمع کند، مرکز ثقل جابه‌جا می‌شــود و پرنده به ســمت عقربه‌های ساعت خواهد چرخید (شکل ۱۱).

شکل ۱۱

## ۳. حفظ تعادل در رانندگی

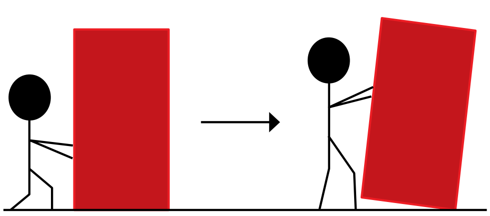
تعییــن مرکــز ثقــل در صنعــت خودروســازی نیــز نقــش بســیار مهمــی دارد. هرچــه مرکــز ثقــل پایین‌تــر باشــد، یعنــی بــه زمیــن نزدیک‌تــر باشــد، تعادل جســم موردنظــر در چرخش‌هــا بیشــتر اســت. به‌خاطــر همیــن موضــوع، مرکــز ثقــل خودروهــای مســابقه‌ای را بســیار پاییــن در نظــر می‌گیرنــد تــا هنــگام چرخــش در پیچ‌ها بــه آســانی دور بزنــد و از مســیر موردنظــر خــارج نشــود. ایــن موضوع در خودروهای داخل کشــور نیــز وجود دارد. مثــال، مرکــز ثقل ماشــین تنــدر ۹۰ کمی بالاتــر از مرکز ثقــل ماشــین پــژو ۲۰۶ اســت و به همیــن خاطــر میزان انحــراف تنــدر در ســر پیچ‌هــا کمی بیشــتر از پژو اســت. گرچــه می‌تــوان این موضــوع را با انتخاب لاســتیک پهن اســتاندارد کــه ارتفاع کمتــری دارد، تا حــدی جبران کرد (شکل ۱۲).




شکل ۱۲

## ۴. حرکت ساده‌تر با تشخیص مرکز ثقل

فرض کنید کــه می‌خواهید یک یخچال را جابه‌جا کنید. به کدام قســمت آن باید نیــرو وارد کنیم تا به سادگی یخچال جابه‌جا شود؟ به‌طور معمول، مرکز ثقل هر یخچال، نقطه‌ای وســط یخچال اســت که به زمین نزدیک اســت. اگر نقطه‌ای که شما به یخچال نیرو وارد می‌کنید، از مرکــز ثقل دورتر باشــد، حرکت یخچال راحت‌تر انجام می‌شود. (شکل ۱۳)



شکل ۱۳

* منابع

1. G.Glaeser. (2017), Math tools 500 applications in science and arts, Springer.
۲. هالیــدی، دیویــد؛ رزنیک، رابرت؛ واکــر، جرل (۱۳۹۱). مبانــی فیزیــک. ترجمــهٔ مریــم هاشــمی‌نیا و محمد موسوی‌بایگی.

دکتر غلامرضا یاسی‌پور

# هرچه آغاز ندارد نپذیرد انجام[۱]

**لامکانی که در او نور خداست**
**ماضی و مستقبل و حال از کجاست؟**
**ماضی و مستقبلش نسبت به تو است**
**هر دو یک چیزند، پنداری که دو است**

**(مثنوی معنوی/ دفتر سوم/ ۲-۱۱۵۱)**

بزرگی بی‌نهایت چقدر است؟ پاسخ کوتاه به این پرسش این است که $\infty$ (نماد بی‌نهایت) بسیار بزرگ است. خط مستقیمی را تصور کنید با عددهای بزرگ‌تر و بزرگ‌تر واقع بر امتداد آن، در حالی که خط تا «بی‌نهایت» امتداد یافته است. در این مورد، به ازای هر عدد عظیمی که در نظر گرفته شود، مثلاً $10^{1000}$، همواره عدد بزرگ‌تری، چون $10^{1000}+1$، موجود است.

در مفهوم سنتی، بی‌نهایت؛ عددهایی هستند که تا ابد ادامه دارند. ریاضیات، بی‌نهایت را در همه‌جا به‌کار می‌برد، اما باید توجه داشت که آن را مانند عددی معمولی در نظر نگیریم، چرا که عددی معمولی نیست.

## شمارش

**ژرژ کانتور**، ریاضی‌دان آلمانی، مفهوم کاملاً متفاوتی از بی‌نهایت به دستمان داده است. در این فرایند، وی دست تنها نظریه‌ای آفرید که بیشترِ ریاضیات مدرن را به جلو رانده است. مفهومی که نظریهٔ کانتور وابسته به آن است، با مفهوم ابتدایی شمارش سروکار دارد؛ یعنی ساده‌تر از آنچه در زندگی روزمره به کار می‌بریم.

کشاورزی را در نظر می‌گیریم که در مورد شمارش با عددها چیزی نمی‌داند. پس چگونه خواهد دانست چند گوسفند دارد؟ خیلی ساده ـ هنگامی که گوسفندان را صبح به چرا می‌برد، می‌تواند عصر با جفت کردن هر گوسفند با سنگی از توده‌ای سنگ که از صبح در مدخل طویله موجود است، بگوید آیا همهٔ گوسفندان برگشته‌اند یا خیر. چه اگر گوسفندی گم شده باشد، سنگی باقی می‌ماند. به این ترتیب، کشاورزمان، حتی بدون استفاده از عددها ریاضی‌ورز بوده است. چرا که وی مفهوم «تناظر یک به یک»[۲] را، بین گوسفندان و سنگ‌ها، به کار برده است. این مفهوم ابتدایی است، اما پیامدهای شگفت‌انگیزی دارد.

نظریهٔ کانتور با «مجموعه‌ها»[3] سر و کار دارد (مجموعه، به‌طور ساده، کلکسیونی از اشیاست).

برای مثال:

N={۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,...}

به معنی مجموعهٔ عددهای تمام (مثبت) است. هنگامی که مجموعه‌ای داشته باشیم، می‌توانیم دربارهٔ «زیرمجموعه‌ها»[4]یی که داخل مجموعهٔ بزرگ‌ترند، صحبت کنیم. واضح‌ترین زیرمجموعه‌هایی که با مثال Nمان مرتبطاند، زیرمجموعه‌های {....,۲,۴,۶,۸}=E و {....,۱,۳,۵,۷}=O هستند که به ترتیب، مجموعه‌های «عددهای فرد»[5] و «عددهای زوج»[6]اند. در اینجا، اگر این پرسش را مطرح کنیم که «آیا تعداد عددهای فرد با تعداد عددهای زوج برابر است؟» پاسخمان چیست؟

گرچه این کار را نمی‌توان با شمردن اعضایی که در هر مجموعه موجود است، و مقایسهٔ جواب‌ها انجام داد، پاسخ مطمئناً «آری» است. اما این اطمینان بر چه مبنایی است؟ ـ شاید بر چیزی شبیه این: «نیمی از عددهای تمام، فرد و نیمی زوج‌اند.» کانتور با این پاسخ موافق است، اما استدلال متفاوتی به‌دست می‌دهد. وی چنین می‌گوید: هر بار که عددی فرد داریم، عدد زوجی در کنارش، به‌عنوان «جفت»[7] خواهیم داشت. این ایده که هر دو مجموعهٔ O و E دارای اعضایی با تعداد یکسان‌اند، بر مبنای جفت کردن هر عدد فرد با یک عدد زوج قرار دارد:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| O : | ۱ | ۳ | ۵ | ۷ | ۹ | ۱۱ | ۱۳ | ۱۵ | ۱۷ | ۱۹ | ۲۱ | ... |
| | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | |
| E : | ۲ | ۴ | ۶ | ۸ | ۱۰ | ۱۲ | ۱۴ | ۱۶ | ۱۸ | ۲۰ | ۲۲ | ... |

اما در صورتی که این پرسش را مطرح کنیم که «آیا تعداد عددهای *تمام* برابر تعداد عددهای *زوج* است؟» پاسخ ممکن است «خیر» باشد، و استدلال اینکه «مجموعهٔ N، به خودی خود، دو برابر مجموعهٔ عددهای زوج عدد دارد.»

مفهوم «بیشتر»، زمانی که با مجموعه‌هایی با تعداد اعضای نامعین سر و کار داریم، مفهومی مبهم است. اما این‌کار را می‌توانیم با مفهوم تناظر یک به یک بهتر انجام دهیم. تعجب‌آور است که بین N و مجموعهٔ عددهای زوج E نیز تناظری یک به یک موجود است:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N : | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ... |
| | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | |
| E : | ۲ | ۴ | ۶ | ۸ | ۱۰ | ۱۲ | ۱۴ | ۱۶ | ۱۸ | ۲۰ | ۲۲ | ... |

به این ترتیب، به این نتیجهٔ مبهوت‌کننده می‌رسیم که به «همان تعداد» عددهای تمام، عدد زوج داریم! نتیجه‌ای که با «مفهوم متعارف» اعلام‌شده توسط یونانیان باستان در تناقض است؛ چرا که آغاز کتاب «مقدمات» اقلیدس اسکندرانی بر این است که «کل بزرگ‌تر از جزء است.»

## اصلیت[8]

تعداد اعضای یک مجموعه به «اصلیت» یا عدد اصلی آن موسوم است. در حالت مربوط به گوسفندان، عدد اصلی ثبت‌شده به حساب کشاورز ۴۲ است. اصلیت مجموعهٔ {a,b,c,d,e} برابر ۵ است که آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم

card{a,b,c,d,e}=۵

به این ترتیب، اصلیت، قدر یا «اندازهٔ» یک مجموعه است. کانتور در مورد عددهای تمام N، و هر مجموعهٔ در تناظر یک به یک با N، از نماد $\aleph_0$ استفاده کرد. (ℵ یا «الف از الفبای عبری است. نماد $\aleph_0$ به‌صورت «الف صفر»[9] خوانده می‌شود.) بنابراین، به زبان ریاضی می‌توان نوشت:

card(N)=card(O)=card(E)= $\aleph_0$

هر مجموعه که بتواند در تناظر یک به یک با N قرار گیرد، مجموعهٔ «بی‌نهایت ـ شمارا» یا «نامتناهی شمارا»[10] نامیده می‌شود. «بی‌نهایت ـ شمارا» بودن یک مجموعه به این معنی است که می‌توانیم اعضای آن مجموعه را در یک فهرست قرار دهیم؛ برای مثال، فهرست عددهای فرد، به‌طور ساده، عبارت است از: ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ... و می‌دانیم کدام عضو اول، کدام دوم، و ... است.

**پی‌نوشت‌ها**

۱. ماجرای من و معشوق مرا پایان نیست / هرچه آغاز ندارد نپذیرد انجام

2. one to one correspondence
3. sets
4. subsets
5. odd numbers
6. even numbers
7. mate
8. cardinality
9. aleph nought
10. countably infinite

محمدتقی طاهری تنجانی

# چند نکته در حلِ معادلات و نامعادلات

### مقدمه

چه در حل معادلات و چه در حل نامعادلات، منظور پیدا کردن همهٔ مقدارهای مجهول اســت که در ازای آن‌ها، معادله و یا نامعادلهٔ موردنظر برقرار باشد. هر یک از این مقدارها که در معادله و یا نامعادله صدق کند، جواب آن معادله یا نامعادله نامیده می‌شود. واضح است که این جواب‌ها باید چنان باشند که در ازای آن‌ها مقدارهای دوطرف معادله یا نامعادله قابل محاسبه باشند.

مقدارهایی که در ازای آن ها دو طرف معادله یا نامعادله معنی پیدا می‌کنند، دامنهٔ معادله یا نامعادله هســـتند، جواب‌های معادله (نامعادله) جزء این دامنه‌اند و نه برعکس.

گاهی معـــادلات (نامعادلات) را بدون توجه به خصوصیات و ویژگی‌های عبارت‌های آن‌ها و با اســـتفاده از چند فرمول و یا راه‌حل مکانیکی حل می‌کنند که در نتیجه به جواب‌هایی می‌رسند که خالی از اشکال نیستند. در این نوشتار سعی بر آن است که با ذکر تعدادی از مثال‌ها به برخی از این ریزه‌کاری‌ها بپردازیم.

**مثال ۱.** معادلهٔ $\sqrt{x+2}=x$ را حل کنید.

**حل:** ابتدا دامنهٔ معادله را تعیین می‌کنیم. عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشـــد: پس: $x\ge -2$. البته باید توجه داشـــته باشیم که طرف دوم معادله عبارتی نامنفی است.

پس: $x\ge 0$. حال طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sqrt{x+2})^2=x^2$$

$$x+2=x^2$$

$$\begin{cases} x=-1 & \text{غیرقابل قبول} \\ x=2 & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

**تذکر:** البتـــه در برخی از موارد می‌تـــوان به حل مکانیکی معادله پرداخت و جواب‌های نهایی را کنترل کرد.

نکتهٔ مهم در حل معادلهٔ فوق این است:

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \ ,\ g(x)\ge 0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$$

**مثال ۲.** معادلهٔ $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=1$ را حل کنید.

**حل:** در یک نظر دامنه تعریف عبارت سمت چپ $x\ge 2$ است. حال اگر به حل مکانیکی مسئله بپردازیم، داریم:

$$\sqrt{x+1}=1-\sqrt{x-2}$$

طرفین معادلهٔ اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$x+1=1+x-2-2\sqrt{x-2}$$

$$\sqrt{x-2}=-1 \quad (*)$$

حال طرفین معادله (*) را به توان دو می‌رسانیم! داریم:

$x-2=1 \Rightarrow x=3$

واضح است که $x=3$ در دامنه معادله است، ولی جواب معادله نیست. این اشکال از آنجا درست شد که وقتی می‌توانیم طرفین معادله را به توان دو (یا عددی زوج) برسانیم که مطمئن باشیم علامت طرفین مثبت است. ما حق به توان دو رساندن طرفین معادلهٔ (*) را نداشتیم! لذا جواب $x=3$ در معادله (*) صدق نمی‌کند. و مجموعهٔ جواب معادله تهی است.

**مثال ۳.** معادلهٔ مثلثاتی زیر و حل آن‌را که توسط دانش‌آموزی ارائه شده است، در نظر بگیرید. آیا استدلال حل معادله خالی از اشکال است؟

$$\sin\left(\frac{2\sqrt{\pi x}}{\pi + x}\right) = 0$$

**حل:**

$$\sin\left(\frac{2\sqrt{\pi x}}{\pi + x}\right) = \sin 0$$

$$\frac{2\sqrt{\pi x}}{\pi + x} = k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

اشکال استدلال فوق آن است که از طرفین معادله معلوم می‌شود که $x \geq 0$ و چون $\pi > 0$ پس بین $x$ و $\pi$ نامساوی واسطهٔ حسابی و هندسی برقرار است؛ لذا:

$$\frac{\pi + x}{2} \geq \sqrt{\pi x}$$

$$\frac{2\sqrt{\pi x}}{\pi + x} \leq 1 \xrightarrow{\frac{2\sqrt{\pi x}}{\pi + x} \geq 0} 0 \leq \frac{2\sqrt{\pi x}}{\pi + x} \leq 1$$

با توجه به سطر آخر حل مثال داریم: $0 \leq k\pi \leq 1$. که تنها حالت $k=0$ و در نتیجه $x=0$ می‌تواند برقرار باشد؛ لذا معادله فوق فقط جواب $x=0$ را داراست.

همان‌طور که دیده شد، اگر در تبدیلاتی که انجام می‌دهیم، از هم‌ارزی‌ها به‌درستی استفاده نکنیم، به نتایج مشکوک و بیشتر غلط می‌رسیم. اما اگر در حل مسائل و در تبدیلاتی که انجام می‌دهیم، مرحله به مرحله از هم‌ارزی‌ها به‌درستی استفاده کنیم، هرگز با جواب خارجی و با حذف جواب‌های مسئله مواجه نمی‌شویم.

**مثال ۴.** نامعادلهٔ $\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 2 - x$ را حل کنید.

**حل:** اغلب دانش‌آموزان مسئله را چنین حل می‌کنند:
طرفین نامعادله را به توان ۲ می‌رسانند.

$x^2-4x+3 \geq 4 + x^2 - 4x \Rightarrow 3 \geq 4$ **غیرممکن**

پس نامعادله جواب ندارد.

واضح است که حل فوق غلط است؛ زیرا به ازای $x=5$ نامعادله جواب دارد.

پس این نامعادله دارای جواب است. حال برای حل آن ابتدا مقدارهایی از $x$ را تعیین می‌کنیم که عبارت $x^2-4x+3$ نامنفی باشد. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ اخیر $(-\infty,1] \cup [3,+\infty)$ است. بنابراین دربارهٔ $(1,3)$ جوابی برای نامعادله وجود ندارد. به‌علاوه $x \geq 3$ جواب مسئله است. ولی اگر: $x \leq 1$، باید: $2-x>0$ و به تناقض می‌رسیم؛ پس جواب نامعادله بازهٔ $[3,+\infty)$ است.

**مثال ۵.** معادلهٔ لگاریتمی $\log x^3 = \log x$ را حل کنید.

**حل:** برخی از دانش‌آموزان با حذف log از طرفین معادله چنین استدلال می‌کنند:

$$x^3 = x \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

حال اگر آزمایش جواب‌ها را داشته باشیم درمی‌یابیم جواب‌های $x=0$ و $x=-1$ مورد قبول نیستند.

دقت کنیم در معادلات لگاریتمی باید داشته باشیم:

$$\log f(x) = \log g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \ , \ g(x) > 0 \end{cases}$$

با توجه به هم‌ارزی فوق جواب معادلهٔ $x=1$ مورد قبول است.
عکس این مطلب نیز درست است؛ یعنی اگر حل معادلهٔ $x^3=x$ موردنظر باشد، نمی‌توان از طرفین آن لگاریتم گرفت.
در ادامه چند تمرین آمده است. اگر به درستی از هم‌ارزی‌ها استفاده شود، و همچنین جواب‌های به‌دست‌آمده کنترل شوند، مطمئن باشید جواب‌های به‌دست‌آمده خالی از اشکال خواهند بود.

### تمرین

۱. معادلهٔ $(x^2 - 4)(x - 2\sqrt{x} + 1) = 0$ را حل کنید.

۲. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $2 - \log_{\frac{1}{2}} x > 0$ را به‌دست آورید.

۳. معادلهٔ $(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} + x^2 - 3x + 2 = 0$ را حل کنید.

۴. معادله را حل کنید:

$$\frac{\log 2x}{\log(2x - 15)} = 2$$

**دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی**
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی
**علیرضا سلمانی انباردان**
کارشناس ارشد ریاضی مالی، دبیر ریاضی شهرستان قدس


## مقدمه

**در قسمت قبل چند فعالیت برای معرفی تابع و رسم نمودار توابع با استفاده از «جئوجبرا» ارائه شد. در این قسمت به ادامهٔ به‌کارگیری این نرم‌افزار برای معرفی تابع وارون و تابع یک به یک و رسم انواع توابع نمایی و لگاریتمی می‌پردازیم. در تمام فعالیت‌ها از مثال‌ها و تمرین‌های کتاب‌های دورهٔ دوم متوسطه استفاده شده است.**

### فعالیت ۱. رسم وارون یک تابع مفروض

برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینهٔ نمودار آن تابع را نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم یا خط y = x رسم کنیم.

**۱.** تابع با ضابطهٔ f(x) = ۵x-۲ و وارون این تابع را در یک صفحهٔ مختصات رسم کنید.

با استفاده از نقطه‌یابی، دو نقطهٔ A و B را با دستورهای زیر روی صفحه مشخص می‌کنیم:

A = (۱,۳)

B = (۰,-۲)

حالا با استفاده از دستور زیر، خطی را که از دو نقطهٔ بالا می‌گذرد رسم می‌کنیم.

a:Line (A,B)

اکنون برای رسم نیم‌ساز ربع اول و سوم کافی است دستور زیر را وارد کنیم:

y = x

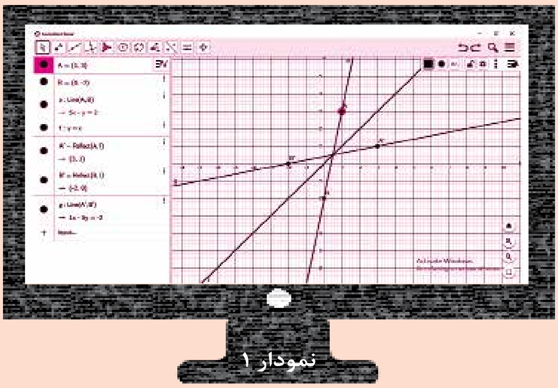
سپس برای مشخص کردن قرینهٔ نقطه‌های A و B نسبت به خط نیم‌ساز ربع اول و سوم از دستورهای زیر استفاده می‌کنیم:

Reflect (A,f)

Reflect (B,f)

حال خط گذرنده از دو نقطهٔ 'A و 'B را با استفاده از دستور «Line» به‌صورت زیر رسم می‌کنیم (نمودار ۱):

Line (A',B')


نمودار ۱

**۲.** تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۲}{۳}x-۴$ و وارون این تابع را در یک صفحهٔ مختصات رسم کنید.

تمام مرحله‌ها مانند مثال قبل به‌صورت زیر خواهد بود (نمودار ۲):

A = (۰,-۴)

B = (۳,-۲)

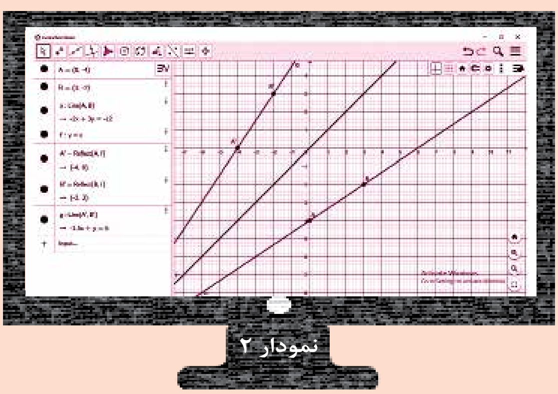
a:Line (A,B)

y = x

Reflect (A,f)

Reflect (B,f)

Line (A',B')


نمودار ۲

### فعالیت ۲. تابع یک به یک

در یک تابع یک به یک، هر خط موازی با محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

**۱.** آیا تابع با ضابطهٔ $y = x^2$ با دامنهٔ R یک به یک است؟ اگر دامنهٔ تابع $[0,+\infty)$ باشد، چطور؟

برای رسم تابع $y = x^2$ با دامنهٔ R همان‌طوری که در قسمت قبل نیز بیان شد، کافی است در قسمت «...Input» ضابطهٔ تابع را وارد کنیم:

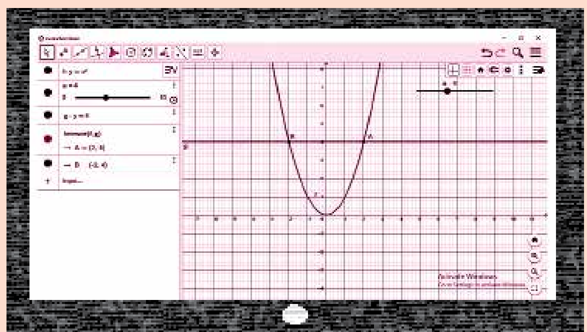
f:y = x^۲

سپس با استفاده از ابزار نوار لغزنده (Slider) یک نوار لغزنده با کمترین مقدار ۰ و بیشترین مقدار دلخواه (مثلاً ۱۰) ایجاد و دستورهای زیر را وارد کنید:

g:y = a

Intersect(f,g)

دستور آخر نقطهٔ محل برخورد نمودار و خط موازی با محور xها را مشخص می‌کند. با تغییر مقدار نوار لغزنده خواهیم دید که محل خط موازی با محور طول‌ها تغییر خواهد کرد (نمودار ۳). لذا این تابع در دامنهٔ R یک به یک نیست.

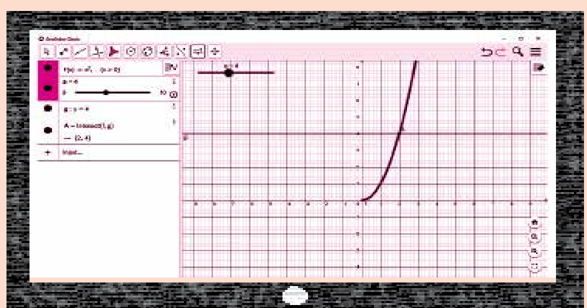


نمودار ۳

برای رسم تابع در بازهٔ تعیین‌شده از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

If(x> 0,x^۲)

بقیهٔ مرحله‌ها همانند مرحلهٔ قبل است (نمودار ۴). بنابراین تابع فوق در دامنهٔ $[0,+\infty)$ یک به یک است.



نمودار ۴

**۲.** آیا نیم‌دایرهٔ نمودار ۵ بیانگر یک تابع یک به یک است؟ نمودار ربع دایرهٔ نمودار ۶ چطور؟

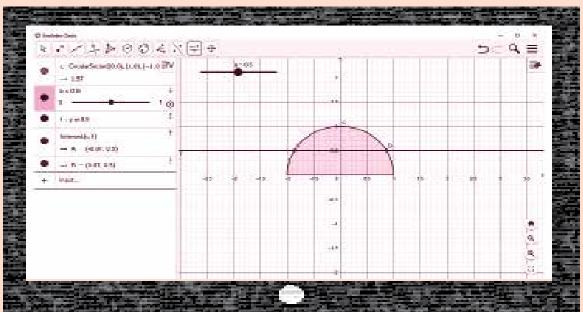
برای رسم نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱ به مرکز مبدأ از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

CircularSector((۰,۰),(۱,۰),(-۱,۰))

سپس با استفاده از ابزار «Slider» یک نوار لغزنده با کمترین مقدار ۰ و بیشترین مقدار ۱ ایجاد می‌کنیم و در نهایت دستورهای زیر را وارد می‌کنیم (نمودار ۵):

y = a

Intersect(c,f)

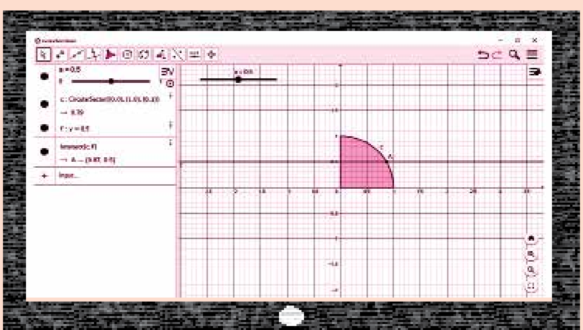


نمودار ۵

برای رسم ربع دایره از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

CircularSector((۰,۰),(۱,۰),(۰,۱))

و ادامهٔ کار همانند مرحلهٔ قبل است (نمودار ۶).



نمودار ۶

به این ترتیب نیم‌دایره بیانگر یک تابع یک به یک نیست، ولی ربع دایره یک تابع یک به یک را نمایش می‌دهد.

### فعالیت ۳. تابع نمایی و رسم آن ..........................................

در این فعالیت چند نمونه تابع نمایی که ضابطهٔ آن‌ها مفروض است، در محیط جئوجبرا رسم می‌شوند.

**۱.** رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=۲^x$ و مقایسهٔ آن با نمودار تابع درجــهٔ دوم $g(x)=x^۲$ و یافتن تعــداد محل‌های تلاقی این دو نمودار. همچنین محاسبهٔ تقریبی $۲^{-۰/۴}$، $۲^{۰/۳}$ و $۲^{\sqrt{۷}}$.

به منظور نقطه‌یابی برای تابع f(x) از (a,۲^a) و برای تابع g(x) از (b,b^۲) استفاده خواهیم کرد. برای نمونه خواهیم داشت:

A = (۰,۰^۲)

A' = (۰,۲^۰)

B = (۱/۲,(۱/۲)^۲)

B' = (۱/۲,۲^۱/۲)

به همین صورت نقطه‌های دیگــری را نیز می‌توان وارد کرد.

سپس توابع f(x) و g(x) را وارد می‌کنیم:

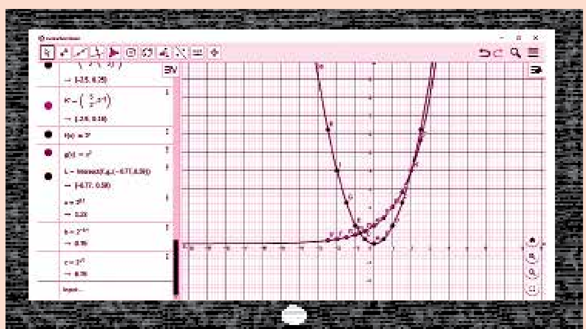
f(x) = ۲^x

g(x) = x^۲

اکنون برای تعیین محل برخورد دو تابع از دستور زیر استفاده می‌کنیم (نمودار ۷):

Intersect(f,g)

که یکی از نقطه‌های تلاقی، نقطهٔ (۰/۵۹،۰/۷۷-) است. برای به دست آوردن مقدار تقریبی $۲^{۰/۳}$، عبارت ۲^۰/۳ را وارد می‌کنیم که مقدار تقریبـــی ۱/۲۳ را نمایش می‌دهد و با وارد کردن عبارت ۲^-۰/۴ مقــدار تقریبی ۰/۷۶ و با وارد کــردن عبارت 2^sqrt(۷) مقدار تقریبی ۶/۲۶ نمایش داده خواهد شد.



نمودار ۷

**۲.** رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=۳^x$ و مقایسهٔ آن با نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x)=(\frac{۱}{۳})^x$ و تقریب $۳^{\sqrt{۲}}$.

برای نقطه‌یابی تابع f(x) از (a,۳^a) و برای نقطه‌یابی تابع g(x) از (b,(۱/۳)^b) استفاده خواهیم کرد. برای نمونه خواهیم داشت:

A = (۰,۳^۰)

A' = (۰,(۱/۳)^۰)

B = (۱/۲,۳^۱/۲)

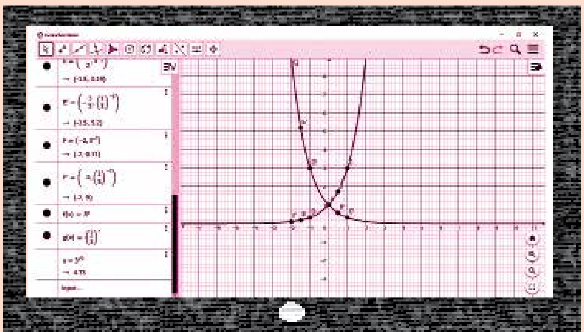
B' = (۱/۲,(۱/۳)^۱/۲)

سپس توابع f(x) و g(x) را به‌صورت زیر وارد می‌کنیم (نمودار ۸):

f(x) = ۳^x

g(x) = (۱/۳)^x

برای به دســت آوردن مقدار تقریبی $۳^{\sqrt{۲}}$ کافی است عبارت ۳^sqrt(۲) را وارد کنیم تا مقدار ۴/۷۳ نمایش داده شود.



نمودار ۸

ملاحظه می‌شود که نمودار این دو تابع نسبت به محور عمودی قرینه هستند.

### فعالیت ۴. رسم تابع لگاریتمی و مقایسهٔ آن با تابع نمایی......

در این فعالیت نمودار چند تابع لگاریتمی به‌عنوان وارون توابع نمایی در محیط جئوجبرا رسم و مقایسه می‌شوند.

**۱.** رسم نمودار با ضابطهٔ $f(x)=\log_۲(x)$ و مقایسهٔ آن با نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x)=۲^x$.

برای نقطه‌یابی تابع f(x) از (a,log۲(a)) و برای نقطه‌یابی تابع g(x) از (b,۲^b) استفاده خواهیم کرد. برای نمونه خواهیم داشت:

C = (۲,log۲(۲))

A' = (۰,۲^۰)

B = (۱,log۲(۱))

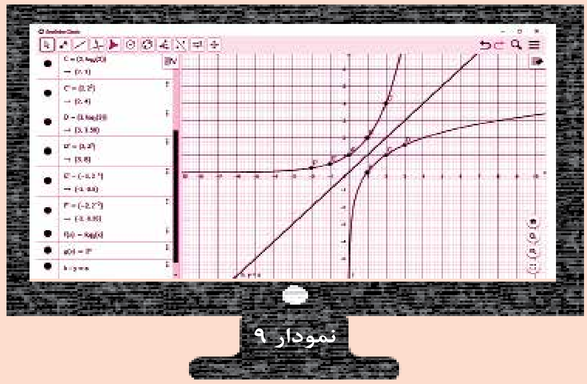
B' = (۱,۲^۱)

به همین شــکل می‌توان ســایر نقطه‌ها چون (۳,log۲(۳)) و $(-۲,\frac{۱}{۴}),(-۱,\frac{۱}{۲}),(۳,۸)$ و (۲,۴) را وارد کرد. اکنون توابع f(x) و g(x) را به‌صورت زیر وارد می‌کنیم تا نمودار آن‌ها رسم شود (نمودار ۹):

f(x) = log۲(x)

g(x) = 2^x

برای رسم نیم‌ساز ربع اول و سوم عبارت y = x را وارد می‌کنیم.



نمودار ۹

ملاحظه می‌شـــود با توجه به اینکه این دو تابع وارون یکدیگر هستند، نمودار آن‌ها نسبت به خط $y = x$ قرینه هستند.

**۲.** رسم نمودار با ضابطهٔ $f(x) = \log_{۳}(x)$ و مقایسهٔ آن با نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x) = ۳^{x}$.

برای رســـم ابتدا همانند حالت‌های قبـــل نقطه‌یابی را انجام می‌دهیم و در هر دو تابع به جای x عددهای ۰، ۱، ۲ و ۰/۳ را قرار می‌دهیم. برای تابع f(x) از عبارت (a,log(۳,a)) و برای تابع g(x) از عبارت (b,۳^b) استفاده خواهیم کرد. برای نمونه داریم:

C = (۲,log(۳,۲))

A' = (۰,۳^۰)

B = (۱,log(۳,۱))

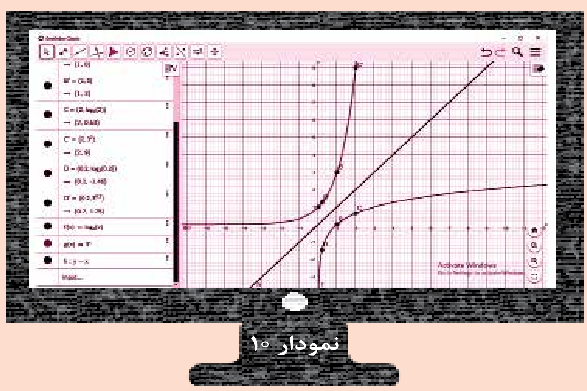
B' = (۱,۳^۱)

اکنون توابع f(x) و g(x) را به‌صورت زیر وارد می‌کنیم تا نمودار آن‌ها رسم شود (نمودار ۱۰):

f(x) = log(۳,x)

g(x) = ۳^x

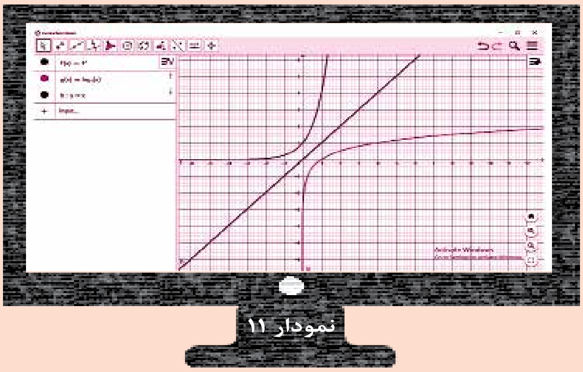
برای رسم نیم‌ساز ربع اول و سوم عبارت y = x را وارد می‌کنیم.



نمودار ۱۰

**۳.** رســـم نمودار تابع نمایـــی با ضابطهٔ $y = ۴^{x}$ و مقایســـه با تابع لگاریتمی $y = \log_{۴}(x)$.

برای رسم این توابع همانند مسئله قبل عمل خواهیم کرد که نتایج در نمودار ۱۱ مشاهده می‌شود.



نمودار ۱۱

**۴.** رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_{\frac{۱}{۲}}(x)$ و مقایسه با نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x) = \log_{۲}(x)$.

همچنین محاسبهٔ تقریبی $\log_{\frac{۱}{۲}}(۲/۵)$.

برای رســـم این توابع ابتدا نقطه‌هایی از هر تابع را مشـــخص می‌کنیم. برای مثال، به جـــای x عددهای ۰/۵، ۱ و ۲ را در توابع قرار می‌دهیم. برای تابع f(x) از (a,log(۱/۲,a)) و برای تابع g(x) از (b,log۲(b)) استفاده می‌کنیم:

A = (۰/۵,log(۱/۲,۰/۵))

A' = (۰/۵,log۲(۰/۵))

B = (۱,log(۱/۲,۱))

B' = (۱,log۲(۱))

C = (۲,log(۱/۲,۲))

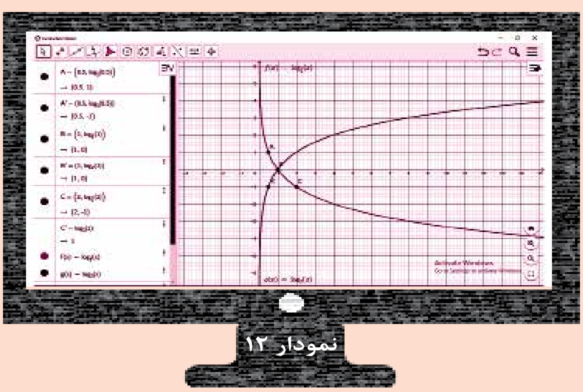
C' = (۲,log۲(۲))

حالا دو تابع را به کمک دستورهای زیر رسم می‌کنیم (نمودار ۱۲):

f(x) = log(۱/۲,x)

g(x) = log۲(x)

بـــرای پیـــدا کـــردن مقـــدار تقریبـــی $\log_{\frac{۱}{۲}}(۲/۵)$ عبارت log(۱/۲,۲/۵) را وارد می‌کنیم. بعد از زدن «Enter» مقدار ۱/۳۲- نمایش داده می‌شود.

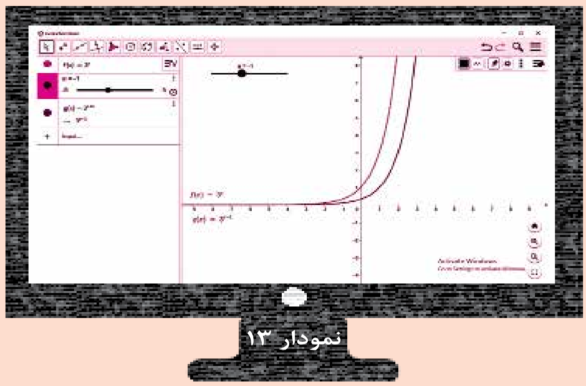


نمودار ۱۲

**فعالیت ۵. رسم نمودار توابع نمایی یا لگاریتمی از طریق انتقال یا قرینه‌یابی**

**۱.** رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۳^{x-۱}$ با استفاده از نمودار تابع نمایی با ضابطهٔ $y = ۳^{x}$ .

ابتدا عبارت f(x) = ۳^x را وارد می‌کنیم تا تابع $y = ۳^{x}$ رسم شود؛ سپس یک نوار لغزنده دلخواه به نام a با استفاده از ابزار Slider ایجاد و عبارت g(x) = ۳^(x+a) را وارد می‌کنیم تا g رسم شود. با تغییر مقدار نوار لغزنده می‌توانیم جابه‌جایی تابع دوم را بررسی کنیم (نمودار ۱۳).



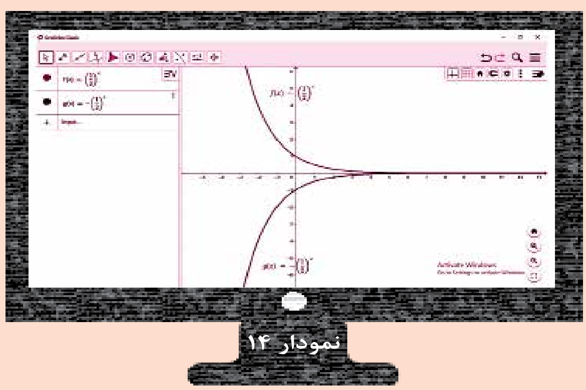
نمودار ۱۳

**۲.** رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -(\frac{۱}{۲})^{x}$ با استفاده از نمودار تابع نمایی با ضابطهٔ $y = (\frac{۱}{۲})^{x}$ .

برای رسم توابع از دستورهای زیر استفاده می‌کنیم (نمودار ۱۴):

f(x) = (۱/۲)^x

g(x) = -(۱/۲)^x



نمودار ۱۴

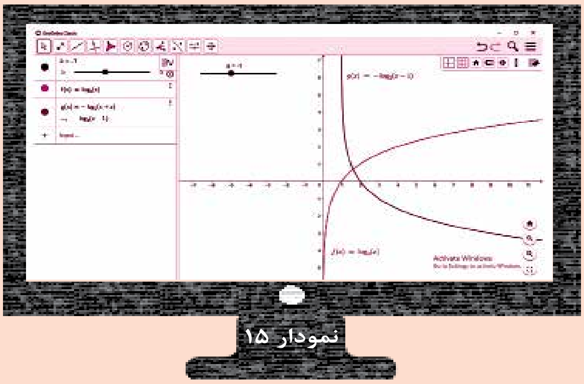
**۳.** رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -\log_{۲}(x-۱)$ از طریق نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_{۲}(x)$.

ابتدا با استفاده از ابزار Slider یک نوار لغزنده به اندازهٔ دلخواه و به نام a ایجاد می‌کنیم. برای رسم توابع از دستورهای زیر استفاده می‌کنیم:

f(x) = log۲(x)

g(x) = -log۲(x+a)

با تغییر اندازهٔ نوار لغزنده وضعیت تابع g(x) را می‌توانیم بررسی کنیم (نمودار ۱۵):



نمودار ۱۵

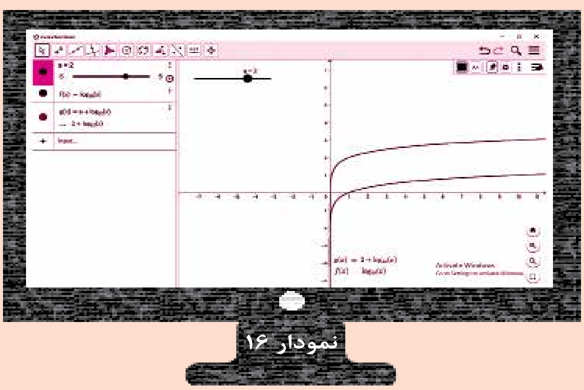
**۴.** رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۲+\log(x)$ از طریق نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\log(x)$ (مبنی لگاریتم ۱۰ است).

ابتدا با استفاده از ابزار Slider یک نوار لغزنده به اندازهٔ دلخواه و نام a ایجاد می‌کنیم. برای رسم توابع از دستورهای زیر استفاده می‌کنیم:

f(x) = log۱۰(x)

g(x) = a+log۱۰(x)

با تغییر اندازهٔ نوار لغزنده وضعیت تابع g(x) را می‌توانیم بررسی کنیم (نمودار ۱۶).



نمودار ۱۶

**۵.** رسم تابع با ضابطهٔ $y = ۴^{x}-۱$ در بازهٔ $[-۲,۲]$ .

برای رسم تابع فوق دستور زیر را وارد می‌کنیم (نمودار ۱۷):

If(-۲< = x< = ۲,(۴^x)-۱)


نمودار ۱۷

**فعالیت ۶. حل معادلات نمایی یا لگاریتمی**

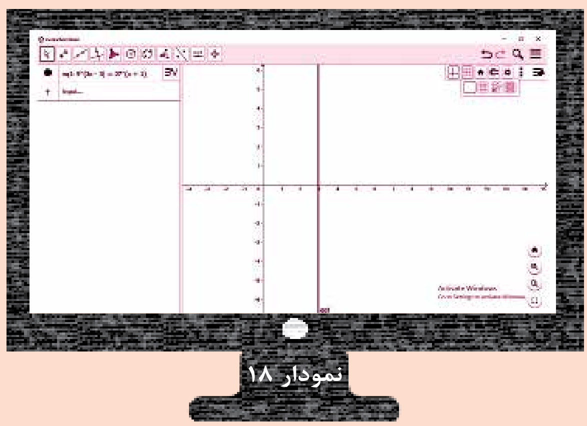
**۱.** حل معادلهٔ نمایی $9^{3x-3} = 27^{x+1}$

برای حل معادله در جئوجبرا معادله را در قسمت «...Input» به‌صورت کامل وارد می‌کنیم. در صورت وجود جواب به‌صورت خط $x = x_0$ نشان داده خواهد شد که $x_0$ همان جواب معادله است.

معادله فوق را به‌صورت زیر وارد می‌کنیم:

۹^(۳x-۳) = ۲۷^(x+۱)

که در اینجا به‌صورت خط x = ۳ نمایش داده می‌شود و جواب معادله است (نمودار ۱۸).


نمودار ۱۸

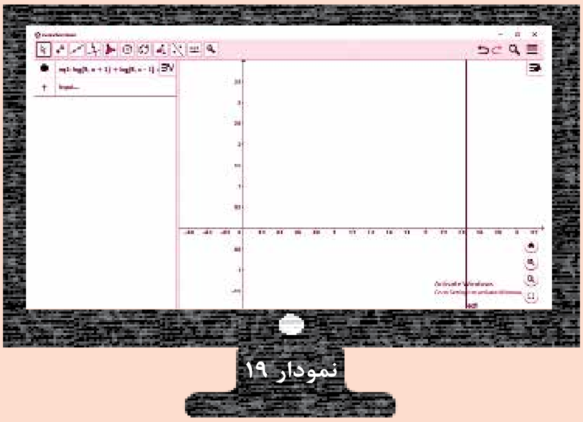
**۲.** حل معادلهٔ لگاریتمی

**الف)** $\log_5(x+1)+\log_5(x-1) = 1$

برای حل معادلهٔ فوق عبارت زیر را وارد می‌کنیم:

log(۵,x+۱)+log(۵,x-۱) = ۱

که جواب به‌صورت تقریبی برابر x = ۲/۴۴ است (نمودار ۱۹).


نمودار ۱۹

**ب)** $\log_{\frac{1}{10}}(x^2-21) = -2$

برای حل معادلهٔ فوق عبارت زیر را وارد می‌کنیم:

log(۱/۱۰,(x^۲)-۲۱) = -۲

که جواب معادله x = ۱۱ است (نمودار ۲۰).


نمودار ۲۰


**منابع**

۱. کتاب درسی ریاضی ۲، دورهٔ دوم متوسطهٔ علوم تجربی، ۱۳۹۷.
۲. کتاب درسی ریاضی ۱، دورهٔ دوم متوسطهٔ علوم تجربی و ریاضی فیزیک، ۱۳۹۷.
3. www.geogebra.org

**عنایت‌اله راستی‌زاده**
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شیراز

# اثبات با درنظر گرفتن تمام حالت‌ها

**اشاره**

**«اثبات» روندی است که با به‌کارگیری قواعد خاصی، به پذیرش درستی یک ادعا می‌انجامد. گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن در مورد مسئله را درنظر بگیریم. در این بین، دو نکته قابل توجه است: یکی اینکه با توجه به شرایط مسئله، حالت‌ها دربرگیرندهٔ تمام موارد ممکن باشند، و دیگری اینکه نشان دهیم در تمام حالت‌ها، گزاره درست است. در این مقاله به روش اثبات اشباع می‌پردازیم و مثال‌های مختلفی را با این روش حل کرده‌ایم که در پی می‌آید.**

ممکن است راه‌های زیادی برای تقسیم شرایط مسئله به چند حالت وجود داشته باشد، اما در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها وابستگی زیادی به موقعیت و شرایط مسئله دارد. برای نمونه، وقتی مسئله‌ای دربارهٔ عدد حقیقی x باشد، شاید هر کدام از تقسیم‌بندی‌های زیر را بتوانید انتخاب کنید:

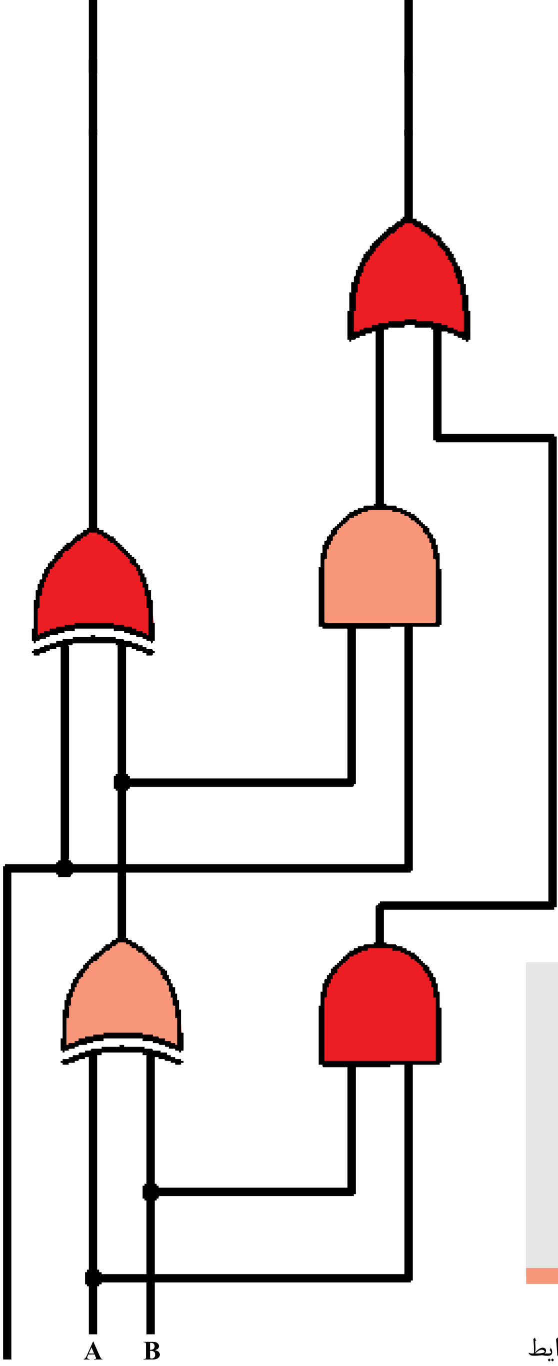
۱. $x<۰$ و $x=۰$ و $x>۰$

۲. $x>a$ و $x\leq a$ $\quad (a\neq ۰)$

۳. xهای گویا و xهای گنگ

۴. $(a<b);\ \ x\leq a,\ \ a<x<b,\ \ x\geq b$

به‌طور کلی، تا حد امکان باید تلاش کرد ضمن در نظر گرفتن تمام حالت‌ها، تعداد حالت‌های ممکن برای بررسی زیاد نشود. در ادامه سعی شده است مثال‌های متنوعی از مباحث گوناگون ریاضی انتخاب و بررسی شوند.




**مثال۱.** ثابت کنید برای هر $x\in R$:

$$x^{۱۲}-x^{۹}+x^{۴}-x+۱>۰$$

**اثبات.** سه حالت در نظر می‌گیریم: $x\leq ۰$ و $۰<x<۱$ و $x\geq ۱$

**الف.** $x\leq ۰$ در این حالت:

$$x^{۱۲}\geq ۰\ ,\ -x^{۹}\geq ۰\ ,\ x^{۴}\geq ۰\ ,\ -x\geq ۰$$

پس:

$$x^{۱۲}-x^{۹}+x^{۴}-x+۱>۰$$

**ب.** $۰<x<۱$. در این حالت داریم:

$$x^{۱۲}-x^{۹}+x^{۴}-x+۱=(۱-x)+x^{۴}(۱-x^{۵})+x^{۱۲}$$

اما: $۱-x>۰$ و $۱-x^{۵}>۰$ بنابراین به‌وضوح حکم ثابت است.

**ج.** $x\geq ۱$ . در این حالت داریم:

$$x^{۱۲}-x^{۹}+x^{۴}-x+۱=x^{۹}(x^{۳}-۱)+x(x^{۳}-۱)+۱\geq ۱>۰$$

(توجه داریم که: $x\geq ۱$، پس: $x^{۳}-۱\geq ۰$ .)

**مثال ۲.** ثابت کنید اگر عدد طبیعی n بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، آن‌گاه $n^{۲}-۱$ مضرب ۳ است.

**اثبات.** می‌دانیم هر n طبیعی را می‌توان به یکی از سه صورت زیر نمایش داد:

$$n=۳k,\ n=۳k+۱,\ n=۳k+۲ \qquad (K\in N)$$

چون n بر ۳ بخش‌پذیر نیست، پس: $n\neq ۳k$ و لذا دو حالت زیر را داریم:

**حالت اول:** $n=۳k+۱$. در این صورت:

$$n^{۲}-۱=(۳k+۱)^{۲}-۱=۹k^{۲}+۶k+۱-۱$$
$$=۹k^{۲}+۶k=۳(۳k^{۲}+۲k)=۳t$$

که مضرب ۳ است.

**حالت دوم:** $n=۳k+۲$. در این صورت:

$$n^{۲}-۱=(۳k+۲)^{۲}-۱=۹k^{۲}+۱۲k+۴-۱$$
$$=۹k^{۲}+۱۲K+۳=۳t'$$

که مضرب ۳ است.

***

در ادامه به دو مثال از نامساوی‌های شامل قدرمطلق توجه می‌کنیم و خواهیم دید که «اثبات به روش در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها» چه دامنهٔ وسیعی از مسائل را می‌تواند پوشش دهد.

**مثال ۳.** ثابت کنید برای هر x و y حقیقی داریم:

(نامساوی مثلثی) $|x+y|\leq|x|+|y|$

**اثبات.** قبل از اثبات این نامساوی کاربردی لازم است یادآوری کنیم که:

$$|x|=\begin{cases} x & (x\geq ۰)\\ -x & (x<۰)\end{cases}$$

**حالت اول:** $x\geq ۰$ و $y\geq ۰$ . بنابراین طبق تعریف $|x|=x$ و $|y|=y$ و از آنجا که: $x+y\geq ۰$، لذا:

$$|x+y|=x+y=|x|+|y|$$

**حالت دوم:** $x<۰$ و $y<۰$. بنابراین: $|x|=-x$ و $|y|=-y$ .

و چون: $x+y<۰$، پس:

$$|x+y|=-(x+y)=-x+(-y)=|x|+|y|$$

**حالت سوم:** یکی از دو متغیر x و y مثبت و دیگری منفی باشد. بدون از دست دادن کلیت موضوع، فرض کنیم x مثبت و y منفی باشد. پس:

$|x|=x$ و $|y|=-y$

حال لازم است تا مسئله را به دو زیرحالت تقسیم کنیم:

الف. $x+y\geq ۰$. در این صورت:

$$|x+y|=x+y\leq x+(-y)=|x|+|y|$$

ب. $x+y<۰$. در این صورت:

$$|x+y|=-x+(-y)\leq x+(-y)=|x|+|y|$$

**مثال ۴.** ثابت کنید برای هر $x\in R$:

$$-۲\leq|x-۱|-|x+۱|\leq ۲$$

**اثبات.** در خصوص مسائل شامل قدرمطلق توجه داشته باشید که ریشه‌های هر کدام از قدرمطلق‌ها معمولاً برای تقسیم‌بندی حالت‌های ممکن کارسازند. توجه کنید که:

$$|x-۱|=\begin{cases} x-۱ & :(x\geq ۱)\\ -(x-۱) & :(x<۱)\end{cases}$$

$$|x+۱|=\begin{cases} x+۱ & :(x\geq -۱)\\ -(x+۱) & :(x<-۱)\end{cases}$$

بنابراین حالت‌های $x<-۱$، $-۱\leq x\leq ۱$ و $x\geq ۱$ را در نظر می‌گیریم. (هر x حقیقی در یکی از این ۳ بازه قرار می‌گیرد.)

**حالت اول:** $x<-۱$:

$$|x-۱|-|x+۱|=-(x-۱)+(x+۱)=۲$$

**حالت دوم:** $-۱\leq x\leq +۱$:

$$|x-۱|-|x+۱|=-(x-۱)-(x+۱)=-۲x$$
$$-۱\leq x\leq ۱\Rightarrow ۲\geq -۲x\geq -۲$$

**حالت سوم:** $x>۱$:

$$|x-۱|-|x+۱|=(x-۱)-(x+۱)=-۲$$

بنابراین در تمام حالت‌ها داریم:

$$-۲\leq|x-۱|-|x+۱|\leq ۲$$

■ اینک به مثالی متفاوت می‌پردازیم که در آن باید از قوانین منطق بهره گرفت.

**مثال ۵.** گزاره‌های زیر همگی درست‌اند:

۱) $P \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ۲) $p \vee s$

۳) $t \Rightarrow q$ ۴) $\sim s$

در این صورت نشان دهید $t \Rightarrow r$ همواره درست است.

**اثبات.** دو حالت در نظر می‌گیریم: q درست باشد یا $\sim q$ درست باشد.

**حالت اول:** q درست باشد.

بنا به فرض (۴)، $\sim s$ درست است، پس s نادرست است. بنا به فرض (۲)، p باید درست باشد و از درستی p و درستی (۱)، $q \Rightarrow r$ باید درست باشد. چون فرض کرده‌ایم q درست است، پس باید r درست باشد. از درستی r، درستی $t \Rightarrow r$ نتیجه می‌شود.

**حالت دوم:** q نادرست باشد.

چون بنا به فرض (۳) $t \Rightarrow q$ درست است و فرض کرده‌ایم q نادرست باشد، پس لزوماً t باید نادرست باشد. از نادرست بودن t، لزوماً درستی گزارهٔ $t \Rightarrow r$ نتیجه می‌شود.

در ادامه با نمونه‌هایی از مثلثات و هندسه بحث را کامل می‌کنیم.

**مثال ۶.** $\theta$ زاویه‌ای حاده بر حسب رادیان است. به‌سادگی می‌توان دید که $\sin\theta<\theta$. نشان دهید:

$\cos\theta > 1-\theta$

**اثبات.** دو حالت $1<\theta<\frac{\pi}{2}$ و $0<\theta\leq 1$ را در نظر می‌گیریم.

**الف)** حالت $1<\theta<\frac{\pi}{2}$ (عدد ۱ بر حسب رادیان است):

$$1<\theta<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta>0 \text{ و } 1-\theta<0 \Rightarrow \cos\theta>1-\theta$$

**ب)** حالت $0<\theta\leq 1$:

از برهان خلف استفاده می‌کنیم. اگر: $\cos\theta\leq 1-\theta$، چون:

$1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$ و $\sin\theta<\theta$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta\leq 1-\theta \Rightarrow \cos^2\theta\leq(1-\theta)^2\\ \sin\theta<\theta \Rightarrow \sin^2\theta<\theta^2\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta<(1-\theta)^2+\theta^2$$

بنابراین:

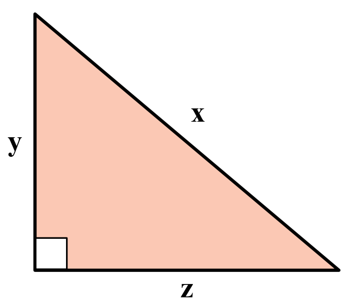
$$1<1-2\theta+\theta^2+\theta^2$$

$$\Rightarrow \theta<\theta^2$$

اما $\theta<\theta^2$ با شرط $0<\theta\leq 1$ در تناقض است و این اثبات را کامل می‌کند.

**مثال ۷.** اگر x اندازهٔ وتر و y و z اندازهٔ اضلاع قائمه مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشند و هر سه عددهای درستی باشند، با درنظر گرفتن همهٔ حالات ممکن، صورت کلی آن‌ها را به‌دست آورید.

**پاسخ.** داریم: $x^2=y^2+z^2$. اکنون اگر a و b و c ریشه‌های این معادله باشند، آن‌گاه ka، kb و kc نیز ریشه‌های آن هستند.




پس لازم است سه عدد x، y و z را دو به دو نسبت به هم اول اختیار کنیم. با این شرط داریم:

**حالت اول:** x، y و z هر سه زوج باشند. این حالت امکان‌پذیر نیست، چون x، y و z دو به دو نسبت به هم اول‌اند.

**حالت دوم:** x، y و z هر سه فرد باشند. این حالت نیز ممکن نیست؛ چون در این صورت سمت چپ معادله فرد و سمت راست آن زوج است که نشدنی است.

**حالت سوم:** x زوج و y و z فرد باشند:

$$x=2a,\ y=2b+1,\ z=2c+1$$

$$x^2=y^2+z^2 \Rightarrow 4a^2=(2b+1)^2+(2c+1)^2$$

$$\Rightarrow 2a^2=2b^2+2c^2+2b+2c+1$$

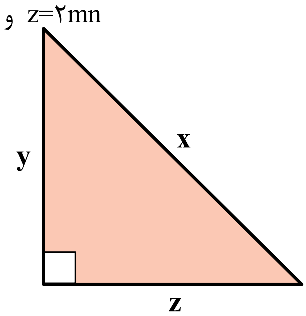
می‌بینیم که این حالت هم نشدنی است؛ زیرا سمت چپ معادله زوج و سمت راست آن فرد است.

**حالت چهارم:** x فرد و از دو عدد y و z یکی فرد و دیگری زوج باشد. (تنها این حالت شدنی است)؛ یعنی اندازهٔ وتر مثلث همواره عددی است فرد و از دو ضلع زاویهٔ قائمه یکی فرد و دیگری زوج است که با انتخاب

$(m,n\in N)\ \ x=m^۲+n^۲$ و $m>n$

داریم:

$y=m^۲-n^۲$ و $z=۲mn$




(توجه کنید که: $(m^۲+n^۲)^۲=(m^۲-n^۲)^۲+۴m^۲n^۲$)

**مثال ۸.** فرض کنید D نقطه‌ای روی ضلع AC از مثلث ABC باشد، به‌طوری که: $\angle ABD=۹۰^\circ$، $\angle DBC=۱۸^\circ$ و $CD=۱۰$. با فرض $AC=۱۰\sqrt{۵}$، ثابت کنید: $BD=۱۰$.

**اثبات.** می‌دانیم: $Sin۳۶^\circ=Cos۵۴^\circ$ بنابراین:

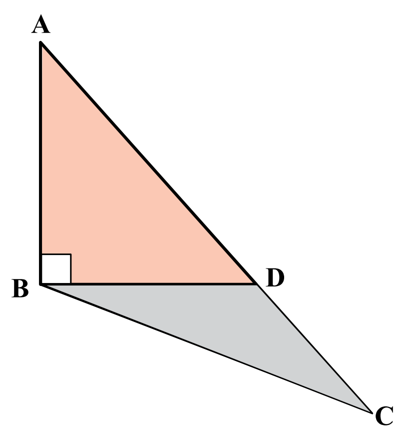
$$۲Sin۱۸^\circ Cos۱۸^\circ=۴Cos^۳۱۸^\circ-۳Cos۱۸^\circ$$

این نتیجه می‌دهد:

$$Sin۱۸^\circ=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$$

و می‌توان دید که:

$$Sin۵۴^\circ=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}$$




سه حالت زیر را خواهیم داشت:

**حالت اول:** $BD>۱۰$. در این صورت:

$$\Delta ABD: Sin\hat{A}=\frac{BD}{AD}>\frac{۱۰}{۱۰(\sqrt{۵}-۱)}$$
$$=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}=Sin۵۴^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{A}>۵۴^\circ$$

از سوی دیگر: $\hat{C}>\hat{D}BC$ پس: $\hat{C}>۱۸^\circ$.

بنابراین:

$$\angle A+\angle B+\angle C+۵۴^\circ+۱۰۸^\circ+۱۸^\circ=۱۸۰^\circ$$

و این تناقض است.

**حالت دوم:** اگر: $BD<۱۰$، در این صورت: $\hat{A}<۵۴^\circ$ و $\hat{C}<۱۸^\circ$. بنابراین:

$$\angle A+\angle B+\angle C<۱۸۰^\circ$$

و این هم تناقض است.

**حالت سوم:** اگر $BD=۱۰$، در این صورت: $\angle A=۵۴^\circ$ و $\angle C=۱۸^\circ$.

این اثبات حکم را کامل می‌کند.

### تمرین

۱. نشان دهید برای هر $x\in R$:

$|x|+|x-۳|\geq۳$

۲. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $۳n^۲+n+۱۴$ عددی است زوج.

۳. گزاره‌های منطقی زیر همگی درست‌اند:

۱. $A\Rightarrow(B\wedge\sim D)$ ۲. $c\Rightarrow A$ ۳. $c\vee\sim D$

در این صورت ثابت کنید $\sim D$ همواره درست است.

۴. ثابت کنید اگر عدد طبیعی n بر ۵ بخش‌پذیر نباشد، آن‌گاه در تقسیم $n^۲$ بر ۵ باقی‌مانده برابر ۱ یا ۴ می‌شود.

*پی‌نوشت

*. $Coc۳x=۴Cos^۳x-۳Cosx$

آموزشی

حمیدرضا امیری

# آموزش ترجمهٔ متـــون ریاضی

## ۲.۱. نظریه مجموعه‌ها:

یک مجموعه گردایه‌ای اســـت از اشیای متمایز. این بدین معنی است که $\{۱,۲,۳\}$ یک مجموعه است اما $\{۱,۱,۳\}$ مجموعه نیست؛ زیرا ۱، دو بار در گردایهٔ دوم ظاهر شده است. گردایهٔ دوم یک «چندمجموعه» نامیده می‌شود. مجموعه‌ها معمولاً با نماد آکولاد مشخص می‌شوند. مجموعهٔ اعداد صحیح زوج به صورت $\{۲n\}$ یک عدد صحیح است: $\{n$ نوشته می‌شود.

**تعریف ۲.۱:** مجموعهٔ تهی مجموعه‌ای است که شامل هیچ شیئی نمی‌باشد. این مجموعه توسط دو آکولاد که داخل آن چیزی نیست $\{\}$ یا توسط نماد $\varnothing$ نوشته می‌شود.

**تعریف ۲.۲:** نماد عضویت مجموعه $(\in)$ برای اینکه بگوییم یک شیء عضو یک مجموعه است، استفاده می‌شود. (نماد عضویت) یک نماد جفتی یا شریک دارد به‌صورت $(\notin)$ که برای بیان اینکه عضوی در یک مجموعه نیست، استفاده می‌شود.

**تعریف ۲.۳:** می‌گوییم دو مجموعه مساوی‌اند هرگاه اعضای آن‌ها دقیقاً یکی باشند.

**مثال ۲.۱:** اگر $S=\{۱,۲,۳\}$ در این صورت $۳\in S$ و $۴\notin S$. مجموعهٔ $T=\{۲,۳,۱\}$ با مجموعهٔ S برابر اســـت؛ زیرا اعضای مثل هم دارند: ۱، ۲ و ۳.

**تعریف ۲.۴:** عدد اصلی یک مجموعه، اندازهٔ آن مجموعه اســـت. برای یک مجموعهٔ متناهی، عدد اصلی، تعداد اعضایی اســـت که در آن مجموعه قرار دارند. نماد سمبلیک برای اندازهٔ مجموعه‌ای چون S به‌صورت $|S|$ نوشته می‌شود. در آینده ما با ایدهٔ عدد اصلیِ مجموعهٔ نامتناهی سروکار خواهیم داشت.

### لغت‌ها و اصطلاحات مهم

| | |
|---|---|
| 1. Collection | گردایه، دسته |
| 2. Distinct | متمایز |
| 3. Object | شیء |
| 4. Appear | ظاهر شدن |
| 5. Multiset | چند مجموعه |
| 6. Curlybrace | آکولاد |
| 7. Empty set | مجموعهٔ تهی |
| 8. Partner symbol | جفت نماد |
| 9. Equal | مساوی |
| 10. Exactly | دقیقاً |
| 11. Cardinality | عدد اصلی |
| 12. Finite | متناهی |

## 2.1 Set Theory:

A *set* is a collection of distinct objects. This means that {1,2,3} is a set but {1,1,3} is not because 1 appears twice in the second collection. The second collection is called a *multiset*. Sets are often specified with curly brace notation. The set of even integers can be written:

$$\{2n: n \text{ is an integer}\}$$

**Definition 2.1** The **empty set** is a set containing no objects. It is written as a pair of curly braces with nothing inside {} or by using the symbol ∅.

**Definition 2.2** The **set membership symbol** ∈ is used to say that an object is a member of a set. It has a partner symbol ∉ which is used to say an object is not in a set.

**Definition 2.3** We say two sets are **equal** if they have exactly the same members.

**Example 2.1** If

$$S=\{1,2,3\}$$

then $3 \in S$ and $4 \notin S$.

The set

$$T=\{2,3,1\}$$

is equal to S beccause they have the same members: 1,2 and 3.

**Definition 2.4** The **cardinality** of a set is its size. For a finite set, the cardinality of a set is the number of members it contains. In symbolic notation the size of a set S is written |S|. We will deal with the idea of the cardinality of an infinite set later.

### برای ترجمهٔ دانش‌آموزان

We now move on to a number of ***Operations*** on sets.

You are already familiar with several operations on numbers such as addition, multiplication, and negation.

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..The ***intersection*** of two sets S and T is the collection of all objects that are in both sets.

It is the written S∩T. Us ra curly brace notation.

$$S \cap T = \{x :(x \in S) \text{ and } (x \in T)\}$$

..................................................................................................................................

The symbol and in the above definication is an exxampel of a Boolean or logical operation. It is only true when both the propositions it joins are also true.

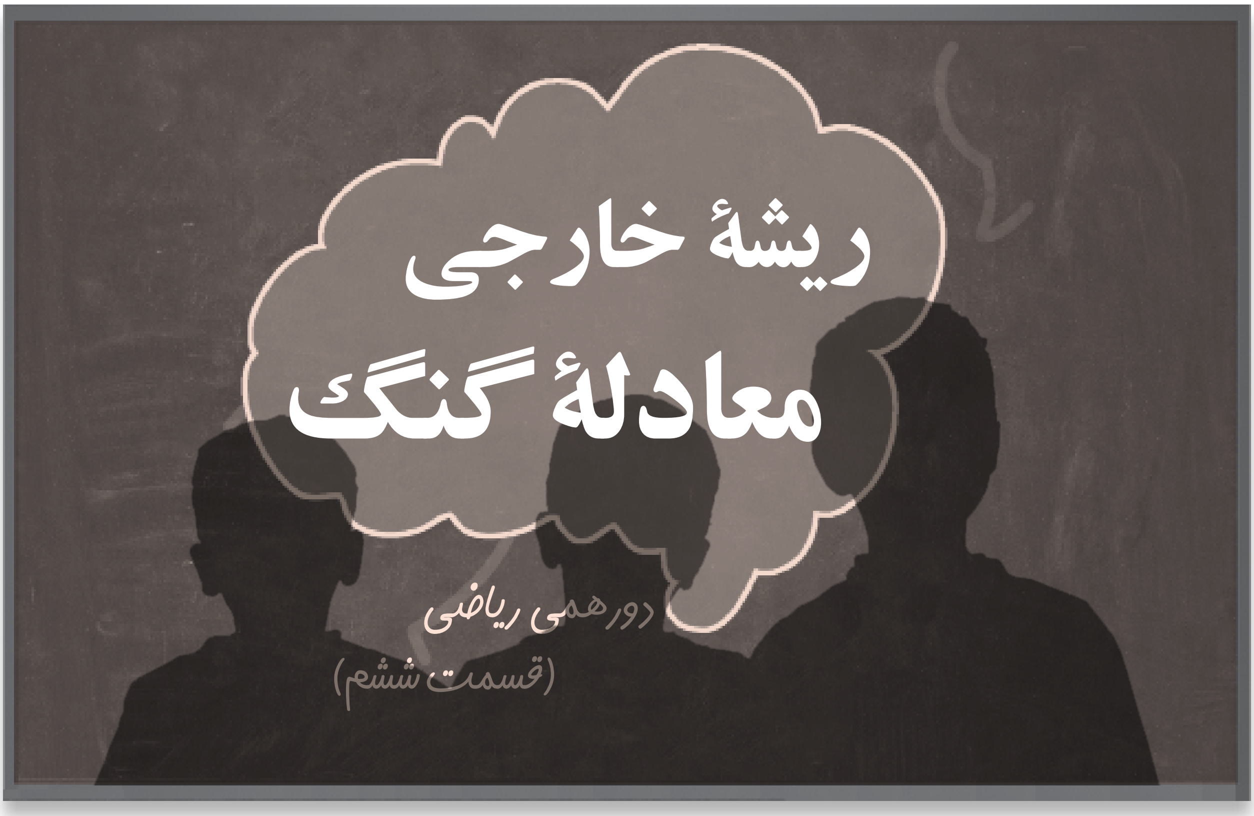
It has a symbolic equivalent ∧. This lets us write the formal definition of intersection more compactly:

$$S \cap T = \{x :(x \in S) \wedge (x \in T)\}$$

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

**میرشهرام صدر**
دبیر ریاضی منطقه ۶ شهر تهران




## مقدمه

در این شـــمارهٔ از دورهمی ریاضی، دربارهٔ علت ظهور ریشـــهٔ خارجی معادلهٔ گنگ به بحث و گفت‌وگو نشســـته‌ایم. ماجرا از جایی آغاز شـــد که پس از حل یک معادلهٔ گنگ، دو ریشه به دست آمد: یکی در معادله صدق می‌کرد و «ریشـــهٔ معادله» بود، و دیگری در معادله صدق نمی‌کرد و «ریشهٔ خارجی» معادله بود.

یکی از دانش‌آموزان پرسید: «در حل این معادله چه اتفاقی می‌افتد که ریشهٔ خارجی ظاهر می‌شود؟» به منظور روشن‌تر شدن هرچه بیشـــتر این موضوع برای دانش‌آموزان علاقه‌مند و مستعد، تصمیم گرفتیم در یک دورهمی ریاضی دربارهٔ این موضوع بحث و تبادل نظر داشـــته باشیم که مشروح آن در پی آمده است.

**معلم:** ......................

می‌خواهیم معادلهٔ گنگ زیر را حل کنیم:

$$\sqrt{x+1}=x-1$$

ابتـدا شـرایط با معنی بـودن معادله را بررسی می‌کنیم.

آیـا مـی‌توانیـد بگویید که این معادله با چه شرایطی با معنی است؟

**دانش‌آموز اول:** ......................

باید زیر رادیـکال نامنفی باشد؛ یعنی:

$$x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1$$

پس برای بـا معنی بودن معادله باید داشته باشیم:

$$x\in[-1,+\infty) \qquad (1)$$

**معلم:** ..................................................

الان شما $x=0$ را در نظر بگیرید و در معادله جایگزین

کنید، واضح است که $0 \in [-1,+\infty)$، اما معادله به ازای x=۰ بی‌معنی است، زیرا حاصل رادیکال منفی می‌شود. مشکل کجاست؟

**دانش آموز دوم:**

چون $\sqrt{x+1}$ همواره نامنفی است، پس باید داشته باشیم:

$$0 \le \sqrt{x+1} = x-1 \Rightarrow$$
$$x-1 \ge 0 \Rightarrow x \ge 1$$

در نتیجه برای با معنی بودن معادله باید داشته باشیم:

$$x \in [1,+\infty) \qquad (2)$$

از اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که معادله برای:

$$x \in [1,+\infty)$$

با معنی است.

**معلم:**

اکنون برای حل معادله دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x+1} = x-1 \Rightarrow x+1 = (x-1)^2$$
$$\Rightarrow x+1 = x^2 - 2x + 1$$
$$\Rightarrow \mathbf{x^2 - 3x = 0} \qquad (*)$$
$$\Rightarrow x = 0 \;\text{یا}\; x = 3$$

**دانش آموز سوم:**

$x = 3 \in [1,+\infty)$ و در معادله صدق می‌کند، پس ریشهٔ معادله است. اما داریم: $x = 0 \notin [1,+\infty)$، پس به ازای این مقدار معادله بی‌معنی می‌شود و نمی‌تواند ریشهٔ معادله باشد. از طرف دیگر، در معادله هم صدق نمی‌کند، پس **ریشهٔ خارجی معادله** است.

**معلم:**

درست است. اما توجه کنید که واقعاً نمی‌توان x=۰ را در معادله قرار داد. زیرا این ریشه به اصطلاح در دامنهٔ معادله نیست و حق ورود به معادله را ندارد.

**دانش آموز چهارم:**

سؤال اصلی این است: x=۰ چطوری سر و کله‌اش در حل این معادله پیدا شد؟ اینکه x=۰ ریشهٔ خارجی معادله است،قبول! اما علت ظهور این ریشه چیست؟

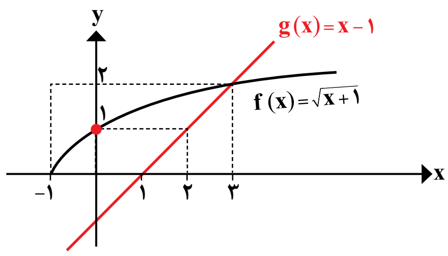
**معلم:**

قبل از پاسخ به سؤال **پارسا** جان، می‌خواهم شما را مطمئن کنم که فقط x=۳ ریشهٔ معادله است. به این منظور از حل هندسی معادله کمک می‌گیریم. دو تابع با ضابطه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad , \quad g(x) = x-1$$

می‌دانیم که طول محل برخورد نمودارهای این دو تابع، ریشهٔ معادلهٔ زیر می‌شود:

$$\sqrt{x+1} = x-1$$




همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، نمودارهای این دو تابع فقط در نقطه‌ای به طول x=۳ تقاطع دارند. پس x=۳ ریشهٔ معادله است.

در ادامه، برای پاسخ به سؤال پارسا، از ایشان می‌خواهم که معادلهٔ زیر را حل کند:

$$\sqrt{x+1} = 1-x$$

**دانش آموز چهارم:**

برای با معنی بودن معادله باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x+1 \ge 0 \Rightarrow x \ge -1 \\ 1-x \ge 0 \Rightarrow x \le 1 \end{cases}$$

بنابراین معادله برای $x \in [-1,1]$ با معنی است.

اکنون برای حل معادله داریم:

$$(\sqrt{x+1})^2 = (1-x)^2$$
$$\Rightarrow x+1 = 1-2x+x^2$$
$$\Rightarrow \mathbf{x^2 - 3x = 0} \quad (**)$$

**پس از حل یک معادلهٔ گنگ، دو ریشه به دست آمد: یکی در معادله صدق می‌کرد و «ریشهٔ معادله» بود، و دیگری در معادله صدق نمی‌کرد و «ریشهٔ خارجی» معادله بود**

**معلم:** ................................................................

لطفاً کمی صبر کنید. جواب سؤال شما همین‌جاست. معادلهٔ درجه دوم $x^{۲} - ۳x = ۰$، هم در اینجا ظاهر شد، و هم در حل معادلهٔ گنگ قبلی.

یعنی این معادله درجهٔ دوم همزمان دو معادلهٔ گنگ زیر را حل می‌کند:

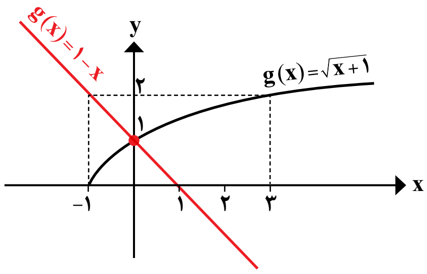
$$\sqrt{x+۱} = x-۱ \quad ; \quad \sqrt{x+۱} = ۱-x$$

در معادلهٔ گنگ دومی داریم: $x = ۰ \in [-۱, ۱]$ که در معادله صدق می‌کند و ریشهٔ معادله است و داریم:

$$x = ۳ \notin [-۱, ۱]$$

که در معادله هم صدق نمی‌کند و در اینجا ریشهٔ خارجی معادله است.

نمودار زیر روش هندسی حل معادلهٔ گنگ دومی است و نشان می‌دهد که ریشهٔ این معادله x=۰ است.




امیدوارم این دورهمی، مفید بوده باشد. دانش‌آموزان عزیز، لطفاً مشکلات خود را در مباحث درس ریاضی برای ما بنویسید تا در دورهمی‌های دیگر به آن‌ها بپردازیم.

# ریاضیات در چند دقیقه

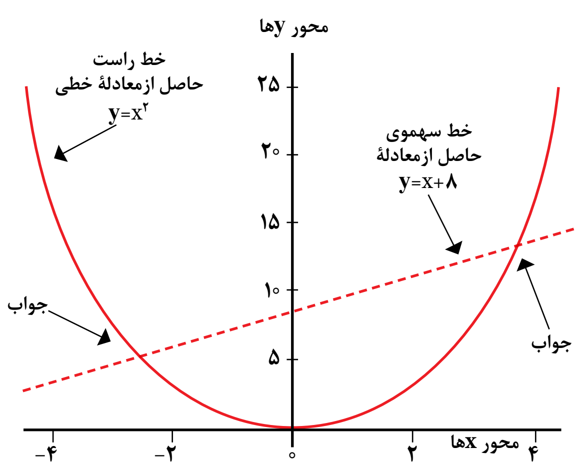
**نویسنده: پال گلندینینگ**

**مترجم: دکتر غلامرضا یاسی‌پور**

## معادلات و نمودارها

طرح یک معادله به‌صورت نمودار طریقی را نشان می‌دهد که طبق آن، مقدار یک متغیر با تغییر مقدار متغیر دیگری تغییر می‌کند. این عمل از این ایده استفاده می‌کند که هر معادله‌ای که دو متغیر حقیقی را به هم مرتبط کند، می‌تواند به‌صورت رابطه‌ای بین مختصات دوبعدی دکارتی، x و y تصویر شود. در این صورت یک معادله می‌تواند به‌صورت خمی تعبیر شود که مقادیر متناظر x و y مشخص‌شده با آن معادله را نمایش می‌دهند. معادلهٔ $y=x^{۲}$، چنان‌که نشان داده شده است خمی سهموی از نقاط را تولید می‌کند. معادلات پیچیده‌تر می‌توانند خم‌های پیچیده‌تری را به وجود آورند، هرچند به ازای هر x ممکن، هیچ مقدار یا مقادیر متناظر بسیاری از y موجود باشد.

هنگامی که یک جفت دستگاه معادله بر محورهای یکسانی رسم شوند، تقاطع‌های آن‌ها نقاطی را مشخص می‌کنند که در آن‌ها x و y در هر دو معادله صدق می‌کنند. به این ترتیب، حل یک دستگاه معادلات، به‌طور اساسی مسئلهٔ تعیین نقاط تقاطع خم‌هاست؛ یعنی محل تلاقی جبر و هندسه.




یافتن جواب‌هایی که در آن‌ها متغیرها توسط یک جفت معادله تعریف شده‌اند، در اساس، همان مسئلهٔ یافتن تقاطع‌های واقع در نمودار آن‌هاست.

**علیرضا الوانی مرجانی**
دبیر ریاضی ارومیه

# قضیهٔ هیپاسوس

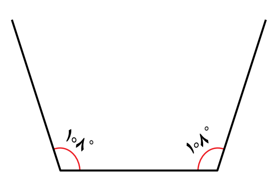
**اشاره**

**در این مقاله قضیه‌ای درخصوص رابطهٔ بین طول‌های قطر و ضلع پنج‌ضلعی منتظم منتسب به هیپاسوس (ریاضی‌دان و فیلسوف مکتب فیثاغورس) بررسی می‌شود. در آغاز، پس از معرفی قضیه و یادآوری طریقهٔ رسم پنج‌ضلعی منتظم با رسم قطرهای آن (یا با امتداد دادن اضلاع آن)، یک پنج‌پر منتظم می‌کشیم. در ادامه قضیه را اثبات می‌کنیم و پس از حل چند مثال مرتبط با آن، مقاله را با پرداختن به برخی ویژگی‌های پنج‌پر منتظم پایان می‌دهیم.**

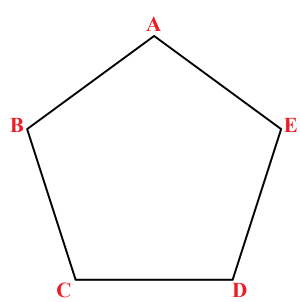
**قضیهٔ هیپاسوس:** در هر پنج‌ضلعی منتظم نسبت طول قطر به ضلع آن عددی گنگ است.

## دو روش برای رسم پنج‌ضلعی منتظم

**۱.** می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ درونی یک nضلعی منتظم از رابطهٔ $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}$ به‌دست می‌آید. با جاگذاری n=۵ در این رابطه، درمی‌یابیم که اندازهٔ هر زاویهٔ درونی در پنج‌ضلعی منتظم برابر با ۱۰۸ درجه است. براساس این مقدمه، مرحله‌های رسم پنج‌ضلعی منتظم در شکل‌های ۱ـ الف و ۱ـ ب نمایش داده شده‌اند.

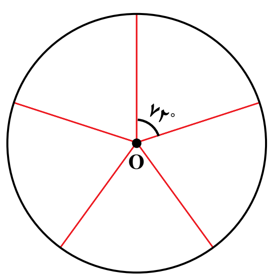



شکل ۱. الف

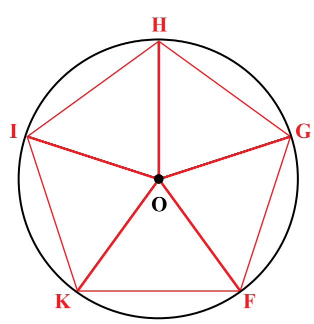



شکل ۱. ب

**۲.** دایره را به پنج کمان ۷۲ درجه‌ای ( $\frac{۳۶۰}{۵}$ ) تقسیم می‌کنیم و پنج نقطهٔ حاصل روی دایره را به هم وصل می‌کنیم. شکل‌های ۲ـ الف و ۲ـ ب این مرحله‌ها را نشان می‌دهند.




شکل ۲. الف

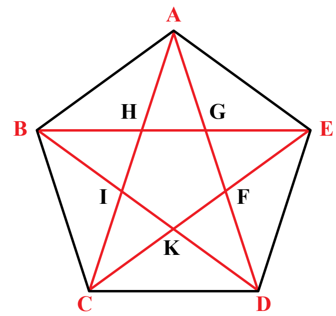



شکل ۲. ب

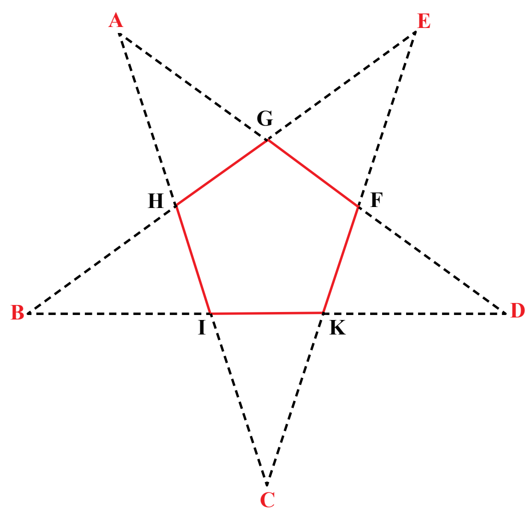
## پنج‌پر منتظم

پنج‌پر منتظم یکی از زیباترین شکل‌های هندسی است که آن را می‌توان با رسم قطرهای پنج‌ضلعی منتظم (شکل ۳) یا با امتداد دادن ضلع‌های آن تا جایی که یکدیگر را قطع کنند (شکل ۴)، به‌دست آورد. در شکل‌های ۳ و ۴ پنج مثلث AHG و BIH و CKI و DFK

و EGF را پرهای پنج‌پر منتظم می‌نامند. AC، AD، BD، BE و CE ضلع‌های پنج‌پر منتظم هستند. نقطه‌های A، B، C، D و E را رأس‌های پنج‌پر منتظم می‌نامند.




**شکل ۳.**




**شکل ۴.**

## برهان قضیهٔ هیپاسوس

برای اثبات قضیه، در شکل ۱ـ ب قطرهای AD و BE از پنج‌ضلعی منتظم را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ F قطع کنند (شکل ۵). چون: AD=DE، پس مثلث ADE متساوی‌الساقین است.

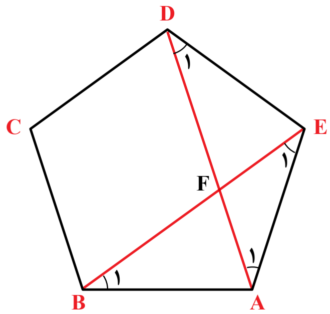
در نتیجه: $\hat{A}_1=\hat{D}_1$. با توجه به اینکه: E=۱۰۸°، بنابراین:

$$\hat{A}_1=\hat{D}_1=\frac{180-108}{2}=36 \qquad (1)$$

همچنین: AE=DE. پس مثلث ABE متساوی‌الساقین است و داریم: $\hat{B}_1=\hat{E}_1$ با توجه به اینکه: $\hat{A}=108^\circ$، پس:

$$\hat{B}_1=\hat{E}_1=\frac{180^\circ-108^\circ}{2}=36^\circ \qquad (2)$$

$(1)$ و $(2) \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{B}_1$




**شکل ۵.**

مورد سوم مشترک بودن زاویهٔ $E_1$ در دو مثلث ABE و AEF است که به تشابه دو مثلث بنا به حالت برابری سه زاویه منجر می‌شود. نسبت اضلاع متناظر را در دو مثلث متشابه می‌نویسیم:

از طرفی دو مثلث ABE و AEF در رأس $E_1$ مشترک هستند، پس زاویهٔ سوم این دو مثلث نیز برابرند، لذا بنا به حالت برابری سه زاویه متشابه هستند. نسبت اضلاع متناظر را می‌نویسیم:

$$\frac{BE}{AE}=\frac{AB}{AF}=\frac{AE}{EF} \qquad (*)$$

حال اگر فرض کنیم طول‌های قطر و ضلع پنج‌ضلع منتظم به ترتیب برابر d و a باشند، خواهیم داشت:

$$\frac{d}{a}=\frac{a}{AF} \qquad (**)$$

به سادگی تساوی‌های $\hat{F}_1=\hat{F}_2=108$ ، $\hat{B}_2=\hat{D}_2=72$ و $\hat{C}=108$ قابل دسترس هستند. حال با تمرکز روی چهارضلعی BCDF می‌توانیم لوزی بودن آن را دریابیم (زاویه‌های روبه‌رو برابرند و BC=CD). پس: BF=DF=BC=CD=a. از طرف دیگر: AF=AD-DF، پس تساوی (**) به‌صورت $\frac{d}{a}=\frac{a}{d-a}$ در می‌آید.

معادلهٔ درجه دومی برحسب d تشکیل می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم:

$$d(d-a)=a^2 \Rightarrow d^2-ad-a^2=0$$

$$\Rightarrow d=\frac{a\mp\sqrt{5a^2}}{2}=\frac{a(1\pm\sqrt{5})}{2}$$

$\frac{d}{a}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$، که عددی گنگ است.

**نسبت طلایی.** عدد گنگ $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ به نسبت طلایی موسوم است که با حرف یونانی φ نشان داده می‌شود. مقدار تقریبی این عدد تا ۱۰ رقم اعشار به‌صورت زیر است:

φ =۱/۶۱۸۰۳۳۹۸۸۷

با این توضیح می‌توانیم قضیهٔ هیپاسوس را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

**قضیهٔ هیپاسوس.** در هر پنج‌ضلعی منتظم نسبت طول قطر به طول ضلع برابر نسبت طلایی است.

**نوبت شما.** نسبت $\frac{a}{d}$ را در یک پنج‌ضلعی منتظم به ضلع a و قطر d به دست آورید.

**نتیجهٔ قضیهٔ هیپاسوس:** اگر در شکل ۵، قطر CE را رسم کنیم تا قطر AD را در نقطهٔ G قطع کند، نشان می‌دهیم که: $\varphi = \frac{DG}{GF}$.

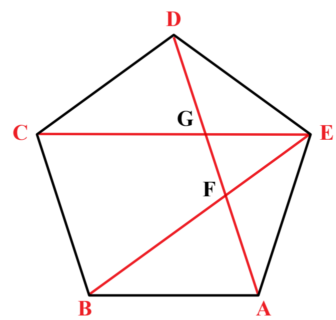
**برهان:** مثلث‌های EDF و EGF با هم متشابه‌اند (چرا؟)

نسبت ضلع‌های متناظر را می‌نویسیم:

$$\frac{ED}{EG}=\frac{EF}{GF}=\frac{DF}{EF}$$

از تساوی‌های اخیر می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{EF}{GF}=\frac{DF}{EF}$$




شکل ۶.

واضح است که: EF=DG (هم‌نهشتی‌های مثلث‌های EDG و EAF). با توجه به اینکه: DF=DG+GF خواهیم داشت:

$$\frac{DG}{GF}=\frac{DG+GF}{DG}$$

با اعمال طرفین و وسطین معادلهٔ درجهٔ دومی برحسب DG تشکیل می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم؛ همانند آنچه در اثبات قضیهٔ هیپاپوس انجام شد.

**مسئلهٔ ۱.** طول قطر یک پنج‌ضلعی منتظم عددی گویاست. طول ضلع آن کدام گزینه می‌تواند باشد؟

**الف.** $\sqrt{۵}+۱$ **ب.** $\sqrt{۵}-۲$

**ج.** $\sqrt{۲۰}-۲$ **د.** $\sqrt{۲۰}+۲$

**پاسخ:** بنابر قضیهٔ هیپاسوس داریم: $\frac{d}{a}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$. به عبارت دیگر: $d=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\times a$. پس a باید عامل $\sqrt{۵}-۱$ را داشته باشد. گزینهٔ (ج) چنین عاملی را داراست.

$$\sqrt{۲۰}-۲=۲\sqrt{۵}-۲=۲(\sqrt{۵}-۱)$$

**مسئلهٔ ۲.** در شکل ۶، اگر طول قطر پنج‌ضلعی منتظم برابر $\sqrt{۲۰}-۲$ باشد، طول پاره‌خط‌های AF و GF را بیابید.

**پاسخ:** طول قطر را d فرض می‌کنیم. همچنین طول پاره‌خط‌های AF و GF را به ترتیب x و y در نظر می‌گیریم. بنابر قضیه باید داشته باشیم:

$$\frac{d}{\sqrt{۲۰}-۲}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$$

از تساوی اخیر d=۴ به‌دست می‌آید. بنابر نتیجهٔ قضیه باید داشته باشیم:

$$\frac{AF}{GF}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$$

و یا: $\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$. از طرف دیگر: ۲y+x=۴.

از حل دو معادلهٔ اخیر $x=۴(\sqrt{۵}-۲)$ و $y=۲(۳-\sqrt{۵})$ به‌دست می‌آیند.

## برخی ویژگی‌های ستارهٔ پنج‌پر

**نوبت شما.** با تمرکز روی شکل‌های ۳ یا ۴ احکام زیر را ثابت کنید:

۱. پرها، مثلث‌های متساوی‌الساقین هستند.

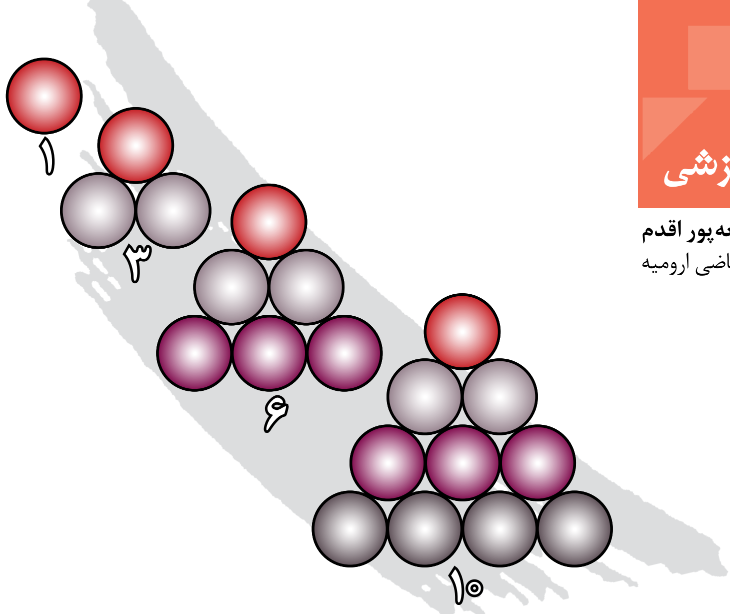
۲. پرها، مثلث‌های هم‌نهشت هستند.

۳. دایره‌ای رسم کنید و درون آن پنج‌ضلعی منتظم HGFKI را بسازید. با امتداد دادن ضلع‌های این پنج‌ضلعی منتظم، پنج‌پر منتظم را به‌دست آورید و رأس‌های آن را A، B، C، D و E بنامید. حال درستی حکم‌های زیر را در شکل به‌دست‌آمده بررسی کنید:

**الف)** نقطه‌های A، B، C، D و E روی دایرهٔ واحدی به مرکز O (مرکز دایرهٔ محیطی پنج‌ضلعی منتظم HGFKI) واقع‌اند. پس از اثبات دایرهٔ مورد نظر را رسم کنید.

**ب)** پنج‌ضلعی ABCDE منتظم است.

**پ)** نسبت طول ضلع پنج پر منتظم به طول پنج‌ضلعی منتظمی که محاط است در دایرهٔ گذرا از روی ستاره (پنج‌ضلعی ABCDE)، برابر نسبت طلایی است.




**عباس قلعه‌پور اقدم**
دبیر ریاضی ارومیه

# عددهای مثلثی

**اشاره**

نظریهٔ عددها یکی از قدیمی‌ترین شاخه‌های ریاضیات است که به ویژگی‌های عددهای صحیح، و به‌طور اخص به عددهای صحیح مثبت ۱، ۲، ۳، ... (که به عددهای طبیعی نیز معروف‌اند) می‌پردازد و هر فرد علاقه‌مندی، با کاوش و جست‌وجو می‌تواند دریابد که ریشه‌های این نظریه به روزگار فوق‌العاده دوری بازمی‌گردد. هرچند احتمال آن می‌رود که یونانیان برخی از مهم‌ترین اطلاعات خود را دربارهٔ ویژگی‌های عددهای طبیعی از بابلی‌ها و مصری‌های باســـتان گرفته باشند، لیکن نخستین اصول یک نظریهٔ واقعی دربارهٔ عددها به فیثاغورس و شاگردان او که یونانی‌الاصل بودند، نسبت داده می‌شود.

فیثاغورسیان معتقد بودند که کلید اسرار جهان در عدد نهفته است. در واقع آنان اعتقادی افراطی به رمزآمیز بودن عددها داشتند و به هر چیز مادی یا معنوی عدد معینی را نسبت می‌دادند. عدد ۱ را نمایندهٔ دلیل و برهان می‌دانستند؛ ۲ به مرد و ۳ به زن نسبت داده شده بود؛ ۴ مظهر فیثاغورسی برای عدالت بود؛ زیرا نخستین عددی که حاصل‌ضرب دو عدد برابر است؛ ۵ با «ازدواج» یکی گرفته می‌شد؛ زیرا از اجتماع ۲ و ۳ به‌دست می‌آید، و بسیاری نمونه‌های دیگر.

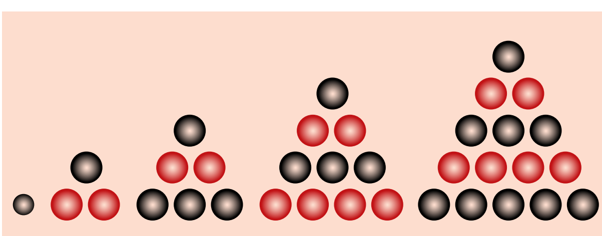
آنان همچنین برخی عددها را که ویژگی خاصی داشـــتند، تحت عناوین بامسمّایی نام‌گذاری کرده بودند؛ برای مثال، اینکه عدد ۶ برابر با مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت خود به‌جز ۶ است، نکته‌ای قابل توجه برای آنان بود. عدد ۲۸ اولین عدد بعد از ۶ است که همان ویژگی را دارد. فیثاغورسیان چنین عددهایی را «تام» می‌نامیدند. جفت عددهایی مانند «۲۸۴ و ۲۲۰» را که هر یک برابر با مجموع همهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد دیگر، به‌جز خود آن عدد، است، «عددهای متحاب» یا «عددهای دوست‌دار هم» می‌نامیدند. «متحاب» یعنی هر کدام در دل دیگری است و اجزای هر یک قادر به تولید آن یکی است. همچنین، سه‌گانه‌هایی چون (۵ و ۴ و ۳)، (۱۳ و ۱۲ و ۵) و (۳۷ و ۳۵ و ۱۲) که مربع مؤلفهٔ سوم در آن‌ها برابر مجموع مربعات دوم مؤلفهٔ نخست است، سه‌گانه‌های فیثاغورسی نام گرفته‌اند.

اما آنچه در این مقاله قصد پرداختن به آن را داریم، «عددهای مثلثی» هستند که نام‌گذاری و کار روی آن‌ها نیز منسوب به فیثاغورسیان است. پس از تعریف، چند حکم را که هر کدام خاصیتی از عددهای مثلثی را بیان می‌کند، اثبات خواهیم کرد.

**تعریف:** هر یک از عددهای:

۱=۱ و ۳=۲+۱ و ۶=۳+۲+۱ و ۱۰=۴+۳+۲+۱ و ۱۵=۵+۴+۳+۲+۱ و ...

تعداد نقطه‌هایی را نشان می‌دهند که می‌توان آن‌ها را به‌صورتی که در روبرو نمایش داده شده است، با فاصله‌های مساوی چید و مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع ساخت:



این امر موجب شد که یونانیان باستان عددی را مثلثی بنامند هرگاه مجموع چند عدد طبیعی متوالی باشد که از ۱ آغاز شوند. اولین عدد مثلثی ۱ است. دومین عدد از این مجموعه ۳ است که مجموع دو عدد طبیعی نخستین است. مجموع سه عدد طبیعی آغازین برابر ۶ می‌شود که سومین عدد مثلثی است. در واقع nامین عدد مثلثی مجموع n عدد طبیعی نخستین است که آن را با $t_n$ نشان خواهیم داد (t حرف اول واژهٔ لاتین Triangle به معنی سه‌گوش یا مثلث است).

$$t_n=۱+۲+۳+۴+\dots+n$$

***

حال برای آشنایی بیشتر با این عددها چند حکم را در خصوص آن‌ها بیان و اثبات می‌کنیم.

**۱.** یک عدد مثلثی است اگر و تنها اگر به ازای $n\geq ۱$ای به‌صورت $\frac{n(n+۱)}{۲}$ باشد.

**اثبات.**

فرض کنیم a یک عدد مثلثی باشد. در این صورت به‌وضوح عددی طبیعی چون m موجود است، به‌طوری که: $a=t_m$ (a، mامین عدد مثلثی است). لذا: $a=۱+۲+۳+\dots+m$، و می‌دانیم مجموع $۱+۲+۳+\dots+m$ همان مجموع m جملهٔ نخستین دنبالهٔ عددهای طبیعی است که با نوشتن آن به فرم $m+(m-۱)+(m-۲)+\dots+۱$ و جمع بستن این دو مجموع یکسان که اختلاف آن‌ها فقط در ترتیب عامل‌هاست، به تساوی $۲a=m(m+۱)$ یا $a=\frac{m(m+۱)}{۲}$ خواهیم رسید.

برعکس فرض کنیم عددی طبیعی چون n موجود باشد، به‌طوری که: $a=\frac{n(n+۱)}{۲}$ یا به‌طور معادل: $۲a=n(n+۱)$ خواهیم داشت:

$$۲a=\underbrace{(n+۱)+(n+۱)+(n+۱)+\dots+(n+۱)+(n+۱)+(n+۱)}_{\text{(n عامل)}}$$

$$\Rightarrow ۲a=[n+۱]+[(n-۱)+۲]+[(n-۲)+۳]+\dots+[۳+(n-۲)]+[۲+(n-۱)]+[۱+n]$$

$$\Rightarrow ۲a=[n+(n-۱)+(n-۲)+\dots+۳+۲+۱]+[۱+۲+۳+\dots+(n-۲)+(n-۱)+n]$$

$$\Rightarrow a=۱+۲+۳+\dots+n$$

یعنی a برابر مجموع n عدد طبیعی نخستین است. پس a، nامین عدد مثلثی است.

**۲.** عدد طبیعی n یک عدد مثلثی است اگر و تنها اگر $۸n+۱$ مربع کامل باشد.

**اثبات.**

فرض کنیم n یک عدد مثلثی باشد. بنا به حکم اول عددی طبیعی چون m موجود است به طوری‌که: $n=\frac{m(m+۱)}{۲}$. حال $۸n+۱$ برابر $۴m(m+۱)+۱$ یا $۴m^۲+۴m+۱$ خواهد بود که با تجزیهٔ چندجمله‌ای اخیر به $(۲m+۱)^۲$ می‌رسیم. یعنی $۸n+۱$، مربع کامل است.

برعکس فرض کنیم $۸n+۱$ مربع کامل باشد؛ یعنی عددی طبیعی چون m موجود باشد، به‌طوری که: $۸n+۱=m^۲$. حال باید نشان دهیم که n مثلثی است یا به‌طور معادل عددی طبیعی چون p موجود است، به‌طوری که $n=\frac{p(p+۱)}{۲}$. به این منظور از تساوی $۸n+۱=m^۲$، n را محاسبه می‌کنیم و به‌صورت زیر یک سلسله عملیات جبری انجام می‌دهیم:

$$n=\frac{m^۲-۱}{۸}=\frac{\frac{m^۲-۱}{۴}}{۲}=\frac{(\frac{m-۱}{۲})(\frac{m+۱}{۲})}{۲}$$

$$=\frac{(\frac{m-۱}{۲})(\frac{m-۱+۲}{۲})}{۲}=\frac{(\frac{m-۱}{۲})(\frac{m-۱}{۲}+۱)}{۲}$$

با فرض $p=\frac{m-۱}{۲}$، به مقصود رسیده‌ایم، به شرط آنکه نشان دهیم $\frac{m-۱}{۲}$ عددی طبیعی یا به‌طور معادل، $m-۱$ عدد طبیعی زوجی است. می‌دانیم m طبیعی است، پس $m-۱$ هم به شرط آنکه m مخالف یک باشد، طبیعی است. m هم نمی‌تواند ۱ باشد. هر چند $۸n+۱$ مربع کامل و عدد ۱ هم مربع کامل است، ولی $m=۱$ به دنبال خود از $۸n+۱=۱^۲$، $n=۰$ را خواهد آورد که با طبیعی بودن n در تضاد است. پس معلوم شد که $m-۱$ عددی طبیعی است. از طرف دیگر، از $۸n+۱=m^۲$ فرد بودن $m^۲$ نتیجه می‌شود. حکمی به‌صورت «اگر a زوج باشد، آن‌گاه $a^۲$ زوج است» را در بخش پی‌نوشت‌ها اثبات می‌کنیم که اینجا از عکس نقیض آن، یعنی «اگر $a^۲$ فرد باشد، آن‌گاه a فرد است» بهره می‌گیریم. چون $m^۲$ فرد است، پس m فرد است و لذا $m-۱$ زوج است.

**۳.** اگر n عددی مثلثی باشد، آن‌گاه عددهای 9n+1، 25n+3 و 49n+6 نیز مثلثی هستند.

**اثبات.**

چون n مثلثی است، پس وجود دارد عددی طبیعی چون m به‌طوری که: $n=\frac{m(m+1)}{2}$. برای مثلثی بودن 9n+1 باید عددی طبیعی چون p بیابیم به‌طوری که: $9n+1=\frac{p(p+1)}{2}$. حال 9n+1 را بر حسب m محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$9n+1=\frac{9m(m+1)}{2}+1=\frac{9m^2+9m+2}{2}$$
$$=\frac{(3m+1)(3m+2)}{2}$$

با فرض p=3m+1 اثبات تمام است. حال به محاسبهٔ 25n+3 و 49n+6 می‌پردازیم:

$$25n+3=\frac{25m(m+1)}{2}+3=\frac{25m^2+25m+6}{2}$$
$$=\frac{(5m+2)(5m+3)}{2}$$
$$49n+6=\frac{49m(m+1)}{2}+6=\frac{49m^2+49m+12}{2}$$
$$=\frac{(7m+3)(7m+4)}{2}$$

که با فرض مقادیر 5m+2 و 7m+3 برای p، مثلثی بودن دو مورد بعدی هم اثبات می‌شود.

**۴.** اگر $t_n$، nامین عدد مثلثی باشد، ثابت کنید که بر حسب ضریب‌های بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ داریم:

$$t_n=\binom{n+1}{2} \quad \text{و} \quad n\geq 1$$

**اثبات.**

می‌دانیم که بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ به ازای $n\geq 1$ به این صورت است:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$$
$$+\dots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

و یا به‌طور اختصار:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

که در آن داریم: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ و: $n!=1\times2\times3\times\dots\times n$.

بنابراین:

$$\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}=\frac{(n-1)!n(n+1)}{2!(n-1)!}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}=t_n$$

حال به این نکته توجه می‌کنیم که $\binom{n}{k}$ در بسط $(a+b)^n$، ضریب k+1امین جمله از بسط است.

پس $\binom{n+1}{2}$ یا همان nامین عدد مثلثی در واقع ضریب سومین جمله از بسط $(a+b)^{n+1}$ است. این یعنی اولین عدد مثلثی ضریب سومین جمله از بسط $(a+b)^2$، دومین عدد مثلثی برابر ضریب سومین جمله از بسط $(a+b)^3$ است. و در حالت کلی، با فرض $n\geq 1$، عددهای مثلثی در مثلث خیام ـ پاسکال که حاوی ضرایب بسط $(a+b)^n$ هستند، از سطر دوم به بعد حضور خود را در سومین عضو هر سطر نشان می‌دهند. در زیر مثلث خیام ـ پاسکال و عددهای مثلثی مشخص‌اند.

۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱
۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱
۱ ۸ ۲۸ ۵۶ ۷۰ ۵۶ ۲۸ ۸ ۱
...

**۵.** مجموع هر دو عدد مثلثی متوالی یک مربع کامل است.

**اثبات.**

فرض کنیم $t_{n-1}$ و $t_n$ دو عدد مثلثی متوالی باشند. پس:

$$t_{n-1}=\frac{(n-1)n}{2} \quad \text{و} \quad t_n=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$\Rightarrow t_{n-1}+t_n=\frac{(n-1)n+n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n^2-n+n^2+n}{2}=n^2$$

**۶.** فرمول زیر را که مجموع n عدد مثلثی است، ثابت کنید:

$$t_1+t_2+t_3+\dots+t_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad \text{و} \quad n\geq 1$$

## اثبات.

با توجه به اتحاد $t_{k-1}+t_k=k^2$ (نتیجهٔ حکم ۵)، جمله‌های سمت چپ را دو به دو دسته‌بندی می‌کنیم. البته به اجبار باید دو حالت زوج و فرد برای n در نظر بگیریم:

**حالت اول:** n زوج. چون: $t_1+t_2=2^2$، $t_3+t_4=4^2$، $t_5+t_6=6^2$، .... و $t_{n-1}+t_n=n^2$. لذا حکم به صورت زیر درمی‌آید:

$$2^2+4^2+6^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \qquad (1)$$

برای اثبات رابطهٔ (۱) به دو فرمول زیر که برای هر $n\geq 1$ صادق‌اند و درستی آن‌ها را به دلیل محدودیت حجم مقاله به‌عنوان تمرین به خوانندهٔ گرامی وا می‌گذاریم، نیاز داریم:

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (2)$$

$$1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3} \qquad (3)$$

در فرمول (۲)، n را به ۲n-۱ تغییر می‌دهیم. نتیجه چنین می‌شود:

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2+(n+1)^2+\dots+(2n-2)^2+(2n-1)^2 \qquad (4)$$
$$=\frac{(2n-1)(2n)(4n-1)}{6}$$

حال تفاضل فرمول‌های (۳) و (۴) را به‌دست می‌آوریم:

$$(4)-(3)\Rightarrow 2^2+4^2+6^2+\dots+n^2+\dots+(2n-2)^2$$

$$=\frac{(2n-1)(2n)(4n-1)}{6}-\frac{n(4n^2-1)}{3}$$
$$=\frac{8n^3-12n^2+4n}{6}=\frac{4n^3-6n^2+2n}{3}$$

پس ثابت شد که برای هر n زوج:

$$2^2+4^2+6^2+\dots+(2n-2)^2=\frac{4n^3-6n^2+2n}{3}$$

حال در فرمول اخیر قرار می‌دهیم: ۲n-۲=m که در نتیجه $n=\frac{m+2}{2}$.

خواهیم داشت:

$$2^2+4^2+6^2+\dots+m^2$$
$$=\frac{4(m+2)^3-12(m+2)^2+8(m+2)}{24}$$
$$=\frac{(m+2)^3-3(m+2)^2+2(m+2)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}[(m+2)(m+1)m]$$
$$\Rightarrow 2^2+4^2+6^2+\dots+m^2=\frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

**حالت دوم:** n فرد. اگر دوبه‌دو دسته‌بندی کنیم، حکم به‌صورت زیر در می‌آید:

$$2^2+4^2+6^2+\dots+(n-1)^2+t_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \qquad (5)$$

توجه داریم که: $t_{n-2}+t_{n-1}=(n-1)^2$.

از فرد بودن n، زوج بودن ۱-n نتیجه می‌شود. پس می‌توان حکم مسئله را که برای حالت زوج اثبات کرده‌ایم، برای ۱-n اعمال کنیم. نتیجه چنین می‌شود:

$$2^2+4^2+6^2+\dots+(n-1)^2=\frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}$$

که اگر نتیجهٔ اخیر و $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$ را در سمت چپ (۵) اعمال کنیم، خواهیم داشت:

$$\text{سمت چپ (5)}=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)[n-1+3]}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

### تمرین

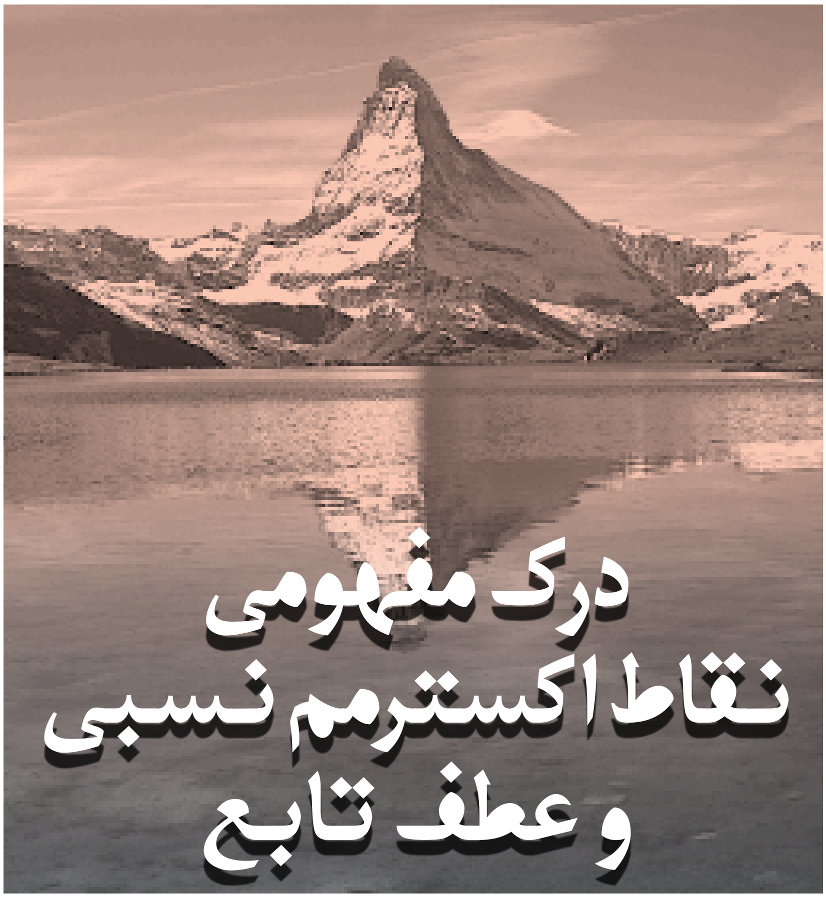
نشان دهید که تفاضل مربع‌های دو عدد مثلثی متوالی همیشه مکعب است.


* منبع

برتن، دیوید ام (۱۳۸۹). نظریهٔ مقدماتی اعداد. ترجمهٔ محمدصادق منتخب. مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ دوم.

**عبدالرحمن شهیدزاده**
مدرس دانشگاه سلمان فارسی کازرون
**مرضیه سعید**
مدرس دانشگاه فرهنگیان کازرون

# درک مفهومی نقاط اکسترمم نسبی و عطف تابع



**چکیده**

از آنجا که مفاهیم مرتبهٔ ریشه و نقطه‌های اکسترمم و عطف توابع از مفاهیم پایه‌ای و چالش‌پذیر حسابان هستند، در بخش اول این مقاله با توجه به رویکرد «آموزش تجسم‌محور»، برای تقویت درک شهودی و مفهومی دانش‌آموزان، به معرفی مرتبهٔ ریشهٔ توابع و رفتار تابع در اطراف انواع ریشه پرداخته‌ایم. سپس توابع چندجمله‌ای درجهٔ دو و سه را با توجه به مرتبهٔ ریشه‌های آن‌ها دسته‌بندی و نمودارشان را براساس نوع ریشه‌هایشان رسم کرده‌ایم. در ادامه انواع ریشه‌های توابع مثلثاتی را از نظر مرتبه مورد بحث قرار داده و ریشه‌های ساده و مضاعف را در این‌گونه توابع به کمک نمودارشان مشخص کرده‌ایم. سپس به نوع برخورد دو تابع از نظر هندسی و ارتباط آن با مرتبهٔ ریشه و ذکر یک مثال پرداخته‌ایم. چون تشخیص نوع ریشه می‌تواند در تعیین ضابطهٔ یک تابع و رسم نمودار آن به ما کمک کند (و برعکس)، به منظور رشد توانایی مدل‌سازی و پیشگویی دانش‌آموزان، به مثال‌هایی در این زمینه پرداخته و در نهایت بیان کرده‌ایم که چگونه می‌توان به کمک مرتبهٔ ریشهٔ یک تابع و مشتق‌های اول و دوم آن، اکسترمم‌های نسبی و نقاط عطف تابع را تعیین و نمودار تقریبی آن را رسم کرد.

## معرفی انواع ریشه‌های توابع

یکی از مهم‌ترین مباحث و چالش‌ها در آموزش ریاضیات دورهٔ متوسطه ۲، رسم نمودار توابع برای استفاده از آن‌ها در تعیین علامت، حل معادلات و نامعادلات، تعیین اکسترمم‌ها و نقطه‌های عطف تابع و حتی تشخیص ضابطهٔ یک تابع به کمک نمودار آن است. گاه حتی رسم تقریبی نمودار توابع می‌تواند ما را به هدف برساند. بنابراین شناختن انواع ریشه‌ها و نوع رفتار تابع در اطراف آن ریشه‌ها در این زمینه می‌تواند بسیار راهگشا باشد. همچنین در بحث نقطه‌های برخورد توابع با یکدیگر، مرتبهٔ ریشه می‌تواند در تشخیص مماس یا متقاطع بودن نمودارها در محل تلاقی به ما کمک کند. در کتاب‌های درسی دبیرستان به‌منظور تعیین اکسترمم‌های نسبی از آزمون مشتق اول و تعیین علامت آن، یا آزمون مشتق دوم، و برای تعیین نقطه‌های عطف از تعیین علامت مشتق دوم استفاده می‌شود. عموماً تعیین علامت توابع چندجمله‌ای درجهٔ بالاتر از ۳ و مثلثاتی پرزحمت و زمان‌بر است. استفاده از مرتبهٔ ریشه می‌تواند در تشخیص نوع نقطه‌های بحرانی و عطف، بدون استفاده از تعیین علامت، به ما کمک کند. از آنجا که در کتاب‌های درسی دبیرستان این موارد به‌طور کامل مطرح نشده‌اند و عموماً دانش‌آموزان در حل مسئله‌های مربوطه دچار مشکل می‌شوند، در اینجا سعی شده است مطالب مورد نیاز معرفی، دسته‌بندی و تشریح شوند و به چند مورد نیز پرداخته شود.

### ۱. مرتبهٔ ریشهٔ توابع

**تعریف:** اگر داشته باشیم:

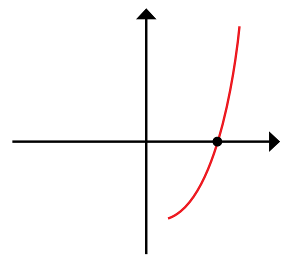
$$f(x)=(x-c)^m g(x)$$

که در آن $g(c)\neq 0$ باشد، در این صورت $x=c$ را ریشهٔ مرتبهٔ m تابع f می‌نامیم. بنابر این تعریف می‌توان نتیجه گرفت که اگر $x=c$ ریشهٔ مرتبه m تابع f باشد، داریم:

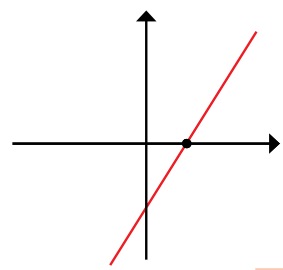
$$f(c)=f'(c)=\cdots=f^{(m-1)}(c)=0,$$
$$f^{(m)}(c)=m!g(c).$$

## انواع ریشه چندجمله‌ای‌ها و نمودار آن‌ها براساس مرتبهٔ تکرار:

۱. ریشهٔ ساده (مرتبهٔ اول)

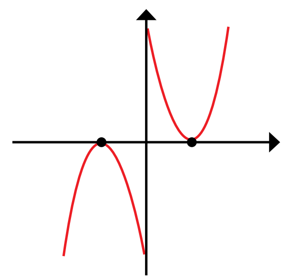


نمودار ۱.



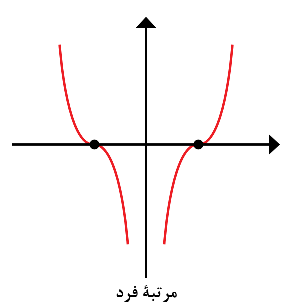
نمودار ۲.

۲. ریشهٔ مضاعف (مرتبهٔ دوم)

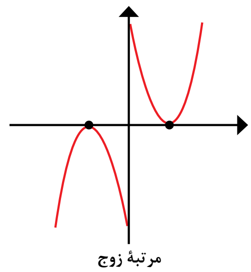


نمودار ۳.

۳. ریشهٔ مکرر (مرتبهٔ سوم و بالاتر)




نمودار ۴.




نمودار ۵.

مطابق نمودارهای ۱ تا ۵ مشاهده می‌شود که تابع در ریشه‌های ساده محورها را قطع می‌کند بدون آنکه بر آن مماس شود. اما ریشه‌های مضاعف و مکرر مرتبهٔ زوج تابع بر محورها مماس می‌شوند و برمی‌گردند و نهایتاً در ریشه‌های مکرر مرتبهٔ فرد، تابع بر محورها مماس می‌شود و از آن عبور می‌کند. به سادگی دیده می‌شود که همواره ریشهٔ یک معادله درجهٔ اول از نوع ساده است.

**مثال ۱.** مقدار a را طوری بیابید که $x=1$ یک ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $x^3+2ax^2-ax-a-1=0$ باشد.

**حل:** چون $x=1$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ داده‌شده است، $x=1$ یک ریشهٔ تابع $f(x)=x^3+2ax^2-ax-ax-a-1$ و مشتق آن است. پس:

$$x^3+2ax^2-ax-a-1=0 \xrightarrow{x=1} 1+2a-a-a-1=0 \to 0=0$$

$$3x^2+4ax-a=0 \xrightarrow{x=1} 3a+3=0 \to a=-1$$

**مثال ۲.** مقدار a و b را طوری بیابید که $x=2$ یک ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $x^3+4x^2+4x+a+b=0$ باشد.

**حل:**

$$x^3+4bx^2+4x+a+b=0 \xrightarrow{x=2} a+17b+16=0$$

با مشتق‌گیری از معادلهٔ داده‌شده داریم:

$$3x^2+8bx+4=0 \xrightarrow{x=2} 16b+16=0 \to b=-1$$

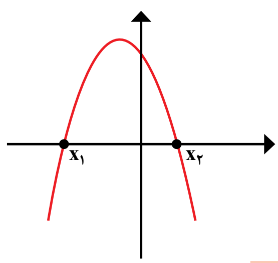
$$a+17b+16=0 \xrightarrow{b=-1} a=1$$

**قضیهٔ ۱.** هر معادلهٔ درجهٔ n با ضرایب حقیقی، دقیقاً n ریشه (حقیقی و غیرحقیقی) دارد.

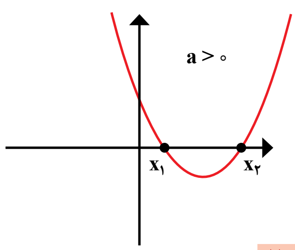
حال با توجه به قضیهٔ ۱، به بررسی تعداد و نوع ریشه‌های معادله‌های درجهٔ ۲ و ۳ می‌پردازیم.

## ۲. حالات متفاوت ریشهٔ یک معادلهٔ درجهٔ دوم $p(x)=ax^2+bx+c$

۱. دو ریشهٔ ساده $x_1$ و $x_2$



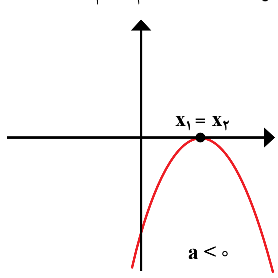

نمودار ۶.



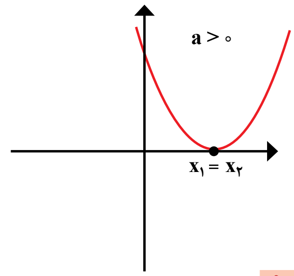

نمودار ۷.

$$p(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

۲. یک ریشهٔ مضاعف $x_1=x_2$



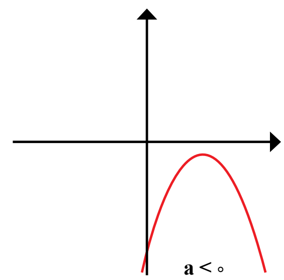

نمودار ۸.



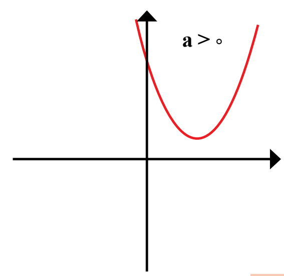

نمودار ۹.

$p(x)=a(x-x_1)^2$

۳. فاقد ریشهٔ حقیقی




نمودار ۱۰.




نمودار ۱۱.

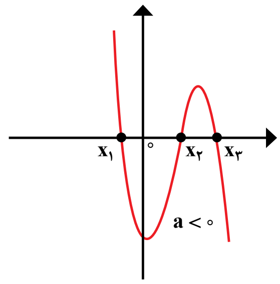
$p(x)=ax^2+bx+c$ (غیرقابل تجزیه)

در حالت اول معادلهٔ درجهٔ دو قابل تجزیه به فرم اتحادهای جملهٔ مشترک یا مزدوج و در حالت دوم به فرم اتحاد مربع دوجمله‌ای است.

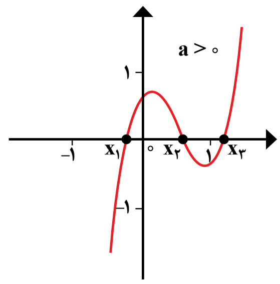
## ۳. حالات متفاوت ریشهٔ یک معادله درجهٔ سوم $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

یک معادلهٔ درجهٔ سه از نظر تعداد و نوع ریشه‌ها یکی از چهار حالت را داراست:

● سه ریشهٔ ساده:



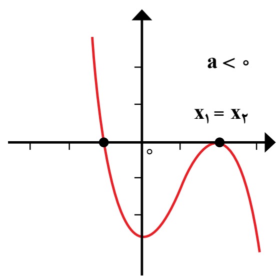

نمودار ۱۲.



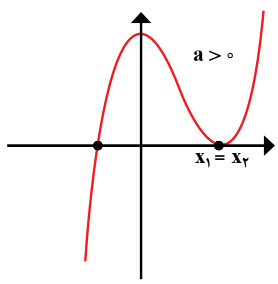

نمودار ۱۳.

$p(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

● یک ریشهٔ مضاعف و یک ریشهٔ ساده:

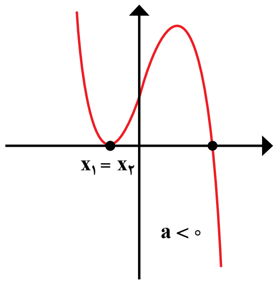



نمودار ۱۴.

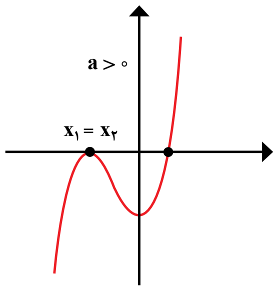



نمودار ۱۵.

$p(x)=a(x-x_1)(x-x_2)^2$



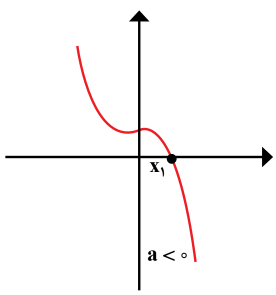

نمودار ۱۶.



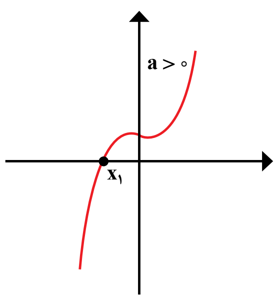

نمودار ۱۷.

$p(x)=a(x-x_2)^2(x-x_3)$

● تنها یک ریشهٔ ساده:



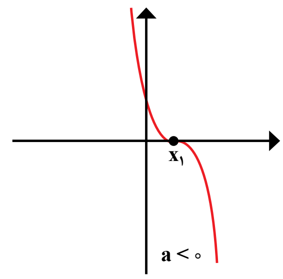

نمودار ۱۸.



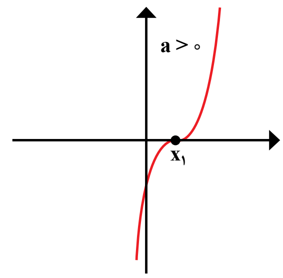

نمودار ۱۹.

$p(x) = a(x-x_1)(\underbrace{x^2+b'x+c'}_{\text{غیرقابل تجزیه}})$

● **یک ریشهٔ مکرر مرتبهٔ سه:**




**نمودار ۲۰.**




**نمودار ۲۱.**

$p(x)=a(x-x_۱)^۳$

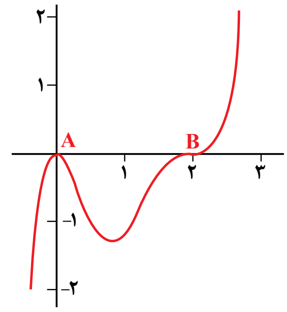
**قضیهٔ ۲.** اگر z یک ریشهٔ غیرحقیقی معادلهٔ $p(x)=۰$ باشد، آن‌گاه $\bar{z}$ نیز یک ریشهٔ آن معادله است.

**نتیجهٔ ۱.** تعداد ریشه‌های غیرحقیقی یک معادله همواره عددی زوج است.

**نتیجهٔ ۲.** هرچندجمله‌ای درجه فرد، حداقل یک ریشهٔ حقیقی دارد.

با توجه به نمودارهای رسم‌شده در قبل می‌توان نتیجه گرفت که هر تابع همواره در ریشه‌های مرتبهٔ فرد تغییر علامت می‌دهد (از مثبت به منفی یا برعکس). ولی در ریشه‌های مرتبهٔ زوج تغییر علامت نمی‌دهد؛ **بنابراین ریشه‌های مرتبهٔ زوج هر تابع همواره نقطه‌های مینیمم یا ماکزیمم نسبی تابع هستند.**

**مثال ۳.** با توجه به نمودار ۲۲، ضابطه‌ای مناسب بنویسید.




**نمودار ۲۲.**

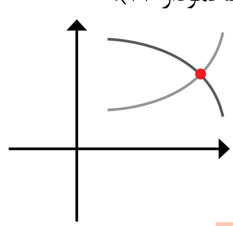
**جواب:** با توجه به نمودار، تابع در $x=۰$ یک ریشهٔ مکرر زوج و در $x=۳$ یک ریشهٔ مکرر فرد دارد؛ همچنین با توجه به رفتار تابع در بی‌نهایت می‌توان نتیجه گرفت ضریب جملهٔ پیشرو (جمله با بزرگ‌ترین درجه) عددی مثبت است؛ بنابراین می‌توان چنین ضابطه‌ای برای آن نوشت: $y=x^۲(x-۲)^۳$

## نقاط برخورد دو تابع ــ تعیین نقطه‌های اکسترمم و عطف

### ۱. حالت‌های متفاوت نقطه‌های برخورد دو تابع f و g

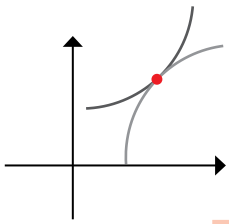
اگر معادله‌ای به فرم $h(x)=۰$ داشته باشیم، می‌توانیم با محاسبه‌های جبری آن را به فرم $f(x)=g(x)$ بنویسیم که در این صورت محل برخورد احتمالی نمودارهای f و g همان ریشه‌های معادله $h(x)=۰$ است. با رسم نمودارهای توابع f و g در یک دستگاه، سه حالت زیر رخ می‌دهند:

● در محل برخورد یکدیگر را قطع می‌کنند، بدون اینکه بر یکدیگر مماس شوند (ریشهٔ ساده h، نمودار ۲۳).



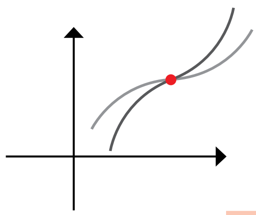
**نمودار ۲۳.**

● در نقطهٔ تماس بر یکدیگر مماس‌اند، ولی از یکدیگر عبور نمی‌کنند (ریشهٔ مضاعف یا مکرر زوج h، نمودار ۲۴).



**نمودار ۲۴.**

● در نقطهٔ تماس بر یکدیگر مماس‌اند و از هم عبور می‌کنند (ریشهٔ مکرر فرد h، نمودار ۲۵).



**نمودار ۲۵.**

**مثال ۴.** به ازای چه مقدارهایی از k، خط $y=۲x+۱$ در محل برخورد با منحنی $y=x^۲-kx+۳$ مماس است؟

**حل:**

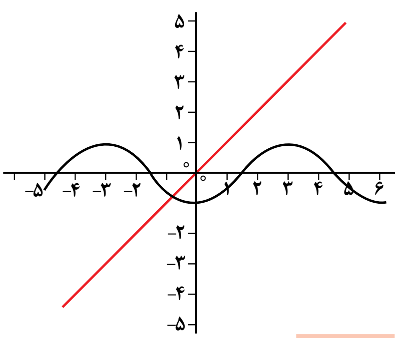
$x^۲-kx+۳=۲x+۱ \rightarrow x^۲-(k+۲)x+۲=۰$

$\Delta=۰ \rightarrow (k+۲)^۲-۴(۲)=۰ \rightarrow (k+۲)=۸ \rightarrow$

$k+۲=\pm۲\sqrt{۲} \Rightarrow k=-۲\pm۲\sqrt{۲}$

**مثال ۵.** تعداد و نوع ریشهٔ معادلهٔ $x+\cos x=۰$ را به روش هندسی تعیین کنید.

**حل:** ابتدا معدلهٔ داده‌شده را به فرم $f(x)=g(x)$ می‌نویسیم: $x=-\cos x$ محل برخورد این دو تابع که تقریباً $x=-۰/۷$ است، ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ داده شده محسوب می‌شود.

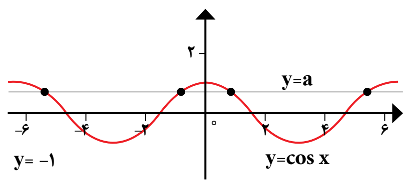



**نمودار ۲۶.**

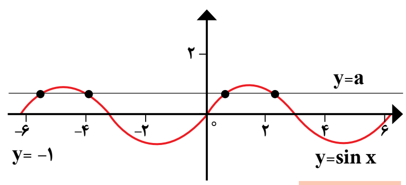
## ۲. حالات مختلف ریشه معادلات مثلثاتی

■ **معادلات به شکل sin x-a=۰ یا cos x-a=۰:** برای حل این نوع معادلات ابتدا آن‌ها را به شکل sin x=a یا cos x=a می‌نویسیم. سپس نمودار توابع y=sin x یا y=cos x را با خط y=a در یک دستگاه رسم و محل برخوردها را بررسی می‌کنیم. این معادلات را بر حسب مقدار a به ۳ دسته می‌توان تقسیم کرد:

● اگر |a|<۱ باشد، همواره این معادلات ریشهٔ ساده دارند؛ زیرا با توجه به نمودارهای ۲۷ و ۲۸ محل برخورد آن توابع با خط y=a از نوع ریشهٔ ساده است. بنابراین بی‌شمار جواب از نوع ساده داریم.

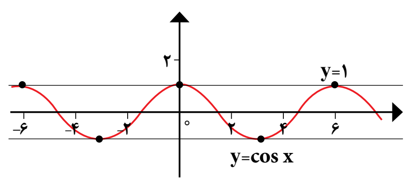



نمودار ۲۷.

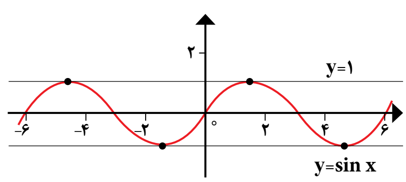



نمودار ۲۸.

● اگر |a|=۱ باشد، همواره این معادلات بی‌شمار ریشهٔ مضاعف دارند؛ زیرا:




نمودار ۲۹.




نمودار ۳۰.

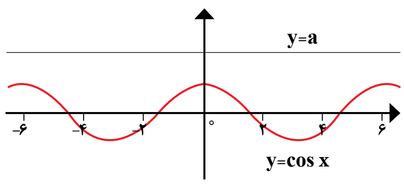
با توجه به نمودارهای ۲۹ و ۳۰ مشاهده می‌شود که محل برخورد توابع y=sin x و y=cos x با خطوط y=±۱ از نوع ریشهٔ مضاعف (مماس) است.

$$f(x)=\sin x-a \to f'(x)=\cos x$$

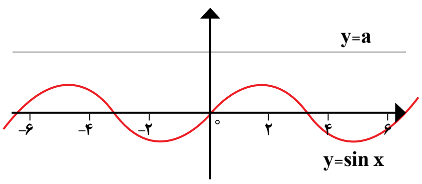
$$\xrightarrow{k\pi+\frac{\pi}{2},\, a=1} f(x)=f'(x)=0 \quad (f''(x)\neq 0)$$

حالات دیگر نیز مشابه این حالت هستند.

● اگر |a|>۱ باشد، مطابق نمودارهای ۳۱ و ۳۲، محل برخوردی وجود ندارد و در نتیجه ریشهٔ حقیقی موجود نیست.

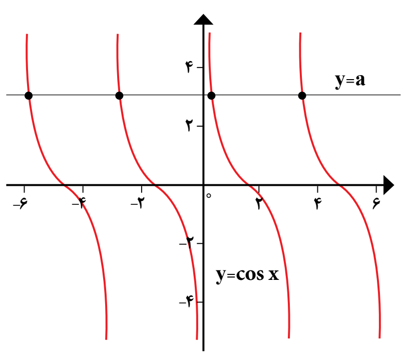



نمودار ۳۱.

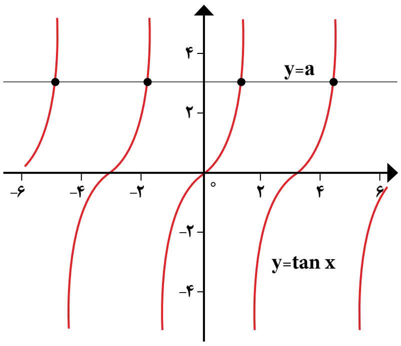



نمودار ۳۲.

■ **معادلات به شکل tan x=a یا cot x=a:** این معادلات با توجه به نمودار آن‌ها (نمودارهای ۳۳ و ۳۴)، به ازای هر مقدار a دارای بی‌شمار جواب از نوع ساده هستند.




نمودار ۳۳.




نمودار ۳۴.

## ۳. تعیین اکسترمم‌های نسبی و نقطه‌های عطف توابع با استفاده از نوع ریشه‌های آن‌ها

می‌دانیم که اگر x=c ریشهٔ مرتبهٔ mاُم تابع f باشد، آن گاه x=c ریشهٔ مرتبهٔ (m-۱)اُم تابع f' خواهد بود؛ زیرا:

$$f(x)=(x-c)^m g(x) \xrightarrow{g(c)\neq 0}$$

$$f'(x)=m(x-c)^{m-1}g(x)+(x-c)^m g'(x)$$

$$=(x-c)^{m-1}[mg(x)+(x-c)g'(x)]$$

با قرار دادن mg(x)+(x-c)g'(x)=h(x) داریم:

$$f'(x)=(x-c)^{m-1}h(x) \quad , \quad h(c)=mg(c)\neq 0$$

بنابراین با توجه به مطالب بیان‌شده می‌توان نتیجه گرفت:

اگر x=c ریشهٔ مرتبهٔ زوج تابع f باشد، در این صورت یک ریشهٔ مرتبهٔ فرد تابع f' است. بنابراین قطعاً یک مینیمم یا ماکزیمم نسبی تابع f خواهد بود؛ زیرا مشتق اول در آن نقطه تغییر علامت می‌دهد.

اگر x=c یک ریشهٔ مکرر مرتبهٔ فرد تابع f باشد، در این صورت یک ریشهٔ مکرر مرتبهٔ زوج تابع f' و یک ریشهٔ مرتبهٔ فرد تابع f'' خواهد بود و بنابراین x=c یک نقطهٔ عطف تابع f خواهد بود. اما از آنجا که ممکن است x=c ریشهٔ f نباشد، ولی ریشهٔ f' یا f'' باشد، بنابراین نوع ریشه‌های f' را نیز بررسی می‌کنیم.

اگر $x = c$ یک ریشهٔ مرتبهٔ زوج تابع $f'$ باشد، یک ریشهٔ مرتبهٔ فرد تابع $f''$ است و بنابراین قطعاً یک نقطهٔ عطف تابع $f$ است (زیرا $f''$ تغییر علامت می‌دهد).

اگر $x = c$ یک ریشهٔ ساده یا مرتبهٔ فرد تابع $f'$ باشد، در این صورت $x = c$ قطعاً یک اکسترمم نسبی $f$ خواهد بود. تمام ریشه‌های ساده و مرتبهٔ فرد مشتق دوم تابع به خاطر تغییر علامت $f''$ در آن‌ها، یک نقطهٔ عطف $f$ هستند.

**مثال ۶.** اکسترمم‌های نسبی توابع زیر را به کمک مرتبهٔ ریشه‌ها تعیین و نمودار تقریبی آن‌ها را رسم کنید.

**الف) $f(x)=x^2e^{-x}$**

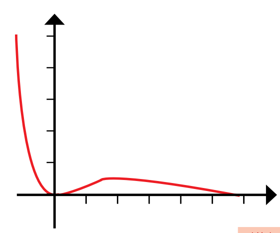
**حل:**

$f(x)=x^2e^{-x}=0 \rightarrow x=0$

از آنجا که صفر یک ریشهٔ مضاعف تابع $f$ است، بنابراین یک ریشهٔ سادهٔ مشتق اول و در نتیجه یک اکسترمم (مینیمم) نسبی است. اما ممکن است تابع مشتق ریشهٔ ساده دیگری داشته باشد که ریشهٔ تابع $f$ نباشد. بنابراین:

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x)=0$

$x=2$ نیز یک ریشهٔ ساده مشتق اول و اکسترمم (ماکزیمم) نسبی است.



نمودار ۳۵.

**ب) $g(x)=\sin x-\cos x$**

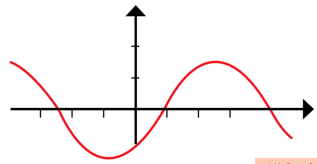
**حل:**

$g(x)=\sin x-\cos x=0 \rightarrow \sin x=\cos x \rightarrow \tan x=1 \rightarrow x = k\pi+\frac{\pi}{4}$

تمام ریشه‌های به‌دست‌آمده ساده‌اند. پس هیچ‌کدام ریشه‌های تابع مشتق و اکسترمم نسبی نیستند. بنابراین:

$g'(x)=\sin x+\cos x=0 \rightarrow \sin x=-\cos x \rightarrow \tan x=-1 \rightarrow x = k\pi-\frac{\pi}{4}$

از آنجا که تمام ریشه‌های به‌دست‌آمده ساده‌اند، همگی نقاط اکسترمم نسبی تابع‌اند.



نمودار ۳۶.

**مثال ۷.** اکسترمم‌های نسبی و نقطه‌های عطف تابع $f(x)=x^4-4x^2$ را بیابید و نمودار تقریبی آن را رسم کنید.

**حل:**

$f(x)=x^4-4x^2=0 \rightarrow x^2(x^2-4)=0 \rightarrow x=0$, $x=\pm 2$

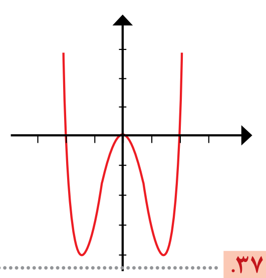
$x=0$ یک ریشهٔ مضاعف تابع $f$ و در نتیجه یک ریشهٔ سادهٔ تابع مشتق و اکسترمم نسبی است. در حالی که $x=\pm 2$ ریشه‌های سادهٔ تابع‌اند و ریشهٔ مشتق تابع و اکسترمم نسبی نیستند.

$f'(x)=4x^3-8x=0 \rightarrow 4x(x^2-2)=0 \rightarrow x=0$, $x=\pm\sqrt{2}$

هر سه ریشهٔ سادهٔ تابع مشتق هستند، بنابراین اکسترمم نسبی تابع‌اند و نقاط عطف محسوب نمی‌شوند.

$f''(x)=12x^2-8=0 \rightarrow x^2=\frac{2}{3} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

هر دو ریشه‌های سادهٔ مشتق دوم، نقطه‌های عطف تابع هستند.



نمودار ۳۷.

**مثال ۸.** با رسم نمودار تقریبی، نوع نقطه‌های $x=1,2,3$ را برای تابع $f(x)=x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4$ مشخص کنید.

**حل:** $x=2$ ریشهٔ مرتبهٔ فرد تابع $f, f''$ است. پس نقطهٔ عطف تابع است. نقطه‌های $x=3$ و $x=1$ ریشه‌های مرتبهٔ زوج $f$ و مرتبهٔ فرد $f'$ هستند، پس یک اکسترمم نسبی تابع‌اند. با توجه به مثبت بودن ضریب جمله پیشرو مرتبهٔ ریشه‌ها، نمودار تقریبی تابع به‌صورت نمودار ۳۸ رسم می‌شود.


نمودار ۳۸.

## نتیجه‌گیری

رسم نمودار یک تابع با ضابطهٔ معین یا تشخیص ضابطهٔ یک تابع براساس نمودار آن، غالباً برای دانش‌آموزان کار ساده‌ای نیست؛ زیرا به اطلاعات زیادی از جمله مشتقات تابع و تعیین علامت آن‌ها، شناخت مجانب‌ها و موارد دیگر نیاز دارند. در بسیاری از توابع از جمله توابع چندجمله‌ای، مثلثاتی، نمایی و با دقت بیشتری توابع گویا، استفاده از مرتبهٔ ریشهٔ توابع و مشتقات آن‌ها می‌تواند در حل مسائل راهگشا باشد.


* منابع

۱. بیژن‌زاده، محمدحسن (۱۳۹۳). آموزش و یادگیری ریاضیات. نشر خردمندان. تهران.

۲. توماس، جورج؛ فینی، راس (۱۳۷۰). حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی ج۱. ترجمهٔ مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی. تهران.

۳. ریحانی، ابراهیم؛ حاجی‌بابایی، جواد؛ عرب‌زاده، رضا (۱۳۹۰). «تأثیر آموزش تجسم‌محور بر عملکرد حل مسئلهٔ دانش‌آموزان سوم راهنمایی». فصلنامهٔ نوآوری‌های آموزشی. ش ۳۸. سال نهم.

۴. سیلورمن، ریچارد (۱۳۷۰). حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی. ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده. انتشارات علمی و فنی. تهران.

۵. گویا، زهرا (۱۳۸۱). «فرآیند یاددهی ـ یادگیری در قرن جدید». رشد آموزش ریاضی. ش ۳.

6. L. Leithold (1986), *The Calculus With Analytic Geometry,* Harper & Row Publishers, New York.

7. W. Rudin (1976), *Principles of Mathematical Analysis,* University of Wisconsin.

8. N. C. Presmeg (1986), *Visualisation in High School Mathematics.* For the Learning of Mathematics, 6(3).

حمیدرضا امیری

# طرح و حل دو مسئلهٔ جالب در احتمال

**اشاره**

**در این مقاله مسئله‌ای را در مبحث احتمال بررسی می‌کنیم که ممکن است در نگاه اول تا حدی عجیب و شاید ناممکن ظاهر شود، اما در کل می‌توان به آن حکم کلی بخشید و حتی در حل بعضی مسئله‌ها از این نگاه استفاده کرد. البته در ادامه کاربرد آن را در حل یک مسئله خواهید دید.**

**مسئلهٔ ۱.** اگر از جعبه‌ای که تعدادی مهره‌های رنگی در آن وجود دارد، مهره یا مهره‌هایی را به تصادف برداریم و بدون نگاه کردن به رنگشان، آن‌ها را کنار بگذاریم و سپس مهره‌ای دیگر از جعبه خارج کنیم، برداشت مهره‌های قبلی هیچ تأثیری در احتمال برداشت مهرهٔ بعدی ندارد. یعنی برای برداشت مهرهٔ بعدی فضای نمونه تغییر نمی‌کند و مهره‌های رنگی تعدادشان کم نمی‌شود.

برای مثال، اگر بخواهیم از جعبه‌ای که ۳ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی در آن وجود دارد، یک مهره برداریم و بدون نگاه کردن به رنگش، آن را کنار بگذاریم و سپس مهرهٔ دیگری از جعبه خارج کنیم، احتمال اینکه مهرهٔ دوم آبی باشد، برابر است با $\frac{۴}{۷}$ یعنی با احتمال آبی بودن مهره‌ای از جعبه، قبل از کنار گذاشتن مهرهٔ اول، برابر است.

حال این مسئله را در حالت کلی بررسی می‌کنیم: فرض کنیم در جعبه‌ای m مهرهٔ آبی و n مهرهٔ قرمز وجود دارد. یک مهره را به تصادف از این جعبه خارج می‌کنیم و بدون نگاه کردن، آن را کنار می‌گذاریم. سپس مهرهٔ دیگری از جعبه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مهرهٔ دوم آبی باشد؟

**حل:** برای حل دو حالت در نظر می‌گیریم: در حالت اول، مهرهٔ خارج شده آبی بوده است و آن را کنار گذاشته‌ایم. در حالت دوم مهرهٔ اولی قرمز بوده است و آن را کنار گذاشته‌ایم. بنابراین داریم:

$$p(\text{آبی بودن مهرهٔ دوم}) = \frac{m}{(m+n)}\times\frac{m-۱}{(m+n-۱)}+\frac{n}{(m+n)}\times\frac{m}{(m+n-۱)} = \frac{(m^۲-m)+mn}{(m+n)(m+n-۱)} = \frac{m(m+n-۱)}{(m+n)(m+n-۱)} = \frac{m}{m+n}$$

و عدد حاصل یعنی $\frac{m}{m+n}$ دقیقاً با احتمال اینکه از این جعبه ۱ مهره خارج کنیم و احتمال آبی بودن مهره را محاسبه کنیم، برابر است. در واقع برداشت مهرهٔ اول از جعبه و کنار گذاشتن آن، بدون نگاه کردن به رنگ آن، هیچ تأثیری در احتمال آبی بودن مهرهٔ بعدی ندارد.

جالب اینجاست که اگر از این جعبه دو مهره یا بیشتر (تا (m+n-۱) مهره) نیز خارج کنیم و بدون نگاه کردن به رنگ مهره‌های خارج شده، آن‌ها را کنار بگذاریم و سپس مهرهٔ دیگری را از جعبه به تصادف خارج کنیم، احتمال آبی بودن مهرهٔ بعدی همان $\frac{m}{m+n}$ خواهد بود.

برای برداشت دو مهره در مثال قبل (جعبهٔ دارای ۷ مهره)، شما با در نظر گرفتن ۳ حالت (هر دو قرمز یا هر دو آبی یا یکی قرمز و یک آبی) احتمال آبی بودنِ مهرهٔ بعدی را محاسبه کنید. مطمئن باشید به همان عدد $\frac{۴}{۷}$ خواهید رسید!

برای اینکه ذهن شما تا حدی به قبول این مسئله نزدیک شود و این تحلیل راحت‌تر انجام

پذیرد که چرا برداشت مهره به شرط نگاه نکردن به آن و کنار گذاشتن آن، تأثیری بر برداشت‌های بعدی ندارد، به مطلب زیر توجه کنید:

فرض کنید فردی در یک اتاق استوانه‌ای شکل و روی مرکز کف این اتاق ایستاده است و دورتا دور او، ۸ دریچهٔ پرتاب توپ به شکلی متقارن قرار گرفته‌اند. قرار است از یکی از این دریچه‌ها یک توپ به سمت این فرد به تصادف پرتاب شود. اگر آن فرد بتواند مسیر توپ را تشخیص دهد و توپ به او برخورد نکند، به یک جایزهٔ خیلی ارزشمند و نفیس دست یافته است. (واضح است که این شخص باید همهٔ حواس خود را جمع کند و چون حداکثر ۴ دریچه را می‌تواند ببیند، باید از حس شنوایی خودش نیز بهره ببرد تا اگر دریچه‌های پشت سرش باز شوند، به آن سمت برگردد و خودش را از مسیر توپ خارج کند.)

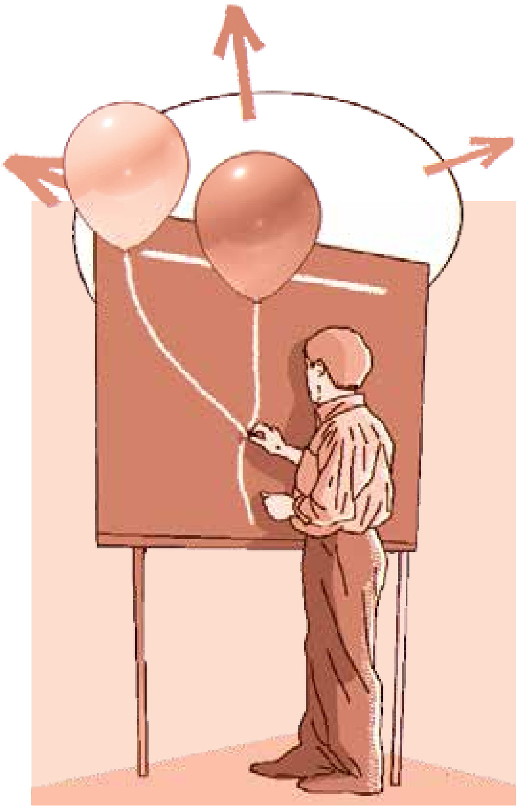
حال اگر در این بین به فرد اطلاع دهند که مثلاً یک یا حتی ۴ دریچه (تا ۷ دریچه) از دریچه‌ها مطمئناً باز نمی‌شوند، ولی این اطلاع را نداشته باشد که کدام دریچه یا دریچه‌ها باز نمی‌شوند، چه فرقی به حال او می‌کند؟ آیا اگر قبلاً برای باز شدن هر دریچه احتمال $\frac{۱}{۸}$ وجود داشته باشد، در این حالت (حالتی که چند دریچه باز نمی‌شوند) و برای این شخص احتمال باز شدن هر دریچه باز هم $\frac{۱}{۸}$ است یا کمتر شده است؟

درست فکر کرده‌اید. برای ایشان (چون نمی‌داند کدام دریچه قفل شده و باز نمی‌شود) همچنان احتمال باز شدن هر دریچه $\frac{۱}{۸}$ است!

**مسئلهٔ ۲.** در جعبه‌ای ۲ مهرهٔ قرمز، ۳ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ سبز وجود دارد. سه مهره از این جعبه به تصادف و پی‌درپی و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مهرهٔ اول قرمز و مهرهٔ سوم سبز باشد؟

**حل:**

**روش اول:** برای مهرهٔ دوم می‌توان دو حالت در نظر گرفت: یا مهرهٔ دوم سبز بوده و یا مهرهٔ دوم



غیرسبز بوده است. بنابراین داریم:

$$P(A)=(\frac{۲}{۹}\times\frac{۴}{۸}\times\frac{۳}{۷})+(\frac{۲}{۹}\times\frac{۴}{۸}\times\frac{۴}{۷})=$$

$$\frac{۱}{۲۱}+\frac{۴}{۶۳}=\frac{۷}{۶۳}\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۹}$$

**روش دوم:** می‌توانیم مهرهٔ دوم را بدون نگاه کردن به رنگ آن کنار بگذاریم و بنابراین روی مهرهٔ سوم تأثیری ندارد. در واقع مهرهٔ سوم همان مهرهٔ دوم خواهد بود پس باید احتمال آن را حساب کنیم که مهرهٔ اول قرمز و مهرهٔ دوم سبز باشد که خواهیم داشت:

$$P(A)=\frac{۲}{۹}\times\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۹}$$

شما به هر دو روش، احتمال آن را حساب کنید که مهرهٔ دوم قرمز و مهرهٔ سوم سبز باشد.

(**راهنمایی:** در روش اول برای مهرهٔ اول باید سه حالت در نظر بگیرید و در روش دوم مهرهٔ اول را مهره‌ای فرض کنید که بدون نگاه کردن به آن، آن را کنار گذاشته‌اید. بنابراین مهره‌های دوم و سوم در حکم مهره‌های اول و دوم به حساب می‌آیند.)


## ریاضی ۱

### (پایهٔ دهم رشتهٔ ریاضی و تجربی)

فرخ فرشیان

**۱.** اگر $x+y=5$ باشد، بیشترین مقدار $x!+y!$ را به‌دست آورید.

**۲.** به چند طریق می‌توان سه عدد از بین عددهای ۱ و ۲ و ... و ۱۰۰۰ انتخاب کرد که تشکیل یک دنبالهٔ حسابی بدهند؟

**۳.** چند عدد فرد بین ۲۰۰۰ و ۷۰۰۰ بدون تکرار ارقام وجود دارد؟

**۴.** حاصل $\dfrac{P(n,n-2)-p(n,n-3)}{c(n,n-3)\times(n-3)!}$ را به دست آورید.

**۵.** با رقم‌های متمایز، ۱، ۲، ۳،... و ۷ به چند طریق می‌توان یک عدد چهار رقمی ساخت؛ به طوری که فقط یکی از رقم‌های آن زوج باشد؟

**۶.** تمام عددهای سه رقمی (بدون تکرار ارقام) را که می‌توان با رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ ساخت، روی کارت‌های مشابه می‌نویسیم و در یک کیسه قرار می‌دهیم؛ سپس یکی از کارت‌ها را به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آنکه عدد روی کارت زوج و بزرگ‌تر از ۳۰۰ باشد، چقدر است؟

**۷.** از بین پنج کتاب ریاضی متمایز و چهار کتاب شیمی متمایز، به تصادف سه کتاب برمی‌داریم. با کدام احتمال دو کتاب انتخابی ریاضی است؟

**۸.** یکی از زیرمجموعه‌های سه عضوی، مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,...,10\}$ را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه در این زیرمجموعه، حداقل یکی از عددهای ۲ یا ۳ وجود داشته باشد، چقدر است؟

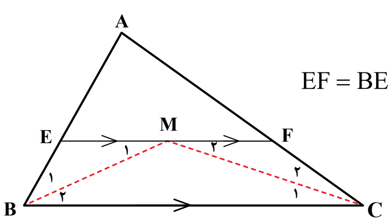
## هندسهٔ ۱

### (پایهٔ دهم ریاضی)

حسین کریمی

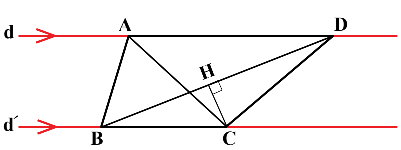
**۱.** در شکل ۱ BM و CM نیم‌ساز زاویه‌های B و C هستند. از نقطهٔ M پاره‌خط EF را موازی BC رسم کرده‌ایم. ثابت کنید:

$$EF = BE + CF$$



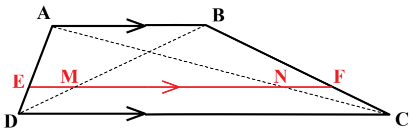
شکل ۱

**۲.** در شکل ۲ داریم: $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، $8cm^2$ است. اگر $BD=6\ cm$ باشد، فاصلهٔ نقطه C از BD را به‌دست آورید.



شکل ۲

۳. در شکل ۳ داریم: $AB \parallel EF \parallel DC$ . ثابت کنید: $EM=NF$ .

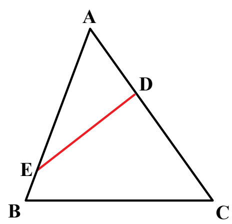



شکل ۳

۴. در ذوزنقه متساوی‌الساقینی به طول قاعده‌های ۴ و ۱۲، طول ارتفاع ۴ است. وسط‌های اضلاع را به هم وصل می‌کنیم. نسبت محیط چهار ضلعی به‌دست‌آمده به محیط ذوزنقه چقدر است؟

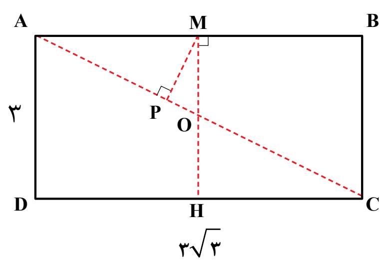
۵. مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\frac{۱}{۸}$ مجذور وتر آن است. اندازهٔ زاویهٔ متوسطه مثلث را به‌دست آورید.

۶. در چهارضلعی BCDE زاویه‌های روبه‌رو مکمل همانند. اگر: $BC=۲۰$ و $DE=۱۲$، آن‌گاه مساحت چهارضلعی چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



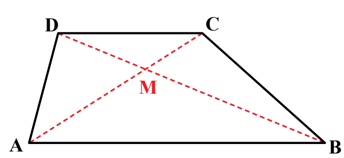

شکل ۴

۷. در شکل ۵، نقطهٔ M وسط ضلع مستطیل است. اندازهٔ OP چه کسری از قطر مستطیل است؟




شکل ۵

۸. در ذوزنقهٔ ABCD قاعدهٔ AB دو برابر قاعدهٔ CD و M محل برخورد قطرهاست. اگر قطر AC برابر ۱۱ باشد، آن‌گاه اندازهٔ پاره‌خط MC چقدر است؟



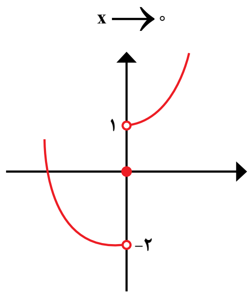

شکل ۶

# ریاضی ۲

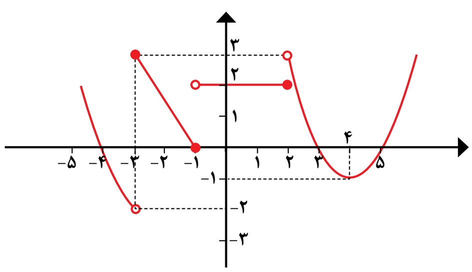
## (پایه یازدهم تجربی)

**هادی شهیدی**

۱. بخشی از نمودار تابع f به شکل نمودار ۱ است. مقدار $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x^۲-|x|)$ را بیابید.




۲. نمودار تابع f به‌صورت نمودار ۲ است. حاصل حدهای زیر را بیابید.




**الف)** $\lim\limits_{x\to(-۱)^-}[fof(x)] - \lim\limits_{x\to ۴}[f(x)] + \lim\limits_{x\to ۲^+}[f(x)]$

**ب)** $\lim\limits_{x\to(-۳)^-}[f(x)] + ۲\lim\limits_{x\to(-۳)^+}[fof(x)] - \left[\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)\right]$

۳. حد زیر را حساب کنید؟

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(۱-\cos x)^۳}{\tan^۳ x-\sin^۳ x}$$

۴. حد زیر را محاسبه کنید؟

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱+۲\sqrt{x}-۳\sqrt[۳]{x}}{۶(۱-\sqrt{x})(۱-\sqrt[۳]{x})}$$

**۵.** اگر تابع مقابل در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{4}$ پیوسته باشد، مقادیر a و b را بیابید؟

$$f(x)=\begin{cases} a\left[\tan x\right]+x & x<\frac{\pi}{4} \\ \left[\frac{1}{x}\right]+a & x=\frac{\pi}{4} \\ b\text{Cos}\left[\frac{x}{2}\right] & x>\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

**۶.** اگر داشته باشیم: $p(A|B')=\frac{3}{5}$ و $p(B'|A)=\frac{5}{7}$ حاصل $\frac{1-P(A')}{1-P(B)}$ را بیابید؟

**۷.** اگر $P(A\cap B)=\frac{P(B')}{3}=\frac{P(A')}{2}=\frac{P(A\cup B)}{4}$ باشد، $P(B)$ را بیابید؟

**۸.** اگر واریانس مقادیر a,۱,۲,۳,۴,۵ برابر ۲ باشد، آن‌گاه واریانس مقادیر $-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},1,0,\frac{1}{2}a-1$ را بیابید.

# حسابان ۱

## (پایهٔ یازدهم ریاضی)

**محمدتقی طاهری تنجانی**

**۱.** ثابت کنید:

$$4\text{Sin}x\ \text{Sin}(60^\circ-x)\text{Sin}(60^\circ+x)=\text{Sin}3x$$

(تذکر: می‌دانیم: $\text{Sin}3x=3\text{Sin}x-4\text{Sin}^3x$)

**۲.** اتحادهای زیر را ثابت کنید:

الف) $\text{Sin}^4 x+\text{Cos}^4 x=1-\frac{1}{2}\text{Sin}^2 2x$

ب) $\text{Sin}^6 x+\text{Cos}^6 x=1-\frac{3}{4}\text{Sin}^2 2x$

**۳.** در هر مثلث دلخواه ABC ثابت کنید:

$$\text{Sin}(\hat{A}+\hat{B})=\text{Sin}\,\hat{C}$$

**۴.** حاصل عبارت $A=\frac{2\text{Sin}300^\circ-4\text{Cos}150^\circ}{3\tan 225^\circ-\sqrt{3}\cot 330^\circ}$ را به‌دست آورید.

**۵.** حد راست و حد چپ تابع $f(x)=\frac{|x|+x}{x^2+|x|}$ را در نقطهٔ x=۰ محاسبه و حد تابع f در نقطهٔ x=۰ را بررسی کنید.

**۶.** اگر تابع f:R→R در نقطهٔ x=۰ پیوسته باشد و برای هر دو عدد حقیقی a و b داشته باشیم: f(a+b)=f(a).f(b)، ثابت کنید f(x) در R پیوسته است.

**۷.** حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{Cos}\,x\,\text{Sin}\,x-\tan x}{x^2\,\text{Sin}\,x}$

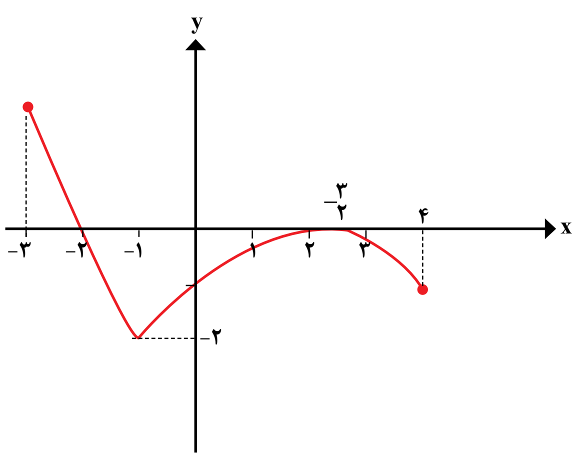
ب) $\lim\limits_{x\to 3\pi}\left[\frac{3}{\text{Cos}\,x}\right]$

**۸.** اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{ax^3+bx-2}{x-2}=9$، مقادیر a و b را به‌دست آورید.

**۹.** اگر نمودار تابع f(x) به شکل زیر باشد و داشته باشیم:

$$2h(x)=\begin{cases} f(x)+|f(x)| & ;\ x\geq 0 \\ f(x)-|f(x)| & x<0 \end{cases}$$

در مورد حد تابع h در نقطهٔ x=۰ چه می‌توان گفت؟



# هندسهٔ ۲

## (پایهٔ یازدهم ریاضی)

اسحق اسفندیار

۱. در مثلث ABC، رابطهٔ $Sin^2A=Sin^2B+Sin^2C$ بین زاویه‌های آن برقرار است. ثابت کنید مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است.

۲. در مثلث ABC، رابطهٔ $b^3+a^2c=c^3+a^2b$ بین اضلاع برقرار است. نشان دهید زاویهٔ A برابر ۱۲۰ درجه است.

۳. در مثلث ABC، مساحت ۱۶ واحد مربع است. اگر داشته باشیم: AC=۸ و AB=۵، طول ضلع BC کدام است؟

۴. در مثلث ABC ، AB=۵، AC=۷ و BC=۶ مفروض است. فاصلهٔ پای ارتفاع AH از وسط ضلع BC را به‌دست آورید.

۵. در مثلثی به ضلع‌های ۳، ۵ و ۶ واحد، نیمساز کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی A آن، بزرگ‌ترین ضلع مثلث را قطع می‌کند. اگر D و D' پای نیمساز روی ضلع BC و امتداد آن باشند، حاصل $AD^2+AD'^2$ کدام است؟

۶. طول ضلع‌های یک مثلث ۳، ۵ و ۶ است. مجموع سه ارتفاع مثلث را بیابید.

۷. مثلثی به ضلع‌های ۵، ۶ و ۷، مجموع مربعات سه میانه کدام است؟

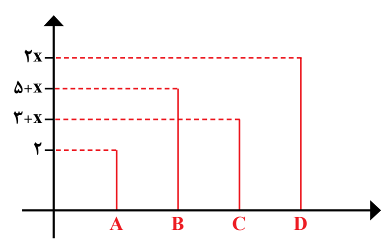
۸. درمثلث ABC، محیط مثلث $۱۸\sqrt{۳}$ و قطر دایرهٔ محیطی مثلث ۱۲ است. حاصل SinA+SinB+SinC را به‌دست آورید.

# آمار و احتمال

## (پایهٔ یازدهم ریاضی)

محمود داورزنی

۱. نمودار میله‌ای برای موجودی محصولات A، B، C و D در یک فروشگاه به‌صورت مقابل است. اگر فراوانی نسبی محصول B در این فروشگاه ۳۰٪ باشد، چند محصول B در این فروشگاه وجود دارد؟




۲. در داده‌های آماری ۱، ۶، ۴، ۹، ۷، x، ۹، ۷ و ۴، اگر مُد فقط عدد ۹ باشد، میانهٔ داده‌ها را به دست آورید.

۳. میانگین چهار درس یک دانش‌آموز هرکدام با ضریب ۱، برابر با ۱۵/۵ است. نمرهٔ درس پنجم وی که ضریب ۲ دارد، چه عددی باید باشد تا میانگین پنج درس او برابر ۱۶/۵ شود؟

۴. ۱۵ دادهٔ آماری با واریانس ۱۲ را با ۱۰ دادهٔ دیگر با واریانس ۷/۶ ترکیب می‌کنیم. اگر میانگین هر دو گروه یکسان باشد، انحراف معیار ۲۵ دادهٔ حاصل کدام است؟

۵. امتیاز دو ورزشکار A و B در پنج مسابقهٔ متوالی به این صورت است:

A : ۲۲, ۲۳, ۲۴, ۲۷, ۲۹
B : ۲۱, ۲۴, ۲۵, ۲۷, ۲۸

دقت کدام ورزشکار بیشتر است؟

۶. در نمودار جعبه‌ای ۳۱ دادهٔ آماری، میانگین داده‌ها برای دنبالهٔ سمت چپ ۱۰ و برای دنبالهٔ سمت راست ۱۸ است. اگر میانگین داده‌های داخل و روی جعبه ۱۵ باشد، میانگین کل این داده‌ها را تعیین کنید.

۷. جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید:

در یک جامعه، به رغم اینکه پارامتر ............ (مقدار ثابت ـ مقدار متغیر) دارد، این مقدار ......... (معین ـ مجهول) است و به همین دلیل از ................. (آماره‌ها ـ نمونه‌گیری) برای تخمین پارامترها استفاده می‌کنیم.

۸. برای برآورد کردن میانگین ساعت‌های خواب افراد یک جامعه در یک شبانه‌روز، یک نمونهٔ ۱۰۰ نفری انتخاب می‌کنیم. اگر انحراف معیار این جامعه ۱/۵ ساعت باشد:

**الف)** انحراف معیار میانگین را چقدر برآورد می‌کنید.

**ب)** اگر نمونهٔ خود را پنج برابر کنید، انحراف معیار میانگین برآوردشده چه تغییری می‌کند؟

۹. در انتخابات ریاست‌جمهوری، از ۲۰۰۰ نفر از رأی‌دهندگان نظرسنجی شده است. بیشترین مقدار خطای این نمونه، با اطمینان ۹۵ درصد چقدر است؟

۱۰. محققی مایل است با احتمال ۹۵ درصد و با اختلاف ۳ درصد از نسبت پشه‌هایی که ناقل یک ویروس خاص هستند، تحقیقی را انجام دهد. نمونهٔ او حداقل شامل چند پشه است؟

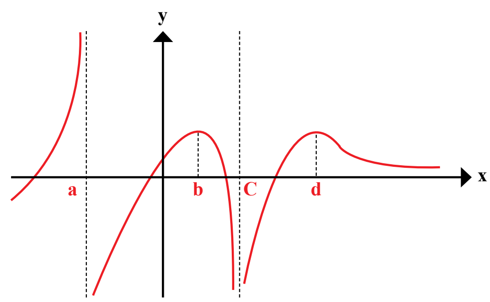
# حسابان ۲

## (پایهٔ دوازدهم ریاضی)

**محمدتقی طاهری تنجانی**

**۱.** مشــتق‌پذیری تابــع $f(x)=(x^2-1)[x]$ را در نقطه‌های $x=1$ و $x=2$ بررسی کنید.

**۲.** نمودار مشتق تابعی که در R پیوسته است، مانند شکل زیر است. نقطه‌های عطف تابع را مشخص کنید.




**۳.** نقطه‌های بحرانی تابع $f(x)=\sqrt{|x^2-1|}$ را پیدا کنید و ســپس نوع نقاط را از نظر ماکزیمم یا مینیمم مشخص کنید.

**۴.** ثابت کنید اگر T یک دورهٔ تناوب تابع مشتق‌پذیر f باشد، آن‌گاه T نیز یک دورهٔ تناوب $f'(x)$ است. آیا اگر تابعی متناوب نباشد، مشتق آن نیز متناوب نیست؟

**۵.** از نقطه‌ای روی تابع $y=x^2+4x-1$ مماس با شیب مثبت بر آن رسم کرده‌ایم. طول نقطه را چنان بیابید که مساحت سطح محصور بین خط مماس و محورهای مختصات کمترین مقدار ممکن باشد.

**۶.** آیا امکان دارد تابعی در یک نقطه مینیمم نسبی باشد، ولی در آن نقطه پیوسته نباشد؟

**۷.** آیا امکان دارد تابعی در یک نقطه ماکزیمم نسبی باشد، ولی در دو طرف آن نقطه تابع نزولی باشد؟

**۸.** تابع‌های مشتق‌پذیر $f(x)$ و $g(x)$ چنان هستند که: $f(x_0)=g(x_0)=0$ و $g'(x_0)\neq 0$. ثابت کنید:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

**۹.** زاویـهٔ بیـن نیم‌خط‌هـای ممـاس بـر منحنـی تابـع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[4]{x} & , \ x\geq 0\\ 5x^4+x \ , & x<0\end{cases}$ در مبدأ مختصات چند درجه است؟

# ریاضیات گسسته

## (پایهٔ دوازدهم ریاضی)

**حمیدرضا امیری**

**۱.** با رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد ۴ رقمی و بزرگ‌تر از ۲۹۸۳ می‌توان ساخت؟

**۲.** از بین چهار دانش‌آمــوز کلاس یازدهمی و پنج دانش‌آموز کلاس دوازدهمی به چند طریق می‌توان شش نفر انتخاب کرد، به شرط آنکه حداقل سه نفر آن‌ها دوازدهمی باشند؟

**۳.** معادلهٔ $(x_1+x_2)^2+x_3+x_4=15$ چند جواب طبیعی دارد؟

**۴.** در صورتی که جدول زیر یک مربع لاتین مرتبهٔ ۴ باشد، چه عددی باید به جای x قرار بگیرد؟

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۲ | ۱ | | |
| | ۴ | ۱ | ۲ |
| | ۲ | | ۴ |
| ۴ | | x | |

**۵.** چند مربع لاتین ۳×۳ می‌توان تشــکیل داد، به شرط آنکه ستون دوم آن‌ها مطابق جدول زیر باشد؟

| | | |
|---|---|---|
| | ۲ | |
| | ۳ | |
| | ۱ | |

**۶.** ثابت کنید هر زیرمجموعــه از مجموعهٔ $A=\{1,2,...,9\}$ که دارای شش عضو باشد، حداقل دو عضو دارد که مجموع آن دو عضو برابر با ۱۰ است.

**۷.** بـا رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد پنج‌رقمی می‌توان نوشــت، به‌طوری که در همگی آن‌ها هریـک از رقم‌های ۰، ۱ و ۲ حـداقل یک‌بار ظاهر شده باشد؟

## هندسه ۳

### (پایهٔ دوازدهم ریاضی)

حسین کریمی

**۱.** با فرض $A=\begin{bmatrix} a & ۲ \\ ۳ & b \end{bmatrix}$ و $A^۲=\begin{bmatrix} ۷ & ۲c \\ ۱۵ & ۶+b^۲ \end{bmatrix}$، حاصل a+۲b+۳c را به دست آورید.

**۲.** مقدار m را طوری بیابید که ماتریس $A=\begin{bmatrix} m & ۲ \\ ۳ & m-۱ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد.

**۳.** معادلهٔ دایرهٔ محیطی مربع $\begin{cases} ۰\le x\le ۲ \\ ۱\le y\le ۳ \end{cases}$ را بنویسید.

**۴.** بیضی به معادلهٔ $\frac{x^۲}{۱۰۰}+\frac{y^۲}{۷۵}=۱$ مفروض اســت. از نقطهٔ H به طول $۲\sqrt{۱۳}$ واقع بر محور کانونی، عمودی بر قطر کانونی رسم می‌کنیم تا بیضــی را در M قطع کنــد. محیط و مســاحت مثلث MFF' (F و F' کانون‌های بیضی هستند) را با محیط و مساحت مثلث ABC به اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳ مقایسه کنید. آیا دو مثلث هم‌نهشت هستند؟

**۵.** منحنــی ســهمی بــه معادلــهٔ y=ax²+bx+c فقــط به ازای $x\in[-۲,۴]$ زیر خط y=۱ است و می‌دانیم سهمی از نقطهٔ A(۵,۲۲) می‌گذرد. مطلوب است معادلهٔ سهمی.

**۶.** بــا فــرض $\vec{a}=(۱,۲,۳)$ و $\vec{b}=(۴,-۱,۱)$، تصویــر قائــم بــردار $\vec{c}=۲\vec{a}+\vec{b}$ را بر امتداد $\vec{b}$ به دست آورید.

**۷.** m را چنان تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}=(۱,۱,m)$ ، $\vec{b}=(۲,-۲,-۲)$ و $\vec{c}=(۳,-۱,۳)$ واقــع بر یک صفحه باشــند. اگــر بدانیم نقطهٔ A(۱,۱,-۲) روی صفحه واقع است، معادلهٔ صفحه را هم بنویسید.

**۸.** مساحت مثلث بناشده روی دو بردار به طول‌های ۴ و ۶ را به‌دست آورید؛ در صورتی که بدانیم: $\vec{a}.\vec{b}=۱۲$

## ریاضیات در چند دقیقه

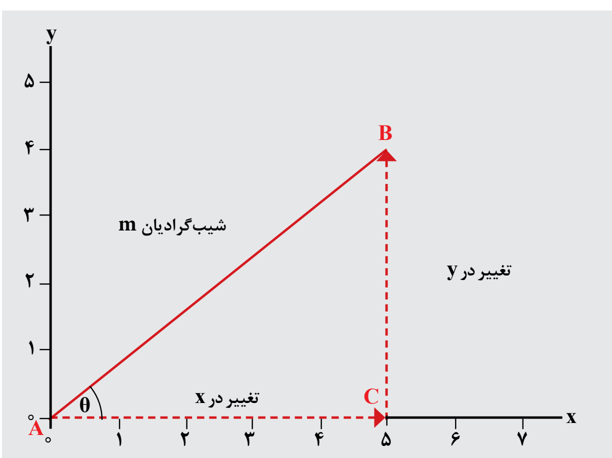
نویسنده: پال گلندینینگ

مترجم: دکتر غلامرضا یاسی‌پور

# معادلهٔ یک خط راست

هر خط راست واقع در صفحه را می‌توان به‌صورت x=a، که در آن a ثابت است (این حالت خاصی از خطی قائم است)، یا به‌صورت استاندارد y = mx+c نوشت. در معادلهٔ اخیر m و c ثابت‌اند. ثابت m شیب خط و c مقدار y را نمایش می‌دهد که در آن، خط با محور y برخورد می‌کند.

«شــیب» یا «گرادیان» یک خط با بررســی هر دو نقطهٔ واقع بر خط محاسبه می‌شــود. این مقدار برابر تغییر ارتفــاع بین نقطه‌های مزبور، تقســیم بر تغییر در مکان افقی بین نقطه‌هاســت، و از لحــاظ ریاضی، با معلوم بودن هــر دو نقطهٔ متمایــز $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$، به‌صــورت $m=\frac{(y_۲-y_۱)}{(x_۲-x_۱)}$ اســت. به این ترتیب، شیب نمودار شکل روبه‌رو $\frac{۴}{۵}$ است.




هــر دو معادلــهٔ x=a و y=mx+c را می‌توان به‌صورت عمومی‌تر rx+sy=t، به ازای انتخــاب مناســب ثابت‌های r، s و t نوشــت؛ زیرا غالباً به این شــکل است که معادلهٔ خــط در دســتگاه‌های معادلات خطی ظاهر می‌شود.


## ریاضی ۱

**۱.** اگر $x+y=5$ باشد، جواب‌های x و y به‌صورت‌های $\begin{cases}x=0\\y=5\end{cases}$، $\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$ یا $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ هستند. برای محاسبهٔ بیشترین مقدار $x!+y!$ جواب هر حالت را به‌دست می‌آوریم و از بین آن‌ها بیشترین مقدار را انتخاب می‌کنیم. در این صورت $\begin{cases}x=0\\y=5\end{cases}$ برابر $0!+5!=121$، $\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$ برابر $1!+4!=25$ و $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ برابر $3!+2!=8$ است که بیشترین مقدار برابر ۱۲۱ می‌شود.

**۲.** اگر سه عدد a، b و c تشکیل یک دنبالهٔ حسابی بدهند، رابطهٔ $2b=a+c$ برقرار است؛ یعنی جمع دو عدد c و a باید عددی زوج ($2b$) باشد. در این مورد دو حالت داریم: هر دو عدد زوج باشد (مثلاً $6=2+4$)، و یا هر دو عدد فرد باشد (مثلاً $8=3+5$).

در این صورت از بین ۱۰۰ و ... و ۲ و ۱، پنجاه عدد زوج هستند و ما دو عدد می‌خواهیم انتخاب کنیم؛ بنابراین: $\binom{50}{2}$. همچنین ۵۰ عدد فرد داریم و دو عدد می‌خواهیم انتخاب کنیم؛ یعنی: $\binom{50}{2}$. طبق اصل جمع که جمع دو عدد زوج می‌شود زوج، یا جمع دو عدد فرد می‌شود زوج، خواهیم داشت:

$$\binom{50}{2}+\binom{50}{2}=2\binom{50}{2}=2\times\frac{50\times49}{2}=50\times49=2450$$

**۳.** بین دو عدد ۲۰۰۰ و ۷۰۰۰ باید یک عدد چهاررقمی بیابیم که رقم یکان آن فرد باشد؛ یعنی عددهای ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹. در این صورت دو حالت برای رقم هزارگان پیش می‌آید: یا عدد زوج یا عدد فرد که از میان عددهای ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ باید انتخاب شود. (چون رقم یکان فرد است، یک عدد فرد کم می‌شود که در هزارگان قرار گیرد). در نتیجه دو حالت داریم:

**حالت اول:** رقم هزارگان زوج باشد:

$$3\times8\times7\times5=840$$

که دو رقم دهگان و صدگان از بین عددهای ۹، ...، ۱ و ۰ انتخاب می‌شوند و دو عدد آن در جایگاه یکان و هزارگان هستند و ۸ حالت باقی می‌ماند. پس: $3\times8\times7\times5=840$.

**حالت دوم:** رقم هزارگان فرد باشد. در این صورت یک رقم فرد از یکان کم می‌شود و رقم یکان چهار حالت خواهد داشت و در رقم هزارگان عددهای ۳ و ۵ قرار می‌گیرند. در نتیجه:

$$2\times8\times7\times4=448$$

پس طبق اصل جمع خواهیم داشت:
$840+448=1288$

**۴.** ابتدا صورت کسر را به‌دست می‌آوریم؛ یعنی:

$$p(n,n-2)-p(n,n-3)=\frac{n!}{(n-n+2)!}-\frac{n!}{(n-n+3)!}$$
$$=\frac{n!}{2!}-\frac{n!}{3!}=\frac{3n!-n!}{3\times2!}=\frac{2n!}{3\times2\times1}=\frac{n!}{3}$$

مخرج کسر را نیز ساده می‌کنیم:

$$c(n,n-3)\times(n-3)!=\frac{n!}{(n-3)!\times(n-n+3)!}\times(n-3)!=\frac{n!}{3!}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{n!}{3}}{\frac{n!}{3!}}=\frac{3!\times n!}{3\times n!}=\frac{3\times2\times1}{3}=2$$

**۵.** در بین عددهای ۱، ۲، ... و ۷، سه عدد زوج وجود دارند که عبارت‌اند از: ۶ و ۴ و ۲. می‌خواهیم یک رقم از ۴ رقم زوج باشد؛ بنابراین: $\binom{3}{1}=3$. سه رقم باقی‌مانده از عددهای فرد از بین ۱، ۳، ۵ و ۷ انتخاب می‌شوند: یعنی از بین ۴ عدد فرد متمایز ۳ عدد انتخاب می‌شوند: $\binom{4}{3}=4$. از طرف دیگر، تعداد جایگشت‌های این ۴ رقم متمایز برابر $4!=24$ است. پس طبق اصل ضرب داریم:

$$\binom{3}{1}\times\binom{4}{3}\times4!=3\times4\times24=288$$

**۶.** تمام عددهای سه‌رقمی با رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ مشخص‌کنندهٔ فضای نمونه است که برابر است با: $n(S)=5\times5\times4=100$. پیشامد آنکه عدد روی کارت زوج و بزرگ‌تر از ۳۰۰ باشد، آن است که رقم یکان آن عددهای زوج ۰، ۲ و ۴ باشد. اگر رقم یکان صفر باشد، در این صورت داریم:

$$\underset{(3,4,5)}{\boxed{3}}\times\boxed{4}\times\underset{0}{\boxed{1}}=12$$

یا اینکه رقم یکان ۲ باشد و در این صورت داریم:

$$\underset{(3,4,5)}{\boxed{3}}\times\boxed{4}\times\underset{2}{\boxed{1}}=12$$

یا اینکه رقم یکان ۴ باشد و در این صورت داریم:

$$\underset{(3,5)}{\boxed{2}}\times\boxed{4}\times\underset{4}{\boxed{1}}=8$$

طبق اصل جمع داریم: $12+12+8=32$.

در نتیجه: $p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{32}{100}=0/32$.

**۷.** از میان ۹ کتاب، ۳ کتاب به تصادف برمی‌داریم یعنی فضای نمونه‌ای برابر است با: $\binom{9}{3}=\frac{9!}{3!\times6!}=84$.
از طرف دیگر، پیشامد آن‌که از ۳ کتاب انتخابی، ۲ کتاب ریاضی باشد، عبارت است از: $\binom{5}{2}=10$ و یک کتاب باقی‌مانده از کتاب‌های شیمی است. یعنی: $\binom{4}{1}=4$.

درنتیجه: $n(A)=\binom{5}{2}\times\binom{4}{1}=40$.

طبق اصل ضرب داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{5}{2}\times\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{40}{84}=\frac{10}{21}$$

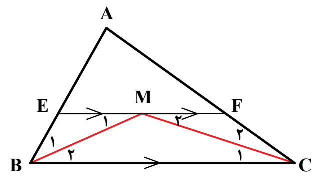
**۸.** تعداد کل زیرمجموعه‌های سه عضوی این مجموعه برابر است با: $n(S)=\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!\times7!}=120$.
تعداد زیرمجموعه‌های فاقد عددهای ۲ و ۳ در واقع تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1,4,5,\ldots,10\}$

اســت که برابر اســت با: $\binom{8}{3}=56$. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی که در آن‌ها حداقل یکی از عددهای ۲ و ۳ وجود داشته باشند، برابر است با: $n(A)=\binom{10}{3}-\binom{8}{3}=120-56=64$. در نتیجه:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{64}{120}=\frac{8}{15}$$

## هندسهٔ ۱ (دهم ریاضی)

**.۱**




$$\left.\begin{array}{l}\text{نیمساز } BM\Rightarrow \hat{B}_1=\hat{B}_2\\ EM\parallel BC\Rightarrow \hat{M}_1=\hat{B}_2\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}_1=\hat{M}_1\Rightarrow EM=BE \qquad \text{I}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{نیمساز } CM\Rightarrow \hat{C}_2=\hat{C}_1\\ MF\parallel BC\Rightarrow \hat{M}_2=\hat{C}_1\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{C}_2=\hat{M}_2\Rightarrow MF=FC \qquad \text{II}$$

$$\text{I, II}\Rightarrow EF=BE+CF$$

**.۲**

$$d\parallel d'\Rightarrow S_{ABC}=S_{BCD}\Rightarrow 8=\frac{1}{2}BD\times CH$$

$$\Rightarrow CH=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$$

**.۳**

$$AB\parallel EF\parallel DC\Rightarrow \frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BC} \qquad \text{I}$$

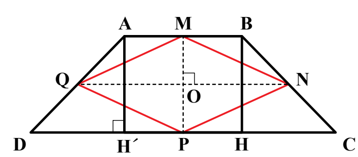
$$\triangle ACD:\frac{AE}{AD}=\frac{EN}{CD} \qquad \text{II}$$

$$\triangle BCD:\frac{BF}{BC}=\frac{MF}{CD} \qquad \text{III}$$

$$\text{I, II, III}\Rightarrow EN=MF\Rightarrow EN-MN$$

$$=MF-MN\Rightarrow EM=NF$$

**.۴**




$$Mp=h=4\Rightarrow MO=2$$

$$QN=\frac{4+12}{2}=8\Rightarrow OQ=4$$

$$\Rightarrow MQ=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$$

$$\text{محیط } MNPQ=4\times 2\sqrt{5}=8\sqrt{5}$$

$$\text{محیط ذوزنقه}=4+4\sqrt{2}+12+4\sqrt{2}$$

$$=16+8\sqrt{2}$$

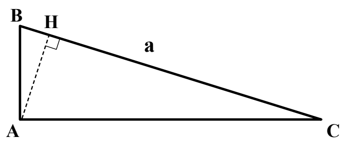
$$\frac{\sqrt{5}}{2+\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{5}}{16+8\sqrt{2}}=\frac{\text{نسبت محیط چهارضلعی}}{\text{به‌دست‌آمده به محیط ذوزنقه}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}(2-\sqrt{2})}{2}$$

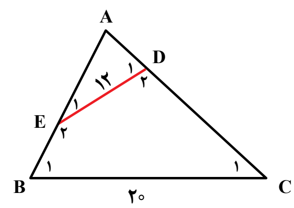
**.۵**

$$S_\Delta=\frac{1}{8}a^2\Rightarrow AH\times a=\frac{1}{8}a^2$$

$$\Rightarrow AH=\frac{1}{4}a\Rightarrow \hat{c}=15^\circ\Rightarrow \hat{B}=75^\circ$$




**.۶**




$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}_1+\hat{D}_2=180^\circ\\ \hat{B}_1+\hat{D}_2=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}_1=\hat{D}_1$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}_1+\hat{E}_2=180^\circ\\ \hat{C}_1+\hat{E}_2=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{E}_1=\hat{C}_1$$

$$\Rightarrow \triangle AED\sim\triangle ABC$$

$$\Rightarrow \text{نسبت تشابه}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \text{نسبت مساحت‌ها}=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

$$\frac{\text{مساحت چهارضلعی}}{\text{مساحت ABC}}=\frac{16}{25}$$

**.۷**

$$\triangle MPO\sim\triangle OHC\Rightarrow \frac{OP}{OH}=\frac{OM}{OC}$$

$$\Rightarrow \frac{OP}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{(3\sqrt{3})^2+3^2}}$$

$$\Rightarrow OP=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{OP}{AC}=\frac{\frac{3}{4}}{6}=\frac{1}{8}$$

**.۸**

$$\triangle MCD\approx\triangle ABM\Rightarrow \frac{MC}{AM}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{MC+AM}=\frac{1}{1+2}$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{AC}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{11}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow MC=\frac{11}{3}=3\frac{2}{3}$$

## ریاضی ۲ (تجربی)

**.۱**

$$\lim_{x\to 0^-} f(x^2-|x|)=\lim_{x\to 0^-} f(x^2+x)=$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(u)=-2$$

| x | | ۱- | | ۰ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x$ | + | | - | | + |

**.۲**

الف) $\lim_{x\to(-1)^-}[f(f(x))]-\lim_{x\to 4}[f(x)]+\lim_{x\to 3^+}[f(x)]=$

$$[f(0^+)]-[(-1)^+]+[3^-]=$$

$$[2]-(-1)+2=2+1+2=5$$

ب)

$$[(-2)^+]+2[f(3^-)]-[2]=-2+2[0^+]-2=-4$$

**.۳**

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^3}{\sin^3\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^3\cos^3 x}{\sin x(1-\cos^2 x)(1-\cos^3 x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3(1-\cos x)}{\sin x(1+\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x}{(1+\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}$$

$$=0\times\frac{1}{6}=0$$

**.۴**

$$\sqrt[6]{x}=t\Rightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x}=t^2\\ \sqrt{x}=t^3\\ x\to 1\Rightarrow t\to 1\end{cases}$$

$$\lim_{t\to 1}\frac{1+2t^3-3t^2}{6(1-t^3)(1-t^2)}=\lim_{t\to 1}\frac{\cancel{(t-1)^2}(2t+1)}{6\cancel{(t-1)^2}(t^2+t+1)(t+1)}$$

$$=\frac{3}{6\times 3\times 2}=\frac{1}{12}$$

**.۵**

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-} a[\tan x]+x=a\overbrace{[1^-]}^{0}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+} b\cos\left[\frac{x}{2}\right]=b\cos\left[\frac{\pi^+}{8}\right]=b\cos 0=b$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left[\frac{4}{\pi}\right]+a=1+a \Rightarrow \begin{matrix} b=\dfrac{\pi}{4} \\ a=\dfrac{\pi}{4}-1 \end{matrix}$$

**۶.**

$$\begin{matrix} P(A|B')=\dfrac{P(A\cap B')}{P(B')}=\dfrac{3}{5} \\ P(B'|A)=\dfrac{P(B'\cap A)}{P(A)}=\dfrac{5}{7} \end{matrix} \Rightarrow \dfrac{\dfrac{\cancel{P(A\cap B')}}{P(B')}}{\dfrac{\cancel{P(B'\cap A)}}{P(A)}}=\frac{21}{25} \Rightarrow \frac{P(A)}{P(B')}=\frac{21}{25} \Rightarrow \frac{1-P(A')}{1-P(B)}=\frac{21}{25}$$

**۷.** اگر: $P(A\cap B)=t$

$$\frac{P(A\cup B)}{4}=P(A\cap B)=t$$
$$\rightarrow P(A\cup B)=4t$$

$$\frac{p(A')}{2}=\frac{1-P(A)}{2}=P(A\cap B)=t$$
$$\rightarrow P(A)=1-2t$$

$$\frac{p(B')}{3}=\frac{1-P(B)}{3}=P(A\cap B)=t$$
$$\rightarrow P(B)=1-3t$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$4t=1-2t+1-3t-t$$
$$\rightarrow 10t=2 \rightarrow t=\frac{1}{5}$$
$$P(B)=1-3t=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

## حسابان ۱

**۱.** سمت چپ عبارت

$$=4\operatorname{Sin}x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Cos}x-\frac{1}{2}\operatorname{Sin}x\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Cos}x+\frac{1}{2}\operatorname{Sin}x\right)$$
$$=4\operatorname{Sin}x\left(\frac{3}{4}\operatorname{Cos}^2x-\frac{1}{4}\operatorname{Sin}^2x\right)$$
$$=\operatorname{Sin}x(3\operatorname{Cos}^2x-\operatorname{Sin}^2x)$$
$$=\operatorname{Sin}x(3-3\operatorname{Sin}^2x-\operatorname{Sin}^2x)$$
$$=3\operatorname{Sin}x-4\operatorname{Sin}^3x$$

**۲. الف)**

$$\operatorname{Sin}^4x+\operatorname{Cos}^4x=(\operatorname{Sin}^2x+\operatorname{Cos}^2x)^2-2\operatorname{Sin}^2x\operatorname{Cos}^2x$$
$$=1-2(\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x)^2$$
$$=1-2\left(\frac{1}{2}\operatorname{Sin}2x\right)^2$$
$$=1-\frac{1}{2}\operatorname{Sin}^2 2x$$

**ب)**

$$\operatorname{Sin}^6x+\operatorname{Cos}^6x$$
$$=(\operatorname{Sin}^2x+\operatorname{Cos}^2x)^3-3\operatorname{Sin}^2x\operatorname{Cos}^2x(\operatorname{Sin}^2x+\operatorname{Cos}^2x)$$
$$=1-3\left(\frac{1}{2}\operatorname{Sin}2x\right)^2\times 1$$
$$=1-\frac{3}{4}\operatorname{Sin}^2 2x$$

**۳.** در هر مثلث مجموع زاویه‌ها ۱۸۰° است، پس: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$. در نتیجه زاویه‌های A+B و C مکمل‌اند. دو زاویه مکمل سینوسشان برابر است، پس $\operatorname{Sin}(\hat{A}+\hat{B})=\operatorname{Sin}\hat{C}$

**تذکر:** می‌توانیم چنین استدلال کنیم:
$\operatorname{Sin}(\hat{A}+\hat{B})=\operatorname{Sin}(180^\circ-\hat{C})=\operatorname{Sin}\hat{C}$

**۴.**

$$\operatorname{Sin}300^\circ=\operatorname{Sin}(360^\circ-60^\circ)$$
$$=-\operatorname{Sin}60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\operatorname{Cos}150^\circ=\operatorname{Cos}(180^\circ-30^\circ)$$
$$=-\operatorname{Cos}30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 225^\circ=\tan(180^\circ+45^\circ)$$
$$=\tan 45^\circ=1$$
$$\operatorname{Cot}330^\circ=\operatorname{Cot}(360^\circ-30^\circ)$$
$$=-\operatorname{Cot}30^\circ=-\sqrt{3}$$
$$A=\frac{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3(1)-\sqrt{3}(-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

**۵.**

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|+x}{x^2+|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+x}{x^2+x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x+1}=2$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|+x}{x^2+|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x+x}{x^2-x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{0}{x^2-x}=0$$

چون حد چپ و حد راست تابع در نقطه x=0 برابر نشدند، پس تابع f در این نقطه حد ندارد.

**۶.** فرض کنیم $x_0$ نقطه‌ای حقیقی و دلخواه باشد.
اگر: $x-x_0=u$،
آن‌گاه: $x=x_0+u$.
و اگر: $x\to x_0$،
آن‌گاه: $u\to 0$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{u\to 0}f(x_0+u)=\lim_{x\to 0}f(x_0)f(u)$$
$$=f(x_0)\lim_{u\to 0}f(u)$$
$$=f(x_0)f(0)\xrightarrow{\text{چون f در صفر پیوسته است}}$$
$$=f(x_0+0)$$
$$=f(x_0)$$

پس f در هر نقطهٔ حقیقی مانند $x_0$ پیوسته است و لذا f در R پیوسته است.

**۷. الف)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Cos}x\operatorname{Sin}x-\tan x}{x^3\operatorname{Sin}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Cos}^2x\operatorname{Sin}x-\operatorname{Sin}x}{x^3\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{Sin}^3x}{x^3\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x}=\lim_{x\to 0}-\left(\frac{\operatorname{Sin}x}{x}\right)^2\times\frac{1}{\operatorname{Cos}x}$$
$$=-1\times 1=-1$$

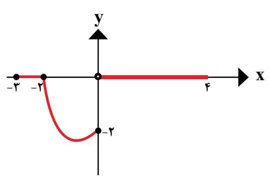
**ب)** چون در همسایگی x=3π داریم:
$\operatorname{Cos}x>-1$

پس: $\frac{3}{\operatorname{Cos}x}<-3$؛ لذا در همسایگی x=3π داریم: $\lim_{x\to 3\pi}\left[\frac{3}{\operatorname{Cos}x}\right]=-4$.

**۸.** چون حد مخرج در x=2 صفر است، باید حد صورت نیز در x=2 صفر باشد تا به $\frac{0}{0}$ تبدیل شود و پس از رفع ابهام حد آن ۹ شود؛ لذا صورت به ازای x=2 برابر صفر است؛ یعنی: 8a+2b−2=0. از آنجا نتیجه می‌شود: b=1−4a. حال داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{ax^3+bx-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{ax^3-4ax-2}{x-2}=$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{ax(x-2)(x+2)+(x-2)}{x-2}=$$
$$\lim_{x\to 2}ax(x+2)+1=8a+1=9$$
$$\Rightarrow a=1\ ,\ b=-3$$

**۹.** با توجه به نمودار، وقتی $x\geq 0$، $f(x)\leq 0$. پس: $2h(x)=f(x)-f(x)=0$؛ یعنی: $h(x)=0$. وقتی $x<0$، چنانچه $f(x)<0$، داریم: $2h(x)=2f(x)$؛ یعنی: $h(x)=f(x)$. و اگر $f(x)\geq 0$، $h(x)=0$؛ پس نمودار تابع h به شکل زیر است.




با توجه به شکل حد راست تابع h در x=0 برابر صفر و حد چپ تابع در این نقطه برابر ۲- است؛ پس h(x) در x=0 دارای حد نیست.

## هندسه ۲

**۱.**

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R$$

$$\rightarrow \sin A=\frac{a}{۲R},\sin B=\frac{b}{۲R},\ \sin C=\frac{c}{۲R}$$

با جای‌گذاری در رابطه داریم:

$$\frac{a^۲}{۴R^۲}=\frac{b^۲}{۴R^۲}+\frac{c^۲}{۴R^۲}\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲$$

بنابر عکس قضیهٔ **فیثاغورس**، مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است.

**۲.**

$$b^۳-c^۳=a^۲(b-c)\xrightarrow{b\neq c}$$

$$\begin{cases} b^۲+c^۲+bc=a^۲ \\ a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A \end{cases}$$

$$\cos A=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow A=۱۲۰^\circ$$

**۳.**

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times AB\times AC\times \sin A$$

$$\Rightarrow \sin A=\frac{۲\times ۱۶}{۵\times ۸}=\frac{۴}{۵}\rightarrow \cos A=\pm\frac{۳}{۵}$$

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB\times AC\times \cos A$$

$$=۲۵+۶۴-۲(۵\times ۸)(\pm\frac{۳}{۵})=۸۹\pm ۴۸$$

$$\begin{cases} BC=\sqrt{۴۱} \\ BC=\sqrt{۱۳۷} \end{cases}$$

**۴.**

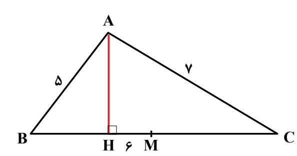
$$\begin{cases} HM=BM-BH=۳-BH \\ \overset{\Delta}{ABH}:\cos B=\frac{BH}{AB}\Rightarrow BH=۵\cos A \end{cases}$$

بنابر قضیهٔ کسینوس در مثلث داریم:

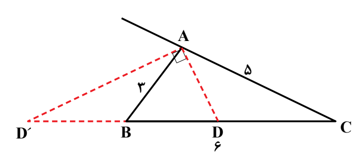
$$AC^۲=AB^۲+BC^۲-۲AB\times BC\times \cos B$$

$$۴۹=۲۵+۳۶-۶۰\cos B\rightarrow \cos B=\frac{۱}{۵}$$

$$BH=۵\cos A=۱\Rightarrow HM=۳-BH=۲$$




**۵.** مثلث $AOD'$ قائم‌الزاویه است.




$$AD^۲+AD'^۲=DD'^۲$$

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\rightarrow \frac{x}{۶-x}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow x=\frac{۹}{۴}$$

$$\frac{D'B}{D'C}=\frac{AB}{AC}\rightarrow \frac{y}{y+۶}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow y=۹$$

$$DD'^۲=(\frac{۹}{۴}+۹)^۲=(\frac{۴۵}{۴})^۲=\frac{۲۰۲۵}{۱۶}$$

**۶.**

$$p=\frac{۳+۵+۶}{۲}=۷$$

$$S=\sqrt{۷(۱)(۲)(۴)}=۲\sqrt{۱۴}$$

$$h_a=\frac{۲s}{a}=\frac{۴\sqrt{۱۴}}{۳}$$

$$h_b=\frac{۴\sqrt{۱۴}}{۵}$$

$$h_c=\frac{۴\sqrt{۱۴}}{۶}$$

$$h_a+h_b+h_c=۱۴\sqrt{۱۴}$$

**۷.**

$$\left.\begin{aligned} m_a^۲&=\frac{۱}{۲}(b^۲+c^۲)-\frac{a^۲}{۴}=\frac{۱}{۲}(۴۹+۳۶)-\frac{۲۵}{۴}=\frac{۱۴۵}{۴} \\ m_b^۲&=\frac{۲(۴۹+۲۵)-۳۶}{۴}=\frac{۱۱۲}{۴} \\ m_c^۲&=\frac{۲(۲۵+۳۶)-۴۹}{۴}=\frac{۷۳}{۴} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow m_a^۲+m_b^۲+m_c^۲=\frac{۱۶۵}{۲}$$

**۸.**

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R$$

$$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$\Rightarrow \sin A+\sin B+\sin C=\frac{۱۸\sqrt{۳}}{۱۲}=\frac{۳}{۲}$$

## آمار و احتمال

**۱.**

$$f'_B=۰/۳\Rightarrow \frac{۵+x}{۲+(۵+x)+(۳+x)+۲x}=۰/۳$$

$$\Rightarrow \frac{۵+x}{۱۰+۴x}=\frac{۳}{۱۰}\Rightarrow x=۱۰\Rightarrow f_B=۵+۱۰=۱۵$$

**۲.** چون مُد برابر ۹ است، پس x=۹ و با این مقدار، میانه برابر ۹ می‌شود.

**۳.**

$$\bar{x}_w=\frac{۴\times ۱۵/۵\times ۱+۱\times x\times ۲}{۱+۱+۱+۲}=۱۶/۵$$

$$\Rightarrow x=۱۸/۵$$

**۴.**

$$\sigma_۱^۲=۱۲\Rightarrow \frac{۱}{۱۵}\sum_{i=۱}^{۱۵}(x_i-\bar{x})^۲=۱۲\Rightarrow \sum_{i=۱}^{۱۵}(x_i-\bar{x})^۲=۱۸۰$$

$$\sigma_۲^۲=۷/۶\Rightarrow \frac{۱}{۱۰}\sum_{i=۱}^{۱۰}(y_i-\bar{x})^۲=۷/۶\Rightarrow \sum_{i=۱}^{۱۰}(y_i-\bar{x})^۲=۷۶$$

$$\sigma^۲=\frac{۱}{۲۵}(\sum(x_i-\bar{x})^۲+\sum(y_i-\bar{x})^۲)=\frac{۱}{۲۵}(۱۸۰+۷۶)$$

$$=\frac{۲۵۶}{۲۵}\Rightarrow =\frac{۱۶}{۵}=۳/۲$$

**۵.** $\sigma_A{}^۲=۶/۸$ و $\sigma_B{}^۲=۶$. پس دقت ورزشکار B بیشتر است.

**۶.**

$$\bar{x}=\frac{۷\times ۱۰+۱۷\times ۱۵+۷\times ۱۸}{۳۱}$$

$$=\frac{۷۰+۲۵۵+۱۲۶}{۳۱}=\frac{۴۵۱}{۳۱}=۱۴/۵۴$$

**۷.** مقدار ثابت ـ مجهول ـ آماره‌ها

**۸. الف)**

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{۱/۵}{\sqrt{۱۰۰}}=۰/۱۵$$

**ب)**

$$\frac{\sigma'_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}=\frac{\frac{\sigma}{\sqrt{۵n}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}=۰/۴۴$$

**۹.**

$$\pm\sqrt{\frac{۱}{n}}=\pm\sqrt{\frac{۱}{۲۰۰۰}}=۰/۰۲$$

**۱۰.**

$$\frac{۱}{\sqrt{n}}=۰/۰۳\Rightarrow \sqrt{n}=۳۳/۳۳\Rightarrow n\cong ۱۱۱۱$$

## حسابان ۲

**۱.** تابع f در x=۲ پیوسته نیست، ولی در x=۱ پیوسته است. (چرا؟)

پس در x=۲ مشتق‌پذیر نیست و شرط لازم برای مشتق‌پذیری در نقطهٔ x=۱ برقرار است.

مشـــتق‌های چپ و راست تابع را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2-1)[x]}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x+1)(x-1)\times 1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2-1)[x]}{x-1}=0$$

توجه کنید در همایگی چـــپ نقطهٔ ۱=x، صورت کسر فوق صفر است، ولی مخرج کسر صفر نیست. چون مشتق‌های چپ و راســـت در نقطهٔ ۱=x برابر نیستند، تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

**۲.** نقطه‌های b و d نقطه‌های عطف تابع هســـتند؛ زیرا $y'$ ســـمت چپ این نقطه‌ها صعودی و در سمت راست آن‌ها نزولی اســـت. پس $y''$ در این نقطه‌ها تغییر جهت می‌دهد و چون $y'$ در این نقطه‌ها وجود دارد، پس تابع در آن‌ها دارای مماس است.

**۳.** دامنهٔ تابع R است. از طرف دیگر:

$$f'(x)=\frac{\frac{2x(x^2-1)}{|x^2-1|}}{2\sqrt{|x^2-1|}}=\frac{x(x^2-1)}{|x^2-1|\sqrt{|x^2-1|}}$$

تابع در ۱±=x مشـــتق متناهی نـــدارد، پس این نقطه‌ها بحرانی‌اند. ریشهٔ مشتق ۰=x است.

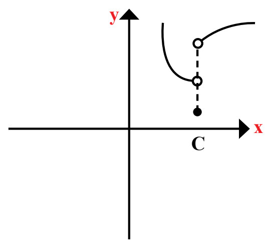
پس مجموعـــهٔ نقطه‌های بحرانی تابـــع {۱,۰,۱-} اســـت. علامت مشـــتق تنها به‌صورت آن بستگی دارد. جدول تغییرات تابع نشـــان می‌دهـــد که نقطه‌های به طول ۱=x و ۱-=x مینیمم نسبی (و مطلق) و نقطهٔ به طول صفر نیز ماکزیمم نسبی است.

| x | $-\infty$ | | ۱- | | ۰ | | ۱ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | − | \| | + | ۰ | − | \| | + | |
| y | $+\infty$ | ↘ | ۰ | ↗ | ۱ | ↘ | ۰ | ↗ | $+\infty$ |

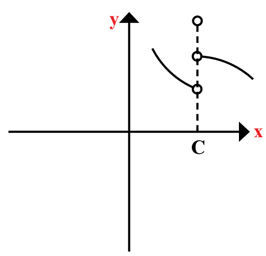
**۴.** اگـــر T یـــک دورهٔ تناوب تابـــع f باشـــد، آن‌گاه: $f(x+T)=f(x)$. اینـــک از دو طـــرف ایـــن رابطه طبق قضیه مشـــتق تابع مرکـــب، مشـــتق می‌گیریم. پس: $f'(x+T)=f'(x)$ و $f'$ نیـــز متناوب اســـت و T یک دورهٔ تناوب آن است. اگر f متناوب نباشد، نمی‌توان حکمی قطعی در مورد مشتق تابع f ارائه داد؛ زیرا مثلاً $f(x)=x^2$ متناوب نیســـت و تابع مشتق آن، یعنی $f'(x)=2x$ نیز متناوب نیســـت. از طرف دیگر، تابـــع $f(x)=x+\cos x$ متناوب نیست، ولی مشـــتق آن یعنی $f'(x)=1-\sin x$ متناوب است.

**۵.** اگـــر طول نقطهٔ تماس را $x_0$ در نظر بگیریم، آن‌گاه مختصات نقطهٔ تماس $T(x_0,x_0^2+4x_0-1)$ است. از آنجا که $y'=2x+4$، پس: $m_{\text{مماس}}=2x_0+4>0$، در نتیجه معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y-x_0^2-4x_0+1=(2x_0+4)(x-x_0)$ اســـت. نقطه‌های برخورد با محورها $A(\frac{x_0^2+1}{2x_0+4},0)$ و $B(0,-(x_0^2+1))$ هستند. چون: $S=\frac{1}{2}|OA|\times|OB|$، پس: $S=\frac{(x_0^2+1)^2}{4(x_0+2)}$ که در آن $x_0>-2$. از طرف دیگر، داریم: $S'=\frac{(2x_0^2+8x_0-1)(x_0^2+1)}{4(x_0+2)^2}$ و تنها ریشه $S'$ در محدودهٔ مورد نظر $x_0=\frac{\sqrt{19}-4}{3}$ قرار دارد.

**۶.** بله امکان دارد. شـــکل زیر چنین تابعی را نشـــان می‌دهد (نقطهٔ C).



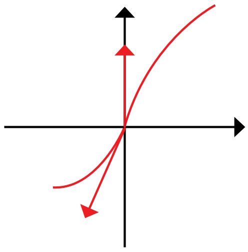

**۷.** بلـــه امـــکان دارد. نمونـــهٔ آن شـــکل زیر اســـت (نقطهٔ C).




**۸.** چـــون $x\neq x_0$، پس: $x-x_0$ و مجاز هســـتیم صورت و مخرج را بر $x-x_0$ تقسیم کنیم.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

**۹.** بـــا توجه به نمـــودار تابع در نقطهٔ ۰=x مشـــاهده می‌شود که این زاویه ۱۳۵ درجه است.



$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} & , \quad x>0\\ 20x^3+1 & , \quad x<0\end{cases}$$

$$f'_+(0)=+\infty\ ,\ f'_-(0)=1$$

## ریاضیات گسسته

**۱.** بیـــن ۲۹۸۳ تا ۳۰۰۰، دقیقاً ۱۶ عدد وجود دارد و بعد از آن باید تعداد عددهای چهاررقمی و بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ را محاسبه و با ۱۶ جمع کنیم:

$$\underset{\text{4 یا 5}}{\underline{3}}\ \ \underline{6}\ \ \underline{6}\ \ \underline{6}\longrightarrow 3\times6\times6\times6=648$$

$$648+16=664$$

**۲.**

$$\underbrace{\binom{4}{1}\times\binom{5}{5}}_{\text{پنج دوازدهمی و یک یازدهمی}}+\underbrace{\binom{4}{2}\times\binom{5}{4}}_{\text{چهار دوازدهمی و دو یازدهمی}}+\underbrace{\binom{4}{3}\times\binom{5}{3}}_{\text{سه دوازدهمی و سه یازدهمی}}$$

**۳.** چون جواب‌های طبیعی را خواســـته اســـت، پس: $x_i\geq 1$. حال به $(x_1+x_2)$ عدد می‌دهیم:

$$\text{I)}\ x_1+x_2=2\Rightarrow 2^2+x_3+x_4=15\Rightarrow x_3+x_4=11$$

$$\text{تعداد جواب‌های طبیعی}=\binom{11-1}{2-1}=\binom{10}{1}=10$$

$$\text{II)}\ x_1+x_2=3\Rightarrow 3^2+x_3+x_4=15\Rightarrow x_3+x_4=6$$

$$\text{تعداد جواب‌های طبیعی}=\binom{6-1}{2-1}=\binom{5}{1}=5$$

و چـــون بـــرای $x_1+x_2=3$ دو حالت $x_1=1$ و $x_2=2$، یـــا $x_1=2$ و $x_2=1$ وجود دارد؛ لـــذا در حالت (II) تعداد جواب‌ها $5\times2=10$ است و در کل:

$$\text{تعداد جواب‌ها}=10+10=20$$

**۴.** با قرار دادن عددها در ســـتون اول ســـطر ســـوم، ستون دوم و آخرین عدد در ستون چهارم، مقدار ۲=x به‌دست می‌آید.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۲ | ۱ | | |
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴ | ۳ | x | ۱ |

$x=۲$

**۵.** برای سطر اول دو حالت وجود دارد:

| | | |
|---|---|---|
| ۳ | ۲ | ۱ |
| | ۳ | |
| | ۱ | |

و

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| | ۳ | |
| | ۱ | |

| | | |
|---|---|---|
| ۳ | ۲ | ۱ |
| ۱ | ۳ | ۲ |
| ۲ | ۱ | ۳ |

و

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۳ | ۱ | ۲ |

که برای هر کدام از این حالت‌ها به یک طریق می‌توان مربع لاتین ساخت.

**۶.** اگر اعضای A را به پنج دسته یا مجموعهٔ دو عضوی و یک‌عضوی به‌صورت زیر تقسیم کنیم، در این صورت برای انتخاب شش عضو ناچاریم حداقل از یکی از مجموعه‌ها دو عضو برداریم که مجموع آن‌ها ۱۰ خواهد بود:

$A_۱=\{۱,۹\}$
$A_۲=\{۲,۸\}$
$A_۳=\{۳,۷\}$
$A_۴=\{۴,۶\}$
$A_۵=\{۵\}$

**۷.** $۳\times۴^۳$ = پنج‌رقمی‌های فاقد ۱،
$۴^۵$ = پنج‌رقمی‌های فاقد صفر،
$۴\times۵^۴$ = تعداد کل پنج‌رقمی‌ها،
$۳^۵$ = پنج‌رقمی‌های فاقد صفر و ۲،
$۳^۵$ = پنج‌رقمی‌های فاقد صفر و ۱،
$۳\times۴^۳$ = پنج‌رقمی‌های فاقد ۲،
$۲^۵$ = پنج‌رقمی‌های فاقد صفر، ۱ و ۲،
و $۲\times۳^۴$ = پنج‌رقمی‌های فاقد ۱ و ۲

تعداد خواسته‌شده $= ۴\times۵^۴ - \left[(۴^۵+۲\times۳\times۴^۳) - (۳^۵+۳^۵+۲\times۳^۴)+۲^۵\right]=۵۵۶$

## هندسه ۳

**۱.**

$$A^۲ = A\times A = \begin{bmatrix} a^۲+۶ & ۲(a+b) \\ ۳(a+b) & ۶+b^۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & ۲c \\ ۱۵ & ۶+b^۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^۲+۶=۷ \\ a+b=c=۵ \end{cases}$$

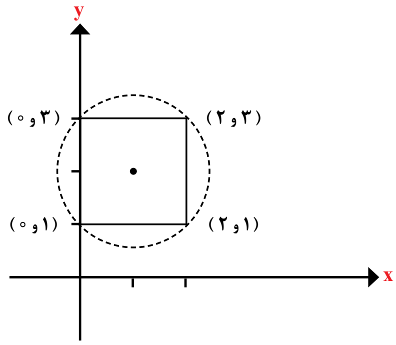
$$\Rightarrow \begin{cases} a=۱,\quad b=۴,\quad c=۵ \\ a=-۱,\quad b=۶,\quad c=۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+۲b+۳c=۲۴ \\ a+۲b+۳c=۲۶ \end{cases}$$

**۲.**

$$|A|=۰ \Rightarrow m(m-۱)-۶=۰$$

$$\Rightarrow m^۲-m-۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=-۲ \\ m=۳ \end{cases}$$




**۳.**

$$۲R=\sqrt{۸} \Rightarrow R=\sqrt{۲}$$

$$O(۱,۲)$$

$$C:(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۲$$

$$C:x^۲+y^۲-۲x-۴y+۳=۰$$

**۴.**

$$x_H=۲\sqrt{۱۳} \Rightarrow X_M=۲\sqrt{۱۳} \Rightarrow$$

$$\frac{۵۲}{۱۰۰}+\frac{y_m^۲}{۷۵}=۱ \Rightarrow y_m=۶$$

$$\Delta MFF': \begin{cases} \text{محیط} = MF+MF'+FF' = ۲a+۲c=۲۰+۱۰=۳۰ \\ \text{مساحت} = \frac{۱}{۲}FF'.MH = \frac{۱}{۲}\times۱۰\times۶=۳۰ \end{cases}$$

$$\Delta ABC: \begin{cases} \text{محیط} = ۵+۱۲+۱۳=۳۰ \\ \text{مساحت} = \frac{۱}{۲}(۵\times۱۲)=۳۰ \end{cases}$$

محیط و مســاحت هر دو مثلث بــا هم برابرند، اما آن‌ها هم‌نهشت نیستند. مثلث $MFF'$ دارای ضلعی به اندازهٔ ۱۰ است $(FF')$، درحالی‌که مثلث $ABC$، ضلعی به اندازهٔ ۱۰ ندارد.

**۵.**

$$y-۱=a(x+۲)(x-۴)$$
$$y=ax^{۲}-۲ax-۸a+۱$$
$$۲۲=۲۵a-۱۰a-۸a+۱\Rightarrow ۲۱=۷a\Rightarrow a=۳$$
$$\Rightarrow y=۳x^{۲}-۶x-۲۳$$

**۶.**

$$\vec{c}=(۲,۴,۶)+(۴,-۱,۱)=(۶,۳,۷)$$
$$\vec{b}\ \text{تصویر قائم}\ \vec{c}\ \text{روی}\ \vec{b}=\left(\frac{\vec{c}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\right)\vec{b}$$
$$=\left(\frac{۲۴-۳+۷}{۱۶+۱+۱}\right)\vec{b}$$
$$=\frac{۱۴}{۹}(۴,-۱,۱)$$

**۷.**

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=۰\Rightarrow(۱,۱,m).(-۸,-۱۲,۴)=۰$$
$$\Rightarrow m=۵$$
$$\vec{n}_p\parallel(\vec{b}\times\vec{c})\Rightarrow\vec{n}_p=(۲k,۳k,-k)$$
$$p:۲kx+۳ky-kz\overset{(۱,۱,-۲)\in p}{=}۷k$$
$$\Rightarrow p:۲x+۳y-z-۷=۰$$

**۸.**

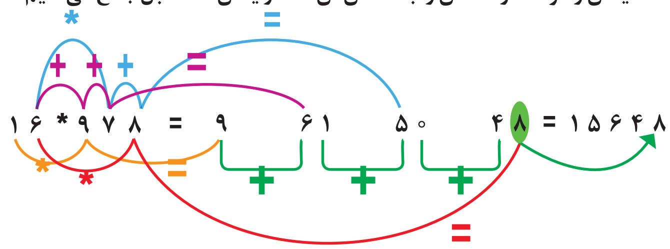
$$S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{۱}{۲}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$
$$=\frac{۱}{۲}\times۲۴\times\sin\theta=\frac{۲۴}{۲}\sqrt{۱-\cos^{۲}\theta}$$
$$=۱۲\sqrt{۱-\left(\frac{۱۲}{۲۴}\right)^{۲}}=۶\sqrt{۳}$$

# روش‌هایی برای ضرب دو عدد

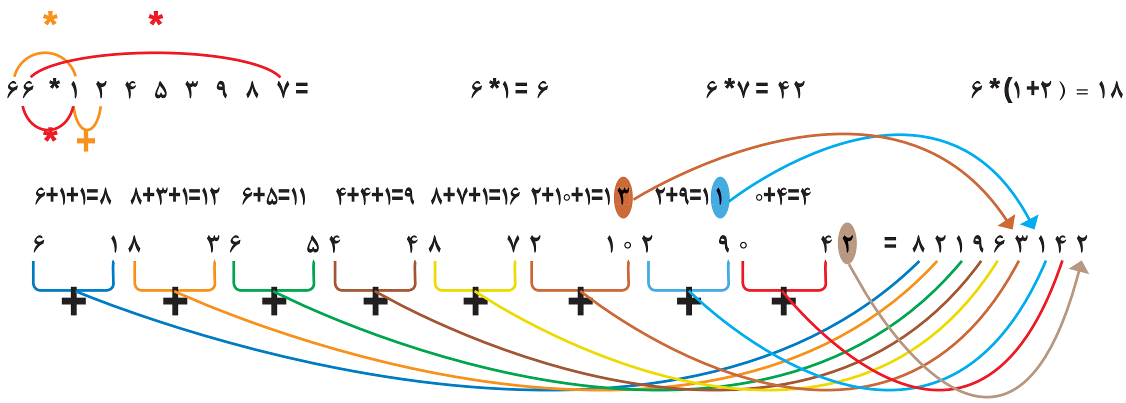
**شیما کریمی،** شهرستان: آباده رشته: حسابداری

**روش اول** ضرب اعداد ۱۰ تا ۱۹ در یک عدد n رقمی:

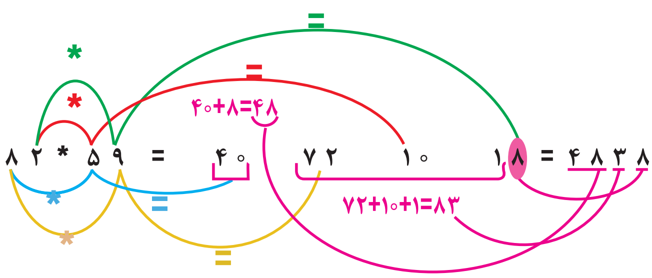
دهگان را در عدد اول از سمت چپ ضرب کرده و می‌نویسیم، بعد یکان را در عدد آخر ضرب کرده و می‌نویسیم، سپس یکان را در اولین عدد از سمت چپ ضرب کرده و با عدد بعدی جمع می‌کنیم، این‌کار را ادامه می‌دهیم، اگر عدد دو رقمی به ما ندهد همان ضرب جواب آخر ما می‌شود، اما اگر دو رقمی باشد از سمت راست به چپ، یکان عدد اول را نوشته و دهگان را با یکان عدد قبل جمع می‌کنیم. اگر حاصل جمع یک رقمی شد آن را می‌نویسیم، اگر دو رقمی شد، یکان را نوشته و دهگان آن عدد و یکان عدد قبل جمع می‌کنیم.

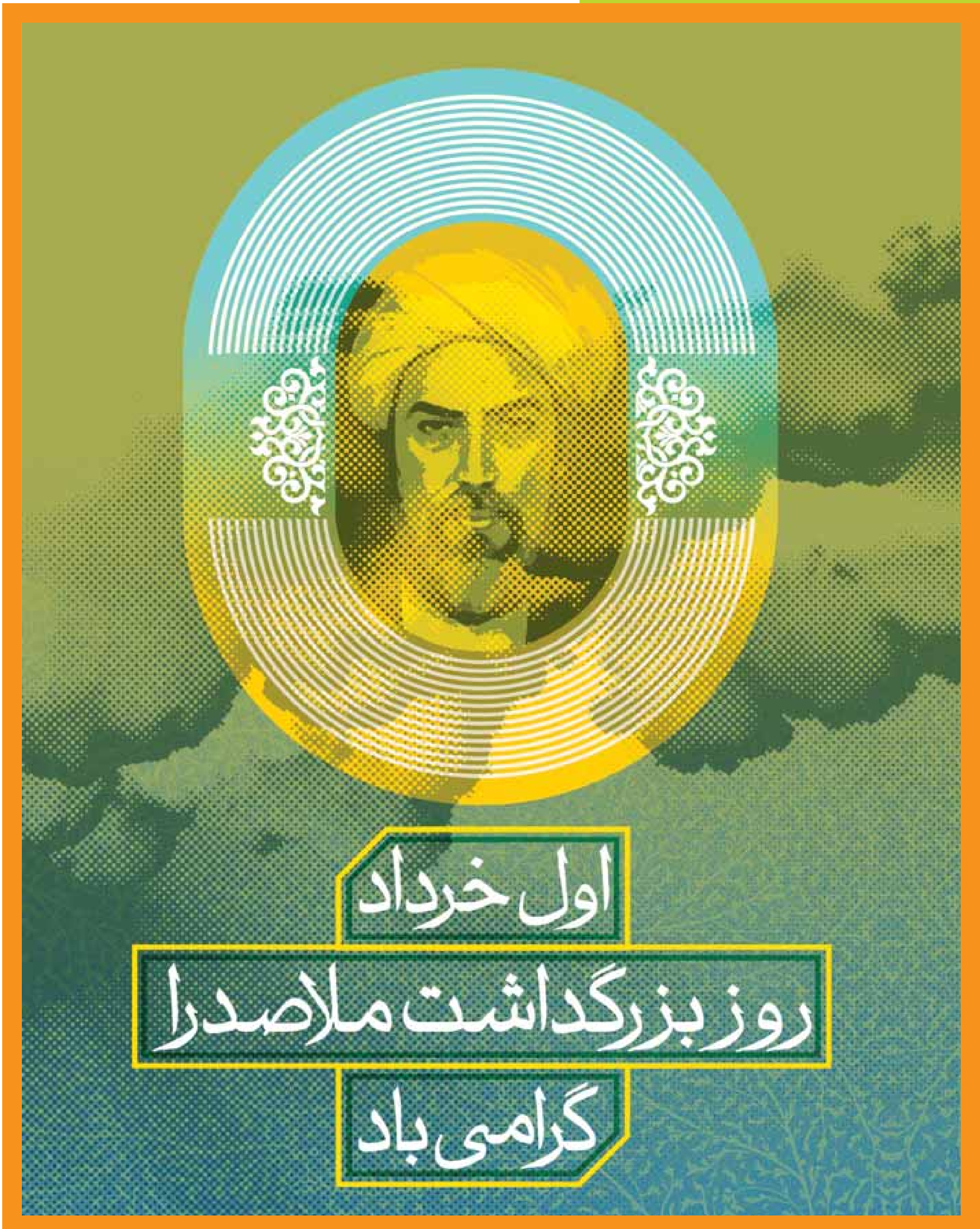



**روش دوم** ضرب اعداد ۱۱، ۲۲، ۳۳، ...، ۹۹ در یک عدد n رقمی: (دو رقم عدد یکسان باشد) ........................................




**روش سوم** ضرب اعداد دو رقمی در دو رقمی ........................................




اول خرداد
روز بزرگداشت ملاصدرا
گرامی باد