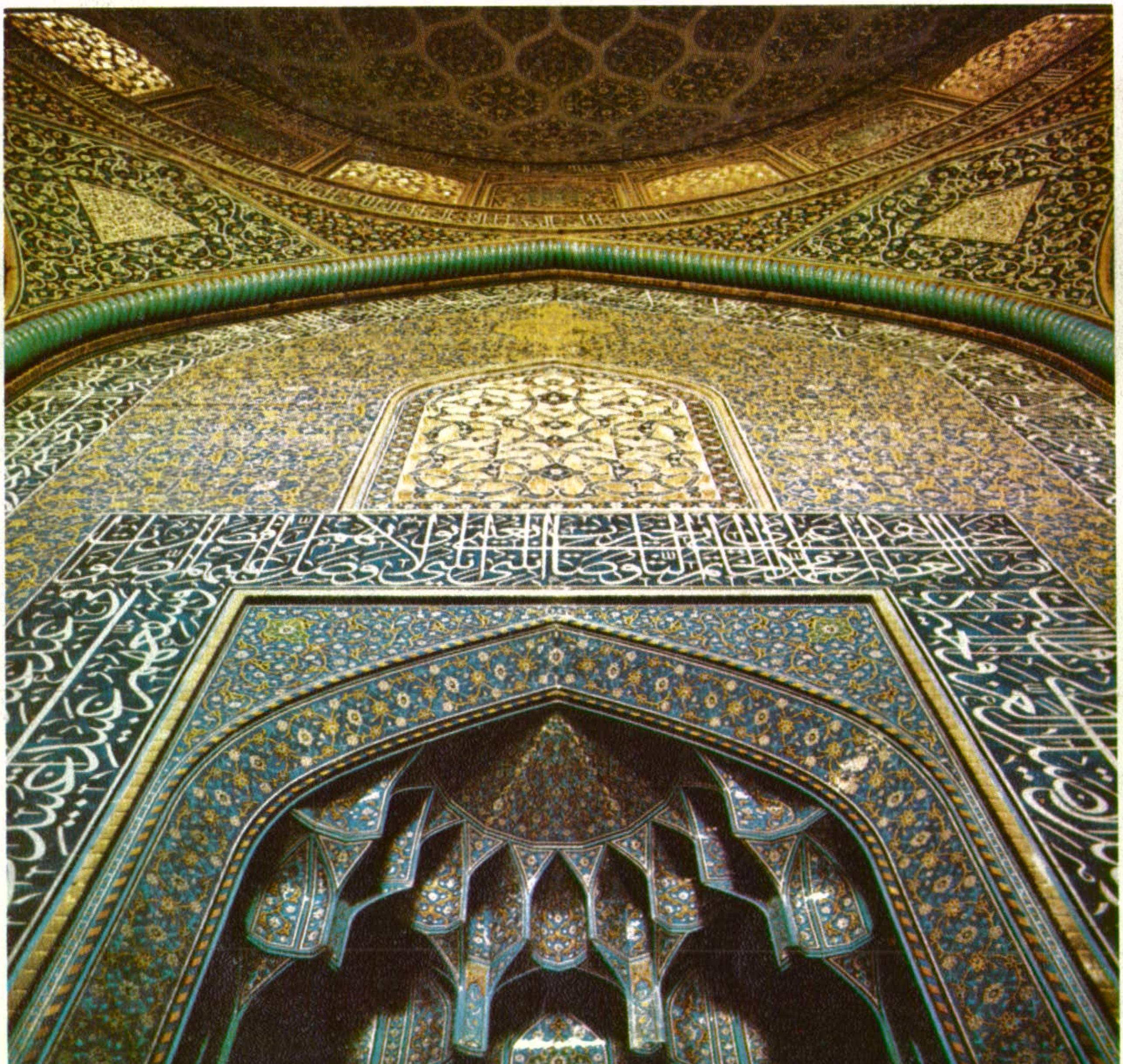
رشد

آموزش ریاضی

سال اول - شمارهٔ ۱ - بهار ۱۳۶۳ - بها ۱۰۰ ریال



رشد آموزش ریاضی

شمارهٔ ۱ ، بهـــار ۱۳۶۳

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی سازمان پژوهش

نشانی : خیابان ایرانشهر شمالی ساختمان شمارهٔ ۴ تلفن ۸۳۲۰۲۱

● مجلهٔ رشد آموزش ریاضی نشریهٔ گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی سازمان پژوهش وزارت آموزش و پرورش است که هرسه ماه یکبار منتشر می‌شود. هدف از انتشار این مجله در وهلهٔ اول ایجاد ارتباط متقابل بین معلمین ریاضی و دفتر مذکور، به‌منظور تبادل تجارب و آراء در زمینهٔ آموزش ریاضی است؛ و درمرحلهٔ بعد طرح و بررسی مسائل بنیادی ریاضیات مقدماتی و مطالب جنبی و مفید درسی، به منظور ارتقاء سطح معلومات معلمین ریاضی است. مجله از مشارکت و همکاری معلمین ریاضی در ارائهٔ مقالاتی ناظر براهداف فوق، بالاخص در زمینهٔ آموزش ریاضی، استقبال می کند.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

خدای راسپاس می‌گوئیم که ما را به انتشار نخستین شمارهٔ مجلهٔ «رشدآموزش ریاضی» موفق گردانید وراه تازه‌ای برای خدمتگزاری بیشتر به فرهنگ جمهوری اسلامی ایران فرا روی ما گشود. مناسب بنظرمی‌رسدکه دراین نخستین شماره سخنی درباب مقصد ومقصود ازاین مجله به‌میان‌آوریم وانتظاری راکه ازآن داریم بیان‌کنیم.

پیش ازبیان اهداف وفوائدی که ازانتشار رشدآموزش ریاضی انتظار داریم شمه‌ای ازوضع نامطلوب‌کنونی راشرح می‌دهیم‌تاخوانندگان برای‌تصور وتصدیق وضع مطلوبی‌که بانشر این مجله بدان باید رسید،آمادگی بیشترپیداکنند.

وضع‌کنونی چنین است‌که معلمان پس‌ازفراغت ازتحصیل، ارتباط منظم ومستمری بارشته تحصیلی سابق خودکه رشته تدریسی فعلی‌آنان است ندارند. بسیاری ازآنها به‌حکم وظیفه وشوق خدمت به‌شهرها وحتی بخشهای دورافتاده می‌روند و به‌بحث و درس واستاد وکتاب وکتابخانه وکتابفروشی دسترسی ندارند. تنهاکتابی‌که ناچار دردست آنهاست، غالباً همان‌کتاب درسی آنهاست‌که درآن نیزهرساله، تغییراتی‌کلی وجزئی روی می‌دهد بی‌آنکه آنان دلیل آن تغییرات راشنیده ودانسته باشند. گاهی بخشنامه‌ای که موفق شده خود را ازلابلای مقررات و موانع اداری تا دفتر مدرسه برساند بدست معلمان می‌رسدکه آن هم لحنی اداری وخشك وکوتاه دارد. کلاسهای‌آموزش ضمن خدمت نیز اگر تشکیل شود، کافی نیست و همچون باران بهاری کوتاهی است‌که تند می‌بارد و زود می‌ایستد ودوباره گرمای سخت وتشنگی آغازمی‌شود. اما این صدهاهزار معلمی که برای سربلندی و نجات جامعهٔ خود در روستاهای مهجور وشهرهای دور میهن خود خدمت می‌کنند محتاج یك جویبار جاری مداومی هستندکه‌آب زلال سرچشمه‌های علم وتجربه راآهسته وپیوسته همواره دردسترس‌آنان قراردهد. آیا «رشدآموزش ریاضی» می‌تواند آن جویبار جاری همیشگی باشد؟ امید ما این است، تاخدا چه‌خواهد.

باری، چه بایدکرد تا دبیران و معلمانی که برای کمك به‌محرومان ومستضعفان جامعه خود به‌نقاط دور وفاقد امکانات علمی وفرهنگی‌کافی هجرت‌کرده‌اند، درغربت و تنهایی، آنچه را خوانده‌اند فراموش نکنند وشوق و ذوق آموختن در دلشان نمیرد و ارتباطشان بارشته وحرفهٔ خویش قطع‌نگردد؟

مامی‌خواهیم مجلهٔ رشدآموزش ریاضی این رشتهٔ‌گسیخته را دوباره متصل سازد و آن شوق وذوق رابرانگیزد واین جماعت تشنه‌کامی راکه درهمه جای ایران، دور ازهم اما باهم، روبه سوی یك هدف مقدس درحرکتند، جرعه‌ای بنوشاند.

اهداف «رشد»

اکنون هنگام آن است تا اهم اهدافی راکه درانتشار این مجله، منظور نظر

بوده برشماریم تامعلوم شود رشدآموزش ریاضی، چگونه می‌خواهد این مقصود راتأمین کند.

۱ــ دانش‌افزائی

«رشد» بادرج مقالاتی متناسب با برنامه‌های درسی، دانش تخصصی معلمان را افزایش خواهد داد ومخصوصاً آنان را باپیشرفتهای جدیدی‌که درهریك از رشته‌های علمی ودر ارتباط با برنامه‌های آموزشی حاصل شده آشنا خواهد ساخت.

۲ــ آشنائی باروشهای تدریس

می‌دانیم‌که درآموزش وپرورش آنچه لااقل به‌اندازه خود «علم» اهمیت دارد، «روش تعلیم» است. رشد، می‌کوشد تا معلمان را با روشهای تدریس و پیچیدگیها و ظرافتهائی‌که دراین‌کار هست آشناسازد وآنان را از نوآوریهائی که در روش‌آموزش هر علم، درسطوح مختلف، پیداشده مطلع‌گرداند.

۳ــ مواد و وسائل‌کمك‌آموزشی

درهریك از رشته‌های آموزشی، علاوه برکتابهای درسی، مواد و وسائل وتدابیر گوناگونی ابداع شده‌که به‌آموزش کمك خواهدکرد. بحث پیرامون این مواد ووسائل، درهریك از رشته‌های درسی، یکی ازهدفهای رشد است.

۴ــ معرفی نشریات وکتب

بسیاری ازمعلمان، مخصوصاً آنان‌که درشهرهای‌کوچك ودور تدریس می‌کنند از کتابها ونشریات ومجلاتی‌که در رشته تخصصی‌آنان تألیف ومنتشرشده بی‌خبرند معرفی اینگونه نشریات وتوضیح محتوا ونقد وبررسی‌آنها یکی دیگر ازوظائف رشد است.

۵ــ تاریخ علوم

آگاهی ازتاریخ پیدایش وپیشرفت هریك از رشته‌های علوم، خود علم سودمندی است‌که هم فرهنگ معلم ودانش‌آموز را درکنار تخصص آنان، افزایش می‌دهد وهم معلم را درتدریس وتفهیم درس تواناتر می‌سازد. آشنائی باتاریخ علوم درسرزمینهای اسلامی ومخصوصاً ایران، می‌تواند معلمان ودانش‌آموزان مارا در بازیافتن اعتماد به‌نفس از دست رفته یاری‌کند وبه‌آنان این حقیقت را بقبولاندکه مسلمانان، امروز هم می‌توانند مانندگذشته راهبر وپرچمدار علم ومعرفت جهان باشند. رشد، درهر شماره صفحاتی را به تاریخ علوم اختصاص خواهد داد.

۶ــ آشنائی بامعلمان موفق وباتجربه

درهریك از رشته‌های درسی، رشد فرصتی پدید خواهدآورد تا معلمان‌وهمکاران موفق ومجرب خودرا بشناسند. «رشد»، معلمانی راکه عمری همچون شمع، سوخته‌اند تاجامعهٔ خودرا به‌نور علم روشن‌کنند، احترام خواهدکرد وتجربه‌ها وتوصیه‌های آنان را به دیگران منتقل خواهد ساخت. همچنین معلمانی را که درکار خویش توفیق داشته‌اند معرفی خواهدکرد تاعلاوه برقدرشناسی ازآنان، بابیان سر توفیقشان، معلمان دیگرنیز از ابتکارات آنان بهره‌مندگردند.

۷ــ آگاهی ازمسائل وپرسشهای نمونه

یکی‌از نیازمندیهای معلمان، مسائل وسؤالاتی است که درآنها ضوابط علمی و آموزشی وروانی لازم رعایت شده‌باشد و بتواند ارزیابی درستی از کارخود آنها وکار

دانش‌آموزانشان بدست‌دهد وشوق مطالعه بیشتررا درمحصلین برانگیزاند. «رشد» ازمیان سؤالات امتحانی مختلفی که دبیران وگروههای آموزشی درسراسرکشور طرح‌کرده وبه دفترمجله فرستاده‌اند، مسائل و پرسشهای نمونه را درهر شماره معرفی خواهدکرد. تا به تدریج گنجینه‌ای نزد همه معلمان یك رشته فراهم‌آید و ازاین طریق کیفیت آموزش بهبود یابد.

۸ـ طرح موضوعات مربوط به‌آیندهٔ هررشته

غالباً دانش‌آموزان از معلمان خود دربارهٔ آیندهٔ رشتهٔ خود، سودمندی آن برای جامعه، ادامه تحصیل دردانشگاه، بازارکار آن واموری نظیرآن سؤالاتی می‌کنند، «رشد» خواهدکوشید تاچشم‌انداز اجتماعی وعلمی هریك از رشته‌های درسی راکه درخارج‌از کلاس ومدرسه موجود ومشهود است پیش چشم معلمان ترسیم‌کند تاآنان‌بتوانند دانش‌آموزان خودرا دریافتن پاسخ سؤالاتی که طبیعتاً وبحق داشته ودارند، یاری کنند.

۹ـ آگاهی ازتصمیم‌گیریها وبخشنامه‌ها

درطول هرسال‌تحصیلی درخصوص‌هریك ازدروس، ازلحاظ نحوهٔ‌تدریس وامتحان وتکیه برکم وکیف مطالب‌کتب، تصمیمات متعددی دردفترتحقیقات وبرنامه‌ریزی درسی توسط کارشناسان مربوط به‌هر درس گرفته می‌شود. رشد فرصتی بدست می‌دهد تا این تصمیمات، علاوه‌برمسیر بخشنامه‌های اداری، ازاین طریق نیز به اطلاع معلمان برسد ودرصورت لزوم، معلمان باعلت اتخاذ هریك ازتصمیمات وتغییرات نیزآشناشوند مطمئناً توجیه هرتصمیمی برای مجریان، به‌اجرای بهتر وصحیح‌تر آن تصمیم‌کمك خواهدکرد.

۱۰ـ آگاهی ازبرنامه‌ها وبرنامه‌ریزیهای آینده واظهار نظر دربارهٔ آنها

درهریك از رشته‌های درسی، کارشناسان با تحقیق درتحولات علمی و آموزشی آن رشته واطلاع از اهداف آموزش وپرورش جمهوری اسلامی ایران و نیازهای جامعه همواره برای بهبود کارخود برنامه‌ریزی می‌کنند. رشد، عرصهٔ مناسبی است تاکارشناسان فلسفه، برنامه‌ها و برنامه‌ریزیهای خود را به‌اطلاع معلمان برسانند و قبل از اجرای آن برنامه‌ها ازآنان نظرخواهی کنند وبدینسان همگان را درایجاد هرتحول مثبت شریك سازند و ازاین طریق نسبت به‌تصحیح برنامه‌های خود ونیز اجرای صحیح‌آن برنامه‌ها اطمینان بیشتری حاصل‌کنند.

۱۱ـ اطلاع ازتحقیقات واخبار مربوط به‌هریك از رشته‌های درسی

آخرین نکته این‌است‌که «رشد» خواهد کوشید درهر شماره اخبار مهم و مفید مربوط به‌هریك از رشته‌های درسی را، چه درسطح جهانی وچه درداخل‌کشور، ازقبیل تحقیقات مربوط به‌وضعیت و سرنوشت رشته‌های درسی درآموزش و پرورش، سمینارها و انجمنها وفعالیتهای علمی ویا اخبارمربوط به‌پذیرش و آموزش رشته‌های دانشگاهی را به‌اطلاع معلمان برساند وراههای تازه‌ای را که درجامعه، پیش‌پای فارغ‌التحصیلان دبیرستانی هر رشته گشوده شده مشخص کند وخلاصه، سعی خواهدکرد هرگونه حرکت و نشاط خارج ازمدرسه راکه اطلاع از آن برای معلم و شاگرد حرکت و نشاط می‌آفریند منعکس سازد.

اگر «رشد آموزش ریاضی» بتواند درکنار دیگر مجلات «رشد» که برای دروس دیگر منتشر خواهد شد به‌این اهداف دست یابد، قدمی در راه اعتلاء کیفیت آمـوزش

برداشته خواهدشد ومعلمان رشته‌ای برای ارتباط با استادان و همکاران خود وآینه‌ای برای تماشای چهرهٔ خویش ودیگران‌پیدا خواهند کرد. پیداست که نیل‌به‌این اهداف، جز باهمدلی وهمکاری همهٔ معلمان وصاحبنظران سراسرکشور حاصل نخواهد شد.

همکاران‌گرامی! معلمانی‌که افسران خط‌مقدم جبههٔ مبارزه‌باجهل وعقب‌ماندگی هستید! «رشدآموزش ریاضی» دستی است که ازسوی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش وپرورش، صمیمانه به‌سوی شما دراز می‌شود، این دست را در دست خویش باگرمی بگیرید وبفشرید.

اکنون که ملت شما درجهان برای گسیختن زنجیرهای بندگی بپاخاسته و در شب ظلمانی دنیای ظلم و زور معاصر، همچون چراغی گیتی‌فروز می‌درخشد،

اکنون که نوجوانان ودانش‌آموزان مدرسه‌های شما برای استقرار دین خدا وعزت وشرف و سربلندی میهن اسلامی خویش، گروه گروه به جبهه‌های جنگ می‌شتابند و وجانفشانی می‌کنند تا جمهوری اسلامی، مستقل وآزاد باقی بماند،

اکنون که پس‌از قرنها وهزاره‌های ستم، رهبری مانند امام خمینی، بااین همه ایمان واخلاص ودانش وبینش ودلسوختگی وصمیمیت وسادگی، برای نجات مسلمین از استضعاف وعقب‌ماندگی بپاخاسته ودرجان مردم شوری بی‌سابقه درافکنده است،

وظیفهٔ همهٔ ما این‌است که باشناخت قدرنعمت اسلام وآزادی برای نجات از جهلی‌که دشمنان برما تحمیل‌کرده‌اند بپاخیزیم. همهٔ مامسئولیم. گمان ما این است‌که انتشارمجلات رشد، قدمی‌کوچک در راه دراز و دشوار مسئولیت عظیمی است‌که بردوش داریم. توفیق شمارا نیز در ایفای وظیفهٔ خطیری که به‌عنوان یک «معلم» درآموزش و پرورش جمهوری اسلامی ایران ودر انقلاب اسلامی برعهده دارید از خداوند قادرمتعال خواهانیم.

غلامعلی حداد عادل
معاون وزیر ورئیس سازمان پژوهش و
برنامه‌ریزی آموزشی

«من چیزی ندارم تا تعلیم دهم، کار من زادن ذهن‌ها است.»
«سقراط»

نگرشی بر فلسفه و آموزش ریاضیات

دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

روش آموزش ریاضیات به‌فلسفه‌ی‌ریاضی موردقبول ما بستگی دارد. دراین مقاله، سعی براین است تا پس‌از مروری مختصر بر فلسفه‌های مختلف ریاضی، روشن‌کنیم که‌کدام فلسفه به‌آموزش بهتر ومؤثرتری می‌انجامد. سپس اشاره‌ای هم خواهیم‌داشت برچگونگی آموزش‌مطلوب ومتناسب بافلسفه‌ی مورد قبول‌مان، به‌نحوی‌که‌بتوان آنرا به‌عنوان روش تدریس ریاضیات در دوره‌های مختلف تحصیلی بالاخص در دورهٔ ابتدایی بکاربرد.

۱ـ نظری برفلسفه‌های ریاضی:

درطول تاریخ ریاضی عمدتاً چهارفلسفه برای بنیان‌گذاری ریاضیات وجود داشته است‌که عبارتند ازمنطق‌گرایی[1]، صورت‌گرایی[2]، شهودگرایی[3]، وفرضیه‌ای[4].

منطق‌گرایی به‌وضعیتی اطلاق می‌شودکه درآن ریاضیات با منطق علامتی (نمادی) یکی پنداشته می‌شود. یکی ازپیشروان نخستین چنین فلسفه‌ای برتراندراسل[5] می‌باشد.

صورت‌گرایی به‌وضعیتی‌گفته می‌شودکه ریاضیات راصرفاً مجموعه‌ای‌ازعبارات ونمادهای صوری[6] می‌پنداردکه‌اعمال و ترکیبات برآنها برطبق قواعدی ازپیش تعیین‌شده انجام می‌گیرد. درصورت‌گرایی‌کاری بامعنی فرمولها وعبارات انجام نمی‌شود وهرتغییر از آنهارا عملی خارج ازدنیای ریاضیات می‌پندارد.

شهودگرایی، معمولا در مقابل روش استدلالی ومنطقی‌گفته می‌شود ودراین فلسفه‌کشف وشهود عینی نقش اساسی دارد وکمتربه استدلالات پیچیده توجه می‌شود، مانند وقتی‌که خاصیت هندسی از یك جسم فضایی را دریك مبحث هندسی شرح‌بدهیم واز استدلال و اثبات‌آن درگذریم. فلسفه‌های دیگری نیزبرای ریاضیات نام‌برده‌اندکه هریك ازجهاتی بایکی ازفلسفه‌های مذکورمشترك می‌باشند.

در این مقاله بیش ازاین وارد این فلسفه‌ها نمی‌شویم چه آنکه هدفمان ازاین‌مبحث‌بیشتر بررسی‌پیآمدهای‌آموزشی آنهااست.

درهریك ازسه دیدگاه اول، یعنی منطق‌گرایی، صورت‌گرایی، وشهودگرایی‌که هرکدام درزمانی خاص به‌اوج اعتبار خود رسیده است، عمدهٔ سعی وتلاش براین بوده‌است تا ریاضیات به عنوان یك دانش‌کلی[7] تعریف‌گردد. مرادمان ازدانش‌کلی، دانشی است‌که باتوجه به‌دیدگاه فلسفهٔ افلاطونی سعی درتعریف ریاضیات به‌عنوان یك دانش متمرکز[8] دارد، دانشی‌که موضوعات مختلف‌آن حول یك موضوع اساسی‌تر وبرمبنای‌آن قابل تبیین وبنیانگذاری هستند. ازاین حیث می‌توان‌گفت‌که تلاش حوزه‌های فلسفی صورت‌گرایی، منطق‌گرایی وشهودگرایی‌یکی‌است، تعریف وبنیان‌گذاری ریاضیات به‌عنوان یك دانش عمومی وکلی به‌روش اصل موضوعی. پیداست‌که درهریك ازاین سه دیدگاه وجهی ازمعرفت‌که وجه‌تسمیه آن‌است‌اهمیت‌واعتباراساسی دارد. فی‌المثل‌دردیدگاه صورت‌گرایانه ریاضیات چنین تعریف می‌شود:

ریاضیات موضوعی‌است‌که می‌توان‌آن رادرون نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه وبا استفاده ازمنطق محمولی‌کلاسیك انجام داد، ویا دردیدگاه منطق‌گرایانه تلاش براینست تا نشان داده شودکه ریاضیات ومنطق دارای ساختاری[9] واحدند.

اما دردیدگاه چهارم، یعنی فلسفهٔ فرضیه‌ای بودن‌ریاضیات، ریاضیات به‌عنوان یك دانش‌کلی مطرح نمی‌شود ویا دقیقتربگوئیم برخلاف حوزه‌های فلسفی فوق‌الذکر، دراین روال‌کوشش وتلاشمان این نیست‌که دانش ریاضی را به‌عنوان یك دانش‌کلی تعریف و پایه‌گذاری‌کنیم. خصوصیات این فلسفه بیان ماهیت عمومی ومشترك شاخه‌هایی ازمعرفت است‌که‌تحت نام ریاضیات پذیرفته شده‌اند. از دید این فلسفه، ریاضیات‌واجد دوماهیت نیمه‌تجربی[9] وکشفی[10] است.مراد ازنیمه‌تجربی‌بودن‌آنست‌که حقایق ریاضی باتوجه به‌جهان خارج (جهان فیزیکی) ابتدا ازطریق تجربه به‌ذهن القا می‌شوند. مقصود ازکشفی‌بودن ریاضیات آنست‌که مفاهیم وروابط اساسی ریاضی خود فی‌نفسه وبشکل تجربه‌ای قابل‌کشف‌اند وپس‌ازکشف است‌که تلاش می‌شود تا دریك سازمان وساختار صوری بصورتی منظم‌تر وبه‌روش اصل موضوعی سازمان یابند، به‌گفتهٔ لاکاتوز[11] ریاضیات رانباید بعنوان یك‌کلیت افلاطونی پنداشت وبنابرگفتهٔ بلیر[12] ریاضیات، بخصوص ازجنبهٔ‌آموزشی، ترجیحاً یك فعالیت از ذهن بشری‌است تامجموعه‌ای ازحقایق لایتغیر. البته‌آن فعالیتی

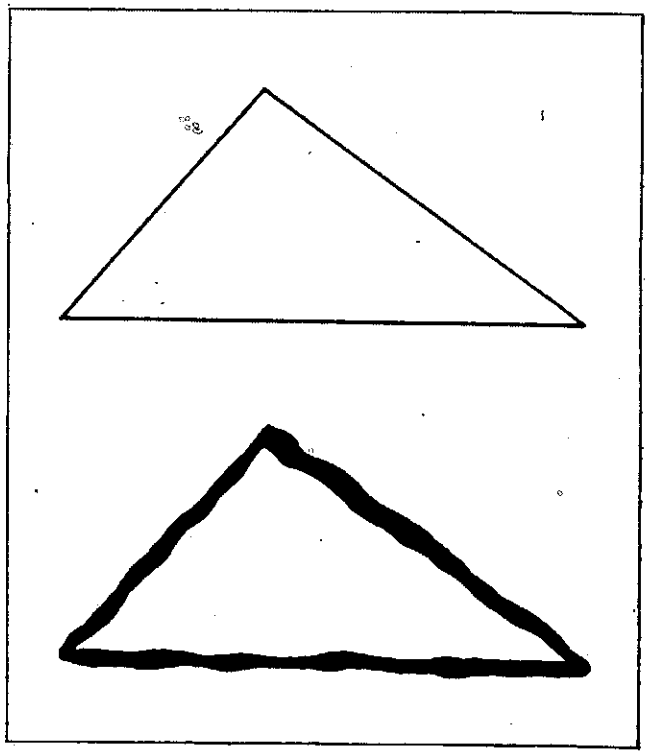
منجر به ریاضیات می‌شود که به‌یك ساختار منظم صوری بیانجامد. ازساختار بوجود آمده وساختارهای قبلی مجدداً ساختارهای دیگری بوجود آمده و بدینسان ریاضیات گسترش و توسعه می‌یابد و بدیهی است این توسعه توسط فعالیت بشری انجام می‌گیرد که دراین مقام بدان فعالیت ریاضی[13] می‌گوییم. به‌گفتهٔ ساندرزمك‌لین[14] ریاضیات مشتمل بر کشف مراحل متوالی ساختارهای صوری[15] است که در بطن دنیا وفعالیتهای بشری نهفته‌است.

اکنون به‌خاطر بهره‌جویی آموزشی ازاین تحلیل، خصوصیات فعالیتهای ریاضی راذکرمی‌کنیم زیرا ازجنبهٔ آموزشی، ریاضیات را می‌توان مترادف بافعالیتهای ریاضی پنداشت (بعضی‌ها می‌گویند ریاضیات آن چیزی است که ریاضیدانها انجام می‌دهند.)

فعالیتهای ریاضی خصوصیات چندجانبه‌ای دارند که اهم آنها بقرارذیل است:

۱ــ باتوجه به‌دنیای واقعی، به‌کشف روابط ومفاهیم موجود پرداخته وبدانها سازمان وساختارمی‌دهد.

۲ــ ازطریق طبقه‌بندی ومجردکردن به‌کشف مفاهیم پرداخته وبه‌عمومیت دادن آن می‌پردازد. فی‌المثل از توجه به مثلث فیزیکی ومجردکردن (ایده‌آل نمودن) آن به مثلث ریاضی می‌رسیم وسپس باتعمیم به‌چهارضلعی‌ها، پنج‌ضلعی‌هاوبطورکلی n ضلعی پی‌می‌بریم.



۳ــ فعالیتهای ریاضی اعجاب‌انگیزند که این امر مغایر با شهودگرایی صرف میباشد. برای مثال بااستفاده ازمفاهیم تناظر یك‌به‌یك وهمعددبودن نشان داده می‌شود که مثلا مجموعهٔ نقاط پاره خطی به‌طول یك‌سانتی‌متر مساوی است بامجموعه نقاط پاره‌خطی به طول یك‌کیلومتر.

۴ــ فعالیتهای ریاضی شامل استخراج نتایج ازمفروضات، کنترل کردن نتایج وقانع کردن دیگران درمورد نتایج حاصله‌اند.

فعالیتهای ریاضی به‌نسبت زیادی به‌نمادها[16] (علامات) بستگی دارند. نمادها در ریاضیات نقش‌به‌سزایی دارند، که اهم آن عبارتند از ایجاد ارتباط، آسان نمودن روابط پیچیده، و ثبت دانش ریاضی.

فعالیتهای ریاضی شامل مهارتهای طبیعی وفطری‌اند که عبارتند از، فکر کردن، با جهان‌فیزیکی مواجه شدن، فعالیت ذهنی وخلق ذهنی‌کردن، ومدل ساختن.

اینك‌که ماهیت ریاضیات، به‌عنوان یك فعالیت‌بشری، باتوجه به‌فلسفهٔ فرضیه‌ای و نیمه‌تجربی بیان گردید باید متذکر گردیم‌که این فلسفه، فلسفه‌ای مقابل هیچیك ازسه فلسفهٔ قبلی نیست بلکه دراین دیدگاه نیزمقام منطق وبیان ساختارهای صوری جهان واقعی و استفاده ازشهود بشری نیز بنوبهٔ خود اهمیت بسیاری دارند. اکنون نشان میدهیم که روش‌آموزشی منبعث ازاین فلسفه، باتوجه به‌اهداف آموزش ریاضی، موفق‌تر وکارآتر از روش‌آموزش مبتنی برفلسفه‌های دیگر است.

۲ــ روشهای آموزش ریاضیات:

گفتیم که فلسفه‌های‌صورت گرایی، منطق‌گرایی وشهودگرایی، ریاضیات را به‌عنوان یك دانش‌کلی ومتمرکز تلقی می‌نمایند، بنابراین روشهای‌آموزشی راکه جهت فراگیری این علم پیشنهاد می‌کند، بالطبع روش اصل موضوعی یاروش اقلیدسی‌می‌باشد. دراین روشها همچنانکه می‌دانیم بعضی ازاحکام به‌عنوان قضایای بدیهی و یا اصول موضوعه پذیرفته می‌شوند وبقیهٔ قضایا و احکام به‌روش استنتاجی ازقضایای قبلی منتج می‌شوند. دراین روش‌آنچه‌که مهم است یك‌متعلم (دانش‌آموز یادانشجو) بداند، فنون‌استنتاج‌می‌باشد. خصوصیت مهم این روشها دراین است‌که درآنها جای هرقضیه و مطلبی عموماً ثابت ومشخص است وکمترمی‌توان قضیه یامطلبی را ازحیث مواد برنامه جابجاکرد، به‌گفته هیلبرت[17] صورت‌گرا

... یکبار وبرای همیشه درستی وصحت مطالب ریاضی تحقق می‌یابد.

دراین‌روش چنین‌استنباط می‌شودکه کارعده‌ای کشف ریاضیات بوده وکارعده‌ای دیگر(معلمین) آن‌است که‌مطالب‌کشف شده رابه سر محصلین واریز نمایند. اینگونه روشها به‌نامهای روش‌قاعده‌گویی، روش استدلالی ویاروشهای زبانی موسومند و ما دراینجا ازآنها به نام روش شرحی[18] ویا روش‌توصیفی یاد می‌کنیم. ضعف عمدهٔ این دسته روشها آن‌است‌که به‌توانائیها وفعالیت‌های نظری‌بچه‌ها توجه کافی نمی‌شود وبه عوض رشد وگسترش این توانائیها و استعدادها بتدریج باعث تحلیل‌آنها شده ومحصلینی‌که به‌این روش تحصیل می‌کنند کمترمی‌توانند دربرخورد باجهان واقعی به‌خلق وابداع پرداخته وابتکارات لازم را ازخود بروز دهند.

درمقابل وقتی ریاضیات را به‌عنوان یك فعالیت بشری مطرح نمائیم آموزش آن نیز لـزوماً آموزشی فعال خواهدبـود که طی آن محصلین باراهنمایی معلمیـن خود به‌تجربه و فعالیتهای فردی یا گـروهی (تعاون) مشغول بـوده و تلاش می‌کنند به‌کشف مفاهیم و روابط مطلوب،که توسط معلم طرح‌ریزی می‌شوند، نایل شوند. در اینجا عمدهٔ نقش معلم باتوجه به‌مواد درسی مربوطه طرح مسئله یا مسائلی است‌که منجربه بحث‌بین بچه‌ها وکاوشگری آنها شده ونتایج بدست‌آمده راکنترل وهدایت‌کلاس رابعهده دارد. ازایـن‌رو این روش تدریس رابهتربگوئیم روش‌یادگیری را روش یادگیری فعال[19] ویا یادگیری‌کاوشگری[20] نامیده‌اند. مهارت معلم دراین روش‌بسته به‌این است‌که‌بتواند ضمن طرح مسئله یا مسائل مناسب، بچه‌ها را در موقعیتهایی قراردهد تابتوانند به‌کاوشگری پرداخته ونتایج خود را به‌بحث گذاشته وبه‌کشف ساختـارهای ریـاضی نهفتـه درآن موقعیت نائل شوند. درایـن فلسفه،آموزش نیزمعنای دیگری پیدا می‌کند وبه‌عـوض آموزش‌های زبانی یاشرحی درآن معلم‌گوینده و محصل فقط شنونـده است، یادگیری فعلیت می‌یابـد و استعدادهای بالقوهٔ محصلین ازقوه به‌فعل درآمده وشکوفا می‌شود. خلاصه‌آنکه محصلین به‌جای‌آنکه‌آموزش ببینند مطالب رایاد می‌گیرند ومهمتر ازهمه یاد می‌گیرندکه چگونه باید یادبگیرند. کلیه فعالیتهایی راکه برشمردیم فعلیت می‌یابد واستعدادها وتوانائیهای نهفتهٔ آنان رشد یافته وگسترش پیدامی‌کند.

مکانیزم وچگونگی اجرای ایـن روش ازبحث ایـن مقوله خارج‌است، ضمناً متذکر می‌شویم‌که بکارگیری ایـن روش درمدارس دارای محدودیتهایی نیزمی‌باشد ولی به‌عهدهٔ برنامه‌ریزان ومعلمین است تاتلاش‌کنند روشهای تدریس‌خودرابسوی این‌روش سوق دهند. به‌علاوه یادآوری می‌کنیم‌که بـرخلاف تصوربعضی‌ها، تدریس‌به‌روش فعال سابقه‌ای بس طولانـی داشته وقدمت‌آن به‌اندازهٔ خود یادگیری طولانی است وبه‌گفتهٔ سقراط بهترین راه یادگیری هرچیزکشف‌آن چیزبوسیله متعلم (یادگیرنده) است.

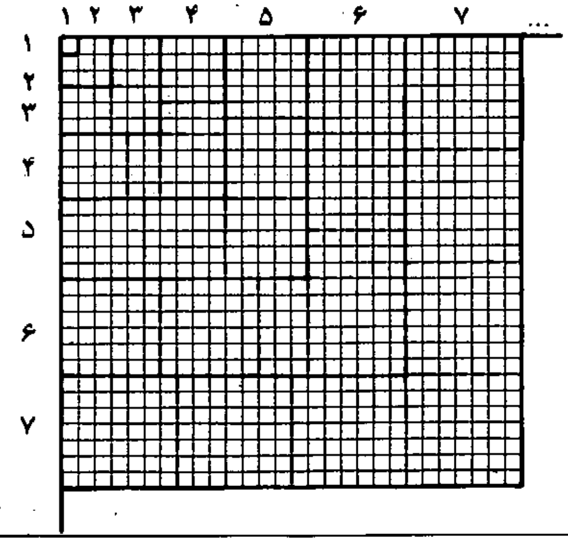
1- Logisism
2- Formalism
3- Intiutionism
4- Hypotetical
5- Bertrand Russel
6- Formal Symbols
7- General Knowledge
8- Centered Knowledge
9- Empiricism
10- Heuristic
11- Lakatos, I, 1976. mathematics Science and Epistemology, C. U. P.
12- Blaire, E.
13- Mathematics activity
14- Mclane, S.
15- Farmal Construction
16- Symbols
17- Hilbert, D.
18- Discriptive method
19- Actire learning
20- Discovery method

منابع

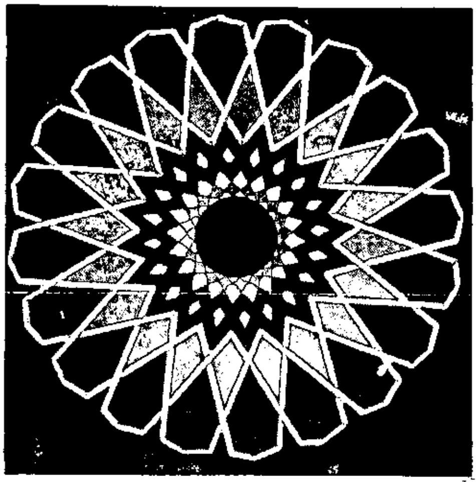
21- S. Lerman, Problem – Solving or Knowledge – Centered, international, Y. of Mathematical Education, 14 No, I. 1983.

22- Mathematical Modeling, S. Mclane, the American Mathematical Monthly, 88 No, 7, 1981.

***



$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots+n^۳ =(۱+۲+۳+\cdots+n)^۲$$



هندسه در دبیرستان

حسین غیور

هندسه، علمی است که در حدود بیست قرن پیش به‌وسیلهٔ اقلیدس جمع‌آوری و تدوین شده است. این دانش کهن مجموعه‌ای از تعریفها واصول واحکام وقضایا راجع به اندازه‌های درازا ومساحت وحجم در سطح مستوی وفضای یکنواخت اقلیدسی است که بارشته‌ای منطقی به‌هم پیوسته وکشفیات ارشمیدس دانشمند نامدار دنیای قدیم راجع به‌دایره وکره همچنان در آن می‌درخشد.

بعد از نهضت علمی اروپا، به‌وسیله علمای بزرگ ریاضی، به تدریج اعداد منفی وبی‌نهایت بزرگ وبی‌نهایت کوچک وعناصر موهومی درهندسه داخل میشود وآن را درسطوح وفضاهای مختلف به‌طور شگفت‌انگیزی گسترش می‌دهد که شرح بسیار مختصر آن‌هم از حوصله وهدف این مقاله بیرون است.

بسیاری ازعلوم ریاضی مانند جبرومقابله (نظریهٔ معادلات) ومثلثات درهندسه تحلیلی وعلوم مهندسی مانند مناظر و مرایا و هندسه‌های ترسیمی و رقومی وصدها علم دیگر ازآن منشعب میشود.

روش اصل موضوعی که امروزه درهمهٔ علوم ریاضی وبسیاری از مباحث فیزیک روش منحصربفرد وقابل قبول است، ابتدا در هندسه به‌گونه‌ای عنوان شده وازآنجا به‌سایرعلوم سرایت کرده است.

جالب توجه است که در راه تکامل هندسه که منتهی به‌پیدایش هندسه‌ها وفضاهای جدید شده ردپای دانشمندان بزرگی چون حکیم عمرخیام نیشابوری وخواجه نصیرالدین طوسی به‌چشم می‌خورد که در ذیل به‌آن اشاره‌ای می‌شود.

خیام ریاضی‌دان ومنجم که دراصلاح تقویم جلالی عضوی مؤثر بوده واولین کسی است که درجبر ومقابله، معادلات را برحسب درجهٔ مجهول مرتب وباروشی تحلیلی‌گونه حل‌وبحث کرده است[1]، در رساله‌ای در«شرح ماشکل من مصادر اقلیدس»، به‌اصل توازی که در تحریر اقلیدس جزء اصول متعارفی آمده ایراد می‌گیرد ومی‌گوید که این حکم نیاز به‌اقامهٔ برهان دارد زیرا حکمهای ساده‌تر ازآن اثبات شده وخود برای اثبات آن هشت مقدمه می‌آورد. بعدها خواجه نصیرالدین طوسی دانشمند وریاضی‌دان بزرگ، مقدمهٔ هشتم اورا مخدوش می‌یابد ودراین زمینه مطالعات دقیق و باارزشی انجام می‌دهد، که بعدها موجب شهرت اودر اروپا می‌شود. این مطلب قرنها ادامه پیدا می‌کند وبه‌اروپا کشیده می‌شود، تادر اواخر قرن نوزدهم منتهی به‌کشف هندسه‌های غیر اقلیدسی، ریمانی، و لوباچفسکی میگردد.

هندسه علاوه‌بر اینکه چون علم به‌اندازه‌گیری مکان است، مورد نیاز اکثر دانشها و تخصص‌های مهندسی است و ازعلوم پایه بشمار می‌آید، ازنظرآموزشی نیز حائز اهمیت بسیارمی‌باشد. رسم شکل واشاره و استناد به‌آن که درتکامل وپیشرفت هندسه عاملی بازدارنده ومزاحم است، به‌این دانش که تاروپود آن باروش استدلالی بهم بافته شده، مانندعلوم طبیعی جنبهٔ مشاهده وتجربه می‌دهد و ازاین‌رو برای نوآموزان مدخل مناسبی برای علوم ریاضی یابطورکلی علوم بشمار می‌آید. **برای‌مثال،** دانش‌آموزی که درسالهای اول متوسطه ثابت می‌کندکه سه ارتفاع مثلث متقارب است وآنگاه بارسم سه ارتفاع درمثلثهای مختلف نتیجهٔ اثبات شده را به‌محک تجربه می‌زند ودرستی قضیه‌ای راکه بادلیل‌وبرهان ثابت کرده باچشم می‌بیند، این عمل‌ذوق واستعداد وقوهٔ‌ابتکار اورا برمی‌انگیزد وبه‌کارمی‌اندازدکه‌هدف‌اصلی ازآموزش‌درمتوسطه‌است.

بسیاری از دانشمندان درجهٔ اول که نظریهٔ آنها تحولی در جهان علم پدیدآورده وبه‌کشفیات بزرگ نائل‌آمده‌اند ازچگونگی اثرمطبوعی که هندسه درآغازکار در ذهن واندیشهٔ آنها داشته و به شکوفایی استعداد وپیشرفت‌کار آنها انجامیده است، یاد کرده‌اند و شرح حال‌آنها پر از اینگونه مقوله‌هاست.

درعصرحاضر که دانشها در رشته‌های گوناگون‌پیشرفت شایان توجهی کرده ودانستنیها به‌حدی فزونی یافته‌که‌آنراعصر انفجارعلم نامیده‌اند، ازطرفی نمی‌توان‌بنابرآنچه باختصارگفته‌شد هندسه را ازبرنامه حذف‌کرد وازجهات دیگربرای‌جلوگیری از اتلاف‌وقت وحوصلهٔ دانش‌آموزنمی‌توان تمام هندسه را باهمان روشهای قدیمی از اول تاآخر تدریس کرد، بایدتغییرات‌مناسبی‌درمحتواوکیفیت‌درس هندسه که‌دردبیرستان تدریس می‌شود بانظرخواهی از دانشمندان، و دبیران و دست‌اندرکاران داده شودکه یکی ازهدفهای موردبحث دراین‌مجله درآیندهٔ نزدیک است.

۱- خیام عالم‌جبر تالیف دکتر غلامحسین مصاحب ازانتشارات انجمن‌آثارملی

اگرقصد پیش‌بینی آیندهٔ ریاضیات را داشته‌باشیم، طریق‌مناسب مطالعهٔ شرایط‌کنونی وگذشتهٔ علم است.

هانری پوانکاره

چکیده. آیاریاضیات‌قدمتی بیش‌ازتمدنهای بابلی ومصر وچین‌وهند دارد؟ آیا می‌توان برای آن مبدأ ومنشأ واحدی‌متصورشد یاهریك از این ملل به‌فراخور حال درپیدایش این علم‌سهمی داشته‌اند وریاضیات کنونی ازبه‌هم پیوستن نتایج این کوششهای جداگانه سرچشمه‌گرفته است؟ نقش‌احتیاجات‌روزمرهٔ انسانی درپیدایش آن مؤثرتربوده‌است یاجوشش ذهن هوشمند انسانی؟

دراین مقاله، این سؤالات مجملاً بررسی‌شده‌اند وجدیدترین نظریات وان‌در واردن، مورخ شهیر وریاضیدان نامی باختصارمطرح شده است.

گفتاری درباب منشأ ومبدأ ریاضیات

دکتر محمدقاسم وحیدی

قسمت اعظم موضوعی که امروزه تحت عنوان ریاضیات شناخته می‌شود، محصول تفکری است که بدواً حول مفاهیم عدد، کمیت، وشکل مُتمرکز بوده‌است. تعاریف قدیمی از ریاضیات به عنوان «علم عدد و کمیت» دیگر اعتباری ندارند، اما سرآغازهای شاخه‌هایی از ریاضیات را به‌ذهن القامی‌کنند. ردپای‌تصورات بدوی مربوط به‌مفاهیم عدد، کمیت، وشکل را می‌توان تا روزهای اولین نژادهای انسانی دنبال‌کرد، وطرحهای بدوی مفاهیم ریاضی را می‌توان در اشکالی از زندگی‌که میلیونها سال مقدم برپیدایش نوع بشرند، پیداکرد. بعضی ازحیوانات عالی صاحب توانائیهایی از قبیل حافظه وتعقل‌اند وتوانائیهای تشخیص عدد، اندازه، ترتیب، شکل ــ مبادی یك ادراك ریاضی ــ منحصراً از اختصاصات انسانی نیستند. مثلا، آزمایشهایی‌که درمورد کلاغان به عمل آمده، نشان می‌دهدکه حداقل بعضی از انواع پرندگان قابلیت تمیز بین مجموعه‌هایی با حداکثر چهارعضو را دارا‌هستند. دربسیاری ازانواع پست زندگی بوضوح آگاهیی‌بر تفاوتهایی‌که درترکیب پیرامونشان پدید می‌آید، وجود دارد، واین باعلقهٔ ریاضیدان به‌شکل ورابطه، خویشاوندی دارد.

زمانی تصورمی‌شدکه ریاضیات مستقیماً باجهان تجربهٔ حسی ماسروکار دارد، وتنها درقرن نوزدهم‌بودکه ریاضیات ناب، خودرا ازمحدودیتهای اعمال‌شده توسط مشاهدات مستقیم‌برطبیعت رهاکرد. روشن است‌که ریاضیات بدواً به‌صورت بخشی اززندگی روزمرهٔ انسان پدیدارشد واگر براصل زیست‌شناسی «بقای اصلح» اعتباری باشد، پایندگی نژاد انسانی، احتمالاً بدون‌ارتباط باتوسعهٔ مفاهیم ریاضی درنزد انسان نیست. درابتدا تصورات عدد، کمیت، وشکل ممکن است مرتبط باوجوه تمایز باشد تا باوجوه تشابه ــ تفاوتی که بین یك‌گرگ وگرگان بسیار وجود دارد، نابرابری موجودبین اندازه‌های یك ماهی‌کوچك ویك نهنگ، عدم شباهت‌گردی ماه به استقامت یك درخت سرو. تدریجاً ازدرون تشتت تجارب‌گوناگون، تشخیص شباهت می‌بایست پدیدار شده‌باشد. خود تفاوتها ظاهراً اشاره به‌شباهتها دارند ، زیرا مقایسهٔ یك گرگ و گرگان بسیار، بین یك گوسفند و گله‌ای از گوسفندان ، بین یك درخت و یك جنگل وجود وجه اشتراکی بین یك گرگ ویك گوسفند، و یك درخت را مطرح می‌کندکه همان وحدت‌آنهاست. به‌همین طریق توجه می‌شودکه برخی‌گروهها، مانند زوجها، رامی‌توان دریك‌تناظر

یك به‌یك قرارداد. دستها را می‌توان با پاها، چشمها، گوشها، و سوراخهای بینی تطبیق داد. چنین شناختی ازیك خاصیت انتزاعی که وجه مشترك برخی گروههاست، وما آنرا عدد می‌نامیم، نشان‌دهندهٔ برداشته شدن یك گام بزرگ به‌سوی ریاضیات جدید است. غیرمحتمل است که این موضوع، اکتشاف فقط یك فرد یا یك قبیله واحد باشد؛ بلکه محتملتر است که این یك آگاهی تدریجی باشد که ممکن است درتوسعهٔ فرهنگی بشر درزمانی به‌قدمت استفاده‌اش ازآتش، احتمالا، درحدود ۳۰۰٬۰۰۰ سال قبل، تکوین یافته باشد. این امرکه تکوین مفهوم عدد یك فرآیند طولانی وتدریجی بوده‌است، بدین دلیل مطرح می‌شودکه در دستور زبان برخی از زبانها، ازجمله زبان یونانی تمایزی سه‌شقی بین یك ودو وبیش‌از دو حفظ شده‌است، درحالی‌که امروزه اغلب زبانها تنها یك تمایز دوگانه ازحیث «عدد» بین مفرد وجمع قائل می‌شوند. بداهتاً اجداد خیلی دورما ابتدا فقط تا دوشمارش کرده‌اند وهرمجموعه‌ای درغیر این سطح رانشان «خیلی» داده‌اند. حتی امروزه اقوام بسیاری هنوز اشیاء را بامرتب کردن آنها به‌صورت دسته‌هایی هریك شامل دوشیء می‌شمارند.

شناخت اعداد مآلاً به‌حدی توسعه و وضوح یافته است که برای بیان این خاصیت مشترك به‌گونه‌ای، وازقرار معلوم در بدو امرفقط به‌کمك زبان اشاره، نیازحس شده‌است. انگشتان یك‌دست رامی‌توان بسهولت برای نشان‌دادن مجموعه‌ای ازدو یاسه یاچهار یا پنج شیء به‌کار برد، عدد یك بدواً به‌عنوان یك «عدد» واقعی شناخته نمی‌شود. با استفاده از انگشتان هردو دست، دسته‌هایی شامل حداکثر ده عضورا می‌توان نمایش داد، باترکیب انگشتان دست و پا می‌توان تا بیست پیش رفت. وقتی‌که این ارقام انگشتی بی‌کفایت شدند، کوده‌ای ازسنگریزه‌ها برای نمایش تناظری بااعضای مجموعهٔ دیگری به‌کار رفتند. آنجاکه انسان نخستین ازچنین روشی برای نمایش اعداد استفاده‌کرده، او اغلب سنگریزه‌ها را در گروههای پنج‌تایی کپه‌کرده است، چون وی با پنج‌تاییها ازطریق مشاهدهٔ دست وپای انسانی آشنایی داشته‌است. زیرا همچنانکه ارسطو مدتها قبل متذکرشده‌است، کاربرد گستردهٔ کنونی دستگاه دهدهی معلول چیزی جزاین واقعیت آناتومیکی نیست‌که ماعموماً با ده انگشت دست وده انگشت پا به‌دنیا می‌آییم.

گرچه ازنظرتاریخی شمارش انگشتی، یا عادت شمارش به کمك پنجها ودهها، ظاهراً بعدازطرح دودویی وسه‌سه‌ای ظاهرشده است، دستگاههای پنج پنجی و دهدهی تقریباً همیشه جای طرحهای دودویی وسه‌سه‌ای راگرفته‌اند. مثلا، مطالعه‌ای از چندین صدقبیله ازسرخپوستان امریکا، نشان داده‌است‌که تقریباً یك‌سوم آنها پایهٔ اعشاری را به‌کار می‌برند، تقریباً ثلث دیگریك دستگاه پنج‌پنجی یا پنجی ـ اعشاری‌را پذیرفته بودند، کمتر ازیك سوم، یك طرح دودویی داشتند، وآنهاکه یك دستگاه ثلاثی را به‌کار می‌بردند کمتر ازیك درصدگروه راشامل‌می‌شدند. دستگاه بیستگانی، با بیست به‌عنوان پایه، دربین حدود ده درصد قبیله‌ها دیده شد.

باگروههایی ازسنگریزه‌ها امکان حفظ اطلاعات میسر نبود، بنابراین بشر پیش‌از تاریخ‌گاهی باکندن دندانه‌هایی بریك چوب یاقطعه استخوان به‌ضبط اعداد پرداخته است. عدهٔ معدودی ازاین آثار باقی‌مانده‌اند، درچکسلواکی استخوان گرگ جوانی پیدا شده که پنجاه وپنج دندانهٔ عمیق برآن کنده شده‌است. این دندانه در دوسری مرتب شده‌اند، بیست وپنج تا درسری اول وسی‌تا درسری دوم؛ درهرسری دندانه‌ها درگروههای پنج‌تایی مرتب شده‌اند. این کشفیات باستانشناسی شواهدی را دراختیارمی‌گذارند مبنی‌براینکه ایدهٔ عدد قدیمی‌تر ازپیشرفتهای فنیی نظیر استفاده ازفلزات و ارابه‌های چرخدار بوده‌است. بدین‌لحاظ می‌توان گفت‌که فکرعدد مقدم برتمدن وکتابت، به‌معنی رایج‌کلمه، بوده‌است زیرا دست‌ساخته‌هایی ازانسان نخستین،که ازنظر عددشناسی اهمیت دارند، نظیر استخوانی‌که فوقاً بدان اشاره شد، ازعصری مربوط به ۳۰٬۰۰۰ سال پیش، به‌جا مانده‌است.

وجه‌تمایزعمدهٔ انسان ازحیوان قدرت تکلم اوست‌که توسعهٔ آن درپیدایش تفکر ریاضی محض جنبهٔ اساسی داشته‌است، معهذا کلماتی‌که ایده‌های عددی رابیان می‌کردند، به‌طور بطئی پدیدار شده‌اند. علامات عددی احتمالاً مقدم برالفاظ عددی بوده‌اند، زیرا کندن دندانه‌ای بریك قطعه چوب آسانتر ازابداع عبارت خوش‌لفظی برای شناسایی یك عدد است. اگر مسئلهٔ مربوط به زبان این‌قدر مشکل نمی‌بود، رقبای دستگاه اعشاری ممکن بودکه به‌همان نسبت پیشرفت داشته‌باشند. برای مثال، پایهٔ پنج، یکی‌از قدیمی‌ترین پایه‌هایی بودکه برخی شواهد نوشته شدهٔ مستند ازآن به‌جا مانده‌است، اما درمدت زمانی‌که برای صوری شدن زبان لازم بود، پایهٔ ده غلبهٔ خودرا یافته‌بود. زبانهای مدرن امروزتقریباً بدون استثناء درحول‌پایهٔ ده ساخته شده‌اند. به‌طوری که مثلاً عدد سیزده، نه به‌عنوان سه وپنج وپنج، بلکه به‌عنوان سه‌وده توصیف می‌شود. کندی درتوسعهٔ زبان برای دربرگرفتن مفاهیم مجردی از قبیل عدد، همچنین دراین حقیقت دیده می‌شودکه عبارات شفاهی عددی نخستین به‌طور تغییرناپذیری به‌دسته‌های مادی اشیاء اشاره دارند ــ مانند «دوماهی» یا «دوگرز» ــ وبعداًبعضی ازاین عبارات به‌طور قراردادی برای نشان‌دادن همهٔ مجموعه‌های مشتمل بردوشیء پذیرفته شده‌اند. این‌آهنگ توسعهٔ زبان از واقعی به‌مجرد در بسیاری از اندازه‌های طول‌کنونی دیده‌می‌شود: «ذراع وقدم» معمول در زبان فارسی (قبل ازپذیرش سیستم متریك) و یا «foot»، «ell» (برای elbow) در زبان انگلیسی ازنام قسمتهای مختلف بدن انسان مشتق گردیده است. هزاران سالی‌که برای انسان لازم‌بود تا

مفاهیم مجرد را ازموارد تکراری ملموس جداکند، شاهدی بر مشکلاتی است که برای پی‌ریزی حتی یك پایهٔ بدوی برای ریاضیات تجربه شده‌است. بعلاوه، سؤالات بدون پاسخ فراوانی مربوط به مبدأ ریاضیات وجود دارد. اظهارنظر دراین خصوص، خواه دربارهٔ منشأ حساب باشد وخواه هندسه، مخاطراتی رابه‌همراه دارد؛ زیرا شروع این موضوع پیش‌از فن‌کتابت است. تنها درعرض شش هزار سال گذشته، مشتمل در دوره‌ای بالغ برشاید میلیونها سال، است که بشر قادربه‌ضبط وثبت اسناد و افکار خود بشکلی مکتوب بوده‌است. برای اطلاعات مربوط به‌عصر پیش از تاریخ باید به‌تفاسیری بر مبنای دست ساخته‌های معدودی از انسانهای اولیه، برشواهدی که توسط انسانشناسی جاری دراختیارمان قرارمی‌گیرد، وحدس وقایع گذشته برمبنای مدارك باقی‌مانده، متکی باشیم. هرودت و ارسطو به‌همین علت ازقراردادن مبدأ هندسه درتاریخی پیش ازتمدن مصر پرهیز داشتند، اما روشن است که هندسه‌ای که آنها درذهن داشتند ریشه‌های باستانی‌تری داشته است. هرودت براین عقیده بود که هندسه ازمصر سرچشمه گرفته است، زیرا وی معتقدبودکه این موضوع درآنجا از نیازهای عملی برای مساحی مجدد بعدازطغیان سالانهٔ رودخانهٔ نیل پدیدارشده است. ارسطو دلیل می‌آوردکه‌وجود طبقهٔ روحانی فارغ‌البالی درمصر بودکه به‌رواج حرفهٔ‌هندسه کمك کرده است. می‌توان به‌نظرات هرودت و ارسطو به‌عنوان معرف دونظریهٔ مخالف درمبدأ ریاضیات نگاه کرد؛ یکی معتقدبرمبدائی درلزوم عملی، ودیگری مبدائی درشعائرمذهبی ودراشتغالات روحانیان. بنابه بویر[1]

«ما نمی‌توانیم با اعتماد کامل نظر هرودت و یا ارسطو را دربارهٔ انگیزه‌هایی که منجربه‌پیدایش ریاضیات شده‌اند، نقض کنیم، اماآشکار است که هردوی اینها قدمت موضوع را دست‌کم گرفته‌اند» وبنابروان در واردن[2] «تاهمین‌اواخرهمهٔ مافکرمی‌کردیم که تاریخ ریاضیات باحساب، جبر، وهندسهٔ بابلی و مصری شروع می‌شود، معهذا سه‌کشف اخیر تصویر را به‌کلی دگرگون‌کرده است».

این گفته درمقدمهٔ کتابی است که بتازگی از وان‌در واردن ریاضیدان ومحقق نامدار درتاریخ ریاضیات منتشرشده‌است. دربارهٔ سه‌کشفی که به‌تغییر نظر وان‌در واردن منتهی شده‌است متعاقباً اشاره‌ای خواهیم داشت امامقصود از ذکر دونقل‌قول از دومحقق تاریخ ریاضی، بیان‌این نکته است که پس‌ازگذشت هزاران سال از عصر هرودت و ارسطو، بعدازآنهمه‌کشفیات باستانشناسی ومطالعات روی اقوام مختلف و...، هنوزهم اختلاف نظری که بین‌آن دو دربارهٔ مبدأ ومنشأ ریاضیات وجود داشته‌است، به‌طور کامل برای محققین فعلی حل نشده‌است. اگرچه بویر و وان‌در واردن در وجود ریاضیات پیش‌ازتاریخ اتفاق نظر دارند غالب مورخین تاریخ علم، همان اعتقادی را دارند که تااین اواخر مورد تأیید وان‌در واردن هم‌بوده‌است، یعنی شروع ریاضیات همزمان با تمدنهای مصروبابل وپیدایش این علم به‌طورمستقل دراین تمدنها وتمدنهای یونان و چین وهند. بامطالعهٔ ساختمان محرابها د«شولوسوترهای[3] هند (کتب دستی باستانی هندکه درآنها جزئیات ساختمان محرابهایی درشکلها واندازه‌های مختلف داده شده‌است. کلمهٔ شولوسوتر به‌طور تحت‌اللفظی به‌معنی «قواعد ریسمان» است)، ا. سایدنبرگ[4] دریافته است‌که دراین متون نسبتاً باستانی «قضیهٔ فیثاغورس» برای ساختن مربعی ازنظر مساحت برابربا مستطیل مفروضی به‌کارگرفته شده است ونیز اینکه این ساختمان دقیقاً همان است‌که توسط اقلیدس انجام شده‌است. سایدنبرگ ازاین واقعیتها نتیجه می‌گیردکه جبر وهندسهٔ بابلی و«جبرهندسی» یونانی وهندسهٔ هندی همه از مبدأ واحدی مشتق شده‌اند، که درآن ساختمان محرابها و«قضیهٔ فیثاغورس» نقش اساسی داشته‌اند. این اولین‌کشفی است‌که مبنای‌کار وان‌در واردن در ارائهٔ فرضیه‌اش مبنی بروجود یك مبدأ مشترك قرارمی‌گیرد. دیگرآنکه خود وان‌در واردن درکتاب فوق‌الذکرش مجموعهٔ باستانی «نه بخش‌درفن حساب»[5] را بامجموعه‌های مسائل ریاضی بابلی مقایسه‌کرده وبه‌وجود آنچنان شباهتهایی می‌رسدکه وجود یك منبع مشترك را غیرقابل اجتناب می‌سازد. به‌زعم وی دراین منبع هم «قضیهٔ فیثاغورس» می‌باید نقش اساسی داشته‌باشد.

کشف سوم توسط ا. توم[6] و ا. س. توم[7] انجام شده‌است. اینان دریافته‌اندکه در ساختن یادبودهای مگالیتیك[8] درانگلستان جنوبی ودر اسکاتلند از «قضیهٔ فیثاغورس» استفاده شده‌است، یعنی ازمثلثهای راست‌گوشه‌ای‌که اضلاع آنها مضارب صحیحی ازیك‌واحد طول فرضی‌اند. فهرستی از «سه‌گانه‌های فیثاغورسی» نظیر(۳,۴,۵) درمتون بابل قدیم هم پیداشده‌است، وریاضیدانان یونانی، هندی، وچینی نیزمی‌دانسته‌اندکه این سه‌گانه‌ها راچگونه پیداکنند. ریاضیدانان این ملل باستانی قضیهٔ فیثاغورس رابرای‌یافتن سه‌گانه‌های فیثاغورسی به‌کار برده‌اند. نحوهٔ استخراج این سه‌گانه‌ها دربین همهٔ این‌تمدنها یکسان بوده‌است. این سه‌گانه‌ها عمدتاً جنبهٔ نظری دارند تاجنبهٔ عملی.

باترکیب این سه‌اکتشاف وان‌در واردن به بازساختی فرضی ازعلم ریاضی درعصرنوسنگی در اروپا، مثلا در زمانی بین ۳۰۰۰ و ۲۵۰۰ سال قبل‌ازمیلاد می‌پردازدکه به‌گفتهٔ او، این علم از اروپای مرکزی به بریتانیا، خاور نزدیك، هند، وچین گسترش یافته‌است. وی از وجوه اشتراك فراوان بین اندیشهٔ ریاضی و مذهبی جاری در انگلستان عصرنوسنگی، دریونان، درهند، ودر چین دورهٔ هان[9] به‌وجود دکترین ریاضی مشترکی‌که تفکر ریاضی این ملل ازآن مشتق شده‌باشد، قائل می‌شود. براین مبنا وی ناگزیر ازپذیرش این مطلب می‌شودکه به‌دلیل وجود زمینه‌های مشترك درمذاهب جمعیتهای هند واروپایی وجود مذهب مشترکی در بین این اقوام درعصرنوسنگی غیرقابل تردید است وشعائر این مذهب واحد منجربه پیدایش تفکر ریاضی شده‌است‌که دربالا به‌آن اشاره رفت.

لطفا" به صفحه ۴۸ مراجعه فرمائید

زندگینامهٔ خوارزمی

به‌مناسبت هزار و دویستمین سالگرد میلاد محمدبن موسی خوارزمی ریاضیدان شهیر و پایه‌گذار علم جبر و مقابله در اسلام، شرح حال مختصر وی را از «دایرةالمعارف فارسی» برگزیده‌ایم که ذیلاً ملاحظه خواهد شد. توضیح اینکه شرح و بررسی کارهای علمی این ریاضیدان نامی اسلام مستلزم نگارش مقاله‌ای جداگانه است که آن را به‌فرصت مناسبی موکول می‌کنیم.

خوارزمی، شهرت ابوعبدالله محمدابن موسی، وفات در ۲۳۲ ه‍.ق. ریاضیدان، منجم، جغرافیادان، و مورخ ایرانی؛ یکی از بزرگترین دانشمندان مسلمان و بزرگترین عالم زمان خود؛ متولد در خوارزم (خیوه‌ی کنونی). از زندگی وی چندان اطلاعی در دست نیست، زیرا در بعضی مواردکه ذکر «محمدابن موسی» میرود معلوم نیست که مقصود این محمدابن موسی است یا محمدابن موسی ابن شاکر. تاریخ وفاتش محقق نیست؛ بعضی وفات او را بین ۲۲۵ و ۲۳۰ ه‍.ق و برخی بعد از ۲۳۲ ه‍.ق دانسته‌اند. بهرحال، وی یکی از منجمین دربار مأمون خلیفه و احتمالاً از مباشرین رصدهای مأمونی بود، و در بیت‌الحکمه کارمیکرد. خوارزمی علوم یونانی و هندی را باهم تلفیق کرد. هیچیک از ریاضیون قرون وسطی تأثیر او را در فکر ریاضی نداشته است. آثار او در ریاضیات و نجوم اهمیت بسیار داشته است.

آثارش در ریاضیات کتاب حساب الجبر و المقابله و کتاب الجمع والتفریق است. کتاب جبر وی نخستین کتابی است که بنام «جبر و مقابله» نوشته شده‌است، و نویسنده‌ی آن را میتوان یکی از بنیانگذاران علم جبر بعنوان رشته‌ای متمایز از هندسه شمرد (اسم علم جبر در زبانهای اروپائی از نام این کتاب گرفته شده‌است). این کتاب (بقول وی «مختصر») قرنها مرجع و مأخذ اروپائیان و تا زمان ویت (۱۵۴۰–۱۶۰۳) مبنای مطالعات علمی آنان در این رشته بود. ترجمه‌ای لاتینی از این کتاب به‌یوهانس هیسپالنسیس (رونقش در ۱۱۳۵–۵۳) و ترجمه‌ای لاتینی به‌گرادوس کرمونسیس (درحدود ۱۱۱۴–۱۱۸۷) منسوبست؛ رابرت چستری نیز آن را به‌لاتینی ترجمه کرد (۱۱۴۵) (این ترجمه را میتوان آغاز علم جبر در اروپا دانست). متن جبر و ترجمه‌ی انگلیسی آن بوسیله‌ی فردریک روزن در لندن به‌چاپ رسیده است (۱۸۳۱). از کارهای متأخر در این باب می‌توان کتاب ترجمه‌ی لاتینی جبرالخوارزمی (نیویورک، ۱۹۱۵)، اثر لوئی شارل کارپینسکی را نام برد، که مشتمل بر مقدمه، حواشی و تعلیقات انتقادی، و ترجمه‌ای بزبان انگلیسی است.

متن عربی کتاب حساب خوارزمی از میان رفته است، ولی ترجمه‌ای لاتینی از آن از قرن ۱۲ م موجود است؛ اهمیت این کتاب در اینست که مسلمین و اروپائیها را با شمار هندی آشنا ساخت. لفظ آلگوریتم (*algoritm*) و آلگوریسم و نظایر آنها در زبانهای اروپائی، که بمعنی «فن محاسبه» (با ارقام یا علامات مخصوص دیگر بکارمیرود، بمناسبت اینست که عنوان ترجمه‌ی لاتینی کتاب حساب خوارزمی عنوان کتاب آلگوریسمی (بغلط بجای «الخوارزمی») داشت.

در نجوم خوارزمی دوتحریر از سند هند فراهم کرد. زیج خوارزمی، مانند سایر زیجات، علاوه‌بر جداول نجومی و مثلثاتی مشتمل بر مقدمه‌ای نسبتاً مفصل در علم نجوم است، که در حکم نجوم نظری میباشد. جداول نجومی و مثلثاتی خوارزمی، که مسلمه‌ی مجریطی در آنها تجدید نظر کرد، در ۱۱۲۶ بوسیله‌ی ادلارد به‌لاتینی ترجمه شد، و این جداول علاوه‌بر جیب مشتمل بر ظل نیز هست (بعضی احتمال داده‌اند که ظل را مسلمه در آن وارد کرده‌است). خوارزمی دو کتاب هم درباب اصطرلاب نوشته‌است، یکی کتاب العمل بالاصطرلاب و دیگری کتاب عمل الاصطرلاب. از این دو کتاب و نیز از کتاب الرخامه‌ی او اثری برجا نمانده است. وی با اشاره‌ی مأمون اطلسی از نقشه‌های آسمان و زمین فراهم کرد، و کتاب صورة‌الارض را پرداخت، که در آن متن و نقشه‌های جغرافیائی بطلمیوس را اصلاح کرده است. این کتاب را نالینو بزبان ایتالیائی ترجمه کرده‌است و با حواشی و تحقیقات دقیق در رم بچاپ رسانیده (۱۹۸۴).

دایرةالمعارف فارسی (به‌سرپرستی غلامحسین مصاحب)

اصول موضوعهٔ اعداد طبیعی و بحثی در اصل استقراء ریاضی

جواد لالی

«عددهای طبیعی کدامند؟ آنند که ابتدا از یکی کنند، و زیادت یک‌ـ یک همی کنند، چون ۱، ۲، ۳، ۴، ۵.»
ابوریحان بیرونی (التفهیم)

اصول موضوعهٔ اعداد طبیعی

مقدمه- هر نظریهٔ علمی متشکل از یک رشتهٔ متناهی از اشیائی است که مورد بحث قرار میگیرد، وشامل مجموعه‌ای از گزاره‌های راست است که خواص معینی از این اشیاء ویا رابطهٔ بین آنها را بیان می‌کند. مثلاً درهندسه، نقطه، خط،... اشیاء مورد بحث‌اند، وگزاره‌هائی مانند «هرنقطه‌که برروی عمود منصف یک پاره‌خط قرارگیرد ازدو طرف آن به‌یک فاصله است» گزاره‌های راست آنند. حال اگردریک نظریهٔ علمی بخواهیم اشیاء موردبحث راتعریف‌کنیم، ویادرستی گزاره‌ای راثابت نمائیم، چه بایدکرد؟ البته، روش مطلوب این خواهدبودکه هرچه را ازآن سخن می‌رود تعریف‌کنیم وهرچه را بدان حکم می‌شود اثبات نمائیم. اما، این روش درهیچ‌نظریهٔ علمی ممکن نیست، به‌عنوان مثال، درهندسه، هنگامی که می‌خواهیم نقطه راتعریف‌کنیم مجبوریم به‌اشیاء دیگری استنادکنیم، وبرای‌تعریف اشیاء دیگربه‌عبارتهای دیگری متوسل شویم. همچنین، دراثبات درستی یک گزاره همین مشکل راداریم. ولی درحین‌کار به‌تعداد معدودی شیء یاگزاره می‌رسیم‌که ادامهٔ روش فوق منجر به‌تسلسل می‌شودکه درنهایت تعریف شیء موردنظر، ویا درستی‌گزارهٔ مذکور غیرممکن می‌گردد.

برای احتراز این مانع، ممکن‌است چنین عمل‌کنیم؛ بسیاری ازعبارتها ویاگزاره‌ها رابراساس تجربه بپذیریم، وبعضی دیگررا بدیهی بپنداریم، بااین نیت وارد‌آن مبحث ریاضی شویم. ضعف این روش درآن است‌که همیشه درشك وتردیدیم ونمیدانیم چه‌اشیاء ویاعبارتهائی راتعریف‌کنیم ودر اثبات یک‌گزاره به چه اصولی استناد نمائیم. بنابراین، متوجه می‌شویم‌که چنین روشی موجب آن می‌شودکه براهین ما براساس مطالبی مبهم وگزاره‌هائی بی‌پایه استوارشده واین موردپسند نیست. پس چه بایدکرد؟ راه حلی را که اکثر ریاضیدانان بدان دست یافته‌اند آن است‌که تعدادی محدود ازاین‌اشیاء رابه عنوان عبارتهای تعریف‌نشده (یاحدود اولیه) بپذیرند، واشیاءبعدی‌را به کمك آن به‌عنوان عبارتهای‌تعریف‌شده(یاحدود ثانویه) بیان‌کنند. درموردگزاره‌ها نیزمی‌توان بهمین‌نحوعمل نمود؛ یعنی، درستی تعداد مشخصی ازگزاره‌ها را به‌عنوان اصول اولیه (یااصول موضوعه، پوستولاها) قبول‌نمود، وگزاره‌های راستی را، که نتیجهٔ منطقی اصول اولیه است به‌عنوان قضیه بیان‌کرد. مشکل اساسی در روش فوق‌آن است‌که‌کدام شیء رابه عنوان «عبارت تعریف‌نشده» و کدام اصول رابه عنوان «اصول اولیه» باید پذیرفت. خط مشی اساسی‌آن است‌که عبارتهای تعریف نشده واصول اولیه نباید منجر به‌تناقض‌گردد و درحدی باشدکه بتواند آن‌نظریهٔ علمی راتأسیس و گسترش دهد. بااین مقدمه وارد اصول موضوعهٔ دستگاه اعداد طبیعی می‌شویم؛

اصول موضوعهٔ دستگاه اعداد طبیعی

نخستین کسی‌که دستگاه اعداد طبیعی را با اصول موضوعهٔ مستقلی بنانهاد پئانو بود[1]، به‌کمك اصول موضوعهٔ اعداد حقیقی نیزمی‌توان مجموعهٔ اعداد طبیعی راتأسیس نمود[2]. دراینجامیخواهیم باروش مشهودتری مجموعهٔ اعداد طبیعی را بسازیم. زبان بیان مطالب بسیارساده وبدون ابهام خواهدبود؛ وآنچه راکه معلوم فرض می‌کنیم همان مطالب ابتدائی نظریهٔ شهودی مجموعه‌هاست‌که در دوره‌های مقدماتی تحصیل ریاضیات، یامطالعات شخصی، یادگرفته‌ایم. البته، ادعای‌آن را نداریم‌که اعداد طبیعی را، صرفاً، براساس اصول موضوعه بناکنیم! اگرچه چنین‌کاری ممکن است، ولی راهی دراز وبس طولانی است‌که ازحوصلهٔ این مقاله خارج است.

عبارتهای تعریف‌نشده: اشیاء ذیل را تعریف نمی‌کنیم و آنها را به‌عنوان عبارتهای تعریف‌نشده می‌پذیریم:

$N, +, \times, =$

که در آن، N مجموعه‌ای حداقل با یك عضو، +، × دو عمل دوتائی (بترتیب، موسوم به جمع و ضرب) در N است. و رابطهٔ = همان تساوی منطقی است. چنین قرارداد می‌کنیم که هر عضو N را یك «عدد» (یا عدد طبیعی) بنامیم.

اصول موضوعه (یا پوستولاها)

ط۱ (قوانین بسته‌بودن). بازاء هردو عضو N مانند a و b اعضائی منحصر بفرد از N مانند c و d هست بطوری‌که $a+b=c$ و $a\times b=d$؛

ط۲ (قوانین تعویضپذیری). بازاء هردو عضو N مانند a و b،

$a+b=b+a$, $a\times b=b\times a$

ط۳ (قوانین شرکتپذیری). بازاء هرسه عضو N مانند a، b، c،

$(a+b)+c=a+(b+c)$; $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$.

ط۴ (قانون توزیعپذیری). بازاء هرسه عضو N مانند a، b، c،

$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$.

ط۵ (قوانین اسقاط). بازاء هرسه عضو N مانند a، b، c، هرگاه $a+b=a+c$ آنگاه $b=c$؛ و نیز هرگاه $a\times b=a\times c$ آنگاه $b=c$.

ط۶ (عضو خنثای ضرب). عضوی در N، که آنرا با نماد «۱» نمایش می‌دهیم، هست بطوری‌که بازاء هر a از N،

$1\times a=a$.

ط۷ (قانون اصل تثلث قوی). بازاء هردو عضو N مانند a و b یکی و تنها یکی از گزاره‌های ذیل راست است:

(آ). $a=b$،

(ب). عددی طبیعی مانند c هست بطوری‌که $a=b+c$،

(پ). عددی طبیعی مانند d هست بطوری‌که $b=a+d$.

در اینجا، نماد > راچنین تعریف می‌کنیم: $a<b$ یعنی عددی طبیعی مانند c هست بطوری‌که $b=a+c$ (ملاحظه کنید که با توضیحات قبل، > یکی از حدود ثانویه است).

ط۸ (اصل استقراء ریاضی). آخرین اصل موضوعی که با اضافه‌کردن آن به‌اصول فوق اصول موضوعهٔ اعداد طبیعی کامل می‌گردد، اصل موضوع استقراء ریاضی (یاصورت معادل آن اصل خوشترتیبی) است. این اصل رامیتوان به‌صورتهای گوناگون بیان کرد که جملگی باهم معادلند. ذیلاً سه صورت معادل را (که اثبات معادل‌بودن آنها بعداً خواهد آمد) بیان می‌کنیم:

I_1 (اولین صورت اصل استقراء ریاضی، استقراء عادی، یا استقراء ضعیف).

هرمجموعه از N که شامل ۱ باشد و اگر شامل k باشد آنگاه شامل $k+1$ نیز باشد؛ در این صورت، این مجموعه شامل همهٔ اعضای N است.

I_2 (دومین صورت اصل استقراء ریاضی، یا استقراء قوی).

هرمجموعه از N که شامل ۱ باشد و اگر شامل همهٔ اعداد طبیعی از ۱ تا k باشد آنگاه شامل $k+1$ باشد، در این‌صورت، این مجموعه شامل همهٔ اعضای N است.

I_3 (اصل خوشترتیبی).

هرمجموعه‌ی ناتهی از N دارای کوچکترین عضو (یا ابتدا) است.

آنچه راکه باید در نظر داشت آن است که هریك از I_1، I_2، و I_3 را می‌توان به‌عنوان اصل موضوع در نظر گرفت و دو اصل دیگر را به‌عنوان قضیه ثابت کرد. توضیح اینکه در I_2، عبارت «همه اعداد طبیعی از ۱ تا k» و در I_3، عبارت «ابتدا» از حدود ثانویه‌اند که باید باتوجه به‌حدود اولیه معلوم شوند. (ما بدین کار اقدام خواهیم کرد.)

اصولا، بعد از تأسیس دستگاه اعداد طبیعی، یکی از اهم خواص آن که در بحثهای مقدماتی مورد استفاده قرار می‌گیرد، خاصیت استقرائی آنست. این خاصیت زمانی استفاده می‌شود که بخواهیم خاصیت مفروضی رادرمورد اعداد طبیعی ثابت کنیم، بطوری که، همهٔ اعداد طبیعی واجد این خاصیت باشند. همین خاصیت رامی‌توان درساختن اعداد طبیعی بکاربرد. به‌عنوان‌مثال، فرض کنیم که M مجموعهٔ همهٔ اعدادی باشد که با عمل +، به وسیلهٔ ۱، تولید می‌شوند؛ یعنی جمع متوالی عدد ۱. بنابراین، به‌موجب I_1 مجموعه M، یعنی مجموعهٔ

$\{1, 1+1, (1+1)+1, ((1+1)+1)+1, \ldots\}$ و

همان مجموعهٔ اعداد طبیعی‌است. البته، باتوجه به I_1، خواهیمدید

۱ ابتدای مجموعهٔ اعداد طبیعی است وبین دو عدد متوالی ، یعنی k و $k+1$ ، عددی طبیعی وجود ندارد . $1+1$ رابا نماد ۲ ، $1+(1+1)$را با نماد ۳ ، و ... نشان میدهیم ، و $k+1$را تالی k می‌نامیم. بنا براین، اولین‌شرط I_1 بیان می‌کند که ۱ در N است؛ باانتخاب این عدد ، ۲ نیز دراین مجموعه است ، واز اینجا ۳ هم چنین است و بهمین‌ترتیب این‌عمل ادامه دارد .

دومین صورت‌اصل استقراء ریاضی ، I_2، بااختلافی جزئی، همان‌مطالبی رادرباب مجموعهٔ اعداد طبیعی بیان می‌کندکه‌به‌وسیلهٔ I_1 بیان شد، یعنی اولین شرط I_2 مشخص‌میکندکه ۱ در N است؛ باانتخاب‌این‌عدد نتیجه‌می‌شود که ۲ نیزدر N است ؛ وچون ۱ و ۲ در N هستند ، ۳ نیز دراین مجموعه است ، وغیره .

یکی‌دیگر از خواص عمدهٔ اعداد طبیعی ، که‌معادل با اصل استقراء ریاضی است ، خاصیت خوشترتیبی آن است ؛ وآن اینکه هرزیر مجموعهٔ ناتهی آن دارای کوچکترین عضو (ابتدا) است .

ذیلا میپردازیم به‌معادل بودن I_1، و I_2 ، و I_3، قبلاتعریفات و قضایائی‌که مورد لزوم خواهند بود میآوریم .

تعریف ۱. بازاء هر دوعدد طبیعی مانند a و b ، گزارهٔ $a \leqslant b$ یعنی $a<b$ یا $a=b$.

تعریف ۲. فرض کنیم‌کـه k عددی طبیعی باشد . دراین صورت مجموعهٔ $\{n\in N \mid n\leqslant k\}$ را همهٔ اعدادطبیعی از ۱ تا k گویند.

تعریف ۳. فرض کنیم کـه A مجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد . عـدد a را کوچکترین عضو (یا ابتدای) A گویند ، در صورتی که بازاء هر x از A ، $a\leqslant x$.

دوقضیهٔ ذیل را که در اثبات معادل بودن I_1 ، I_2 ، و I_3 نقش اساسی دارند ، باتوسل به هرسه اصل ثابت می‌کنیم :

قضیهٔ ۱. بازاء هرعدد طبیعی مانند n ، $1\leqslant n$ ؛ به عبارت دیگر ، ۱ ابتدای N است .

برهان‌بااستفاده‌از I_1 یا I_2. فرض‌کنیم‌که $A=\{n\in N \mid 1\leqslant n\}$ بدیهی است‌که A شامل ۱ است . فرض می‌کنیم کـه A شامل n بـاشد . در این صورت ، بـاتوجـه بـه‌اینکه $1\leqslant n<n+1$، معلوم می‌شود کـه A شامـل $n+1$ است . بنابـراین به‌موجب I_1 (یا I_2)، $A=N$. یعنی بازاء هر عدد طبیعی مانند n ، $1\leqslant n$.

برهان با استفاده از I_3. فرض‌کنیم‌چنین‌نباشد . بنا براین، عدد طبیعی‌مانند n هست بطوری‌که $n<1$. اگر C مجموعهٔ‌چنین اعدادی باشد ، ناتهی است. بنابر I_3 مجموعهٔ C دارای‌کوچکترین عضو است . فرض‌کنیم‌کـه m کوچکترین عضو C بـاشد . پس ، $m<1$. ازاینجا ، به‌موجب تعریف، عددی طبیعی مانند a هست بطوری که $1=m+a$. بنابراین ، $m=m^2+ma$ (ملاحظه کنیدکه m^2 یعنی $m\times m$). ازاینجا ، مطابق‌تعریف $m^2<m$ ؛ بالنتیجه m^2 عضوی‌از C واز m کوچکتر است ، واین بـا این حکم‌که « m کوچکترین عضو C است » متناقض است .

قضیهٔ ۲. اگر n یك‌عددطبیعی باشد آنگاه هیچ‌عددطبیعی مانند k موجود نیست که $n<k<n+1$.

برهان. چون اثبات این حکم بااستفاده ازقضیهٔ ۱ است، بنابراین ، برهانی‌که ارائه می‌شود میتوانـد مبتنی بر هر یك از I_1 ، I_2 ، و I_3 باشد .

فرض‌کنیم‌که عددطبیعی مانند k باشدکه $n<k<n+1$ ؛ گوئیم‌چون $n<k$ و $k<n+1$ اعدادی طبیعی مانند m و s هست بطوری که

$$k=n+m \quad \text{و} \quad n+1=k+s.$$

ازاینجا ، $1=m+s$ ؛ یعنی ، $s<1$ ؛ و این باقضیهٔ ۱ متناقض است .

قضیهٔ (معادل بودن I_1 ، I_2 ، و I_3)

برهان. برای اثبات باید ثابت کنیم کـه I_1 مستلزم I_2 است ، I_2 مستلزم I_3 است ، و I_3 مستلزم I_1 است .

I_1 مستلزم I_2 است.

I_1 رابه عنوان ، اصل موضوع درنظر می‌گیریم و I_2 رابه عنوان قضیه ثابت می‌کنیم .

فرض‌کنیم‌که C مجموعه دلخواهی از اعداد طبیعی باشد که درمفروضات I_2 صدق‌کند . حال‌باید ثابت‌کنیم که $C=N$ ، گزارهٔ $P(k)$ راچنین تعریف می‌کنیم : « C شامل همهٔ اعداد طبیعی‌از ۱ تا k است»، وفرض‌می‌کنیم‌که $A=\{k\in N \mid P(k)\}$. بنابرفرض I_2 ، $P(1)$ برقرار است ، بالنتیجه $1\in A$. اگر k عدد دلخواهی و $k\in A$ آنگاه $P(k)$ بر قرار است ؛ یعنی ؛ اعداد از ۱ تـا k عضو C اند . اینك با توجه بـه‌فرض I_2 و قضیهٔ ۲ ، $P(k+1)$ برقرار است واز اینجا نتیجه می‌شودکـه $k+1\in A$ است. پس ، بنابر I_1 ، $A=N$ ؛ یعنی به‌ازاء هرعدد طبیعی n ، $P(n)$ برقرار است ، لهذا ، C شامل همهٔ اعداد طبیعی است .

I_2 مستلزم I_3 است

I_2 رابـه عنوان اصل موضوع می‌پذیریم و I_3 را به‌عنوان

قضیه ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم که C مجموعه‌ای ناتهی از اعداد طبیعی باشد، ثابت می‌کنیم که C دارای کوچکترین عضو است. فرض کنیم چنین نباشد، یعنی، C کوچکترین عضو نداشته باشد. $P(k)$ را چنین تعریف می‌کنیم: «عدد طبیعی k عضو C نیست» چون $1 \notin C$، پس، $P(1)$ برقرار است. حال فرض کنیم به‌ازاء هر n از 1 تا k، $P(n)$ برقرار باشد. دراین‌صورت، $P(k+1)$ نیز برقرار است. زیرا، درغیر این صورت، $k+1$ کوچکترین‌عضو C می‌شود که ممکن نیست. با توجه به I_2 نتیجه می‌شود که بازاء هر n، $P(n)$ برقرار است، واین مستلزم آن است‌که C مجموعهٔ تهی باشد که‌خلاف فرض‌است. پس، این فرض که C کوچکترین عضو ندارد برقرار نیست وحکم ثابت می‌گردد.

I_3 مستلزم I_1 است:

I_3 رابه‌عنوان اصل موضوع انتخاب می‌کنیم وفرض می‌کنیم که C مجموعه‌ای ازاعداد طبیعی باشد که‌درشرایط I_1 صدق‌می‌کند بایدثابت کنیم که C شامل همهٔ اعداد طبیعی است.

فرض کنیم که‌چنین نباشد. دراین‌صورت مجموعهٔ C'، متشکل ازهمهٔ اعداد طبیعی که عضو C نباشند، ناتهی است. بنابر I_3، مجموعه C' دارای کوچکترین عضوی مانند k است. چون $1 \in C$، به‌موجب قضیهٔ ۱، $1 < k$. پس بنابر تعریف، عددی مانند s موجود است که $k = s+1$. از اینجا نتیجه می‌شود که $s \in C$ و $s+1 \notin C$ واین خلاف فرض I_1 است. بالنتیجه این فرض که C «شامل همهٔ‌اعداد طبیعی‌نیست» درست نیست، پس، $C = N$.

تبصره. به‌کمك اصول موضوعهٔ‌فوق وباالحاق اصول‌موضوعهٔ دیگری میتوان به‌ساختن دستگاه اعداد صحیح، منطق، و بالاخره حقیقی نائل‌آمد.

بسط و گسترش خاصیت خوشترتیبی

همانطوری‌که قبلا متذکر شدیم خوشترتیبی یکی از خواص عمدهٔ اعداد طبیعی است که به‌اصل استقراء بستگی دارد. البته، همهٔ مجموعه‌های اعداد حقیقی باهمین نسبت ترتیبی دارای این خاصیت نیستند. مثلا، مجموعهٔ اعداد حقیقی منفی بی‌ابتدا است ومجموعهٔ اعدادگویای بزرگتر یامساوی صفر ابتدادارد ولی‌هرمجموعه ناتهی آن دارای ابتدانیست. اینك، می‌خواهیم بدانیم به‌غیر از اعداد طبیعی آیامجموعه‌های دیگری هستند که خاصیت خوشترتیبی در آنها صدق‌کند؟ اصولاً، خوشترتیبی یکی‌ازخواص نسبتهای‌ترتیبی است، وقضیه مشهور ذیل به‌این خواسته ماپاسخ مثبت می‌دهد.

قضیهٔ خوشترتیبی. اگر A مجموعهٔ دلخواهی باشد آنگاه یك‌رابطهٔ ترتیبی در A موجود است‌که آن را خوشترتیب می‌کند.

این قضیه در سال ۱۹۰۴ توسط ارنست تسر ملو — (Ernst Tsermelo 1871-1953) ثابت شدکه‌جهان ریاضیات را تکانی‌سخت‌داد. در آن‌زمان، مناظرات‌قابل‌ملاحظه‌ای بین‌علمای‌ریاضی درباب درستی یا نادرستی‌برهان این‌قضیه‌درگرفت. فقدان‌هرگونه طریقهٔ سازنده‌ای برای خوشترتیب کردن یك مجموعهٔ ناشمارای دلخواه شك‌بسیاری رابرانگیخت. بالاخره، پس‌از بحث وگفتگو وتجزیه وتحلیل دقیق برهان این قضیه به‌وسیله منقدین تنها نکته مورد ایراد این بود که آیا می‌توان مجموعه‌ای به‌دست آورد که متضمن تعداد نامتناهی از انتخابات دلخواه باشد؟ بنابراین‌اصل موضوع دیگری مطرح‌شد.

اصل موضوع انتخاب.

اگر $\mathcal{A}$ گردایه‌ای‌از مجموعه‌های ناتهی جدااز هم‌باشد آنگاه مجموعه‌ای مانند C موجود است که‌به ازاءهر $A \in \mathcal{A}$، مجموعهٔ $A \cap C$ فقط یك‌عضو دارد.

این‌اصل موضوع حکم به‌وجود مجموعه‌ای می‌کندکه‌می‌توان آن‌را باانتخاب یك‌عضو ازهر‌مجموعهٔ A ($A \in \mathcal{A}$) به‌دست آورد. اصل موضوع انتخاب حکم کاملا معقولی به‌نظر می‌رسد. امروزه بیشتر ریاضیدانان این اصل موضوع را به‌عنوان جزئی از نظریه مجموعه‌ها می‌پذیرند، ونظریهٔ خودرا برآن بنیان می‌نهند. اما، درگذشته درمورد این‌اصل موضوع نیز مجادلات بسیاری؛ بخصوص درنظریه مجموعه‌ها، بپاخاست. به‌یاری این‌اصل قضایایی ثابت شد، که‌البته، بعضی از ریاضیدانان ازپذیرفتن آن اکراه‌داشتند. یکی ازاین قضایا همان قضیهٔ خوشترتیبی است؛ که قبلاصورت آن بیان‌گردید. بنابراین، بسیاری از ریاضیدانان اصل‌موضوع انتخاب راطرد کردند. سالها این‌سؤال معقول، که آیا برهان قضیهٔ خوشترتیبی مبرا از اصل موضوع‌انتخاب است؟ برسرزبانها افتاد. درخلال این مدت بسیاری از ریاضیدانان هرقضیه‌ای راکه اثبات‌آن‌متضمن استفاده ازاصل موضوع انتخاب بودکم‌وبیش سست بنیان و بی‌اساس می‌پنداشتند وآنرا نمی‌پذیرفتند.

ریاضیدانان امروزه چنین تشویش خاطری ندارند. آنها اصل موضوع انتخاب رابه‌عنوان اصل‌موضوع معقولی درنظریه مجموعه‌ها می‌پذیرند، وهمراه‌آن، قضیهٔ خوشترتیبی را ثابت می‌کنند. اصل موضوع انتخاب به‌قضیه عمیق‌تری منجر می‌شود و

لطفا" به صفحه ۴۸ مراجعه فرمائید

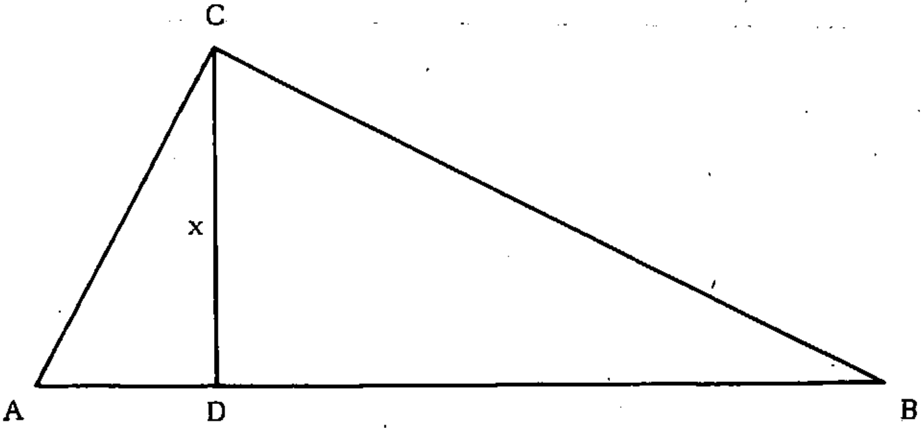
میانگین‌های حسابی و هندسی و کاربردهائی از آن

رضا شهریاری اردبیلی

یکی از اولین موفقیت‌های حساب دیفرانسیل وانتگرال حل دسته‌ای وسیع از مسائل مربوط به ماگزیموم و مینیموم، از طریقی واحد، بوده است. قبل از ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال به توسط نیوتن ولایبنیتز بسیاری از این‌گونه مسائل حل‌شده بودند و حل آنها انگیزه‌هائی را برای یافتن جواب مسائلی دیگر از این نوع را فراهم میآوردند. به‌عنوان مثال، حل این مسئلهٔ‌ساده که از بین همهٔ مثلثهائی با محیط یکسان، کدامیك دارای بـزرگتریـن مساحت است، صورت گرفته بود. ولی درهمان زمان مسائلی‌ازقبیل تعیین حجیم‌ترین جعبه‌ای از بین همهٔ جعبه‌هائی که چملگی قابل محاط در یك بیضوی مفروض‌اند، باروشهای معمول قابل حل‌نبود. از طرف دیگر، بعضی از مسائل مـربوط به ماگزیموم و مینیموم که حل آنها به‌وسیلهٔ حساب دیفرانسیل وانتگرال عملاً ناممکن‌و پرزحمت است، به‌کمك روشهای مقدماتی قابل حل‌اند. برخی از این روشهای مقدماتی به جهت‌اینکه، بی‌توسل به تکنیك‌های‌حساب دیفرانسیل وانتگرال، قادربه‌حل این‌گونه‌مسائل می‌باشند، دارای اهمیت‌اند؛ بعلاوه، از این حیث نیز مفیدندکه موجبات درك بهتر حساب دیفرانسیل‌وانتگرال رافراهم می‌کنند. بحث آتیه‌اختصاص داردبه‌بررسی یك‌وسیلهٔ مقدماتی‌برای حل مسائل مربوط به‌ماگزیموم و مینیموم؛ **قضیهٔ میانگین‌های حسابی وهندسی.** خواهیم دیدکه این قضیه به‌چه‌معنی است، ازکجا میآید، وچگونه بکار میرود.

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را باوتر AB وارتفاع CD=X در نظر مـی‌گیریم. از تشابـه دو مثلث ACD و BCD داریـم.

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$$



عدد x را میانگین هندسی دوعدد a وb می‌نامند. واضح است‌که‌اگر $a<x<b$. به طریق دیگری نیز می‌توان میانگین هندسی را تعریف‌کـرد . میانـگین هندسی دو عدد مثبت a و b عبارتست ازطول‌ضلع مربعی‌که مساحت‌آن‌مساوی است بامساحت مستطیلی بداضلاع a وb.

این تعریف جنبهٔ تاریخی داشته ودرکتاب اصول‌اقلیدس آمده‌است.

تعریف ۱. میانگین‌هندسی n عددمثبت x_1، x_2، ...، و x_n، که‌با G_n نشان داده می‌شود، عبارتست از ریشهٔ n م حاصلضرب آنها،

$$G_n=\left(x_1 . x_2 \dots x_n\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\prod_{1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

بنابراین، G_n طول یال مکعبی n بعدی است‌که حجـم آن برابر است با حجم متوازی‌السطوح n بعدی قائمی‌که طول یالهای‌دوبدو عمود برهم آن x_1، x_2، ...، و x_n است.

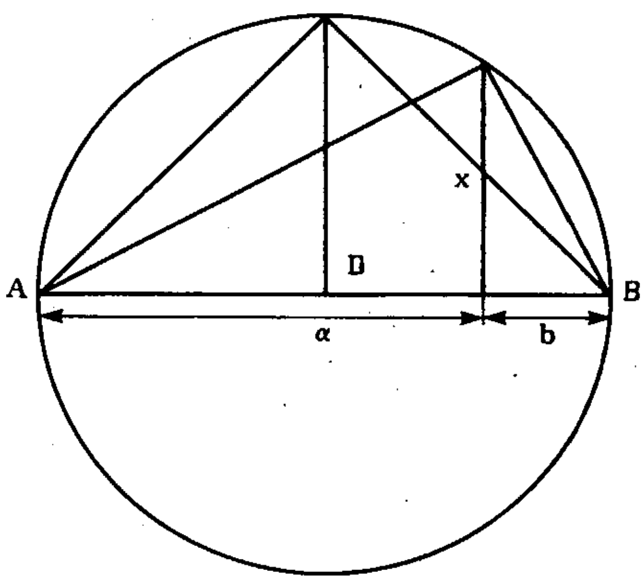
تعریف ۲. میانگین‌حسابی n عدد x_1، x_2، ...، و x_n، که‌با A_n نشان داده می‌شود، عبارتست از $\frac{1}{n}$ حاصلجمع آنها،

$$A_n=\frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}.$$

اینك این سؤال طبیعی پیش می‌آیدکه چـه رابطه‌ای بین میانگین حسابی وهندسی n عدد مثبت بـرقرار است. برای پاسخ به این سؤال به این نکته، که از جنبهٔ هندسی روشن است، توجه می‌کنیم: در میان همهٔ مثلث‌های قـائم‌الزاویه‌ای با وتر ثابت AB

مثلث متساوی‌الساقین بزرگترین ارتفاع را دارد. با توجه به شکل زیر،

$$CD=\frac{a+b}{۲}.$$



ولی (a+b=) AB ثابت‌است، ازاینرو برای هر مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر با وتر AB داریم:

$$\sqrt{ab}=x<\frac{a+b}{۲}.$$

بنابراین اگر a و b دوعددمثبت‌دلخواه باشند،

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{۲}.$$

برای اثبات می‌گوئیم

$$(a+b)^{۲}\geqslant ۰\ ,$$

نتیجه می‌شود که

$$a^{۲}+b^{۲}+۲ab\geqslant ۴ab\ ,$$

یا

$$\frac{(a+b)^{۲}}{۲}\geqslant ab\ ,$$

از اینجا،

$$\frac{a+b}{۲}\geqslant\sqrt{ab}.$$

وتساوی فقط و فقط وقتی برقرار است‌که $a=b$.

این نامساوی تعبیر دیگری نیز دارد: در میان همهٔ مستطیل‌هایی با محیط P ، مربع‌بیشترین مساحت را دارد. زیرا فرض می‌کنیم‌که طول اضلاع چنین مستطیلی a ، b باشد، در این صورت $P=۲(a+b)$. ولی‌میدانیم

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{۲}\ ,$$

از اینجا،

$$ab\leqslant\left(\frac{P}{۴}\right)^{۲}.$$

تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است‌که

$$a=b=\frac{P}{۴}.$$

این نامساوی را بازهم می‌توان‌بصورت دیگری تعبیرنمود: در میان همهٔ مستطیل‌هایی با مساحت A ، مربع‌کمترین محیط را دارد. زیرا فرض می‌کنیم‌که طول اضلاع چنین مستطیلی a و b باشد، ملاحظه می‌کنیم‌که

$$\frac{P}{۴}=\frac{a+b}{۲}\geqslant\sqrt{ab}=A^{\frac{۱}{۲}}\ ,$$

یا،

$$P\geqslant ۴A^{\frac{۱}{۲}}.$$

تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است‌که $a=b$. این‌نتیجه راپیش از زمان اقلیدس می‌دانستند. با توجه به این ملاحظات، طبیعی است سؤال شودکه‌آیا همواره حکم $G_n\leqslant A_n$ درست است. قضیه مشهور زیر جواب این سؤال را می‌دهد.

قضیهٔ میانگین حسابی و هندسی:

میانگین هندسی n عدد مثبت همواره نابیشتر از میانگین حسابی آنها است، و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که n عدد با هم برابر باشند.

قبل از اینکه به اثبات این حکم بپردازیم به تعبیرهندسی آن توجه می‌کنیم: فرض می‌کنیم‌که طول یال‌های عمود برهم یك جعبهٔ n بعدی اعداد $x_۱$ ، $x_۲$ ، ...، و x_n باشد، و فرض می‌کنیم‌که V حجم‌آن و P حاصلجمع طول همهٔ یال‌های‌آن باشد بنا به این قضیه نتیجه می‌شود،

$$V^{\frac{۱}{n}}=G_n\leqslant A_n=\frac{P}{۲^{n-۱}n}\ ,$$

یا

$$V\leqslant\left(\frac{P}{۲^{n-۱}}\right)^{n}.$$

تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $x_۱=x_۲=\cdots=x_n$. بنابراین،

اگر P ثابت باشد، V بیشترین مقدار را وقتی داردکه $x_۱=x_۲=\cdots=x_n$. به بیان هندسی، این بدان معنی است‌که

از میان همهٔ جعبه‌های n بعدی (متوازی السطوح‌های قائم)که حاصلجمع طول همهٔ یالهای آنها مقدار ثابت P باشد ، «مکعب» بیشترین حجم را دارد . بعلاوه از بین همهٔ جعبه‌های n بعدی با حجم ثابت ، مکعب کمترین حاصلجمع طول همهٔ یالها را دارد . این دو تعبیر هندسی تعمیم همان تعبیرهای هندسی است که قبلاً دربارهٔ مستطیل گفته شد .

برای اثبات از روشی استفاده می‌کنیم که ، ریاضیدان فرانسوی ، اگوستین کوشی [1] (۱۸۵۷–۱۷۸۹) بکار بسته است . کوشی ملاحظه کرد که هرگاه بتوان حکم «$G_n\leqslant A_n$» را بازای هر n که بصورت قوه‌ای از ۲ باشد ثابت کرد ، آنگاه می‌توان بازای هر n نیز اثبات نمود .

برای اثبات در حالت $n=2^k$ $(k=1,2,\dots)$ استقراء را بکار میبرد . اگر $n=2$ ، یعنی $k=1$ ، بدیهی است که

$$x_1\cdot x_2=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2.$$

در اینجا ،

$$x_1 \cdot x_2\leqslant\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2.$$

و تساوی فقط وفقط وقتی برقرار است که $(x_1-x_2)^2=0$ یعنی $x_1=x_2$. اگر $n=4$ ، یعنی $k=2$ ، آنگاه داریم :

$$(1)\quad (x_1\cdot x_2)(x_3\cdot x_4)\leqslant\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2.$$

از طرفی ،

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cdot\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\leqslant\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right)^2,$$

یا

$$(2)\quad \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^4.$$

با استفاده از نامساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم :

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^4.$$

فرض می‌کنیم که نامساوی بازای $n=2^k$ برقرار باشد (فرض استقراء)، یعنی :

$$\prod_{i=1}^{2^k} x_i\leqslant\left(\frac{\sum_{1}^{2^k}x_i}{2^k}\right)^{2^k}.$$

ثابت می‌کنیم که نامساوی بازای $n=2^{k+1}$ هم برقرار است . یعنی

---

(1). Augustin Cauchy

ثابت می‌کنیم ، که

$$\prod_{i=1}^{2^{k+1}} x_i\leqslant\left(\frac{\sum_{i=1}^{2^{k+1}}x_i}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}.$$

گوییم

$$\prod_{i=1}^{2^{k+1}}x_i=\left(\prod_{i=1}^{2^k}x_i\right)\left(\prod_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}x_i\right)$$

$$\leqslant\left(\frac{\sum_{1}^{2^k}x_i}{2^k}\right)^{2^k}\cdot\left(\frac{\sum_{2^k+1}^{2^{k+1}}x_i}{2^k}\right)^{2^k}.$$

از طرفی ،

$$\left(\frac{\sum_{1}^{2^k}x_i}{2^k}\right)\left(\frac{\sum_{2^k+1}^{2^{k+1}}x_i}{2^k}\right)\leqslant\left(\frac{\sum_{1}^{2^{k+1}}x_i}{2^{k+1}}\right)^2.$$

لذا خواهیم داشت :

$$\prod_{i=1}^{2^{k+1}}x_i\leqslant\left(\frac{\sum_{1}^{2^{k+1}}x_i}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}.$$

بنابراین به موجب استقراء ، قضیه بازای هر n که قوه‌ای از ۲ باشد ، برقرار می‌شود . باقی‌می‌ماند ، اثبات اینکه ، نامساوی بازای هر n برقرار است . در صورتی که n قوه‌ای از ۲ نباشد ، عدد 2^m را چنان میگیریم که بزرگتر از n باشد . فرض کنیم که $2^m-n=k$. اینک نامساوی مذکور را برای 2^m عدد زیر بکار می‌بریم .

$$\underbrace{x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ \dots\ ,\ x_n}_{n}\ ,\quad\underbrace{A_n\ ,\ \dots\ ,\ A_n}_{k}\ ,$$

$$\left(\prod_{1}^{n} x_i\right)A_n^k\leqslant\left(\frac{\sum_{1}^{n} x_i+kA_n}{2^m}\right)^{2^m}$$

$$=\left(\frac{nA_n+kA_n}{2^m}\right)^{2^m}=A_n^{2^m},$$

یا

$$(G_n)^n\cdot A_n^k\leqslant A_n^{n+k}.$$

بالنتیجه ،

$$(G_n)^n\leqslant A_n^n.$$

از اینجا ،

$$G_n\leqslant A_n.$$

البته تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که :

$x_1=x_2=\cdots=x_n$. ■

یک کاربرد

قضیهٔ زیر یکی از قضایائی است که در حل بعضی از مسائل بکار میرود. بنابر قضیهٔ دو جمله‌ای داریم:

$$(1+x)^n = 1+nx+\sum_{2}^{n}\frac{n!}{k!(n-2)!}x^k \ (n\in N).$$

هرگاه $x>0$، بدیهی است که هر یک از جمل حاصلجمع فوق عددی است مثبت.

بنابراین،

$$(1+x)^n > 1+nx.$$

قضیهٔ زیر تعمیمی از این نامساوی است.

قضیه. اگر $x>-1$ و $0<\alpha<1$ آنگاه

$$(1)\quad (1+x)^\alpha \leqslant 1+\alpha x.$$

و هرگاه $\alpha<0$ یا $\alpha>1$ و $x>-1$ آنگاه

$$(2)\quad (1+x)^\alpha \geqslant 1+\alpha x.$$

در هر دو حکم فوق، تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $x=0$

برهان: قضیه را تنها در حالتی که α عددی گویا است اثبات می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $\alpha=\frac{m}{n}$، که در آن m و n اعدادی طبیعی‌اند و $0<\alpha<1$ با استفاده از قضیهٔ میانگین می‌توان نوشت.

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\underbrace{(1+x)(1+x)\dots(1+x)}_{m}\ \underbrace{1.1.1\dots1}_{n-m}} \leqslant \frac{m(1+x)+n-m}{n} = 1+\frac{m}{n}x;$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $1+x=1$ یا $x=0$. نامساوی (1) اثبات شد. (برای حالت گویا) فرض کنیم که برای هر عدد α که $0<\alpha<1$، حکم ثابت شده باشد. برای اثبات نامساوی (2)، دو حالت در نظر می‌گیریم.

I. $\alpha>1$.

اگر $1+\alpha x$ نامثبت باشد، بدیهی است که نامساوی (2) برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم که $1+\alpha x>0$ یعنی $\alpha x>-1$؛ ولی چون $\frac{1}{\alpha}<1$، بنابر نامساوی (1) داریم:

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant 1+\frac{1}{\alpha}.\alpha x = 1+x.$$

بالنتیجه،

$$1+\alpha x \leqslant (1+x)^\alpha;$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است، که $\alpha x=0$ یا $x=0$.

II. $\alpha<0$.

اگر $1+\alpha x$ نامثبت باشد، نامساوی (2) برقرار است. لذا فرض می‌کنیم که $1+\alpha x>0$، عدد طبیعی n را طوری انتخاب می‌کنیم که $0<\frac{-\alpha}{n}<1$، در این صورت بنابر نامساوی (1) داریم:

$$(1+x)^{-\frac{\alpha}{n}} \leqslant 1-\frac{\alpha}{n}x.$$

بنابراین،

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{n}} \geqslant \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}x}$$

از طرفی،

$$\frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}x} = \frac{1+\frac{\alpha}{n}x}{(1-\frac{\alpha}{n}x)(1+\frac{\alpha}{n}x)} = \frac{1+\frac{\alpha}{n}x}{1-(\frac{\alpha}{n}x)^2} \geqslant 1+\frac{\alpha}{n}x.$$

بنابراین،

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{n}} \geqslant 1+\frac{\alpha}{n}x,$$

یا

$$(1+x)^\alpha \geqslant (1+\frac{\alpha}{n}x)^n$$

چون $1+\alpha x>0$، نتیجه می‌گیریم $\frac{\alpha x}{n}\geqslant -1$، خواهیم داشت:

$$(1+x)^\alpha \geqslant (1+\frac{\alpha}{n}x)^n \geqslant 1+n.\frac{\alpha}{n}x = 1+\alpha x.$$

و به آسانی می‌توان ملاحظه کرد که تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است، که $x=0$. ■

اگر در نامساویهای (1) و (2) بجای x، $y-1$ قرار دهیم، نامساویهای زیر حاصل می‌شود:

$$(1)'\quad y^\alpha - \alpha y \leqslant 1-\alpha \quad (y\geqslant 0 \text{ و } 0<\alpha<1),$$

$$(2)'\quad y^\alpha - \alpha y \geqslant 1-\alpha \quad (y\geqslant 0 \text{ و } \alpha>1 \text{ یا } \alpha<0).$$

تساوی $(1)'$ یا $(2)'$ فقط و فقط وقتی برقرار است که $y=1$.

از نامساوی (۲)′ میتوان درحل مسئلهٔ زیر استفاده کرد.

. کدام استوانهٔ دوارقائمی به‌حجم V دارای کمترین مساحت سطح کل است؟ فرض کنیم که چنین استوانه‌ای دارای ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r باشد، دراین صورت

$$V=\pi r^{2}.h \quad \text{و} \quad S=2\pi(r^{2}+r.h).$$

درعبارت اخیر، بجای h، مقدار آنرا برحسب V و r قرارمی‌دهیم. بنابراین،

$$S=2\pi\left(r^{2}+\frac{V}{\pi r}\right).$$

با فرض $\frac{1}{r}=y$ و $\alpha=-2$،

$$S=2\pi\left(y^{\alpha}+\frac{V}{\pi}y\right).$$

عبارت داخل پرانتز شبیه بـه $y^{\alpha}-\alpha y$ است، بـا این تفاوت که ضریب y، بجای $-\alpha$ (یعنی ۲)، $\frac{V}{\pi}$ می‌باشد. تنها کافی است که نسبت r به h را تعیین کنیم، زیرا همهٔ استوانه‌های دوار قائمی به‌حجم V که نسبت r به h در آنها مقدار مفروضی باشد، جملگی یکسانند. بنابراین بدون آنکه خللی بـه‌کلیت مسئله وارد شود فرض می‌کنیم که $V=2\pi$. با این شرط داریم:

$$S=2\pi\left(r^{2}+\frac{2}{r}\right).$$

بنابر نامساوی (۲)′، S کمترین مقدار را وقتی دارد که $y=1$. بنابراین، $r=1$ و از اینکه

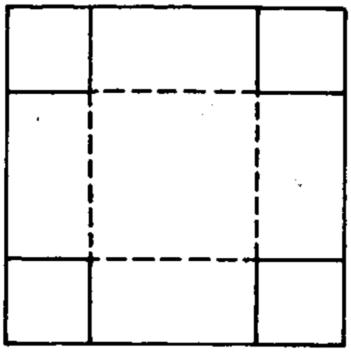
$$V=\pi r^{2}h=2\pi,$$

$h=2$. بالنتیجه، $h=2r$.

به‌عبارت دیگر، ثابت کرده‌ایم که یك استوانهٔ قائم دوار بـا حجم ثابت V وقتی کمترین مساحت کل را داراست، که قطر آن برابر با ارتفاعش باشد.

تمرین.

● یك‌ورق حلبی به شکل مربع و به ضلع 2α در دست است. می‌خواهیم، از هرگوشه آن مربعی ببریم، و آنرا روی خطوطی که با نقطه چین مشخص شده است تا کنیم، تا جعبه‌ای به شکل مکعب مستطیل (روباز) تهیه شود. ضلع مربع بریده شده چقدر باشد، تا حجم جعبه ماگزیموم شود؟



2α

● مقدار مینیموم هریك از عبارات $x^{3}-27x$ و $x^{-\frac{1}{2}}+27x$ را پیدا کنید، $(x>0)$.

● ثابت کنید که اگر $\alpha>0$ آنگاه

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}<\sum_{1}^{n}k^{\alpha}<\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

● ثابت کنید، که اگر $-1<\alpha<0$، آنگاه

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}<\sum_{1}^{n}k^{\alpha}<\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

● ثابت کنید، که دربین همهٔ مکعب مستطیل‌هایی با سطح کل ثابت، مکعب بیشترین حجم را دارد.

● اگر x و y دوعدد مثبت و $x\neq y$، ثابت کنید که

$$(xy^{n})^{\frac{1}{n+1}}<\frac{x+ny}{n+1}\quad (n=1\ ,\ 2\ ,\ \dots).$$

● ثابت کنید که

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}(n=2,3,4,\dots).$$

● اگر $P>0$، $x\geqslant 0$، و $\alpha>1$، مینیموم $x^{\alpha}-px$ را پیدا کنید.

● ثابت کنید، در بین‌همهٔ مثلث‌هایی با محیط ثابت‌مثلث متساوی‌الاضلاع بیشترین مساحت را دارد.

● ثابت کنید، در بین همهٔ چهار ضلعی‌هایی‌با محیط‌ثابت P و قابل محاط در دایره، مربع بیشترین مساحت را دارد.

* * *

در تهیهٔ این بحث ازکتاب ذیل استفاده شده است.

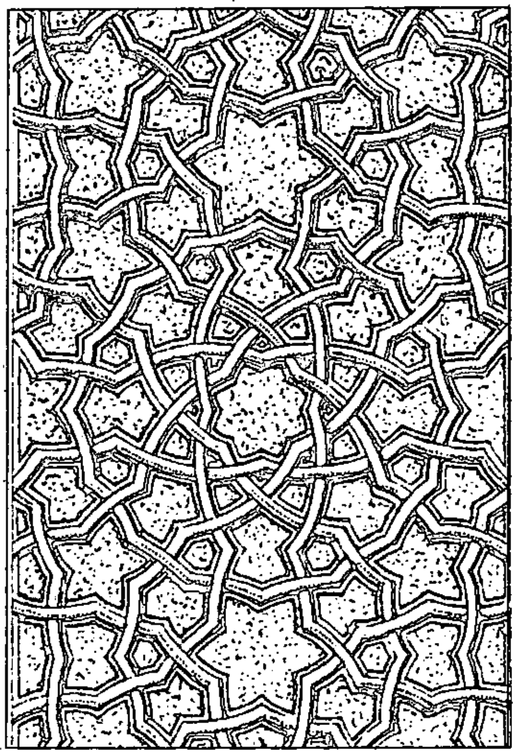
(1) Nicholas D. Kazarinoff; Analytic Inequalities, Holt , Rinehart and winston , 1961.

***

مثالهایی در

آموزش مفهوم گروه

در ریاضیات مقدماتی



علیرضا جمالی

مقدمه . یکی از رموز موفقیت هرمعلم ریاضی آشنائی به مسائل آموزش ریاضی ، واتخاذ شیوه‌هـای تعلیمی مناسب است . بالاخص، با توجه به‌اینکه برنامه‌های ریاضیات‌درحال‌حاضر دستخوش دگرگونیهای مهم وعمیقی گردیده است ، تعلیم آن بیش از پیش دشوارتر بنظر میرسد . آموزش سوء ریاضیات جدید ــ یا به‌عبارتی ریاضیات واقعی ــ که‌دراین میان به‌جهت توانائیهای خاص آن درایجاد استقلال فکری دردانش آموزان وآشنا نمودن آنان بـا مقدمات تجرید ریاضی ازاهمیت خاصی برخوردار است ، میتواند منشأ عوارض نامطلوبی در امر آموزش ریاضی باشد . بنابـراین برمعلمین ریاضی است که‌باعنایت به‌نقش تعلیمی ریاضیات جدید وباتوسل به‌اصول آموزش ریاضی ، مبادرت بـه‌تعلیم آن نمایند . اتخاذ شیوه‌های جزمی درتدریس ریاضیات جدید متضمن خطراتی جدی‌خواهد بود ومحصلین مستعد وراغب را ازآموختن این علم دقیق گریزان و بیزار خواهدکرد .

ذیلاً هدف‌ما این‌خواهد بودکه باذکرمثالهائی‌خاص نشان دهیم که‌چگونه میتوان روشهای مناسبی را درتعلیم ریاضیات‌جدید (در دورهٔ متوسطه) پیش‌گرفت . این مثالها به‌دستگاهی ریاضی، موسوم‌به گروه (متناهی) مربوط میشوند . یك گروه دستگاهی است مانند (G,o) کـه درآن ، G یـك مجموعه‌ی غیرتهی ، و o عملی دوتائی در G است بطوری‌که

(گ۱). عمل o شرکتپذیر است ؛

(گ۲). (G,o) عضوخنثا دارد ، یعنـی عضـوی مـانـنـد e از G هست بطوری که‌بازاء هر a از G ، $aoe=eoa=a$ ؛

(گ۳). هرعضو G عکس دارد ، یعنی بازاء هر a از G ، عضوی‌از G مانند a' هست بطوری که $aoa'=a'oa=e$ ؛

بعلاوه، درصورتی‌که‌اصل‌موضوع‌ذیل‌نیز برقرار باشد، دستگاه (G,o) را یك گروه‌آبلی (یا تعویضپذیر) خوانند .

(گ۴). بازاءهر a و b از G ، $aob=boa$.

بعضی از مؤلفین‌کتابهای ریاضی (دورهٔ متوسطه) ، وبرخی از معلمین ریاضیات جدید این‌دستگاه ریاضی رابااصول موضوعه‌ای بصورتی که فوقاً ذکرشد ، آغازکرده و بی‌توجه به‌جنبه‌ها و موارد متنوع ومحسوس‌آن‌دفعةً به‌معرفی این دستگاه میپردازند . اگرچه ممکن‌است اینان در شیوه‌های تعلیمی خود معتقد به‌این باشند که این مفهوم ازجنبهٔ منطقی صرف‌ساده‌است ؛ ولی تحقیقات‌درآموزش ریاضی نشان‌میدهد که‌بکار بستن رویه‌هائی به‌منظور ایجاد انگیزه، با ارائهٔ الگوهائی ملموس ومحسوس کـه مبتنی برتجارب معمول متعلمین ازمحیط زندگی باشد ، از مطلوبترین اسباب تفهیم بشمار میرود. زیرا ، درواقع،آموختن، فرایندی است ازمعلوم به‌مجهول، ازجزئی به‌کلی ، وازمحسوس به‌معقول ... البته این‌موضوع‌منحصر به‌مثال خاص مذکور نبوده ودرهر موردی صادق است .

دراینجا مراد اینست کـه به‌توسط تابع (کـه ضمناً تفهیم جنبه‌هائی ازآن نیز منظور نظراست) به‌ساختن چندالگو برای گروههای (آبلی ، وغیر آبلی) متناهی بپردازیم ، این‌نمونه‌ها چنان انتخاب شده‌اند که‌میتوان آنهارا به‌سهولت به‌محصلین‌ریاضی، حتی درسنین پایین ، آموخت ونتایج لازم و مطلوب را کسب کرد . اهمیت این مثالها درآنست‌که میتوانند به‌عنوان بازیهای ریـاضی تلقی شوند ؛ از این حیث نه‌تنها ملال‌آور نبوده بلکه آموزنده‌نیز خواهند بود . معلمین باذوق درسهای جالب و مفید دیگری از آن خواهند آموخت .

مثال ۱. مجموعه‌ای متشکل از چهار شیء □ ، △ ، □ ، △ راکه بترتیب آنها را مربع ، مثلث ، مربع رنگی ، ومثلث رنگی مینامیم، در نظر میگیریم . این مجموعه را با A نشان میدهیم ؛

A [□ △ □ △]

o	I	p	Q	R	PR	QR
I	I	p	Q	R	PR	QR
P	P	Q	I	PR	QR	R
Q	Q	I	p	QR	R	PR
R	R	QR	PR	I	Q	P
PR	PR	R	QR	P	I	Q
QR	QR	PR	R	Q	P	I

در اینجا، I عضو خنثای گروه است؛ عکس‌های هریک از اعضای PR،R،I و QR، درست‌خودشان میباشند، و نیزعکس P تابع Q است وبالعکس. (با اعضای گروه مثال ۲ مقایسه کنید). همچنین پیداست که $\{P,Q\}$ مولد این گروه است.

به‌عنوان تمرین زیر گروه‌هائی ازگروه فوق استخراج کرده و سعی کنید تعابیری، بشرح مذکور در مثالهای فوق، برای آنها بیاورید آیا این گروه‌ها آبلـی هستند یا نه؛ عـددٔ اعضای آنها (یعنی مرتبه‌های آنها) چه رابطه‌ای با مرتبهٔ گروه اصلی دارد.

به سیاق مثال ۱، میپردازیم به‌تعبیر هندسی دیگـری‌که نشان میدهد میتوان اعضای این گروه (شش عضوی) را به‌عنوان تقارنهائی در نظرگـرفت. مجموعهٔ نقاط فضای اقلیـدسی R^3 را در نظرگرفته و آنرا بجای مجموعهٔ C (یا D) اختیار میکنیم، توابع $f:R^3 \longrightarrow R^3$، $g:R^3 \longrightarrow R^3$ و $h:R^3 \longrightarrow R^3$ رابترتیب با ضوابط ذیل تعریف میکنیم؛

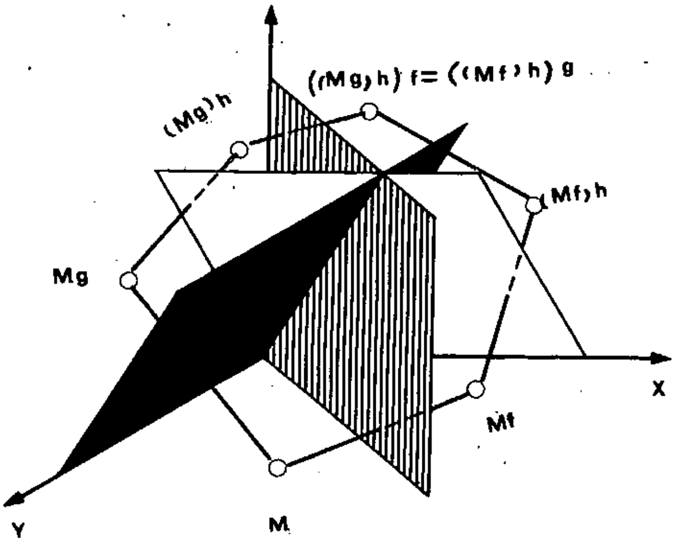
$f: (x,y,z) \longrightarrow (y,x,z)$ ، $g: (x,y,z) \longrightarrow (z,y,x)$ ، و $h: (x,y,z) \longrightarrow (x,z,y)$ بعلاوه، $e:R^3 \longrightarrow R^3$ تابع همانی میگیریم یعنی با ضابطهٔ $e: (x,y,z) \longrightarrow (x,y,z)$ ؛ معلومست‌که

$$fog: (x,y,z) \longrightarrow (z,x,y)$$
$$foh: (x,y,z) \longrightarrow (y,z,x),$$

سایر ترکیبات توابع e، f، g، h، fog، و gof یکی ازهمین‌توابع خواهد بود. در اینجا مجموعهٔ $G=\{e,f,g,h,fog,foh\}$ با عمل ترکیب توابع یك‌گروه (غیرآبلی) شش عضوی است‌که ساختمان آن همانست‌که در مثال ۲ ملاحظه شد. از جنبهٔ هندسی، در واقع، f هر نقطه از R^3 را به قرینهٔ آن نسبت به‌صفحهٔ نیمساز صفحات xoz و yoz تبدیـل میکند؛ g هر نقطه از R^3 را بـه قرینهٔ آن نسبت به صفحه‌ی نیمساز صفحات xoy و xoz تبدیل‌میکند؛ h هرنقطه از R^3 را بـه‌قرینهٔ آن نسبت به صفحهٔ نیمساز صفحات xoy و xoz تبدیل میکند؛ و بالاخره e هیچ تغییری به‌نقاط R^3 نمیدهد.

در خاتمه توجه خوانندگان رابدین نکته جلب میکنیم‌که ترکیبات مختلف‌توابع f، g، و h به تابعی‌منجر میشودکه حاصل عمل آن بر هرنقطه از R^3، نقطـهٔ دیگـری از فضای اقلیدسی است‌که به‌بیان ساده، ازقرینه‌یابیهای‌مکرر نسبت به‌صفحات نیمساز بدست میآید.

در شکل زیر نقطه‌ای مانند M (بدلخواه) از R^3 انتخاب شده، قرینه‌یابیهای مکـرر روی آن صورت گرفته است. پس از ملاحظهٔ آن و دقت در چگونگی ترکیبات توابع f، g، h میتوان به نتایجی نایل آمد.



مثلا چنانکه پیداست fohog=gohof، یا fohogof=goh و بهمین صورت، fohogofohog=e، . .

منابع

1– Lucienne Félix , *The Concept of function in the teaching of elementary mathematics.* (Mathematical Reflections, Edited by Members of the Association of the Teachers of Mathematics, Cambridge University Press,1970)

2. Irving Adler , *The new Mathematics*, The John Day Company, Inc, New york, Tenth Printing.

چکیده . از جمله کوششهای اولیه در جهت تعمیم تعریف کلاسیک احتمال، به‌موردی که درآن تعداد حالتهای مساعد و ممکن نامتناهی است، استفاده از روشهای هندسی درحل مسائل احتمال می‌باشد . دراین مقالهٔ ضمن توضیح مقدماتی مطلب به‌حل چندمسئلهٔ احتمال، که از لحاظ تاریخی حائز اهمیت می‌باشند، اشاره شده است .

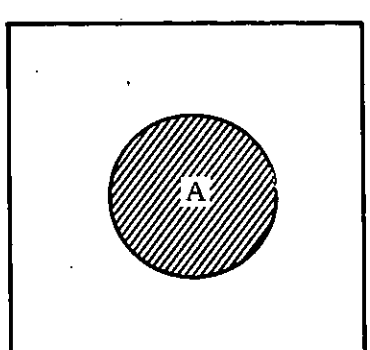
احتمال هندسی

دکتر عبدالرحمن آذری

۱ ـ احتمال‌هندسی : تعریف کلاسیک احتمال، همان‌طور که در ریاضیات دبیرستان به‌آن اشاره شده است ، براساس مفهوم برآمدهای همشانس می‌باشد . اگرکلیهٔ n برآمد ممکن‌یك‌آزمایش تصادفی همشانس باشند واز این حالتها n_A حالتِ مساعد برای وقوع پیشامد A باشد ، احتمال کلاسیك وقوع A به‌صورت $\frac{n_A}{n}$ تعریف می‌شود . البته ، دراینجا فرض براین است‌که n یك‌عدد متناهی است . به‌عنوان مثال ، اگر اعداد ۱ تا ۱۰ را روی ده مهره یك‌شكل و یك‌اندازه بنویسیم ودریك كیسه قراردهیم وپس‌از مخلوط‌کردن چشم بسته یك‌مهره از درون کیسه استخراج کنیم ، احتمال اینکه روی مهرهٔ انتخاب شده یك‌عدد فردنوشته شده باشد برابربا $\frac{5}{10}$، یعنی $\frac{1}{2}$، می‌باشد .

از همان اوایل توسعهٔ نظریهٔ احتمال این مطلب توجه دانشمندان راجلب نمود که تعریف کلاسیك احتمال برای مواردی که‌درآن تعداد برآمدهای ممکن‌یك‌آزمایش تصادفی متناهی‌نیست، کفایت نمی‌کند . درهمان موقع ، مثالهای خاص دررابطه بامسائل منجر به‌اصلاح وتغییر تعریف احتمال برای مواردی که‌درآن‌تعداد حالتهای ممکن یك‌آزمایش تصادفی متناهی نیست گردید . در همهٔ این‌مطالعات مفهوم همشانس بودن حالتهای ممکن‌نقش اصلی را دارا بود .

مسئلهٔ‌اصلی که‌مطرح شد ومنجربه‌تعمیم مفهوم‌احتمال‌گردید به‌صورت زیر است :



شکل ۱

ناحیهٔ Ω را روی صفحه درنظر بگیرید و فرض کنید A بخشی از آن ناحیه ، مطابق شکل۱ ، باشد . یك نقطه«بتصادف» درون Ω انتخاب‌می‌شود. می‌خواهیم احتمال این پیشامد را که نقطهٔ انتخاب شده درون A قرار گیرد حساب کنیم . البته ، انتخاب نقطه «بتصادف» به‌این معنی است که نقطهٔ

انتخاب شده در روی Ω می‌تواند هر نقطه از Ω باشد و کلیهٔ نقاط Ω در رابطه با انتخاب شدن همشانس می‌باشند.

با توجه به اینکه تعداد حالتهای ممکن و مساعد در این مسئله نامتناهی است، استفاده از تعریف کلاسیک احتمال برای حل مسئله مناسب نمی‌باشد، بلکه احتمال به‌صورت نسبت اندازهٔ هندسی ناحیهٔ A به اندازهٔ هندسی ناحیهٔ Ω تعریف می‌شود. بنابراین، در این مسئله می‌توان نوشت:

$$P(A)=\frac{\text{مساحت } A}{\text{مساحت } \Omega}$$

تعمیم این مفهوم به ابعاد دیگر ساده است. به‌طور کلی، می‌توان گفت اگر Ω ناحیه‌ای از یک فضای n بعدی و A بخشی از آن ناحیه باشد، اگر نقطه‌ای را بتصادف درون Ω انتخاب کنیم احتمال اینکه این نقطه درون A قرار گیرد عبارت است از:

$$P(A)=\frac{\text{اندازهٔ } A}{\text{اندازهٔ } \Omega}$$

واضح است که اگر بعد فضای مورد مطالعه برابر با یک باشد، این اندازه عبارت از طول، اگر مانند مسئلهٔ فوق بعد فضا برابر با دو باشد، اندازه عبارت از مساحت، و در حالت سه‌بعدی و بعد های بیشتر عبارت از حجم خواهد بود.

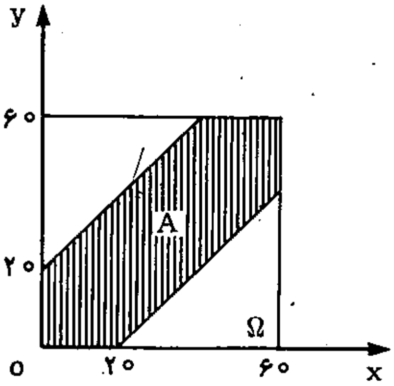
مثال زیر نمونه‌ای از حل یک مسئلهٔ احتمال به‌طریق هندسی است.

مثال: دونفر با هم قرار می‌گذارند که بین ساعت ۱۲ تا ۱ بعد از ظهر همدیگر را در کتابخانه‌ای ملاقات کنند. هر نفر که زودتر به کتابخانه برسد ۲۰ دقیقه منتظر می‌ماند و اگر نفر دوم در این فاصله نیامد کتابخانه را ترک می‌کند. با فرض اینکه زمان ورود هر یک از این افراد «بتصادف» در فاصله ۱۲ تا ۱ بوده و زمان ورود یکی تأثیری در زمان ورود دیگری نداشته باشد، احتمال اینکه این دو نفر همدیگر را در کتابخانه ملاقات کنند چقدر است؟

حل: اگر زمان ورود نفر اول را با X و زمان ورود نفر دوم را، با Y نشان دهیم، شرط لازم و کافی برای اینکه این دو نفر همدیگر را ملاقات کنند عبارت است از:

$$|X-Y|\leqslant ۲۰$$

کلیهٔ حالتهای ممکن درون مربع به‌ضلع ۶۰ قرار دارند و از این حالتها



شکل ۲

تنها قسمت هاشور زده مساعد برای انجام ملاقات می‌باشد. بنابراین،

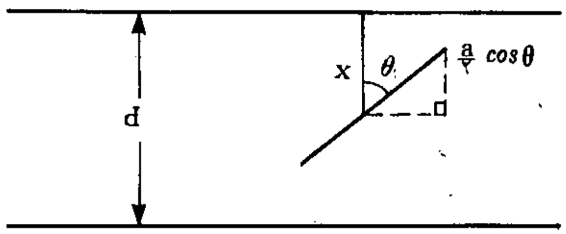
$$P(A)=\frac{\text{مساحت } A}{\text{مساحت } \Omega}=\frac{۶۰^۲-۴۰^۲}{۶۰^۲}=\frac{۵}{۹}.$$

۲ ـ مسئلهٔ سوزن بوفن:

یکی از مسائل احتمال که می‌توان به‌روش احتمال هندسی حل نمود مسئلهٔ سوزن بوفن می‌باشد. این مسئله که از لحاظ تاریخی دارای اهمیت است، در سال ۱۷۳۳ به‌وسیلهٔ بوفن[1] فرانسوی مطرح شد و منشأ مطالعاتی در زمینهٔ هدف‌گیریها در تیراندازی گردید. مسئلهٔ سوزن بوفن به‌صورت زیر است.

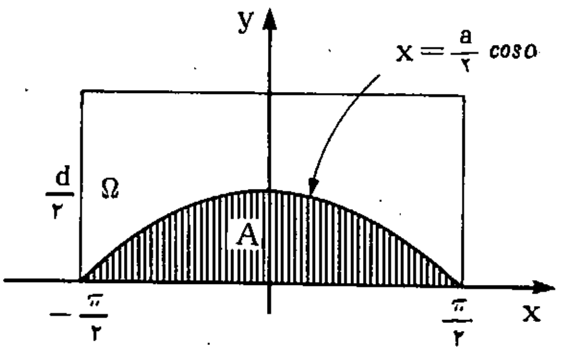
روی یک صفحه خطوط موازی به‌فاصله d از همدیگر رسم شده است. سوزنی به‌طول a $(a<d)$ بتصادف روی این صفحه پرتاب می‌شود. احتمال اینکه سوزن یکی از خطوط موازی را قطع کند چیست؟

حل به‌طریق هندسی: مطابق شکل ۳، x را فاصلهٔ وسط سوزن



شکل ۳

تا نزدیکترین خط موازی و θ را زاویهٔ سوزن با خط عمودی می‌گیریم. به‌این ترتیب، در پرتاب سوزن x بتصادف مقداری بین ۰ و $\frac{d}{۲}$ و θ بتصادف مقداری بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ اختیار می‌کند. بنابراین، طبق شکل ۴، حالتهای ممکن درون مستطیل Ω به‌طول π و عرض $\frac{d}{۲}$ قراردارند. از روی شکل ۳، واضح است که اگر x کمتر از $\frac{a}{۲}\cos\theta$ باشد، سوزن یکی از خطوط موازی را قطع خواهد



شکل ۴

دارند. بنابراین، احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A)=\frac{\text{مساحت } A}{\text{مساحت } \Omega}=\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a}{2}\cos\theta\, d\theta}{\frac{d}{2}\pi}=\frac{2a}{\pi d}$$

به‌این‌ترتیب، مثلاً اگر سوزنی به‌طول یک سانتیمتر روی صفحه‌ای که‌در آن خطوط موازی به‌فاصله‌های دوسانتیمتر ازیکدیگر ترسیم شده است بتصادف پرتاب شود، احتمال اینکه این‌سوزن یکی از خطوط صفحه راقطع کندبرابر است‌با $P(A)=\frac{1}{\pi}$.

نکتهٔ جالبی‌که دراین مسئله وجود دارد ظاهر شدن عدد $\pi=3/14159\ldots$ درجواب مسئله است واین‌امر موجب‌می‌شود که‌بتوان عدد π را به‌طور تجربی محاسبه نمود. به‌این‌ترتیب‌که، اگر سوزنی رابه‌دفعات زیاد روی‌صفحه پرتاب کنیم وتعداددفعاتی راکه درآن سوزن یکی‌ازخطوط موازی راقطع می‌کند بشماریم، فراوانی نسبی دفعات قطع، احتمال تجربی قطع خطوط به‌وسیلهٔ سوزن‌رامی‌دهد. این احتمال تجربی‌رامی‌توان (طبق‌قضیهٔ برنولی[2]) به‌عنوان تقریبی برای $P(A)$ به‌کاربردوبه‌این وسیله تقریبی‌برای عدد π به‌دست آورد.

یک سری آزمایش از این قبیل، در بین سالهای ۱۸۴۹ تا ۱۸۵۳ به‌وسیلهٔ‌منجم سویسی آر. ولف[3] درزوریخ انجام‌گردید. این‌دانشمند فاصلهٔ خطوط موازی را ۴۵ میلیمتر وطول سوزن را ۳۶ میلیمتر انتخاب کرده بود، از ۵۰۰۰ بارپرتاب تصادفی در ۲۵۳۲ بارسوزن یکی از خطوط موازی‌راقطع نمود وبه‌این‌ترتیب فراوانی نسبی یااحتمال تجربی قطع $0/5064=\frac{2532}{5000}$ به‌دست آمد، با قرار دادن این فراوانی نسبی بجای $P(A)$ رابطهٔ $0/5064=\frac{72}{45\pi}$ به‌دست می‌آید که‌ازحل آن‌برحسب π مقدار تقریبی π برابربا $3/1596$ درمی‌آید که بامقدار تقریبی‌متداول آن‌کمتر از ۰/۰۲ اختلاف دارد.

آزمایشهای دیگری دراین زمینه به‌وسیلهٔ دانشمندان دیگر انجام‌شده ونتایج مشابهی نیز به‌دست آمده است. شمانیزمی‌توانید با انجام این آزمایش ساده عدد π را ازطریق تجربه به‌طورتقریبی محاسبه نمائید.

۳ـ مسئلهٔ لاپلاس: تعمیمهای مختلفی‌درمورد مسئلهٔ سوزن بوفن داده شده است که‌از معروفترین آنها مسئلهٔ لاپلاس[4] است‌که به‌صورت زیر بیان‌می‌شود.

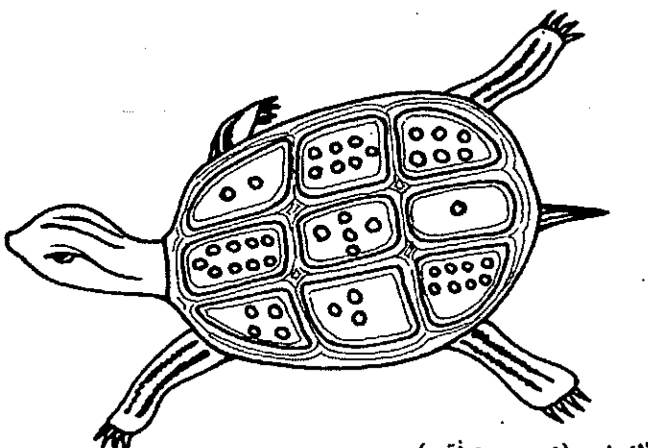
روی یک‌صفحه خطوط موازی افقی به‌فاصله‌های a و خطوط موازی عمودی به‌فاصله b ترسیم شده است. سوزنی به‌طول l که ازهردوی a و b کوچکتر است بتصادف روی‌صفحه پرتاب می‌شود. احتمال اینکه این‌سوزن یکی‌از خطوط صفحه را قطع کند چقدر است؟

این مسئله را می‌توان به‌طریق‌هندسی حل‌نمود وماحل‌آنرا به‌عهدهٔ خواننده واگذار کرده وفقط به ذکر جواب مسئله، که عبارت از $1-\frac{2l(a+b)-l^2}{\pi ab}$ است، اکتفا می‌کنیم. واضح است‌که به‌دلیل وجود π درجواب می‌توان، نظیرمسئله سوزن‌بوفن، باانجام آزمایش مقدار تقریبی عدد π را بتجربه به‌دست آورد. شماهم باصرف کمی وقت می‌توانید این‌کار را انجام‌دهید.

1- Buffon
2 Bernoulli
3- R.wolf
4- Laplace

منابع

1) Chung, Kai Lai ; Elementary Probability Theory with Stochastic Processes, Springer-verlag, 1974.
2) Gnedenko, B: The Theory of Probability, Mir Publications, 1969.
3) Uspensky, J.V.; Introduction to Mathematical Probability, Mc Graw-Hill, 1965.
4) Wadsworth G. P., Bryan, R. J.; Application of Probability and randon Variables, McGraw-Hill 1974.



لاک‌پشت (ومربع وفقی)

دکتر اسماعیل بابلیان

حل یک مسئله با استفاده از جبر بول

در تئوری مجموعه‌ها عمل تفاضل متقارن دومجموعهٔ A و B چنین تعریف می‌شود:

$$(*) \qquad A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$

یکی ازاحکامی که دربارهٔ این عمل مطرح است اثبات شرکتپذیری آن می‌باشد. به‌عبارت دیگر باید ثابت کرد:

$$(**) \qquad (A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C).$$

اثبات این‌حکم، پس‌از جایگذاری از دستور (*)، به روش معمولی، یعنی باعضو گرفتن، کاری خسته کننده و پیچیده است ومعمولاً به‌گونه‌ای نامطلوب از آن اجتناب می‌شود مثلاً، گفته می‌شود بدون اثبات می‌پذیریم! یاقسمتی ازآن را ثابت می‌کنند ومی‌گویند بقیه نیز بهمین‌ترتیب است و ...).

هدف، اثبات (**) بااستفاده ازجبر بول است.

می‌دانیم که اگر X یك مجموعه و $G=P(X)$ آنگاه $(G; \cup, \cap)$ یك‌جبر بول است. اگر مطابق معمول اعمال جبر بول‌را به‌ترتیب با + و . نشان دهیم خواهیم داشت (منظور از A' متمم A است):

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cap B')\cup(B\cap A')$$
$$=A.B'+B.A',$$

که‌اگر طبق معمول ازنوشتن . صرفنظر کنیم و از تعویضپذیری (جابجائی) آن نیز استفاده کنیم بصورت ساده‌تر زیرنوشته می‌شود:

$$A\Delta B=AB'+A'B.$$

حال به‌اثبات (**) می‌پردازیم، گوئیم سمت چپ (**) چنین است:

$$(A\Delta B)\Delta C=(AB'+A'B)C'+(AB'+A'B)'C.$$

اما بنابر قضیهٔ ۵ صفحهٔ ۸۷ وقضیهٔ ۶ صفحه ۸۸ کتاب ریاضیات جدیدسال سوم ریاضی فیزیك می‌توان نوشت:

$$(AB'+A'B)'=(AB')'(A'B)'=(A'+B)(A+B').$$
$$=(A'+B)A+(A'+B)B' \quad [\text{بنابر } B_2 \text{ صفحهٔ ۸۳}]$$
$$=A'A+BA+A'B'+BB'$$
$$=A'B'+AB; \quad [\text{بنابر } B_5 \text{ و } B_4 \text{ صفحهٔ ۸۳}]$$

بنابراین،

$$(1) \quad (A\Delta B)\Delta C=AB'C'+A'BC'+A'B'C+ABC.$$

به‌همین‌ترتیب می‌توان نوشت:

$$A\Delta(B\Delta C)=A(BC'+B'C)'+A'(BC'+B'C).$$

اما باتوجه به‌آنچه درمورد سمت چپ (**) عمل‌شد داریم (با تبدیل A به B و B به C):

$$(BC'+B'C)'=B'C'+BC$$

که‌در نتیجه،

$$(2) \quad A\Delta(B\Delta C)=AB'C'+ABC+A'BC'+A'B'C,$$

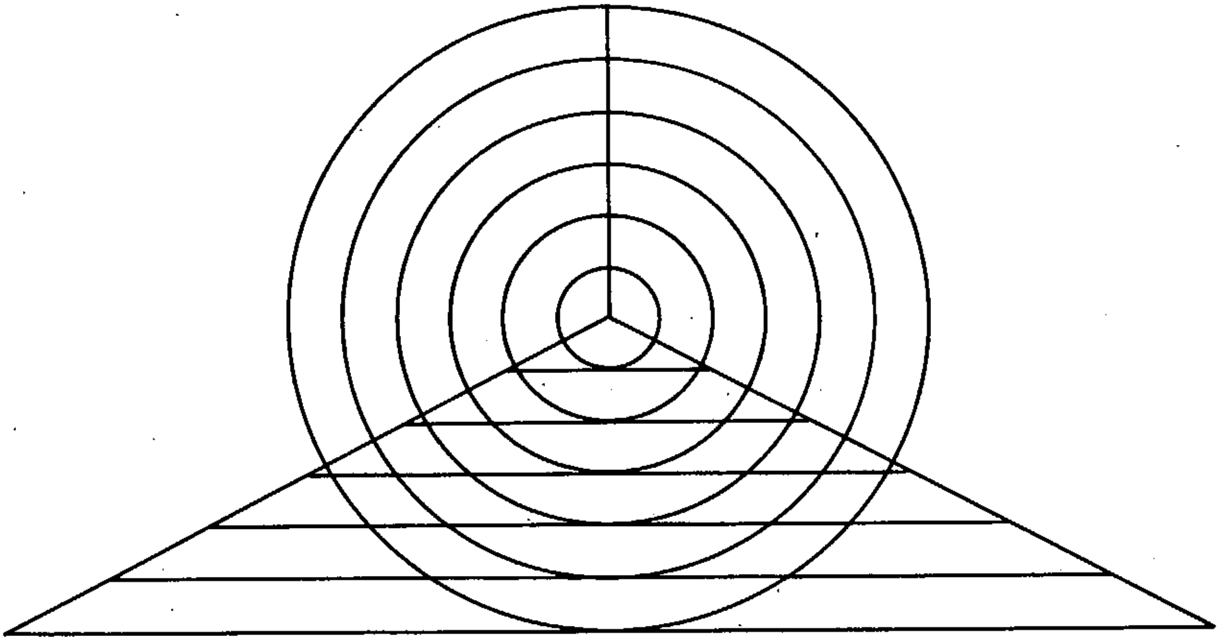
ملاحظه‌می‌شودکه عبارات‌سمت‌راست (۱) و (۲) متساویندبنابراین طرفهای سمت‌چپ آنها نیز متساویند که برقراری تساوی (**) را نتیجه می‌دهد.

تمرین

۱ــ می‌دانیم که‌بازاء هر a، $ab'+a'b=a$ ثابت کنید $b=0$.

۲ــ اگر $ab'+a'b=0$ ثابت‌کنید $a=b$.

۳ــ اگر X مجموعه‌ای دلخواه و $G=P(X)$ بااستفاده‌از تمرینهای (۱) و (۲) و (**) ثابت کنید (G و Δ) یك گروه آبلی است.



شکل ۱

یك روش مقدماتی برای اثبات دستور محاسبهٔ مساحت دایره

روش‌های مقدماتی برای اثبات دستور مساحت دایره براساس انواع مختلف از روش‌های تقریبی میباشد. مثلاً، با نصف کردن مکرر دایره به‌توسط قطرهای آن به‌مثلث‌هائی میرسیم که با کنار هم قراردادن آنها محاسبهٔ مساحت دایره میسرمی‌شود، ویامساحت دایره‌رامی‌توان تقریباً برابر مساحت چندضلعی منتظم محاط در آن، وقتی که تعداد اضلاع زیادباشد، گرفت، وازاین‌جا دستور مورد نظر را به‌دست آورد. مسئلهٔ عمده‌ای که دراین روش‌ها باآن مواجه هستیم آنست که ازلحاظ ریاضی مطالعه درمثلث ویاچندضلعی منتظم‌محاطی که درحد حاصل می‌شوند چنان‌پیچیده است که مطرح کردن آن مخصوصاً برای شاگردانی‌که با مفهوم حدآشنا نیستند کار آسانی نمی‌باشد.

ذیلاً روش ساده‌ای‌که بسادگی به‌تصور درمی‌آید و می‌توان به‌سهولت درکلاس درس آن‌راعملاً تجربه‌کرد وازکنار مفاهیم‌پیچیده ریاضی نیزگذشت ارائه می‌شود. این‌روش مقدماتی در متون قدیمی نیز آمده است.

دایره‌ای بشعاع r رادرنظر می‌گیریم. می‌توان تصورکردکه این‌دایره متشکل ازنخ‌هائی‌است بشکل دایره‌های متحدالمرکز متساوی‌الفاصله که‌ازمرکز دایره (یك‌نقطه) شروع و به‌طرف‌خارج بسط می‌یابند. حال این‌دایره را در امتداد شعاعش ازبالا تامرکز میبریم واین‌نخ‌ها راطوری بازمی‌کنیم تا فاصلهٔ آنهاحفظ شود. و موازی مماسی شوند که‌درپایین بردایره رسم شده است (شکل۱). طول‌این خطوط متوالی بطوریکنواخت‌بانزدیك شدن‌به‌مرکزکوتاه می‌شود. این‌خطوط تشکیل یك مثلث متساوی‌الساقینی خواهند داد که‌قاعدهٔ آن ازباز شدن دورترین نخ از مرکز حاصل شده است و درنتیجه برابر محیط دایره، یعنی $2\pi r$، است. بوضوح دیده می‌شود که‌ارتفاع این‌مثلث برابر r است. بنابراین با استفاده از دستور محاسبهٔ مساحت مثلث، مساحت دایره برابر $\frac{1}{2}\cdot(2\pi r)r=\pi r^2$ بدست می‌آید.

ترجمه از مجلهٔ Mathematics Magazine,
Volume 50, Number 4, September 1977.
نوشتهٔ Sheldon Epsten & Murray Hochberg

مسائل

● **حل برخی از مسائل زیر در شمارهٔ آینده خواهد آمد**

۱ـ یک مجموعهٔ ۶ عضوی با یک عمل بنویسید که دارای خاصیت گروه آبلی باشد. صحت ادعای خود را ثابت کنید.
(کنکور تشریحی - سال ۶۲)

۲ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $f(x)=x|x|-[x]$ را در فاصلهٔ $-2\leqslant x\leqslant 2$ رسم کنید. (کنکور تشریحی - سال ۶۲)

۳ـ مشتق چپ و مشتق راست تابع $f(x)=x|x-1|$ را در نقطهٔ $x_0=1$ پیدا کنید. آیا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است؟
(امتحان نهائی - شهریور ۶۲)

۴ـ ثابت کنید حاصلضرب فاصله‌های هر نقطه از هذلولی از دو خط مجانب آن مقداری است ثابت.
(امتحان نهائی - شهریور ۶۲)

۵ـ تابع $f: R\to R$ دارای این خاصیت است که به ازای هر عدد حقیقی x، $|f(x)|\leqslant x^2$، مقدار $f'(0)$ (مشتق f در نقطهٔ صفر) را محاسبه کنید. (R مجموعهٔ اعداد حقیقی است)
(مسابقهٔ ریاضی استان اصفهان - بیستم خرداد ۶۲)

۶ـ R و r به ترتیب شعاعهای دایرهٔ محیطی و محاطی مثلثی و d اندازهٔ فاصلهٔ مرکز دو دایره است:

(آ) ـ ثابت کنید که بین R، r، و d همواره رابطهٔ زیر برقرار است:

$$d^2=R(R-2r)$$ (رابطهٔ اویلر)

(ب) ـ اگر دو دایره به شعاعهای R و r و خط مرکزی (خط المرکزین) d را رسم کنیم و از نقطهٔ A از دایرهٔ محیطی دو مماس بر دایرهٔ کوچکتر رسم کنیم تا آن را در B و C قطع کند، ثابت کنید که وتر BC بر دایرهٔ کوچکتر مماس است.

۷ـ کره‌ای به شعاع R مفروض است. مطلوبست تعیین ارتفاع مخروطی که بر این کره محیط بوده و کمترین حجم را داشته باشد.

۸ـ مینیموم تابع $f(x)=\mathrm{Max}\{2|x| \text{ و } |1+x|\}$ را تعیین کنید.

۹ـ به چند طریق میتوان ۷ نامهٔ غیر متمایز را در ۴ پاکت پست کرد (بطوری که هیچ پاکتی خالی نماند)؟

۱۰ـ بنابر آنکه معادلهٔ درجهٔ دوم

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-a)(x-b)=0$$

دارای ریشهٔ مضاعف باشد، بدون استعانت از مبین آن، ثابت کنید که $a=b=c$.

۱۱ـ انتگرال معین زیر را محاسبه کنید.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx.$$

۱۲ـ ثابت کنید که تابع $f: N\times N\to N$ با ضابطهٔ ذیل یک تناظر یکبیک است:

$$f(m,n)=\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)+n \quad (n\in N \text{ و } m\in N).$$

۱۳ـ ابتدا ثابت کنید که عبارت $\cos(n\,\mathrm{Arc}\cos x)$ کثیر الجمله‌ای است از درجهٔ n برحسب x. سپس این کثیرالجمله را به عوامل درجهٔ اول تجزیه کنید. با استفاده از آن ثابت کنید که

$$\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{3\pi}{4n}\cdots\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}=\frac{1}{\sqrt{2^n B}};$$

که در آن،

$$B=\begin{cases} 1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n} & (2|n), \\ 1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n-1} & (2\nmid n). \end{cases}$$

۱۴ـ فرض‌کنیم که تابع پیوستهٔ $f: R\to R$ چنان باشدکه بازاء هر x و y از R، $f(x+y)=f(x)+f(y)$. ثابت‌کنید که عددی حقیقی مانند a هست بطوری‌که $f(x)=ax$.

۱۵ـ تابع

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2}x & (|x|\leqslant 1)\\ |x-1| & (|x|>1),\end{cases}$$

مفروض است.

اولاً، نمودار آن را رسم‌کنید و در پیوستگی آن بر R بحث‌کنید.

ثانیاً، مجموعهٔ نقاطی‌راکه f' در آن نقاط موجوداست مشخص کرده و نمودار f' را رسم کنید.

۱۶ـ ثابت‌کنیدکه بزرگترین قوه‌ای از ۲ که عبارت

$$\binom{2^{n+1}}{2^n}-\binom{2^n}{2^{n-1}}\quad (n>1),$$

را عاد میکنید $3n$ است.

۱۷ـ دایره‌ای بشعاع R مفروض است، محیط این دایره را به وسیلهٔ نقاط A_1، A_2، ....، وA_n به n قسمت‌مساوی‌تقسیم میکنیم، نقطه‌ای دلخواه مانند M روی این‌دایره‌اختیارمیکنیم. ثابت‌کنیدکه

(آ) ـ حاصلجمع مربعات فواصل نقطهٔ M از هر یك ازنقاط A_1، A_2، ....، و A_n مستقل از انتخاب نقطهٔ M است؛

(ب) ـ مطلوبست‌حاصلجمع مربعات‌اقطار واضلاع‌کثیرالاضلاع‌منتظم $A_1A_2\ldots A_n$.

توضیح: مسائل حل شدهٔذیل مشتمل‌است برمسائلی درموضوعات‌مختلف ریاضی. این مسائل صرفنظر از تنوع آنها، عموماً، بردو گونه‌اند: برخی آسان، وبعضی نسبتاً دشوارند. باوجود این، ازجنبهٔ آموزشی هردومتضمن فوایدی میباشند.

دراین‌شماره (شمارهٔ اول) این مسائل رابا حل‌آنهاآورده‌ایم. درشماره ـ های آینده، بهترین‌راه‌حلی راکه خوانندگان‌شائق (برای مسائل مطروحه‌ای که پیشتر ذکر شد) ارائه میدهند بنام آنها منتشر خواهیم کرد.

❶ ثابت‌کنید که‌شرط‌لازم و کافی برای‌آنکه $f: A\longrightarrow B$ تابعی یکبیك باشد آنست که بازاءهر x از A، و هر زیر مجموعهٔ A مانند X،

$$f(x)\in f[X]\Longrightarrow x\in X.$$

حل (لزوم). فرض‌کنیم‌که $f: A\longrightarrow B$ تابعی‌یکبیك‌باشد، و x عضوی دلخواه از A، و X زیرمجموعه دلخواهی از A باشد. فرض میکنیم‌که $f(x)\in f[X]$. ازاینجا، به‌موجب‌تعریف $f[X]$، عضوی‌از X مانند x' هست بطوری‌که $f(x)=f(x')$ ولی چون f یکبیك است، $x=x'$. بنابراین، $x\in X$.

(کفایت). فرض‌کنیم کـه تابع $f: A\longrightarrow B$ چنان باشدکه بازاءهر x از A، و بازاءهر زیر مجموعهٔ A مانند X، داشته باشیم.

$$(*)\qquad f(x)\in f[X]\Longrightarrow x\in X$$

میخواهیم ثابت‌کنیم‌که f یکبیك است. فرض‌کنیم‌که $a,b\in A$ و $f(a)=f(b)$. ازاینجا، $f(a)\in f[\{b\}]$. بنابراین به‌موجب $(*)$ (بافرض $X=\{b\}$ و $x=a$)، خواهیم‌داشت $a\in\{b\}$. به‌عبارت دیگر $a=b$. ■

❷ دو تابع f و g با ضابطه‌های زیر مفروضند:

$$f(x)=2x-|x| \qquad (x\in R)\ ;$$

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geqslant 0)\ , \\ x & (x<0)\ . \end{cases}$$

اولاً ضابطهٔ تابع مرکب $h=fog$ را بیابید ، و نمودار آن‌را رسم کنید .

ثانیاً ثابت‌کنیدکه این تابع‌بر R پیوسته‌است. در مورد وجود مشتق این تابع چه‌حکمی میتوان کرد ؛ بعلاوه ، ضابطهٔ آن چیست ؛

حل. معلومست‌که‌بازاءهر x از R ،

$$h(x)=(fog)(x)=f(g(x))=2g(x)-|g(x)|.$$

بنابراین ،

$$h(x)=\begin{cases} 2x^2-|x^2| & (x\geqslant 0), \\ 2x-|x| & (x<0). \end{cases}$$

به‌عبارت دیگر ،

$$h(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geqslant 0), \\ 3x & (x<0). \end{cases}$$

بسادگی‌ملاحظه میشودکه این تابع‌بر$(0,\infty)\cup(-\infty,0)$ پیوسته است . گوئیم این تابع در نقطهٔ $x=0$ نیز پیوسته است ، برای این‌منظور کافی‌است ملاحظه کنیم‌که

$$\lim_{x\to 0+} h(x)=\lim_{x\to 0+} x^2=0,$$

$$\lim_{x\to 0-} h(x)=\lim_{x\to 0-} 3x=0.$$

بنابراین ، $\lim\limits_{x\to 0+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0-} h(x)=h(0)$

بعلاوه ، این تابع درهرنقطه‌ای ناصفر دارای مشتق است. گوئیم این تابع در $x=0$ مشتق ندارد. زیرا ،

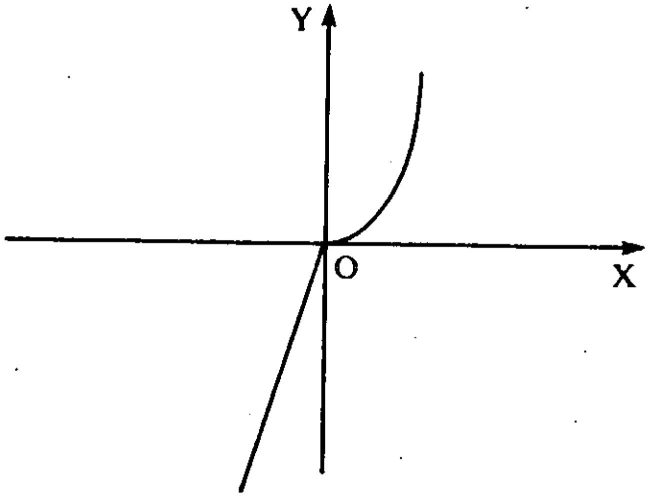
$$\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2-0}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{3x}{x}=3$$

(ملاحظه کنید گرچه تابع h در $x=0$ پیوسته است ولی‌در این‌نقطه مشتقپذیر نیست .)

بسهولت ملاحظه میشود که

$$h'(x)=\begin{cases} 2x & (x>0), \\ 3 & (x<0). \end{cases}$$



❸ تابع $f:(0,1)\to R$ با ضابطهٔ ذیل تعریف شده است ؛

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x\notin Q)\ , \\ \dfrac{1}{q} & \left(x=\dfrac{p}{p}\ ,\ (p\ ,\ q)=1\right)\ . \end{cases}$$

ثابت‌کنیدکه f در نقاط گویا نا پیوسته و در نقاط گنگ پیوسته است .

حل ـ فرض کنیم‌که f در نقطهٔ‌گویای $x_0=\frac{p}{q}$ ، که در آن $(p,q)=1$ ، پیوسته باشد (فرض خلف) . بنابراین ، با انتخاب $\varepsilon=\frac{1}{2q}$ عددی مثبت مانند δ هست بطوری که بازاء هر x از بازهٔ$(0,1)$ که $|x-x_0|<\delta$ ، $\left|f(x)-\frac{1}{q}\right|<\frac{1}{2q}$. اینك فرض میکنیم‌که x عدد گنگ باشدبقسمی‌که $|x-x_0|<\delta$ (چنین‌عددی همواره موجود است) . بنابراین ، $\left|0-\frac{1}{q}\right|<\frac{1}{2q}$. به‌عبارت‌دیگر، $1<\frac{1}{2}$ ؛ که یك تناقض است .

اینك فرض میکنیم‌که x_0 یك نقطهٔ‌گنگ‌باشد ، ε مثبت‌را مفروض میگیریم .

عدد طبیعی N را چنان میگیریم‌که $N>\frac{1}{\varepsilon}$. فرض میکنیم که

$$A=\left\{1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{1}{N}\ ,\ \frac{2}{N}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{N-1}{N}\right\}$$

و عدد δ را چنین تعریف میکنیم : $\delta=\min\{|x_0-a|:\ a\in A\}$.

δ عددی است مثبت (چرا؛)

اینك‌کافی است ملاحظه‌کنیم‌که‌بازاء هر x از بازهٔ$(0,1)$ که $|x-x_0|<\delta$ ،

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)-0|<\varepsilon;$$

زیرا ، هرگاه x یك نقطهٔ گنگ باشد آنگاه نامساوی فوق برقرار است ، در غیر این صورت x عددی است گویا بصورت $\frac{p}{q}$ که در آن $q>N$ (چرا ؟) ، و بالنتیجه

$$|f(x)-0|=\frac{1}{q}<\frac{1}{N}<\varepsilon.$$

ملاحظه کنید که تابع فوق درتعداد نامتناهی نقطه ازاین بازه پیوسته ، و در تعداد نامتناهی نقطه ناپیوسته است . ■

۴ دستوری کلی برای محاسبهٔ عبارت ذیل بدست آورید .

$$S=1.1!+2.2!+3.3!+\dots+n.n!$$

حل - گوئیم بازاء هر k طبیعی ،

$$k\cdot k!=(k+1-1)k!$$
$$=(k+1)!-k!$$

بنابراین ،

$$S=\sum_{k=1}^{n} k.k!=\sum_{k=1}^{n}[(k+1)!-k!]$$
$$=(n+1)!-1\ .\ ■$$

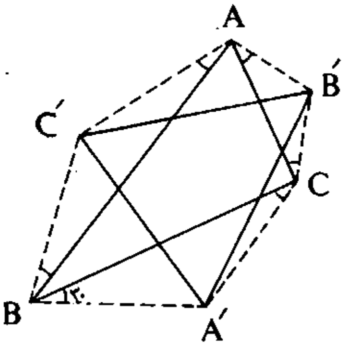
۵ فرض کنیم که a ، b ، c ، و d اعداد مثبت دلخواهی باشند . ثابت کنید که

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2$$

حل - گوئیم

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}$$
$$=\left(\frac{a}{b+c}+\frac{c}{d+a}\right)+\left(\frac{b}{c+d}+\frac{d}{a+b}\right)$$
$$=\frac{a^2+c^2+cb+ad}{(b+c)(a+d)}+\frac{b^2+d^2+ab+cd}{(c+d)(a+b)}$$
$$\geqslant\frac{4(a^2+c^2+cb+ad)}{[(b+c)+(a+d)]^2}+\frac{4(b^2+d^2+ab+cd)}{[(c+d)+(a+b)]^2}$$
$$=\frac{4(a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ad+bc+cd)}{(a+b+c+d)^2}$$
$$=\frac{2[(a+b+c+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2}{(a+b+c+d)^2}$$
$$\geqslant\frac{2(a+b+c+d)^2}{(a+b+c+d)^2}=2\ .\ ■$$

۶ مثلث دلخواه ABC مفروض است ، برروی هریك از اضلاع این مثلث ، مثلثهائی متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۱۲۰ درجه مطابق شکل ذیل ، میسازیم . رئوس مثلثهای حاصل‌را A' ، B' ، و C' مینامیم . ثابت کنید مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است .



حل (حل به‌روش تحلیلی)

$$\hat{A}=\alpha\ ,\ \hat{B}=\beta\ ,\ \hat{C}=\gamma,$$
$$\overline{AB}=c\ ,\ \overline{AC}=b\ ,\ \overline{BC}=a\ ,$$
$$\overline{A'C'}=b'\ ,\ \overline{B'C'}=C'\ ,$$
$$\overline{A'B'}=C'\ ,$$

معلومست که

$$\overline{A'B}=\overline{A'C}=\frac{a}{2\sqrt{3}}\ ,\ \overline{B'A}=\overline{B'C}=\frac{b}{2\sqrt{3}}\ ,$$
$$\overline{C'B}=\overline{C'A}=\frac{C}{2\sqrt{3}}$$

اینك بادرنظر گرفتن مثلثهای $AB'C'$ ، $BC'A'$ ، و $CA'B'$ خواهیم داشت ،

$$a'^2=\left(\frac{c}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{b}{2\sqrt{3}}\right)^2-2\frac{c}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{3}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right);$$

$$b'^2=\left(\frac{c}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2-2\frac{c}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{a}{2\sqrt{3}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)$$

$$c'^2=\left(\frac{b}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2-2\frac{b}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{a}{2\sqrt{3}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right).$$

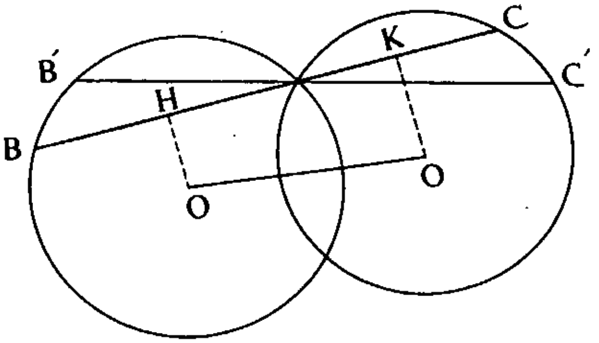
برای اثبات اینکه مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است کافی‌است ثابت کنیم‌که $a'^2=b'^2=c'^2$. به‌عنوان‌نمونه، ثابت میکنیم‌که $a'^2=b'^2$. (اثبات سایر حالات نظیر همین است.) ملاحظه میشود که

$$a'^2-b'^2=\frac{1}{12}\left(b^2-a^2+ac\cos\beta-bc\cos\alpha\right)$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{12}c\left(b\sin\alpha-a\sin\beta\right)=0+0=0$$

(حل به روش هندسی)

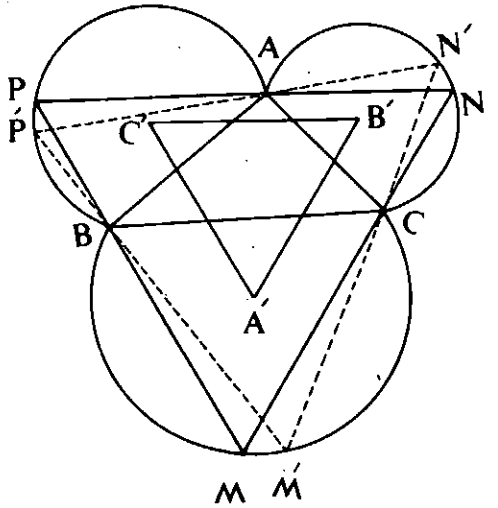
برای اثبات حکم مسئله، به‌روش هندسی ابتدا دو لم زیر را می‌آوریم،

لم ۱. بین پاره‌خطهائی‌که از یك نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔ متقاطع می‌گذرند پاره‌خطی‌که موازی‌خط مرکزی (خط‌المرکزین) دو دایره است بزرگترین طول را دارد.



اگر BC در شکل مقابل (شکل ۱) موازی OO' نباشد و HK تصویر OO' روی BC باشد، $HK<OO'$ و در نتیجه $BC<2OO'$. زیرا چون، عمودهای OH و $O'K$ وترهای AB و AC را نصف می‌کند، (ش.۱) $HK=\frac{1}{2}OO'$. به‌همین‌ترتیب اگر $B'C'$ موازی با OO' باشد ثابت می‌شود $B'C'=2OO'$ و $BC<B'C'$

لم ۲. سه‌کمان درخور $60°$ روی اضلاع مثلث ABC در خارج سطح مثلث‌رسم می‌کنیم‌عطف به مفروضات مسئله A'، B'، و C' مرکز این‌کمانهاست و بترتیب از رأسهای (C, B)، (A, C)، و (B,A) می‌گذرند (شکل ۲) این‌سه‌کمان مکان هندسی رئوس‌مثلثهای



متساوی‌الاضلاع محیط بر مثلث ABC است، زیرا اگر P نقطه‌ای از کمان $\widehat{AB}$ را به A وصل‌کرده امتداد دهیم تا کمان $\widehat{AC}$ را در N قطع کند و N را به C وصل‌کرده، امتداد دهیم تا امتداد PB را در M قطع‌کند، چون دو زاویهٔ N و P از مثلث PNM هر یك $60°$ اند زاویهٔ M هم $60°$ است، و مثلث PNM متساوی‌الاضلاع و M روی‌کمان $\widehat{BC}$ واقع‌می‌شود. به‌عکس رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر مثلث ABC روی سه‌کمان AB، BC، و AC واقع است.

حال برای اثبات حکم مسئله PN را موازی با $B'C'$ تصور می‌کنیم وعطف به لم۲ مثلث متساوی‌الاضلاع PNM را بر مثلث ABC محیط می‌کنیم (ش.۲) در این مثلث باید NM و MP بترتیب موازی با $A'B'$ و $A'C'$ باشد، زیرا درغیر این‌صورت به‌شرح ذیل دچار تناقض می‌شویم. اگر مثلا NM موازی‌با $A'B'$ نباشد از C میتوان $M'N'$ را موازی با آن رسم کرد و مثلث متساوی‌الاضلاع $P'M'N'$ را بدست آورد (لم۲)؛ در این صورت چون PN موازی $B'C'$ فرض شده به‌موجب لم ۱،

$$(1)\qquad PN>P'N'.$$

و چون $M'N'$ نیز موازی $A'B'$ رسم شده است $N'M'>NM$ یا

$$(2)\qquad P'N'>PN$$

به‌طوری‌که مشاهده‌می‌شود (۱) و (۲) نقیض یکدیگرند و باید NM موازی $A'B'$ و بهمین ترتیب MP موازی $A'C'$ باشد. چون مثلث PNM متساوی‌اضلاع است مثلث $A'B'C'$ هم که اضلاع آن بااضلاع PNM موازی است‌متساوی‌اضلاع می‌باشد.

یادآوری. این مسئله و نظائر آن را باطریق‌برداری می‌توان ثابت‌کرد؛ در شماره‌های آینده باذکر مقدمات به‌ذکر آن می‌پردازیم.■

❻ ثابت کنید که معادلهٔ سیالهٔ $x^n+1=y^{n+1}$ در اعداد طبیعی جواب ندارد؛ که، درآن، $(x, n+1)=1$.

حل. فرض‌کنیم‌که معادلهٔ فوق در اعداد طبیعی دارای جوابی مانند x، y، n باشد. معلومست‌که، $y\neq 1$؛ پس $y>1$. فرض میکنیم‌که p عامل اول دلخواهی از $y-1$ باشد. بنابراین $p|x$. گوئیم چون $(x,n+1)=1$، $p\nmid n+1$. ازطرفی داریم،

$$1+y+\dots+y^n=n+1\ (\text{پیمانهٔ } y-1).$$

بالنتیجه، معلوم میشود که $p\nmid 1+y+\dots+y^n$ (چرا؟). ولی چون p دلخواه فرض‌شده بود، نتیجه میگیریم که $y-1$ و $1+y+\dots+y^n$ نسبت بهم اولند. بنابراین عدد طبیعی $1+y+\dots+y^n$، به‌موجب رابطهٔ زیر، باید قوه‌ای‌از n باشد،

$$x^n=(1+y+\dots+y^n)(1-y)$$

و اما این ممکن نیست، چون
$$y^n < 1+y+\cdots+y^n < (y+1)^n . \blacksquare$$

تبصره. لازم به توضیح است که حتی با حذف شرط $(x, n+1)=1$، حکم مسئلهٔ فوق باز هم برقرار میماند. سه حالت ذیل، حالاتی است که پیش میآیند ملاحظات آتیه از جنبهٔ تاریخی خالی از فایده نیست.

(آ) $n=2m$ $(m\geqslant 1)$ ، $n+1=pu$ ، که p یك عدد اول فرد است.

دراین صورت معادلهٔ فوق بصورت $(x^m)^2+1=(y^n)^p$ درمیآید، در ۱۸۵۰، لبگ[1] ثابت کرد که معادلهٔ $u^2+1=v^p$، که در آن $u\geqslant 1$ ، ممتنع است.

(ب) $n=3^K$ $(k\geqslant 1)$ ، $n+1=2s$ $(s\geqslant 2)$. در اینصورت معادلهٔ فوق بصورت $\left(x^{\frac{n}{3}}\right)^3+1=(y^s)^2$ درمیآید. در ۱۷۷۰ اویلر[2] ثابت کرد که معادلهٔ $u^3+1=v^2$ ، که در آن $u\geqslant 1$ منجر به جواب $v=3$ میشود، ولی $y^s=3$ $(s\geqslant 2)$ ممتنع است.

(ج) $n=2m+1=pt$ ، $P\geqslant 5$ ، معادلهٔ فوق بصورت $(x^t)^p+1=(y^{m+1})^2$ درمیآید. در ۱۹۶۴ چاکو[3] ثابت کرد که $u^p+1=v^2$ ممتنع است. $\blacksquare$

۷ درجعبهای m مهرهٔ سیاه و n مهرهٔ سفید وجود دارد ، ازاین جعبه k مهره بتصادف خارج میکنیم.

(آ) . احتمال آن را که حداقل یك مهرهٔ سفید در بین این k مهره وجود داشته باشد ، حساب کنید ؛

(ب) . با استفاده از قسمت (آ) ، اتحاد ترکیباتی زیر را ثابت کنید ؛

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+\cdots+\binom{n}{k}\binom{m}{0}=\binom{m+n}{k}$$

(ج) . با استفاده از قسمت (ب) ، یا بطریقی دیگر ، ثابت کنید که

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{r}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

حل . (آ) ــ فرض کنید

A : حد اقل یك مهرهٔ سفید دربین k مهره وجود دارد؛

Ai : دقیقاً i مهرهٔ سفید در بین k مهره وجود دارد.

واضح است که

$$A=\bigcup_{i=1}^{k}Ai \ , \ Ai\cap Aj_{,}=\Phi \ , \ i \ , \ j=0,1,2,\ldots,k.$$

و در نتیجه

$$P(A)=\sum_{i=1}^{k}P(Ai)$$

اما بنا به تعریف Ai داریم

$$P(Ai)=\frac{\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}{\binom{m+n}{k}} \qquad i=1,2,\ldots,k$$

و لذا

$$P(A)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}{\binom{m+n}{k}}$$

$$=\frac{\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}}{\binom{m+n}{k}}+\frac{\binom{n}{2}\binom{m}{k-2}}{\binom{m+n}{k}}+\cdots+\frac{\binom{n}{k}\binom{m}{0}}{\binom{m+n}{k}};$$

و این جواب مسئله است . البته با توجه به اینکه

$\overline{A}$: هیچ مهرهٔ سفیدی در بین k مهره وجود ندارد

بنا بر قوانین احتمال داریم

$$P(A)+P(\overline{A})=1,$$

و لذا

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{\binom{m}{k}\binom{n}{0}}{\binom{m+n}{k}}.$$

1- V. A. Lebesgue 2- Euler 3- Chao Ko

(ب) ـ با مساوی قرار دادن مقدار $P(A)$ که به دو روش مختلف در بالا محاسبه شده داریم

$$\frac{\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}}{\binom{m+n}{k}} + \frac{\binom{m}{2}\binom{m}{k-2}}{\binom{m+n}{k}} + \cdots + \frac{\binom{n}{k}\binom{m}{0}}{\binom{m+n}{k}} = 1 - \frac{\binom{n}{0}\binom{m}{k}}{\binom{m+n}{k}},$$

و یا

$$\frac{\binom{n}{0}\binom{m}{k}}{\binom{m+n}{k}} + \frac{\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}}{\binom{m+n}{k}} + \cdots + \frac{\binom{n}{k}\binom{m}{0}}{\binom{m+n}{k}} = 1;$$

و از آن،

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{m+n}{k};$$

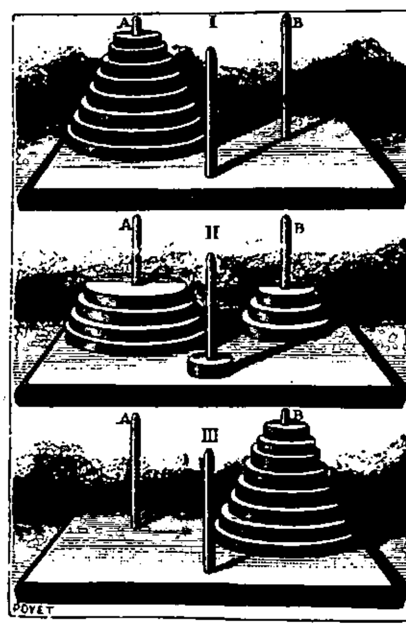
که همان اتحاد مطلوب است.

(ج) ـ با فرض $k=n=m$ ، از اتحاد فوق نتیجهٔ مطلوب حاصل میشود . ضمناً ، ملاحظه کنیدکه این اتحاد ترکیباتی را میتوان مستقیماً با توجه به اتحاد جبری زیر ثابت کرد:

$$(1+x)^{2n} \equiv (1+x)^n\,(1+x)^n.$$

***

مسئلهٔ برج هانوئی



سه‌میله‌ی قائم داریم و n قرص بااقطار دو به دو متمایز ، کـه به‌وسیله‌ی سوراخی که درمرکزآنهااست به‌ترتیب نزولی اقطار ازپائین به‌بالا ، برمیله‌ی A جای داده شده‌اند (شکل‌زیر). بیرون‌آوردن یك قرص را از این میله‌وجای دادن‌آن‌را برمیله‌ای‌دیگر یك «حرکت» نامیم . مطلوب‌است‌حداقل تعدادحرکات لازم برای جای‌دادن همه‌ی قرصها برمیله‌ی B به‌نحوی که هیچگاه یك قرص برقرصی کوچکتر ازآن جای داده نشود .

راهنمائی . ابتدا عمل‌رابازاء مقادیر کوچك n (مثلاً ۱، ۲، ۳، ۴، و۵) انجام‌دهید («بازی برج‌هانوئی») ، وتعداد مطلوب راعملاً تعیین کنید . سپس، دستوری کلی حدس‌بزنید ، وصحت حدس خودرا ثابت‌نمائید .

شکل مربوط به‌مسئله‌ی برج هانوئی

نقل از کتاب «تئوری مقدماتی اعداد»
تألیف دکتر غلامحسین مصاحب

شگفتانه های حسابی

هماهنگیها وزیبائیهای روابط بین اعداد طبیعی

$$۱+۶+۷+۱۷+۱۸+۲۳=۲+۳+۱۱+۱۳+۲۱+۲۲;$$
$$۱^۲+۶^۲+۷^۲+۱۷^۲+۱۸^۲+۲۳^۲=۲^۲+۳^۲+۱۱^۲+۱۳^۲+۲۱^۲+۲۲^۲;$$
$$۱^۳+۶^۳+۷^۳+۱۷^۳+۱۸^۳+۲۳^۳=۲^۳+۳^۳+۱۱^۳+۱۳^۳+۲۱^۳+۲۲^۳;$$
$$۱^۴+۶^۴+۷^۴+۱۷^۴+۱۸^۴+۲۳^۴=۲^۴+۳^۴+۱۱^۴+۱۳^۴+۲۱^۴+۲۲^۴;$$
$$۱^۵+۶^۵+۷^۵+۱۷^۵+۱۸^۵+۲۳^۵=۲^۵+۳^۵+۱۱^۵+۱۳^۵+۲۱^۵+۲۲^۵.$$

۱ . ۱ = ۱
۱۱ . ۱۱ = ۱۲۱
۱۱۱ . ۱۱۱ = ۱۲۳۲۱
۱۱۱۱ . ۱۱۱۱ = ۱۲۳۴۳۲۱
۱۱۱۱۱ . ۱۱۱۱۱ = ۱۲۳۴۵۴۳۲۱
۱۱۱۱۱۱ . ۱۱۱۱۱۱ = ۱۲۳۴۵۶۵۴۳۲۱
۱۱۱۱۱۱۱ . ۱۱۱۱۱۱۱ = ۱۲۳۴۵۶۷۶۵۴۳۲۱
۱۱۱۱۱۱۱۱ . ۱۱۱۱۱۱۱۱ = ۱۲۳۴۵۶۷۸۷۶۵۴۳۲۱
۱۱۱۱۱۱۱۱۱ . ۱۱۱۱۱۱۱۱۱ = ۱۲۳۴۵۶۷۸۹۸۷۶۵۴۳۲۱

۱.۹ + ۲ = ۱۱
۱۲.۹ + ۳ = ۱۱۱
۱۲۳.۹ + ۴ = ۱۱۱۱
۱۲۳۴.۹ + ۵ = ۱۱۱۱۱
۱۲۳۴۵.۹ + ۶ = ۱۱۱۱۱۱
۱۲۳۴۵۶.۹ + ۷ = ۱۱۱۱۱۱۱
۱۲۳۴۵۶۷.۹ + ۸ = ۱۱۱۱۱۱۱۱
۱۲۳۴۵۶۷۸.۹ + ۹ = ۱۱۱۱۱۱۱۱۱
۱۲۳۴۵۶۷۸۹.۹ + ۱۰ = ۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱

۱.۸+۱=۹
۱۲.۸+۲=۹۸
۱۲۳.۸+۳=۹۸۷
۱۲۳۴.۸+۴=۹۸۷۶
۱۲۳۴۵.۸+۵=۹۸۷۶۵
۱۲۳۴۵۶.۸+۶=۹۸۷۶۵۴
۱۲۳۴۵۶۷.۸+۷=۹۸۷۶۵۴۳
۱۲۳۴۵۶۷۸.۸+۸=۹۸۷۶۵۴۳۲
۱۲۳۴۵۶۷۸۹.۸+۹=۹۸۷۶۵۴۳۲۱

۹.۹ + ۷ = ۸۸
۹۸.۹ + ۶ = ۸۸۸
۹۸۷.۹ + ۵ = ۸۸۸۸
۹۸۷۶.۹ + ۴ = ۸۸۸۸۸
۹۸۷۶۵.۹ + ۳ = ۸۸۸۸۸۸
۹۸۷۶۵۴.۹ + ۲ = ۸۸۸۸۸۸۸
۹۸۷۶۵۴۳.۹ + ۱ = ۸۸۸۸۸۸۸۸
۹۸۷۶۵۴۳۲.۹ + ۰ = ۸۸۸۸۸۸۸۸۸

۱۲۳۴۵۶۷۹. ۹ = ۱۱۱۱۱۱۱۱۱
۱۲۳۴۵۶۷۹.۱۸ = ۲۲۲۲۲۲۲۲۲
۱۲۳۴۵۶۷۹.۲۷ = ۳۳۳۳۳۳۳۳۳
۱۲۳۴۵۶۷۹.۳۶ = ۴۴۴۴۴۴۴۴۴
۱۲۳۴۵۶۷۹.۴۵ = ۵۵۵۵۵۵۵۵۵
۱۲۳۴۵۶۷۹.۵۴ = ۶۶۶۶۶۶۶۶۶
۱۲۳۴۵۶۷۹.۶۳ = ۷۷۷۷۷۷۷۷۷
۱۲۳۴۵۶۷۹.۷۲ = ۸۸۸۸۸۸۸۸۸
۱۲۳۴۵۶۷۹.۸۱ = ۹۹۹۹۹۹۹۹۹

۹۸۷۶۵۴۳۲۱. ۹ = ۸۸۸۸۸۸۸۸۸ ۹
۹۸۷۶۵۴۳۲۱.۱۸ = ۱ ۷۷۷۷۷۷۷۷۷ ۸
۹۸۷۶۵۴۳۲۱.۲۷ = ۲ ۶۶۶۶۶۶۶۶۶ ۷
۹۸۷۶۵۴۳۲۱.۳۶ = ۳ ۵۵۵۵۵۵۵۵۵ ۶
۹۸۷۶۵۴۳۲۱.۴۵ = ۴ ۴۴۴۴۴۴۴۴۴ ۵
۹۸۷۶۵۴۳۲۱.۵۴ = ۵ ۳۳۳۳۳۳۳۳۳ ۴
۹۸۷۶۵۴۳۲۱.۶۳ = ۶ ۲۲۲۲۲۲۲۲۲ ۳
۹۸۷۶۵۴۳۲۱.۷۲ = ۷ ۱۱۱۱۱۱۱۱۱ ۲
۹۸۷۶۵۴۳۲۱.۸۱ = ۸ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ۱

نقل از « تئوری مقدماتی اعداد »
تألیف دکتر غلامحسین مصاحب

معرفی کتاب

۱. کتابهای ریاضی منتشر شده به‌وسیلهٔ مرکز نشر دانشگاهی

توضیح. در این قسمت، هدف آنست که به معرفی کتابهای ریاضی مفیدی که از کیفیت مطلوب برخوردارند، مبادرت شود. ذیلاً به‌معرفی کتابهای ریاضی‌منتشر شده به‌وسیلهٔ‌مرکز نشردانشگاهی‌میپردازیم. این کتابها میتوانند مورد استفادهٔ دانشجویان و معلمین ریاضی واقع شوند. در شماره‌های آینده، کتب ریاضی دیگری‌را، جهت اطلاع علاقه‌مندان، معرفی‌خواهیم کرد.

● **هندسه‌های اقلیدسی وناقلیدسی**
گرین‌برگ
ترجمهٔ م. شفیعها
تهران، ۱۳۶۱ ، ۴۴۴ صفحه، ۸۵۰ ریال

● **جبر (جلد ۱)**
روژه‌گودمان
ترجمهٔ محمدرضا سلطانپور، وهاب داورپناه
تهران، ۱۳۶۱، ۵۹۰ صفحه، ۹۵۰ ریال

● **حساب دیفرانسیل وانتگرال (جلد اول)**
تام م. آپوستل
ترجمهٔ علیرضاذکائی، مهدی رضائی‌دلفی،
علی‌اکبر عالم‌زاده، فرخ فیروزان
تهران، ۱۳۶۰، ۹۳۱ صفحه، (شومیز)
۱۴۰۰ صفحه، (زرکوب) ۱۷۰۰ ریال

● **نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها**
پ.ر. هالموس
ترجمهٔ عبدالمجید دادالله
تهران، ۱۳۶۲، ۱۲۳ صفحه، ۳۲۰ ریال

● **متغیرهای مختلط وکاربرد آنها**
روئل و. چرچیل، جیمزوبراون، راجرف. ورهی
ترجمهٔ دکتر امیرخسروی
تهران، ۱۳۶۱، ۳۶۲ صفحه، ۷۵۰ ریال

● **نخستین درس در جبر مجرد**
ف.ج. هیگنیز
ترجمهٔ محمدرضا رجب‌زادهٔ مقدم
تهران، ۱۳۶۲، ۲۰۹ صفحه، ۳۵۰ ریال

● **حساب‌دیفرانسیل وانتگرال وهندسهٔ تحلیلی(۲جلد)**
جورج ب. توماس
ترجمهٔ علی‌اکبرجعفریان، ابوالقاسم میامئی
تهران، چاپ دوم ۱۳۶۲، ۱۰۶۷ صفحه، ۱۷۰۰ ریال

● **سری فوریه**
ن. اسندون
ترجمهٔ بتول جذبی
تهران، ۱۳۶۲، ۷۶ صفحه، ۱۸۵ ریال

آشنائی با فعالیتهای گروه ریاضی

۱ـ تشکیل شورای ریاضی

به‌منظور بهبود وضع نابسامان کتابهای درسی ، در شهریور ۱۳۵۹ شورائی از اساتید دانشگاهها ، دبیران‌ریاضی، وکارشناسان دفتر تحقیقات درسازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی تشکیل گردید که‌بعداً نام‌زیر برای‌آن انتخاب‌شد .

« شورای ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی و تألیف »

این‌شورا تاکنون موفق به‌انجام کارهای زیرشده است ؛

(آ) . برنامه‌ریزی ریز مواد ریاضی پنجسالهٔ ابتدائی ، و تألیف کتابهای ریاضی سال اول تا سال چهارم ابتدائی .

(ب) . آموزش ۱۰۰۰ مدرس راهنمای ریاضی (و آموزش ۱۵۰,۰۰۰ آموزگار به‌توسط این‌مدرسین) .

(پ) . مسافرت اعضای شورای ریاضی به‌استانها و رفع اشکال مدرسین راهنما دررابطه باکتابهای جدیدالتألیف .

(ت) . تألیف کتاب ریاضی پنجم ابتدائی که درحال حاضر در ۶۰ دبستان درتهران وحومه بطورآزمایشی تدریس می‌شود ، و درسال تحصیلی ۶۳ـ۶۴ در سراسر کشور تدریس خواهدشد . در سال تحصیلی‌جاری معلمین مدارس آزمایشی بطورهفتگی دردانشگاه تربیت معلم زیر نظر مؤلفین بـا روش آموزش ایـن کتاب آشنا می‌شوند .

(ث) . برنامه‌ریزی ریزمواد ریاضی دورهٔ سه‌سالهٔ‌راهنمائی که ریز آن طی‌نشریهٔ شمارهٔ ۱۲۷ دفترتحقیقات به‌اطلاع‌همهٔ‌همکاران وعلاقمندان درمناطق مختلف آموزش و پرورش‌کشور رسانده شده است ، وهم‌اکنون گروه مؤلفین ریاضی دورهٔ راهنمائی با توجه به نظرات دریافت شده مشغول تألیف کتب مزبور هستند ؛ که‌انشاا... کتاب ریاضی سال اول راهنمائی در سال ۶۳ـ۶۴ در ۶۰ مدرسهٔ تهران بطور آزمایشی تدریس و درسال ۶۴ـ۶۵ درسراسر کشور تدریس خواهدشد .

(ج) . بعداز برنامه‌ریزی‌وتعیین‌اعضای تألیف دورهٔ‌سه‌سالهٔ راهنمائی ، شورا ازتاریخ ۶۲/۸/۸ برای برنامـه‌ریزی و تألیف کتابهای ریاضی دورهٔ دبیرستان آغاز به‌کار کرده و تاکنون موفق به‌تهیه وتدوین هدفهای آموزش ریاضی دردبیرستان وتهیهٔ‌سرفصلها وچهارچوب کلی ریز مواد جبروآنالیز ، شده‌است .

۲ـ تألیف کتابهای ریاضی هنرستان

درسال‌تحصیلی ۶۰ـ۶۱ شورائی‌متشکل ازاساتیددانشگاهها دبیران ریاضی ، وهنرآموز هنرستانها تشکیل شد . این شورا پس ازتعیین هدف ازریاضیات در هنرستان ، باتوجه به‌نیازهـای رشته های هنرستانی به‌دروس ریاضی ، به‌برنامه ریزی ریزمواد ریاضی‌و تألیف آن اقدام نمود . در سال تحصیلی ۶۱ـ۶۲ کتابهای جدید التألیف ریاضی هنرستان درسراسر کشور تدریس ؛ ودرشهریور۶۲ یك‌دورهٔ بازآموزی برای‌حدود ۲۰۰ نفرازدبیران ریاضی‌هنرستانها دایرگردید . این‌شورا به‌پیشنهاد دبیران ریاضی هنرستانها، تجدید نظرهای جزئی درکتابهای ریاضی به‌عمل آورده و درآیندهٔ‌نزدیك باکسب نظرات دبیران ریاضی‌هنرستانها ، ازطریق‌ارسال‌پرسشنامه، به‌تجدیدنظر کلی‌دربارهٔ این‌کتابها اقدام خواهدکرد .

۳ـ تألیف کتابهای رشتهٔ ریاضی مراکز تربیت معلم

در سال تحصیلی ۶۰ـ۶۱ باهمکاری گـروه ریـاضی دفتر تحقیقات ، شورائی متشکل ازعده‌ای از اعضای هیئت علمی گروه

دفتر تحقیقات

ریاضی دانشگاه تربیت معلم ومدرسین مراکز تربیت معلم تشکیل شد . این‌شورا ، بعداز برنامه‌ریزی مبادرت به‌تهیه وتألیف کتابهای این‌دوره کرد . درحال‌حاضر کتابهای مزبور دراین مراکز تدریس می‌شود . توضیح‌اینکه رشتهٔ ریاضی ، یکی از رشته‌های چهارده‌گانهٔ مراکز تربیت‌معلم است ، که دانشجویان این‌رشته، پس‌ازطی یک دورهٔ ۲ساله وکسب موفقیت ، بامدرک فوق‌دیپلم فارغ‌التحصیل‌شده‌و به‌سمت دبیری ریاضی درمدارس راهنمائی مشغول بکار می‌شوند . درسال تحصیلی جاری درحدود ۵۵۰ نفر دانشجوی سال اول در ۱۲ مرکز ، ودرحدود ۵۰۰ نفردانشجوی سال دوم در ۱۳ مرکز مشغول تحصیل می‌باشند .

۴ـ تشکیل شورای افت

از مقایسهٔ آمار دانش آموزان رشتهٔ ریاضی باسایر رشته های تحصیلی ، روشن شده‌است ، که‌در دوسال اخیر دانش آموزان فارغ‌التحصیل دورهٔراهنمایی از ادامهٔتحصیل در رشتهٔریاضی‌استقبال چندانی نمی‌کنند . سازمان پژوهش وبرنامه‌ریزی آموزشی برای ریشه‌یابی امر ، وچاره‌اندیشی دربارهٔ آن ، ازتاریخ ۶۲/۳/۲۲ شورائی بنام (شورای تحقیق دربارهٔ مشکلات دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی) مرکب ازدانشگاهیان ، دبیران وکارشناسان تشکیل‌داد. این‌شورا تاکنون اقدامات زیر راانجام داده‌است :

(آ) ـ درارتباط با برنامهٔ کوتاه مدت ، طی‌نشریهٔ شمارهٔ ۱۲۶ دفتر تحقیقات ، توصیه‌هائی به‌مسئولین آموزش و پرورش مناطق کشور کرده است . ضمناً ازسازمان پژوهش تقاضا نموده‌تا باارسال نامه‌هائی بهائمهٔ جماعات ، صداوسیمای جمهوری اسلامی ایران ، و ... ازآنان درخواست شود تاضمن ارشاد و مطلع نمودن مردم از وضع کشوری که‌به‌طرف خودکفائی اقتصادی وصنعتی پیش می‌رود ، فرزندان خودرا به‌تحصیل دررشتهٔ ریاضی ترغیب‌کنند.

(ب) ـ عوامل مختلفی راکه حدس‌زده می‌شد ، که دراین افت تأثیر داشته باشند ، از قبیل برنامه ، کتاب ، معلم ، نظام آموزشی ، شرایط اقتصادی و اجتماعی ،... مورد بحث قرار داده است‌وبرمبنای آنها پرسشنامه‌هائی برای‌دبیران‌راهنمائی‌ودبیرستان، دانش آموزان سوم راهنمائی ، واول و دوم دبیرستان تنظیم نموده است که‌بزودی‌پس‌از توزیع دربرخی ازمدارس کشورو‌بررسی‌نهائی آنها ، نتیجهٔ دقیق وعلمی عوامل‌افت تعیین‌خواهدشد .

۵ـ مسابقه ریاضی

سازمان پژوهش وبرنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش بنابه‌پیشنهاد گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه ریزی درسی و باهمکاری انجمن ریاضی ایران اقدام به‌برگزاری مسابقهٔ ریاضی بین‌دانش‌آموزان سال چهارم رشتهٔ ریاضی و فیزیک سراسر کشور نموده‌است ، درمرحلهٔ اول بین‌دانش‌آموزان هرمنطقه ، با توجه به‌معدل دروس ریاضی وفیزیک سال‌سوم آنها ، یک یا دونفر دانش‌آموز ممتاز انتخاب شده وسپس دانش آموزان منتخب که در حدود ۱۰۰ نفر خواهندبود، درمسابقه‌ای که‌با نظارت برگزار کنندگان پانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور (۸تا۱۱ فروردین ماه ۶۳) درشیراز انجام می‌پذیرد شرکت خواهند کرد . جریان مسابقه ، سؤالات امتحانی واسامی افراد ممتاز مسابقه درشماره‌های آینده اعلام خواهدشد .

***

اخبار

دوست هرکس خود اوست ودشمنش نادانی اوست. « امام رضا (ع) »

توضیح : گزارش زیر از برگزاری اولین مسابقهٔ ریاضی، از بخش ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان به دفتر مجله رسیده است که عیناً نقل می‌شود.

این مسابقه به‌ابتکار بخش ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان و باهمکاری ادارهٔ کل آموزش وپرورش استان اصفهان جهت ایجاد علاقه بین دانش آموزان و شناسایی استعدادهای درخشان در ریاضیات در تاریخ جمعه ۱۳۶۲/۳/۲۰ در محل دانشگاه صنعتی اصفهان برگزار گردید.

دراین مسابقه ۸۷ نفر از دانش آموزان سالهای سوم ریاضی ـ فیزیك استان اصفهان به انتخاب دبیرستانهای خود شرکت نمودند. نتیجه مسابقه به‌شرح زیر اعلام میگردد :

الف ـ آقایان کیوان گرامیان از دبیرستان ادب اصفهان، علیرضاشریف ازدبیرستان امام خمینی کاشان، مهدی کرمی ازدبیرستان حکیم سنایی اصفهان وخانم نوشین ریاحی ازدبیرستان فردوسی اصفهان به‌ترتیب مقامات اول، دوم ومشترك سوم را بدست آوردند.

ب ـ دبیرستان امام خمینی کاشان دربین کلیه دبیرستانها مقام اول را کسب نمود.

ج ـ ناحیهٔ ۲ آموزش و پرورش اصفهان دربین نواحی و شهرستانهای استان مقام اول راکسب نمود.

نمرات شرکت کنند گانی که دراین مسابقه بیش‌از ۵۰٪ از نمرهٔ کل‌را کسب کرده‌اند به‌شرح زیر است :

گزارشی از برگزاری «اولین مسابقه ریاضی اصفهان»

شماره	نام و نام خانوادگی	نام دبیرستان	شهرستان	نمره	رتبه
۱	کیوان گرامیان	ادب	اصفهان	۱۵/۵	اول
۲	علیرضا شریف	امام خمینی	کاشان	۱۴/۵	دوم
۳	مهدی کرمی	حکیم‌سنایی	اصفهان	۱۳/-	سوم
۴	نوشین ریاحی	فردوس	اصفهان	۱۳/-	سوم
۵	حمید رضاجدی	امام خمینی	کاشان	۱۲/۵	چهارم
۶	محمدرضا شریف	امام خمینی	کاشان	۱۲/۲۵	پنجم
۷	علیرضا شفیعی علویجه	حکیم‌سنایی	اصفهان	۱۱/۷۵	ششم
۸	فرزاد ایزدی‌دهکردی	حکیم‌سنایی	اصفهان	۱۱/۷۵	ششم
۹	شهرام شیرانی	دکتر بهشتی	اصفهان	۱۱/۵	هفتم
۱۰	اسماعیل طیبی	شهیدرجائی	اصفهان	۱۱/۵	هفتم
۱۱	حمیده مصطفائی	صدیقه‌کبری(ع)	اصفهان	۱۱/۵	هفتم
۱۲	رحیم عبدی	صائب	اصفهان	۱۱/۲۵	هشتم
۱۳	افشین انصاری	عدل (دانشگاه)	اصفهان	۱۱/۲۵	هشتم
۱۴	محمود حجرالاسودی	ادب	اصفهان	۱۱/-	نهم
۱۵	مسعود عمومی	حکیم‌سنایی	اصفهان	۱۱/-	نهم
۱۶	حمیدرضا توکل	امام خمینی	کاشان	۱۰/۷۵	دهم
۱۷	بهنام قانونی	دکتر مفتح	اصفهان	۱۰/۷۵	دهم
۱۸	علی‌محمد ذوالفقاری	هراتی	اصفهان	۱۰/۵	یازدهم
۱۹	مجتبی فتحی	آیت‌ا.. منتظری	نجف‌آباد	۱۰/۲۵	دوازدهم

امید است برگزاری این مسابقه بتواند اثری درجلب علاقهٔ دانش‌آموزان به‌ریاضیات وانگیزهٔ لازم جهت آمادگی در امر تدریس برای دبیران محترم ریاضی به‌ارمغان آورد.

بامید توفیق‌الهی

بخش ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان

بقیه اصول موضوعه اعداد طبیعی

آن قضیهٔ ماگزیموم (یا اصل ماگزیموم) است .

اصل ماگزیموم ، اصل انتخاب ، وقضیه خوشترتیبی معادل یکدیگرند . اگرچه برهانهای آنها زیادهم دشوارنیست ولی به‌علت احتیاج به‌مقدمات بیشتروطولانی بودن آنهاواردبحث آن نمی‌شویم.[۵]

۱) برای کسب اطلاعات بیشتر درباب اصول موضوعهٔ پئانو به‌کتاب تئوری مقدماتی اعداد ، جلداول، قسمت II ، تألیف‌دکتر غلامحسین مصاحب، مراجعه‌کنید.

۲) برای کسب اطلاعات بیشتر دراین زمینه به آنالیز ریاضی ، جلداول،قسمت I ، تألیف‌دکترغلامحسین‌مصاحب،مراجعه کنید .

۳) تساوی منطقی‌دارای خاصیتهای ذیل‌است :

(آ) خاصیت انعکاسی ؛ همواره $a=a$.

(ب) خاصیت تعادل ؛ همواره اگر $a=b$ آنگاه $b=a$.

(پ) خاصیت تعدی ؛ همواره اگر $a=b$ و $b=c$ آنگاه $a=c$.

(ت) اصل تعویضپذیری عبارتهای مساوی ؛ یعنی دریك گزاره یاگزاره نما بجای اسمی ازیك‌چیز می‌توان اسم دیگر آن چیز را قرارداد .

۴) برای اختصار وجلوگیری ازتطویل‌کلام از اینجاببعد اصطلاحات ریاضی ذکر شده دراین‌مقاله را دانسته شده فرض میکنیم .

۵) برای‌کسب اطلاعات بیشتر به‌کتاب ذیل مراجعه‌کنید.

James R. Munkres; Topology, A First Course.

منابع :

علاوه برآنکه از کتابهای ذکر شده در (۱) ، (۲) و (۵) بارها استفاده گردیده ، ولی کتاب ذیل منبع اصلی این مقاله بوده‌است.

T. Long; Elementary introduction to Number theory.

بقیه گفتاری درباب منشأ ومبدأ ریاضیات

بدین‌ترتیب آیامی‌توان قائل‌شدکه ریاضیات همان رابطه‌ای را بامناسك مذهبی داردکه انشقاق علم ازتاریخ اساطیر وفلسفه از الهیات؛ می‌توان حدسهای دیگری دربارهٔ اینکه چه چیزی انسان عصرحجر را به‌شمارش، اندازه‌گیری، وترسیم واداشته‌است، زد. اما، بدون اینکه به‌کاربزرگ وان‌در واردن بی‌توجهی شود، باید ملتفت بودکه خطر مشتبه‌کردن حدسیات باتاریخ همواره وجود دارد. در شماره‌های‌آینده به‌زمینه‌های قابل اطمینان‌تری از ریاضیات، آنگونه که درمدارك کتبی محفوظ مانده‌است، خواهیم‌پرداخت.

1— Boyer
2— Vander Waerden
3— Sulvasutra
4— A. Seidenberg
5— Nine chapters in the Mathematical Art

مهمترین‌کتاب ریاضی چین‌باستان متعلق به‌دورهٔ هان‌که به احتمال زیاد حاوی مطالبی قدیمی‌تر از این دوره نیز هست.

6— A. Thom
7— A. S. Thom
8— megalithic [ساخته شده ازقطعه‌سنگهای عظیم]
9— Han

سلسله حکومتهای چین بین سالهای ۲۰۰ قبل‌از میلاد و ۲۲۰ بعدازمیلاد.

منابع :

1— Boyer, Carl B., A History of Mathematics: Jhon Wiley andsons Inc., 1968.

2—Vander Waerden. B. L. , Geometry and Algebra in Ancient Civilisations: Springer Verlay, 1983

رشد آموزش ریاضی

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی سازمان پژوهش

نشانی : خیابان ایرانشهر شمالی ساختمان شمارهٔ ۴ تلفن ۸۳۲۰۲۱

بسمه تعالی

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی نشریهٔ گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تالیف کتابهای درسی سازمان پژوهش وزارت آموزش و پرورش است که با همکاری فنی و هنری دفتر امور کمک آموزشی هر سه ماه یکبار منتشر می‌شود. هدف از انتشار این مجله در وهلهٔ اول ایجاد ارتباط متقابل بین معلمین ریاضی و دفتر مذکور، به منظور تبادل تجارب و مطالب جنبی و مفید درسی به منظور ارتقاء سطح معلومات معلمین ریاضی است. مجله از مشارکت و همکاری معلمین ریاضی در ارائهٔ مقالاتی ناظر بر اهداف فوق، بالاخص در زمینهٔ آموزش ریاضی، استقبال می‌کند.

دبیران و علاقمندان به اشتراک این مجله می‌توانند مبلغ لازم را به حساب ۱۹ خزانه بانک مرکزی قابل پرداخت در کلیه شعب بانک ملی، واریز و فیش آن را به همراه فرم ذیل به آدرس: تهران ــ خیابان ایرانشهر شمالی ــ ساختمان شهید موسوی (شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش) ــ دفتر امور کمک آموزشی ــ مرکز توزیع ارسال دارند.

اینجانب .... شمارهٔ اول مجلهٔ رشد آموزش ریاضی را (دریافت کردم ☐ / دریافت نکردم ☐)

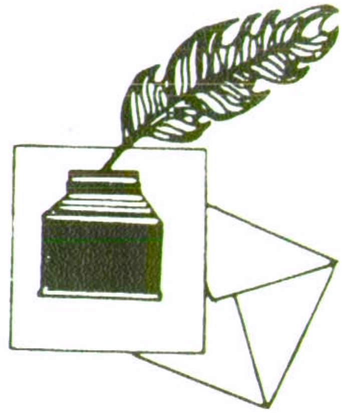
و بدینوسیله با ارسال فیش واریز مبلغ ۴۰۰/ــ ریال به حساب شمارهٔ ۱۹ خزانه بانک مرکزی متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ مزبور هستم.

نشانی دقیق متقاضی :

محل فروش آزاد :

خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش، کتابفروشی شهید موسوی

نامه‌ها



پس از ارسال اطلاعیه‌های مربوط به‌تأسیس مجلهٔ رشد آموزش ریاضی به‌تمام مناطق آموزشی کشور و بخش‌های ریاضی دانشگاه های کشور ، وقبل از انتشار اولین شمارهٔ آن ، نامه‌های متعددی که‌جملگی حاکی از استقبال بی‌حدوحصر معلمین ریاضی و سایر علاقمندان از انتشار چنین مجله‌ای بود به‌دفترمجله واصل گردید. البته ، فقدان مجله‌ای که ناظر به‌اهداف آموزشی درزمینهٔ ریاضیات بوده ، و مورد استفادهٔ دانش آموزان ، دانشجویان ، و معلمین ریاضی واقع گردد ، از مدتها قبل ، احساس می‌شد . بالاخره بـه همت وزارت آموزش وپرورش بدین‌مهم‌اقدام گردید ، وهم‌اکنون اولین شمارهٔ آن دردسترس علاقه‌مندان قرارمی‌گیرد .

توضیح‌اینکه مطالب وموضوعات مندرج دراین شماره در مدتی‌کوتاه ازنتیجهٔ کوششهای مستمر وبیدریغ مسئولین‌مجله آماده وبه‌عنوان نقطهٔ‌شروع ، اقدام به‌انتشار آن گردیده است . تماس و ارتباط مداوم همهٔ علاقمندان ، بالاخص معلمین‌ریاضی ، به‌منظور ملحوظ داشتن نظرات ، پیشنهادات ، وتجربیات علمی و آموزشی آنان درزمینهٔ ریـاضی ، موجب اعتلاء سطح‌مجلـه وکمال امتنان هیئت‌تحریریه خواهدبود .

دراینجا ، ضمن‌تشکر واظهار امتنان ازهمکارانی که‌با نامه های تشویق‌آمیز خود ، مارا درانجام این‌کار علمی وآموزشی‌مورد لطف وعنایت خود قرار داده‌اند ، قسمتهائی از برخی نامـه‌های ارسالی راکه‌مشحون از استقبال زایدالوصف ازنشر این‌مجله‌است، عیناً نقل‌میکنیم ،

آقای کاظم باقرزاده ، دبیر ریـاضی ، از قائم شهر چنین نوشته‌اند :

« اطلاعیهٔ نشر مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شدیـداً موجب خوشحالیم گردید وبارقهٔ امیدی دردلم دمید ... »

● آقای محمود سلیمانیان بروجنی از بروجن ، مدرسهٔ راهنمائی شهیدرجائی ، مینویسند که:

« ... ازدرج خبرانتشار مجلهٔ‌رشدآموزش ریاضی‌درروزنامه بسی‌مشعوف وخوشحال گشتیم . چون برای مامعلمین دورافتاده در روستاها وشهرهای دور ازمرکز کـه نه‌منبع و نه‌استادی دراختیار داریم ، این‌خبر نقطهٔ‌امیدی است ... »

● آقای نصرت ا.. حدادلاریجانی ،دبیرریاضی،ازآمل نوشته‌اندکه

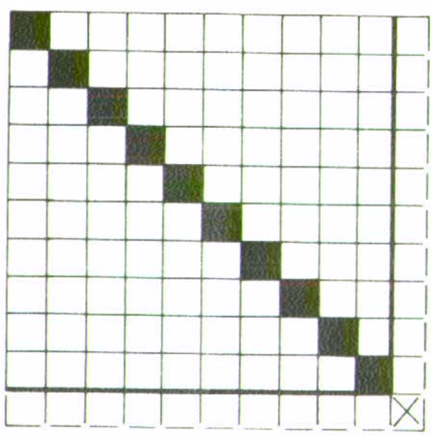
« ... امید است دراین رسالت مهم وضروری ... موفق‌بوده وبقاء واستمرار این حرکت راآرزومندم » ... تاجائی که خودتان میدانیدعلل گوناگونی برای‌این‌حرکت درسمینارها و نشست‌هامطرح شده که‌یکی ازآنها نبود یاکمبود یك‌مجلهٔ مفید وارزشمنداست تا ازطریق آن بتوان اندیشه‌های نو وتازه را به‌همهٔ عاشقان ومعلمان ریاضی انتقال داد . »

ایشان درقسمت دیگری ازنامهٔ خود باکمال صمیمیت خاطر نشان می‌سازند که حاضر به‌توزیع ایـن مجله در شهرستان آمـل می‌باشند .

● آقای رزاق کیان گرگری از علمدارگرگرمی‌نویسند که

« باتشکر از زحمات سروران وبرادران عزیز کـه همیشه به‌فکر شکوفائی استعدادها و به‌فکر معلمین روستائی که‌از نعمت وسایل آموزشی‌وکمك آموزی جهت‌پیشبرد دانسته‌های شغلی‌محروم میباشند ... بـه‌امید موفقیت وپیروزی درکارتان و بـه‌امید انتشار هرچه زودتر مجلهٔ رشد آموزش ریاضی . »

❋ ❋ ❋



$$\binom{n}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n) = \sum_{i=1}^{n-1} i$$

$$\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + n$$

معلمان پس از فراغت از تحصیل، ارتباط منظم و مستمری با رشته تحصیلی سابق خود که رشته تدریسی فعلی آنان است ندارند. بسیاری از آنها به‌حکم وظیفه و شوق خدمت به‌شهرها و حتی بخشهای دور افتاده می‌روند و به‌بحث و درس و استاد و کتاب و کتابخانه و کتابفروشی دسترسی ندارند. تنها کتابی که ناچار در دست آنهاست، غالباً همان کتاب درسی آنهاست که در آن نیز هر ساله، تغییراتی کلی و جزئی روی می‌دهد بی‌آنکه آنان دلیل آن تغییرات را شنیده و دانسته باشند. گاهی بخشنامه‌ای که موفق شده خود را از لابلای مقررات و موانع اداری تا دفتر مدرسه برساند بدست معلمان می‌رسد که آن هم لحنی اداری و خشک و کوتاه دارد. کلاسهای آموزش ضمن خدمت نیز اگر تشکیل شود، کافی نیست و همچون باران بهاری کوتاهی است که تند می‌بارد و زود می‌ایستد و دوباره گرمای سخت و تشنگی آغاز می‌شود. اما این صدها هزار معلمی که برای سربلندی و نجات جامعهٔ خود در روستاهای مهجور و شهرهای دور میهن خود خدمت می‌کنند محتاج یک جویبار جاری مداومی هستند که آب زلال سرچشمه‌های علم و تجربه را آهسته و پیوسته همواره در دسترس آنان قرار دهد. آیا «رشد آموزش ریاضی» می‌تواند آن جویبار جاری همیشگی باشد؟ امید ما این است، تا خدا چه خواهد.