رشد آموزش ریاضی

سال هفتم بهار ۱۳۶۹ ـ شماره مسلسل ۲۵

بها: ۱۰۰ ریال

دانش‌آموزان در
المپیاد ریاضی در
حال امتحان مرحله نهایی

رشد آموزش ریاضی

سال هفتم ـ بهار ۱۳۶۹ ـ شمارهٔ مسلسل ۲۵

نشریه گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی کتب درسی تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۰)

سردبیر : دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

مدیر داخلی: میرزا جلیلی

مدیر فنی هنری و تولید: حسین فرامرزی نیکنام

صفحه‌آرا : محمد پریسای

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ـ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

فهرست

گزارش بیست‌و‌یکمین کنفرانس ریاضی کشور	سردبیر	۳
گروه و تقارن	م. ر. درفشه	۴
یادداشتی در مورد مشتق بدون حد	دکتر امیرخسروی	۱۰
خطاها	دکتر اسماعیل بابلیان	۱۲
معرفی عدد e (۱)	جواد لالی	۱۸
مباحثی در هندسه	حسین غیور	۲۴
مسائل ویژهٔ دانش‌آموزان	محمود نصیری	۲۶
هم ارزی در نامعادلات	ابراهیم دارابی	۲۸
مسائل شمارهٔ ۲۵	ابراهیم دارابی	۳۸
المپیاد ریاضی آبادان، هفتمین دورهٔ مسابقات ریاضی کشور	میرزا جلیلی	۳۹
حل مسائل شمارهٔ ۲۲	محمود نصیری	۵۱
حل مسائل مسابقه شمارهٔ ۱۸		۵۹
تعیین پاره خطی که طول آن عدد طلایی است و ...	دکتر حسن صادقی	۶۰
اسامی خوانندگانی که حل مسائل ۲۳ را برای ما فرستاده‌اند	ابراهیم دارابی	۶۱
اسامی همکاران و دانش‌آموزانی که حل صحیح مسائل شمارهٔ ۲۳ و شماره‌های قبل را فرستاده‌اند	محمود نصیری	۶۲
تازه‌های کتب و نشریات ریاضی		۶۳
پاسخ به نامه‌ها		۶۴
اخبار گروه ریاضی		۶۶

بسم الله الرحمن الرحیم

گزارش بیست و یکمین کنفرانس ریاضی کشور

بیست‌و‌یکمین کنفرانس ریاضی کشور از تاریخ ۲۲ لغایت ۲۶ اسفندماه ۱۳۶۸ در دانشگاه اصفهان برگزار گردید. کنفرانس سالانه ریاضی کشور بزرگترین حادثه ریاضی است که در طی یکسال درکشور اتفاق می‌افتد. در این کنفرانس علمی بیش‌از ۱۰۰۰ نفر از اساتید و دبیران ریاضی کشور و ۱۸ تن از ریاضیدانان واساتید خارجی ازکشورهای ژاپن ، فرانسه، شوروی، انگلستان، آمریکا، آلمان، اطریش ، هند و پاکستان شرکت‌داشتند جلسه افتتاحیه کنفرانس با شکوه و زیبائی خاصی تشکیل شد که ضمن آن ریاست محترم دانشگاه اصفهان آقای دکتر رزمجو و وزیر محترم فرهنگ وآموزش‌عالی برادر دکتر مصطفی معین در اهمیت ریاضیات و سهم ریاضیدانان اسلامی در بسط و گسترش این علم سخنانی ایرادکردند.

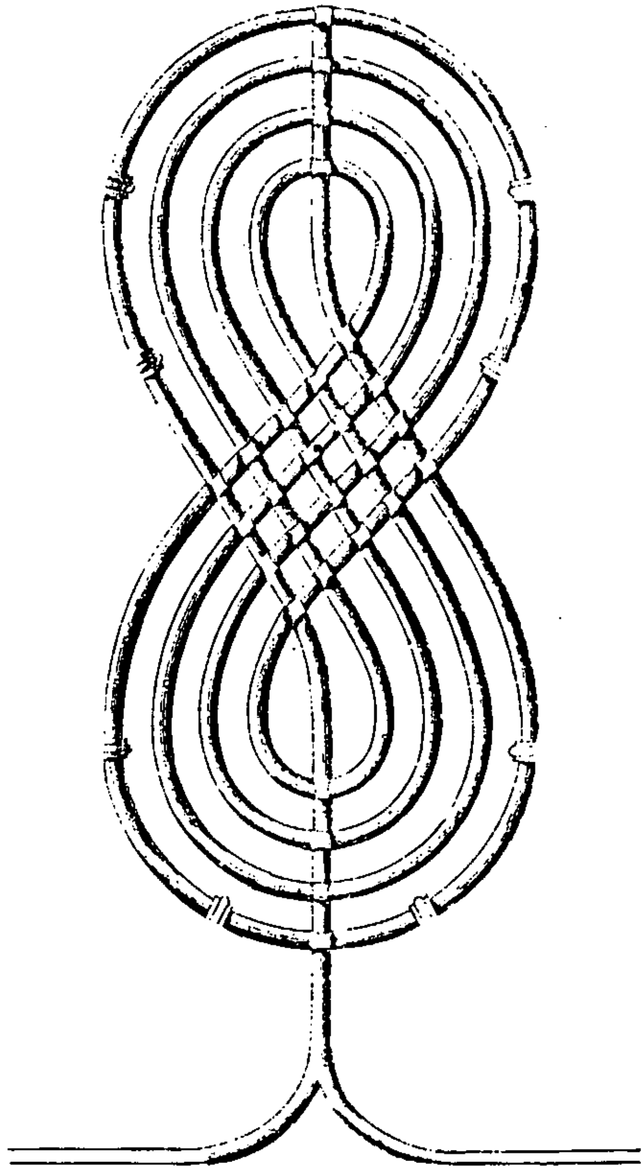
سخنرانیهای کنفرانس به دودسته سخنرانیهای عمومی که در صبح‌ها برگزار می‌شد و سخنرانیهای اختصاصی ویژه دبیران که بعدازظهرها بود، تقسیم می‌شدند.

سخنرانیهای صبح به طور موازی در دو سالن تشکیل

بقیه در صفحه ۳۶

گروه و تقارن

دکتر م. ر. درفشه
بخش ریاضی دانشگاه اهواز



یکی ازمهمترین مفاهیم درعلوم، بخصوص بیولوژی، شیمی، فیزیک و ریاضیات مفهوم تقارن است. این مفهوم برای هنرمندان هنرهای زیبا نیز یکی ازمفاهیم اساسی است. معمولاً همراه این مفهوم کلمهٔ متقارن‌نیز آورده می‌شود. بیشتراشخاص شکلی را متقارن می‌نامندکه خوش ترکیب و دارای تعادل باشد. به عبارت دیگر شکلی را متقارن می‌نامندکه دارای محور تقارن یا صفحهٔ تقارن باشد درصورتیکه اگر به تعریف این مفهوم ریاضی که در زیر می‌آید توجه‌کنیم چنین نیست. باوجود این اشکالی‌که از تقارنهای بیشتری برخوردار باشند بیشتر زیبا وخوش ترکیب به نظر می‌آیند. نقشهائی‌که برروی ظروف بجا مانده از عهد باستان دیده می‌شوند ویا مجسمه‌های بناهای تاریخی و یا نقش‌ونگارهائیکه برروی دیوارهای این بناهـا حك شده‌اند همگی بیانگر این نکته است‌که بشر از قرنها پیش با این مفهوم‌آشنا بوده است و هنرمندان اهمیت آن را درك‌کرده‌اند.

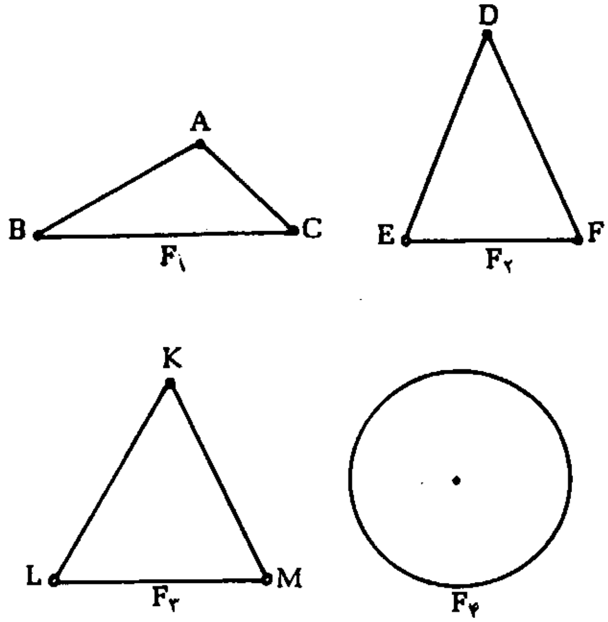
یکی از اشیاء متقارن‌که بیشتر اشخاص‌آن را می‌شناسند بدن انسان است. اگرصفحه‌ای را درنظر بگیریدکه از روبرو از **وسط بدن انسان** گذشته باشدآنگاه بدن انسان به دوقسمت مساوی تقسیم می‌شود. تساوی به این معناست‌که اگر بجای صفحه یك‌آینهٔ m قرار دهیم‌آنگاه تصویر یکی‌ازاین قسمت‌ها درm درست مساوی قسمت دیگر است. یعنی تصویردست‌چپ دست‌راست می‌شود و برعکس.درواقع‌تساوی‌که ما آن‌راتساوی نسبی یا قابلیت انطباق مـی‌نامیم اساس تعریف تقارن ریاضی است. تقارن مفهومی هندسی است‌که وارد جبر شده است و دراینجا ترجیحاً تقارن را برای اشکال هندسی تعریف می‌کنیم و ارتباط‌آن را باگروهها بیان می‌نمائیم.

فرض‌کنید اشکال F_1، F_2، F_3 و F_4 در صفحه داده شده باشند.

شکل F_1 یك مثلث است بـا سه ضلع نابرابر، شکل F_2 یك مثلث متساوی‌الساقین است‌که درآن

$$DE \cong DF \cong EF$$

شکـل F_3 یك مثلث متساوی‌الاضلاع است و شکـل F_4 یك دایـره است. اگـر پرسیده شودکـه‌کـدامیك از این اشکال متقارن‌تر است بی‌شك خـواهیم‌گفت دایره. حال ببینیم شکل دایره از چه خـاصیتی برخوردار است‌کـه بقیه اشکال‌آن را ندارند. فرض‌کنید این اشکال ازورقه‌های نازکی درست شده باشندکه پشت و روی این ورقه‌ها هیچ تفاوتی با هم نداشته



باشند. یکی از این اشکال را از جای خود برداشته و حرکتی روی‌آن انجام داده و دوباره بجای اولش برمی‌گردانیم می‌خواهیم بدانیم چه نوع حرکاتی روی این اشکال می‌توان انجام داد. اگر شکل F_1 را از جای خود برداریم، از آنجائیکه سه‌ضلع مثلث باهم نابرابرند، برای برگرداندن F_1 بجای اولش می‌بایست F_1 را همانطورکه هست سرجای اولش قرار دهیم. این حرکت یعنی قرار دادن F_1 سرجای اولش همانطورکه‌آن را برداشته‌ایم، حرکت همانی نامیده با I نمایش می‌دهیم. این حرکت را در مجموعه‌ای قرار داده آن را $G(F_1)$ می‌نامیم.

در مورد F_2 وضعیت کمی متفاوت است. در این حالت غیراز حرکت همانی حرکت دیگری نیز وجود دارد. فرض کنید F_2 را از سرجای خود برداشته‌ایم، برای برگرداندن به سرجای اولش رأس D حتماً باید روی D قرارگیرد زیرا اگر E یا F را روی D قرار دهیم آنگاه چون

$$DF \ncong EF \quad \text{و} \quad DE \ncong EF$$

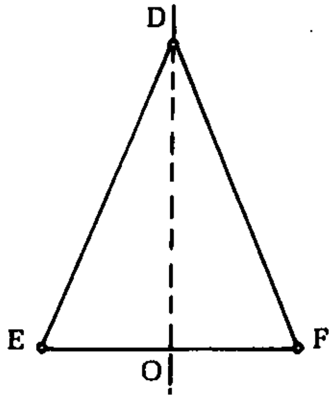
مثلث کاملاً درجای اولش نشانده نخواهد شد. پس‌ازگذاشتن D بر D می‌توان مثلث F_2 را به همان حالتی که هست در جای اولش نشاند، یعنی حرکت I را انجام داد و یا اینکه صفحهٔ مثلث را وارونه کرده و سپس بجای اولش بنشانیم. در حالت اخیر D روی D قرار می‌گیرد، F روی E قرار می‌گیرد و E روی F نشانده می‌شود. این حرکت را R می‌نامیم. پس مجموعهٔ حرکات شکل F_2 عبارت است از

$$G(F_2)=\{I,\ R\}$$

یعنی $G(F_2)$ اعضای بیشتری از $G(F_1)$ دارد. از نظر ظاهری شکل F_2 متقارن‌تر از شکل F_1 است.

در مورد F_3، یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع تعداد حرکات بیشتری داریم. در اینحالت علاوه برحرکت همانی و سه نوع حرکت از نوع R که در مورد مثلث متساوی‌الساقین شرح داده شد دوحرکت دیگر هم داریم. وقتی مثلث KLM را برمی‌داریم دیگر صفحهٔ‌آن را برنمی‌گردانیم بلکه می‌توانیم M را بر K، K را بر L و L را بر M قرار دهیم این حرکت را R_{60} می‌نامیم یا اینکه M را بر L، K را بر M و L را بر K بگذاریم. واین حرکت را R_{120} می‌نامیم پس در این حالت حداقل ۶ حرکت وجود دارد. و می‌توان چنین استدلال کرد که دقیقاً ۶ حرکت وجود دارد. وقتی می‌خواهیم مثلث KLM را درجای اولش بنشانیم رأسی از این مثلث مثلاً K در سه مکان K، L یا M می‌تواند نشانده شود چنانچه رأس K را نشانده باشیم آنگاه رئوس دیگر را فقط می‌توان در دوجا نشاند. و اگر از این دو رأس نیز نشانده شود آنگاه برای رأس سوم فقط یك جای نشاندن باقی می‌ماند. پس حداکثر $3 \times 2 \times 1 = 6$ حرکت وجود دارد و در نتیجه تعداد دقیق حرکات ۶ است. یعنی $G(F_3)$ یك مجموعه شش عضوی است. پس شکل F_3 دارای تقارنهای بیشتری از اشکال F_1 و F_2 است و می‌توان گفت‌که متقارن‌تر از آنها است.

حرکت نوع R که در مورد مثلث متساوی‌الساقین از‌آن نام برده شد یك تقارن محوری نامیده می‌شود و می‌تواند چنین توضیح‌داده شود. ارتفاع OD وارد ازرأس برقاعدهٔ EF را ترسیم می‌کنیم. این ارتفاع عمود منصف EF نیز می‌باشد. حال اگر $\overleftrightarrow{DO}$ را به عنوان‌آینه‌ای درنظر بگیریم تصویر مثلث DOF در این آینه قابل انطباق است بر مثلث DOE و بالعکس.



بنابراین وقتی کــه گفتیم مثلث متساوی‌الاضلاع KLM سه نوع از حرکت نوع R را دارد منظورمان این است که اگر ارتفاع‌هــای مثلث را رسم کنیم هــرکدام از این ارتفاعــات می‌توانند یك محور تقارن شکل F_3 باشند.

تقارن محوری R نسبت بــه محور $\overleftrightarrow{DO}$، از نظر تحلیلی، چنین مــی‌تواند تــوضیح داده شود. محورهــای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که $\overleftrightarrow{DO}$ محور yها و $\overleftrightarrow{EF}$ محور xها باشد. اگر تبدیل

$$R: \mathcal{R}^2 \longrightarrow \mathcal{R}^2$$

که با ضابطهٔ

$$R(x, y)=(-x, y)$$

داده شده است درنظر بگیریم آنگاه خواهیم داشت

$$R(D)=D \quad ، R(E)=F \quad \text{و} \quad R(F)=E$$

به این ترتیب روش دیگــری یافتیم کــه تقارن نسبت به محور $\overleftrightarrow{DO}$ را به‌کمك آن بتوانیم نمایش دهیم.

حرکت R_{60} یك دوران نامیده مــی‌شود. در واقع اگر مرکز ثقل مثلث KLM را P فرض نمائیم حرکت R_{60} چنین است کــه هــرکدام از رئوس مثلث KLM را حول نقطهٔ P به اندازهٔ زاویهٔ 60° دوران دهیم. حــرکت R_{120} نیز یك دوران است ولی در این حالت زاویه دوران 120° است.

ازنظر تحلیلی یك دوران بــا زاویه θ حول مبدأ مختصات تبدیلی مانند

$$P_\theta: \mathcal{R}^2 \longrightarrow \mathcal{R}^2$$

باضابطهٔ

$$P_\theta(x, y)=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)$$

است.

بالاخره شکل F_4 را درنظر می‌گیریم. وقتی این شکل و از جای اولش برمی‌داریم می‌توانیم آن را به اندازهٔ هرزاویهٔ دلخواه بچرخانیم و سپس آن را در جای اولش بنشانیم. یعنی دورانهای P_θ وقتی θ عددی حقیقی و $0 \leqslant \theta < 2\pi$ است همگی حرکاتی هستند که شکل F_4 تحت آنها تغییری نمی‌کند. تــوجه داشته باشید کــه P_0 همان حــرکت همانی I است. حرکت دیگــری هــم وجود دارد به این ترتیب است که وقتی شکل F_4 را برمی‌داریم صفحهٔ آن را وارونه کرده و از طرف دیگــرش بجای خودش مــی‌نشانیم. این حــرکت از نوع R است، یعنی یك تقارن محوری است. در این حــالت $G(F_4)$ دارای بینهــایت عضو است. یعنی تعداد اعضای $G(F_4)$ از تعداد اعضــای $G(F_1)$، $G(F_2)$ و $G(F_3)$ بیشتر است. همانطورکــه از ابتدا هم گفتیم شکل F_4 از تقارنهای بیشتری برخوردار است.

مجموعه‌هــای $G(F_i)$، $1 \leqslant i \leqslant 4$، کــه در هــرمورد تشکیل دادیم وعناصر آنها حرکاتی است که اشکال F_i را تغییر نمی‌دهند ازویژگی خاصی برخور دارند. درهر مورد $G(F_i)$ شامل عضو همانی I است. اگر دو حرکت روی F_i متوالیاً انجام‌گیرنــد حاصل بازهــم حــرکتی روی F_i است. مثلاً $G(F_3)$ را درنظر بگیرید بــا حرکت R_{60} و R_1. در اینجا R_1 حرکتی است کــه رأس M را بر M می‌نشاند و K را بر L و L را بر K قرار می‌دهد. اگرمنظورمان از $R_{60}R_1$ این باشدکه ابتدا حرکت R_1 وسپس حرکت R_{60} را انجام دهیم آنگاه دیده می‌شود که براثر حرکت $R_{60}R_1$ رأس K بر M، رأس L بــر L و M را بــر K یعنی $R_{60}R_1$ حرکتی از نوع R است یعنی تقارن نسبت بــه ارتفاع وارد از رأس L. ویژگی دیگر $G(F_i)$ این است که اگر سه حرکت T، S و U پشت‌سرهــم انجام‌پذیرد آنگاه حرکت حاصل TSU با هریك از حرکات $(TS)U$ و $T(SU)$ یکــی است. بالاخره $G(F_i)$ دارای این ویژگــی است کــه هر حرکت آن دارای حرکت عکس است. به این معنا که اگر مثلاً R_{60} در مورد $G(F_3)$ را درنظر بگیریم آنگاه R_{120} نیز عضوی از $G(F_3)$ بوده و اگــر این دو حرکت، به هــر ترتیب، پشسرهم انجام گیرند حاصل حرکت همانی است.

هریك از مجموعه‌های $G(F_i)$، $1 \leqslant i \leqslant 4$، راگــروه مــی‌نامیم، در واقع گــروه تقارنهای شکل F_i. هرگــروه G دارای عضو است و به ازاء هر دو عضو S و T از G روشی وجود داردکــه بتوان S و T را بــاهم درآمیخت و ازآن عضو منحصر بفرد دیگــری از G را به دست‌آورد. مثلاً این روش در پاراگراف فوق عبارت بود ازپشت‌سرهم انجام‌دادن دو حرکت. فــرض‌کنید حاصل ترکیب S با T به صورت ST است. G باید شامل عضوی مــانند I باشد به طوریکه $SI=IS=S$ برای تمام اعضای S از G برقرار باشد. به ازاء اعضای S، T و U از G باید داشته باشیم

$$(ST)U=S(TU)$$

و بالاخره برای هر عضو S از G باید عضو T از G وجود داشته باشد به طوریکه $ST=TS=I$ برقرار باشد. هــر

مجموعهٔ G با خصوصیات فوق را یك گروه می‌نامند. اگر هر زیر مجموعهٔ ناتهی G با روش ترکیب عناصر G خود یك گروه باشد زیر گروه G نامیده می‌شود. مثلاً همهٔ دورانهای شکل F_4 زیر گروهی از $G(F_4)$ است زیرا دورانها صفحهٔ دایره را برنمی‌گردانند وحاصل ترکیب دو دوران یك دوران است که دایره را برنمی‌گرداند. حال پس‌از توضیحات فوق مفهوم تقارن را به صورت ریاضی بیان می‌نمائیم.

فضای اقلیدسی $\mathcal{R}^n$، $n \geqslant 1$، عبارت است از مجموعهٔ تمام نقاط (بردارها) به صورت

$$x = (x_1 , \cdots , x_n)$$

بطوریکه $x_i \in \mathcal{R}$، $1 \leqslant i \leqslant n$، همراه با یك ضرب‌اسکالر بردارها. برای بردارهای

$$x = (x_1 , \cdots , x_n) \quad \text{و} \quad y = (y_1 , \cdots , y_n)$$

ضرب اسکالرآنها (x, y) چنین تعریف می‌شود

$$(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

ضرب اسکالر (x, x) را با $\|x\|^2$ نمایش داده و $\|x\|$ را طول بردار x می‌نامیم. فاصلهٔ دونقطهٔ x و y عبارت است از $\|x-y\|$.

یك شکل F در فضای اقلیدسی $\mathcal{R}^n$ عبارت است از زیر مجموعه‌ای ناتهی از $\mathcal{R}^n$. یك تقارن شکل F عبارت است از نگاشت دوسوئی $\sigma: F \rightarrow F$ به طوریکه اگر x و y دو نقطهٔ دلخواه F باشندآنگاه

$$\|\sigma(x) - \sigma(y)\| = \|x - y\|$$

مجموعهٔ تمام تقارنهای شکل F که با $G(F)$ نمایش داده می‌شودگروه تقارن‌های شکل F نامیده می‌شود. $G(F)$ با ترکیب معمولی نگاشت‌ها دارای ساختمان یك گروه است. از آنجائیکه عنصر همانی I همواره عضوی از $G(F)$ است تعداد عنصرهای $G(F)$ حداقل یك است، یعنی هرشکل حداقل دارای تقارن همانی I می‌باشد. تعداد عناصر گروه $G(F)$ را با $|G(F)|$ نمایش می‌دهیم. بنابراین در مورد اشکال F_i، $1 \leqslant i \leqslant 4$، داریم

$$|G(F_1)| = 1 \quad \text{و} \quad |G(F_2)| = 2$$

$$|G(F_3)| = 6 \quad \text{و} \quad |G(F_4)| = \infty$$

پس با این تعریف دیده می‌شودکه تقارن‌های شکل F_4 از بقیه اشکال F_i، $1 \leqslant i \leqslant 3$، بیشتر است.

حال گروه تقارن‌های $\mathcal{R}$ و $\mathcal{R}^2$ را پیدا می‌کنیم. یعنی دقیقاً معین می‌کنیم که عناصر $G(\mathcal{R})$ و $G(\mathcal{R}^2)$ چه هستند. ابتدا از $\mathcal{R}$ شروع می‌کنیم. توجه داریم که در $\mathcal{R}$ حاصل $\|x\|$ و $|x|$ یکی هستند در این حالت به ازاء هر عدد حقیقی a نگاشتهای

$$\tau_a: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R} \quad \text{و} \quad \tau: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$$

با ضابطه‌های

$$\tau_a(x) = x + a \quad \text{و} \quad \tau(x) = -x$$

عناصری از $G(\mathcal{R})$ هستند. بنابراین $G(\mathcal{R})$ هر ترکیبی ازاین عناصر را نیزدربردارد. τ_a را یك انتقال و τ را یك نیمدور می‌نامیم. پس $G(\mathcal{R})$ شامل تمام انتقال‌هاست ونیمدور τ را نیز در بر دارد. حال نشان می‌دهیم که اگر

$$\sigma \in G(\mathcal{R}) \quad \text{و} \quad \sigma(0) = 0$$

آنگاه σ باید همانی یا یك نیمدور باشد. علت این است که اگر $x \in \mathcal{R}$ نقطه‌ای دلخواه باشدآنگاه از

$$|\sigma(x) - \sigma(0)| = |x - 0|$$

نتیجه می‌شود $\sigma(x) = \pm x$. اگر $\sigma(x) = x$ آنگاه $\sigma = I$ باید همانی باشد و اگر $\sigma(x) = -x$ آنگاه σ باید یك نیمدور باشد. حال فرض کنید

$$\sigma \in G(\mathcal{R}) \quad \text{و} \quad \sigma(0) = x$$

آنگاه واضح است که $\tau_a\sigma(0) = 0$. پس $\tau_{-a}\sigma = I$ همانی یا $\sigma_{-a}\sigma = \tau$ یك نیمدور است ازآنجائیکه $\sigma_{-a}^{-1} = \sigma_a$ نتیجه می‌شود

$$\tau = \tau_a \quad \text{یا} \quad \sigma = \tau_a\tau$$

نتیجه‌ای که حاصل می‌شود این است که هر عضو $G(\mathcal{R})$ حاصاضربی از یك انتقال نیمه در τ است. به زبان دیگر می‌گوئیم که $G(\mathcal{R})$ بوسیله τ، τ_a و $a \in \mathcal{R}$، تولید می‌شود می‌نویسیم

$$G(\mathcal{R}) = \langle \tau, \tau_a | a \in \mathcal{R} \rangle$$

جالب است توجه کنیم که $I = \tau^2$ یعنی اگر τ دوبار عمل کند حاصل‌آن همانی است و اگر $a \neq 0$ آنگاه

$$\tau_a^k(x) = x + ka \neq x$$

گفته می‌شودکه مرتبهٔ عنصر τ برابر ۲ و مرتبهٔ عنصر τ_a، $a \neq 0$، برابر بینهایت است. عنصر τ خط $\mathcal{R}$ را برمی‌گرداند در صورتیکه τ_a خط $\mathcal{R}$ را در امتداد خود

می‌لغزند. بسادگی دیده می‌شود که $\tau_a\tau_b$ یك انتقال است با ضابطهٔ

$$\tau_a\tau_b(x)=x+a+b$$

حاصل $\tau\tau_a$ تقارنی است با ضابطهٔ

$$\tau\tau_a(x)=-x-a$$

$\tau\tau_a$ و مانند یك نیمدور دارای مرتبهٔ ۲ است. $\tau\tau_a$ را یك تقارن مرکزی می‌نامیم. حال اگر τ_1 و τ_2 تقارنهای مرکزی باشند با ضابطه‌های

$\tau_1(x)=-x-a$ و $\tau_2(x)=-x-b$ ، $\tau_1\neq\tau_2$

آنگاه $\tau_1\tau_2$ یك انتقال است با ضابطهٔ

$$\tau_1\tau_2(x)=x+b-a$$

بنابراین زیرگروههای متناهی $G(\mathcal{R})$ یا یك عضوی‌اند یا تنها عضو همانی یا اینکه زیرگروههای مرتبه ۲ هستند.

حال $G(\mathcal{R}^2)$ را معین می‌کنیم. ابتدا چند نوع از عناصر $G(\mathcal{R}^2)$ را می‌نویسیم. به ازاء اعدد حقیقی a و b نگاشت

$$\tau_{a/b}: \mathcal{R}^2 \longrightarrow \mathcal{R}^2$$

با ضابطهٔ

$$\tau_{a/b}(x, y)=(x+a, y+b)$$

عضوی از $G(\mathcal{R}^2)$ است. $\tau_{a/b}$ را یك انتقال در راستای بردار (a, b) می‌نامیم. به ازاء عدد حقیقی θ نگاشت

$$P_\theta: \mathcal{R}^2 \longrightarrow \mathcal{R}^2$$

با ضابطهٔ

$$P_\theta(x, y)=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)$$

نیز عضوی از $G(\mathcal{R}^2)$ است که آن را یك دوران حول مبدأ مختصات با زاویه θ می‌نامیم. بالاخره نگاشت

$$\tau: \mathcal{R}^2 \longrightarrow \mathcal{R}^2$$

با ضابطهٔ

$$\tau(x, y)=(x, -y)$$

عضوی از $G(\mathcal{R}^2)$ است که آن را یك دوران محوری می‌نامیم. واضح است هر ترکیبی از سه نوع اعضای یاد شده بازهم عضوی از $G(\mathcal{R}^2)$ است. حال ثابت می‌کنیم که در واقع هر عضو $G(\mathcal{R}^2)$ ترکیبی از سه نوع عضو یاد شده دربالا است. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر

$\sigma\in(\mathcal{R}^2)$ و $\sigma(0,0)=(0,0)$ و $\sigma(1,0)=(1,0)$

آنگاه σ باید همانی باشد و یا یك دوران محوری به ازاء نقطه دلخواه $(x,y)\in R^2$ و باید داشته باشیم

$$\|\sigma(x, y)-\sigma(0,0)\|=\|(x, y)-(0,0)\|$$

و

$$\|\sigma(x, y)-\sigma(0,0)\|=\|(x, y)-(0,0)\|$$

در نتیجه

$$\|\sigma(x, y)\|=\|(x, y)\|$$

و

$$\|\sigma(x, y)-(1,0)\|=\|(x-1, y)\|$$

قرار می‌دهیم

$$\sigma(x, y)=(z, t)$$

که نتیجه می‌شود

$$\|(z, t)\|=\|(x, y)\|$$

و

$$\|(z-1, t)\|=\|(x-1, y)\|$$

بنابراین روابط

$$z^2+t^2=x^2+y^2$$

و

$$(z-1)^2+t^2=(x-1)^2+y^2$$

حاصل می‌شوند که از اینها نتیجه می‌شود

$t=-y$ ، $z=x$ یا $t=y$ ، $z=x$

در حالت اول

$$\sigma(x, y)=(x, y)$$

نگاشت همانی است و در حالت دوم

$$\sigma(x, y)=(x, -y)$$

نگاشت τ است.

حال فرض کنید $\sigma\in G(\mathcal{R}^2)$ عنصر دلخواهی است. اگر

$$\sigma(0,0)=(a, b)$$

آنگاه بوضوح

$$\tau_{-a,-b}\sigma(0,0)=(0,0)$$

قرار می‌دهیم

$$\eta=\tau_{-a,-b}\sigma$$

و ازآنجا که σ و $\tau_{-a,-b}$ عناصری از $G(\mathcal{R}^2)$ هستند پس $\eta\in G(\mathcal{R}^2)$. اما باید داشته باشیم

$$\|\eta(1,0)-\eta(0,0)\|=\|(1,0)-(0,0)\|$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\eta(1,0)\|=1$$

و در نتیجه

$$\eta(1,0)=(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

به ازاء $\theta\in\mathcal{R}$. حال داریم

$$\rho_{-\theta}\eta(1,0)=(1,0)$$

قرار می‌دهیم $\rho_{-\theta}\eta=\xi$. واضح است که

$$\xi(0,0)=(0,0)\quad و \quad \xi(1,0)=(1,0)$$

و بنابر توضیحی که در ابتدا دادیم $\xi=I$ همانی یا $\xi=\tau$ تقارن محوری است. اگر $\xi=I$ آنگاه $\rho_{-\theta}\tau_{-a,-b}\sigma=I$ و در نتیجه $\sigma=\tau_{a,b}\rho_\theta$ و اگر $\xi=\tau$ آنگاه $\sigma=\tau_{a,b}\rho_\theta\tau$. در اینجا توجه داریم که

$$(\rho_{-\theta})^{-1}=\rho_\theta\quad و \quad(\tau_{-a,-b})^{-1}=\tau_{a,q}$$

پس σ ترکیبی از یك انتقال و یك دوران محوری است. به این ترتیب معین کردیم که عناصر $G(\mathcal{R}^2)$ چگونه‌اند. در این حالت می‌نویسیم

$$G(\mathcal{R}^2)=<\tau_{a,b},\ \rho_\theta,\ \tau|a,\ b,\ \theta\in\mathcal{R}>$$

جالب است که زیرگروههای متناهی $G(\mathcal{R}^2)$ را پیدا کنیم. فرض کنید G یك زیرگروه متناهی $G(\mathcal{R}^2)$ است. ازآنجائیکه انتقال‌ها دارای مرتبه نامتناهی‌اند پس G شامل دوران‌ها یا دوران‌های محوری یا هردو است. فرض کنید تمام عناصر $G\neq\{I\}$ دوران باشند. چون G متناهی فرض شده پس دوران $\rho_\theta\in G$ با کوچکترین زاویهٔ مثبت θ وجود دارد. حال فرض کنید ρ_φ دورانی از G با زاویهٔ مثبت φ است. عدد طبیعی $m\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوریکه

$$m\theta\leqslant\varphi<(m+1)\theta$$

حال اگر تقارن $\rho_\varphi\rho_{-m\theta}$ را درنظر بگیریم آنگاه

$$\rho_\varphi\rho_{-m\theta}=\rho_{\varphi-m\theta}$$

دورانی با زاویه $\varphi-m\theta$ است. ازآنجائیکه $\rho_\varphi\in G$ پس

$$\rho_{-m\theta}=(\rho_\theta)^{-m}\in G$$

و درنتیجه $\rho_\varphi\rho_{-m\theta}\in G$. پس G شامل دورانی با زاویه $\varphi_{-m\theta}$ است و داریم

$$0\leqslant\varphi-m\theta<\theta$$

اگر

$$0<\varphi-m\theta<\theta$$

آنگاه وجود $\rho_{\varphi-m\theta}$ در تناقض باوجود ρ_θ است. پس $\varphi-m\theta=0$ و در نتیجه

$$\rho_\varphi=\rho_{m\theta}=(\rho_\theta)^m$$

یعنی هر عضو G توانی از ρ_θ است و این بدان معنا است که G یك گروه دوری با مولد ρ_θ است.

برای درنظرگرفتن بقیه حالات ابتدا توجه می‌کنیم که ترکیب دو دوران محوری یك دوران است و ترکیب یك دوران محوری با یك دوران عبارت است از یك دوران. بنابراین اگر G فقط شامل دورانهای محوری باشد آنگاه G می‌تواند فقط یك دوران محوری داشته باشد که همراه با همانی گروهی مرتبه ۲ خواهد بود که بازهم دوری است. پس فرض می‌کنیم G شامل دوران و دوران محوری باشد. فرض می‌کنیم H زیر مجموعه‌ای از G شامل همهٔ دورانها باشد بنابه فرض $H\neq\varnothing$ و لذا بنابه‌آنچه‌که گفته شد H باید یك گروه دوری مرتبه مثلاً m باشد. قرار می‌دهیم

$$H=\{I,\ \rho,\ \dots,\ \rho^{m-1}\}$$

چون G شامل دوران محوری است پس‌حداقل دوران محوری θ در G وجود دارد. حال فرض‌کنید φ عضو دلخواهی از G است. اگر $\varphi\in H$ آنگاه k وجود دارد به طوریکه $\varphi=\rho^k$؛ $0\leqslant k<m-1$، اگر $\varphi\notin H$ آنگاه φ یك دوران محوری است و در نتیجه $\varphi\theta$ یك دوران است یعنی $\varphi\theta\in H$ و در نتیجه l وجود دارد به طوریکه

$$\varphi\theta=\rho^l\quad و \quad 0\leqslant l\leqslant m-1$$

چون $\theta^2=I$ پس $\varphi=\theta\rho^l$ و در نتیجه هر عنصر G یا به صورت ρ^k، $0\leqslant k\leqslant m-1$ است یا به صورت $\theta\rho^l$، $0\leqslant l\leqslant m-1$ یعنی

$$G=\{I,\ \rho,\ \dots,\ \rho^{m-1},\ \theta,\ \theta\rho,\ \dots,\ \theta\rho^{m-1}\}$$

گروه اخیر یك گروه مرتبه $2m$ است و گروه دو وجهی نامیده می‌شود و با D_{2m} نمایش داده می‌شود پس ثابت کردیم که هر گروه متناهی از تقارنهای $G(\mathcal{R}^2)$ یا دوری است و یا گروه دو وجهی.

یادداشتی در مورد مشتق بدون حد

دکتر امیر خسروی
عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

اخیراً آقای الف. شیشا در مجلهٔ آنالیز ریاضی و کاربردهای آن نشان داده است که مشتق هر تابع حقیقی و متصل (و در واقع تابعهای کلی‌تر) را می‌توان طوری تعریف کرد که از نظر هندسی موفق باشد و از حد خارج قسمت‌ها استفاده‌ای نشود. تعریف او از حد مبتنی بر مفهوم جهت است که در همان مقاله معرفی کرده. یك جهت تابع حقیقی f در نقطهٔ حقیقی t عدد حقیقی مانند d است به‌طوری که در هر بازهٔ حقیقی و باز شامل t نقاطی مانند a و b باشند که

$$a < t < b \text{ و } [f(b)-f(a)]/(b-a)=d$$

یعنی پاره خطی که نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ را به‌هم وصل می‌کند دارای شیب d است.

هدف ما ساده‌کردن تعریف و قضایای ۱ و ۲ شیشا است.

قضیه ۱. فرض کنید f تابعی حقیقی باشد که بر بازه‌ای حقیقی و باز مانند I شامل صفر متصل باشد و $f(\circ)=\circ$. شرط لازم و کافی برای آنکه $f'(\circ)=\circ$ این است که $|f|$ در نقطهٔ صفر جهتی متمایز از صفر نداشته باشد.

اثبات. لزوم حالت خاصی از لزوم قضیهٔ ۲ است که ذیلاً آمده برای اثبات کفایت ابتدا یادآوری می‌کنیم که

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ و } \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

را درصورت وجود، بترتیب، مشتق راست و مشتق چپ تابع f در a نامیده به $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهند و تابع f در a مشتق دارد فقط و فقط وقتی که

$$f'_+(a)=f'_-(a)$$

حال اگر نشان دهیم که

$$f'_+(\circ)=\circ \qquad (۱)$$

با استفاده از (۱) برای $f(-x)$ نتیجه خواهد شد که $f'_-(\circ)=\circ$ و بدین‌ترتیب حکم ثابت می‌شود.

فرض کنید (۱) برقرار نباشد. پس $\circ < \varepsilon$ای هست که به ازای هر عدد مثبت δ عددی مانند x هست که

$$\circ < x < \delta \text{ و } \left|\frac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ}\right| \geqslant ۲\varepsilon > \varepsilon$$

درنتیجه به ازای هر عدد طبیعی n عددی مانند b_n هست که

$$0 < b_n < \frac{1}{n} = \delta_n \qquad (۲)$$

و

$$|f(b_n)|/b_n > \varepsilon$$

فرض کنید J بازهٔ حقیقی و بازی شامل نقطهٔ صفر باشد و عددی منفی مانند α در $J \cap I$ انتخاب کنید. چون

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad \text{و} \quad f(0) = 0$$

و

$$\lim_{n\to\infty} [\varepsilon\alpha - |f(\alpha)| + |f(b_n)| - \varepsilon b_n] = \varepsilon\alpha - |f(\alpha)| \leqslant \varepsilon\alpha < 0$$

به ازای n بقدرکافی بزرگ داریم

$$b_n \in J \quad \text{و} \quad \varepsilon\alpha - |f(\alpha)| + |f(b_n)| - \varepsilon b_n < 0 \qquad (۳)$$

حال تابع g را که باضابطهٔ

$$g(x) \equiv \varepsilon x - |f(x)| + |f(b_n)| - \varepsilon b_n$$

تعریف شده و بر I متصل است درنظر می‌گیریم. چون بنا بر (۲) و (۳)

$$g(\alpha) < 0 < g(0)$$

عددی مانند a در $(\alpha, 0)$ هست که $g(a) = 0$. بنابراین

$$[|f(b_n)| - |f(a)|]/(b_n - a) = \varepsilon.$$

و

$$a \in J,\ b_n \in J,\ a < 0 < b_n$$

در نتیجه $\varepsilon > 0$ جهتی برای $|f|$ در نقطهٔ صفر است و این با فرض تناقض دارد.

قضیه ۲. فرض کنید t و c اعدادی حقیقی باشند و f تابعی حقیقی و متصل بریك بازهٔ بازو حقیقی شامل t باشد. شرط لازم و کافی برای‌آنکه $f'(t) = c$ آن است که تابع

$$|f(x) - f(t) - c(x - t)|$$

در t جهتی متمایز از صفر نداشته باشد.

بنابراین، برای تابع حقیقی f که بریك بازهٔ بازو حقیقی شامل نقطهٔ t متصل باشد، می‌توان $f'(t)$ را، بدون استفاده از حد خارج قسمت تفاضل‌ها، عدد یکتای cای تعریف کرد (در صورت وجود) که برای‌آن تابع

$$|f(x) - f(t) - c(x - t)|$$

در t جهتی متمایز از صفر نداشته باشد (البته، بنا بر قضیهٔ ۲، یکتائی چنین cای باوجودآن معادل است).

اثبات قضیهٔ ۲. لزوم. واضح است که

$$|f(x) - f(t) - c(x - t)|'_{x=t} = 0$$

و بنابراین اگر d عددی غیر از صفر باشد $0 < |d|$ و در نتیجه بازهٔ بازی شامل t مانند J هست که به ازای هر x از J و متمایز از t داریم

$$\left| \frac{f(x) - f(t) - c(x - t)}{x - t} \right| < |d|$$

پس به ازای هر a و b در J که $a < t < b$ داریم

$$\begin{aligned} |f(b) - f(t) - c(b - t)| - |f(a) - f(t) \\ - c(a - t)| &< |d| \cdot (b - t + t - a) \\ &= |d| \cdot (b - a) \end{aligned}$$

و همینطور

$$\begin{aligned} |f(b) - f(t) - c(b - t)| - |f(a) - f(t) \\ - c(a - t)| &> -|d|(b - a) \end{aligned}$$

پس d جهتی برای تابع

$$|f(x) - f(t) - c(x - t)|$$

در نقطهٔ t نیست.

کفایت. با درنظر گرفتن تابع

$$\hat{f}(x) \equiv f(x + t) - f(t) - cx$$

ملاحظه می‌شودکه $\hat{f}$ تابعی حقیقی است‌که بربازهٔ بازی شامل نقطهٔ صفر متصل است و $\hat{f}(0) = 0$ و $|\hat{f}|$ در نقطهٔ صفر جهتی متمایز از صفر ندارد. پس بنابرکفایت قضیهٔ ۱ داریم

$$f'(t) = \hat{f}'(0) + c = c$$

مرجع:

1. O. Shisha, Derivative Without limit, J. Math. Anal. Appl. 113 (1936) 280–287.

درسهایی از آنالیز عددی (۱)

خطاها

تنظیم از: دکتر اسماعیل بابلیان
عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

مقدمه

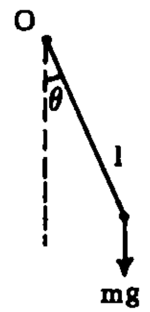
آنالیز عددی یکی از شاخه‌های مهم ریاضیات است که بخصوص با پیدایش ماشینهای حساب و کامپیوتر پیشرفت سریعی نموده است. اصولاً آنالیز عددی کاربردی مؤثر از آنالیز است. در آنالیز وجود ریشه برای معادلهٔ $f(x)=0$، وجود مقدار برای $\int_a^b f(x)dx$ وجواب برای معادلهٔ دیفرانسیل $y''=f(x,y)$، تحت شرایطی، بررسی می‌شود. اما، در آلیز عددی، به کمک آلگوریتمهای مناسب، این مقادیر موجود به طور تقریبی حساب می‌شوند.

خوشبختانه پس از انقلاب این فرصت به پژوهشگران، محققین و دانشجویان ایرانی داده شدکه روی پروژه‌های علمی وکاربردی فعالیت نمایندکه در نتیجه بیش‌ازپیش نقش محاسبات عددی و روشهای آنالیزعددی درحل مسائل کاربردی مشهودگردیده است. فعالیت اساتید کشورمان، که در این رشته فارغ‌التحصیل شده‌اند، از نظر ترجمهٔ کتب مخصوص این رشته چشمگیر بوده است (به [۱] تا [۸] مراجعه کنید). معهذا، نگارنده این سطور معتقد است که برای این درس باید کتابی جامع که نیازهای علمی را برطرف کند، و متناسب با بافت فرهنگی ـ اجتماعی جامعه باشد، تألیف گردد.

در اکثر کشورها مباحثی ازآنالیز عددی در دبیرستان تدریس می‌شود. چون در نظر است که در کتابهای جدیدالتألیف ریاضی دبیرستانی ما نیز مطالبی ازآنالیز عددی گنجانده شود بر آن شدیم که قبلاً خوانندگان محترم مجله، وبخصوص دبیران محترم ریاضی را، با این مطالب آشنا کنیم. بدیهی است که آن دسته مطالبی که در این سلسله مقالات ملاحظه می‌کنید کم‌وبیش در کتابهای جدیدالتألیف خواهند آمد. واضح است مطالبی که مقدمات آنها در دبیرستان گفته نمی‌شود در کتابهای دبیرستانی نیز جایی نخواهند داشت (از آن جمله است مطالبی که ذیلاً درمنابع خطا خواهد آمد). نظرات و انتقادات شما راهنمای مؤلفین کتابهای جدیدالتألیف و پربارتر شدن درسهای بعدی خواهد بود. قبل‌از شروع اولین درس‌آنالیز عددی که مبحث خطاها می‌باشد متذکر می‌شویم که شرط بهره‌گیری کامل از مطالبی که عرضه می‌شوند داشتن یك ماشین حساب یا کامپیوتر شخصی است که به توان تمرینات عددی مربوط به هر درس را دنبال کرد.

۱ـ منابع خطا[۱]

ابتدأ معین می‌کنیم که برای حل یك مسأله چه خطاهایی مرتکب می‌شویم تا اینکه عدد یا اعدادی به عنوان تقریبی از جواب آن مسأله ارائه دهیم. برای اینکه توضیحات خود را با مثالی همراه‌کنیم مسأله حرکت آونگ ساده‌ای بطول l و به جرم m راکه به اندازهٔ زاویه θ از حالت قائم منحرف شده درنظر می‌گیریم (شکل ۱).



(شکل ۱)

اصولاً وقتی با مسأله‌ای مواجه می‌شویم سعی می‌کنیم برای آن یك مدل[۲] ریاضی پیداکنیم و بعد بسه حل آن مدل ریاضی مبادرت می‌کنیم. در اینجا نیز چنین می‌کنیم. گوییم اگر از مقاومت هوا در مقابل حرکت آونگ صرفنظرکنیم واز اصطکاك نقطهٔ‌آویز (نقطهٔ O) چشم‌پوشی نماییم، تصویرکردن نیروها روی محورهای عمود بر نخ ودر امتداد نخ، وبکار بردن رابطهٔ

$$\vec{F}=m\vec{\gamma}$$

نتیجه می‌دهد

$$-mg\sin\theta = ml\theta'' \qquad \left(\theta''=\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

اگر بخواهیم θ را نسبت به t (یعنی زمان) از تساوی اخیر به دست آوریم باید یك معادله دیفرانسیل مرتبهٔ دوم غیر خطی را حل کنیم. اما، در مکانیك مقدماتی، برای سهولت، θ را کوچك می‌گیرند و بجای $\sin\theta$ قرار می‌دهند θ تا معادلهٔ زیر حاصل شود:

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\theta$$

جواب عمومی این معادله عبارت است از:

$$\theta = A\sin\omega t + B\sin\omega t$$

که در آن $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$ و A و B دو مقدار ثابت هستند که با توجه به شرایط اولیه مسأله قابل محاسبه‌اند. اما، آنچه از این جواب معلوم می‌شود آن است که حرکت آونگ نوسانی است و دورهٔ تناوب آن عبات است از:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (1)$$

تاکنون خطاهایی که مرتکب شده‌ایم خطای مدل نامیده می‌شوند. خطاهای دیگر زمانی ظاهر می‌شوند که بخواهیم مقداری برای T حساب کنیم. اولاً، l طول نخ و g ثابت ثقل است که از طریق اندازه‌گیری به دست می‌آیند. این دو کمیت را داده[۳] ها یا مفروضات مسأله نامند. بطور کلی، بدلیل اینکه و سایل اندازه‌گیری کاملاً دقیق نیستند، داده‌ها دارای خطا هستند و مقدار خطا بستگی به دقت اندازه‌گیری دارد. لذا، منبع دوم خطاها، داده‌ها می‌باشند.

در فرمول (۱) اعداد ۲ و π را ثابتهای فرمول نامند. وقتی بخواهیم T را حساب کنیم باید بجای π عددی اعشاری، مثلاً ۳/۱۴، که تقریبی از آن است بگذاریم. لذا، خطایی مرتکب می‌شویم که به آن خطای نمایش اعداد گوئیم (ذیلاً در این مورد بیشتر توضیح خواهیم داد). منبع خطای چهارم خطای اعمال حسابی است. اگر فرض کنید کلیه داده‌ها و ثابتها تا دو رقم اعشار منظور شوند باید حاصل $\frac{l}{g}$ را نیز تا دو رقم اعشار منظور کنیم وهمچنین حاصلضرب ۳/۱۴ را در تقریبی از $\sqrt{\frac{l}{g}}$، اینها جملگی متضمن خطای اعمال حسابی هستند.

بالاخره درمحاسبهٔ جذر $\frac{l}{g}$ باید روشی اختیار کنیم. اگر روش معمول در کتابهای ریاضی راهنمائی را به کار گیریم و پس‌از تعیین این جذر تا دو رقم اعشار عملیات را خاتمه دهیم خطایی داریم که مربوط به آن روش جذرگیری است. اگر روش نیوتن [۹] را به کار بریم، تقریبی به دست خواهیم آورد که خطای آن بستگی به مقدار اولیه انتخاب شده و مرحله‌ای دارد که عملیات را متوقف کرده‌ایم. اصطلاحاً به این خطا، خطای روش اطلاق می‌شود.

بنابر آنچه گفته شد فهرست منابع خطا چنین است:

آ ـ خطای مدل؛
ب ـ خطای داده‌ها؛
پ ـ خطای نمایش اعداد؛
ت ـ خطای اعمال حسابی؛
ث ـ خطای روش.

تذکر

لازم است توضیح داده شود که اگر ضمن انجام عملیات روی عدد ۲۳۳ آن را ۲۲۳ منظور کنیم یك اشتباه[۴] مرتکب شده‌ایم نه خطا. همچنین است اشکالاتی که در اثر تغییر ناگهانی و شدید ولتاژ برق برای کامپیوتر پیش می‌آید و بعضاً موجب نتایج عددی غلط می‌شود. در این نوشتار اینگونه اشتباهات را مورد توجه قرار نمی‌دهیم.

از پنج منبع خطایی که ذکر شد خطای مدل و خطای داده‌ها به افرادی مربوط می‌شود که مدل ریاضی مسأله را به دست می‌آورند و داده‌ها را اندازه‌گیری می‌کنند (معمولاً مهندسین، فیزیکدانان و ...). اما، سه خطای بعدی مربوط به آنالیز عددی است. در اینجا هدف بررسی خطای نمایش اعداد و خطای اعمال حسابی است. خطای روش، معمولاً هنگام بررسی آن روش مورد بحث قرار می‌گیرد.

۲ـ نمایش اعداد

در محاسبات عددی معمولاً تعداد عملیات و نوع عملیات به‌گونه‌ای است که انجام آنها با مداد و کاغذ و بطور دستی بسیار مشکل و گاهی اوقات حتی غیر ممکن است. لذا، عملیات لازم برای رسیدن به جواب یك مسأله با ماشین‌حساب

یا کامپیوتر انجام می‌گیرد. بدلیل اینکه کار با کسرهای متعارفی و اعداد گنگ، توسط ماشین‌حساب یا کامپیوتر، عملی نیست (البته کار باکسرها بطور محدود امکان‌پذیر است) این وسایل تقریبی از اعداد گنگ وکسرها را انتخاب کرده روی آنها عملیات لازم را انجام می‌دهند. حال سؤال این است که چگونه تقریبی از یك عدد اختیار شود که خطای آن ناچیز باشد؟ و اثرات این خطا، وقتی این تقریب در محاسبات به‌کار گرفته می‌شود، چیست؟

برای پاسخگوئی به این سؤال ابتدا نحوهٔ به‌دست‌آوردن بسط عدد مثبت A را در پایه r، که $2 \leqslant r \in N$، توضیح می‌دهیم. با توجه به اینکه بردن یك عدد طبیعی به مبنای r ساده است [۱۰] فرض می‌کنیم $0 < A < 1$ و بسط A در مبنای r چنین باشد:

$$A = (0/a_1a_2a_3\cdots)_r = a_1r^{-1}+a_2r^{-2}+a_3r^{-3}+\cdots \quad \text{و} \quad 0 \leqslant a_i < r$$

در این صورت

$$rA = a_1 + a_2r^{-1}+a_3r^{-2}+\cdots$$

با توجه به اینکه (چرا؟)

$$0 \leqslant a_2r^{-1}+a_3r^{-2}+\cdots < \frac{r-1}{r}+\frac{r-1}{r^2}+\cdots = 1$$

داریم:

$$[a_1+a_2r^{-1}+\cdots] = a_1$$

و از آنجا

$$a_1 = [rA]$$

و اگر بنویسیم

$$rA - a_1 = a_2r^{-1}+a_3r^{-2}+\cdots$$

در وضعیتی مشابه برای تعیین a_2 هستیم یعنی،

$$a_2 = [r(rA-a_1)]$$

و بهمین ترتیب می‌توان بقیه ارقام را به دست‌آورد.

با توجه به مطالب بالا، آلگوریتم زیر برای به‌دست‌آوردن بسط عدد A، که $0 < A < 1$، در مبنای r حاصل می‌شود.

آ ـ قرار دهید $i = 1$؛

ب ـ قرار دهید $a_i = [rA]$؛

پ ـ مقدار $rA - a_i$ را حساب کنید. اگر این مقدار صفر باشد کار تمام است و الاّ این مقدار را مجدداً A بنامید؛

ت ـ یك واحد به i اضافه کنید و به (ب) بروید.

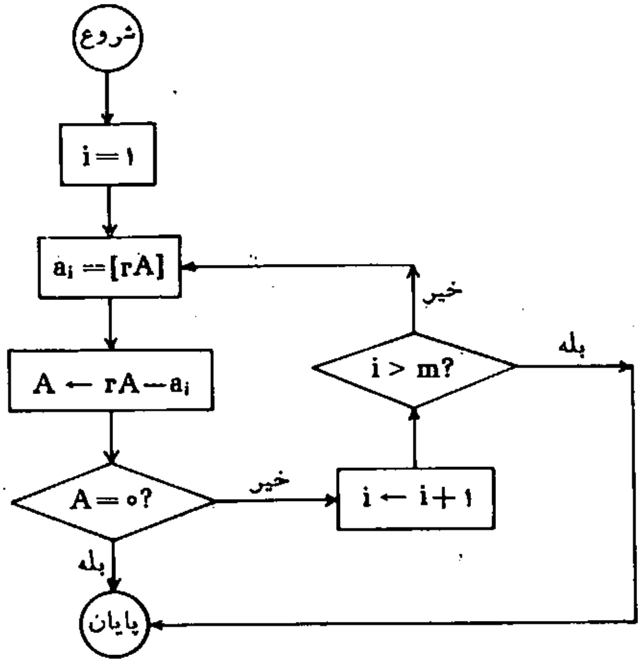
لازم به ذکر است که عملاً در مرحله (ت) اگر i از عدد معلومی، مثلاً m، بیشتر شود عملیات متوقف می‌گردد. ذیلاً فلوچارت آلگوریتم بالا ارائه شده است. در این فلوچارت منظور از

$$i \longleftarrow i+1$$

این است که به i یك واحد اضافه می‌شود و مقدار جدید i قرار می‌گیرد، بهمین ترتیب در مورد

$$A \longleftarrow rA - a_i$$

ضمناً r، A و m معلوم فرض می‌شوند.



برای روشن شدن چگونگی کار این آلگوریتم به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱

بسط عدد ۰/۷۵ را در مبنای ۲ به دست‌آورید.

$$a_1 = [2 \times 0/75] = [1/5] = 1 \quad \text{و} \quad 2A - a_1 = 0/5$$

مقدار جدید A عدد ۰/۵ است در نتیجه

$$a_2 = [2 \times 0/5] = 1 \quad \text{و} \quad 2A - 1 = 0$$

بنابراین،

$$0/75 = (0/11)_2$$

مثال ۲

بسط عدد $\frac{1}{7}$ را در مبنای ۱۰ بنویسید. (از تقسیم عدد ۱ بر ۷ نیز همین نتیجه حاصل می‌شود.)

$$a_1=\left[10\times\frac{1}{7}\right]=1 \quad \text{و} \quad 10A-a_1=\frac{3}{7}$$

$$a_2=\left[10\times\frac{3}{7}\right]=4 \quad \text{و} \quad 10A-a_2=\frac{2}{7}$$

$$a_3=\left[10\times\frac{2}{7}\right]=2 \quad \text{و} \quad 10A-a_3=\frac{6}{7}$$

$$a_4=\left[10\times\frac{6}{7}\right]=8 \quad \text{و} \quad 10A-a_4=\frac{4}{7}$$

$$a_5=\left[10\times\frac{4}{7}\right]=5 \quad \text{و} \quad 10A-a_5=\frac{5}{7}$$

$$a_6=\left[10\times\frac{5}{7}\right]=7 \quad \text{و} \quad 10A-a_6=\frac{1}{7}$$

چون به مقدار اولیه A رسیدیم معلوم می‌شود که

$$\frac{1}{7}=0/\overline{142857}$$

که در آن منظور از دسته ارقامی که بالای آنها خط کشیده شده آن است که این دسته ارقام مرتباً تکرار می‌شوند.

مثال ۳

بسط عدد ۰/۱ را در مبنای ۲ به دست آورید.

اگر

$$A=0/1=(0/a_1a_2\cdots a_n\cdots)_2$$

آنگاه

$$a_1=[2\times 0/1]=0 \quad \text{و} \quad 2A-a_1=0/2$$

توجه کنید که مقدار جدید A عدد ۰/۲ است.

$$a_2=[2\times 0/2]=0 \quad \text{و} \quad 2A-a_2=0/4$$

$$a_3=[2\times 0/4]=0 \quad \text{و} \quad 2A-a_3=0/8$$

$$a_4=[2\times 0/8]=[1/6]=1$$

و

$$2A-a_4=0/6$$

$$a_5=[2\times 0/6]=[1/2]=1$$

و

$$2A-a_5=0/2$$

چون مجدداً به مرحله‌ای رسیدیم که در آن مقدار A برابر ۰/۲ بود، مرحله تعیین a_2، نتیجه می‌گیریم که

$$0/1=(0/00011001100 11\ldots)_2$$

$$=(0/0\,\overline{0011})_2$$

توجه: ساده‌ترین عدد اعشاری، یعنی ۰/۱، دارای بسطی نامختوم در مبنای ۲ است!

تمرین: با توجه به آلگوریتم فوق‌الذکر و مثالهای بالا ۱۰ رقم از بسط عدد ۰/۱ را در مبناهای ۳، ۵ و ۷ حساب کنید.

با توجه به مثالهای فوق واینکه اعداد در ماشینهای محاسب و کامپیوترها، معمولاً، به مبنای ۲ برده شده و ذخیره می‌شوند نتیجه می‌گیریم که تقریباً تمام اعداد غیر صحیح بطور تقریبی در حافظهٔ این وسایل ذخیره می‌شوند و این یکی‌از ضعفهای مهم این وسایل است که درعمل باعث مشکلات عدیده می‌شود. همانطورکه خواهیم دید خطای جزئی که در ذخیرهٔ اعداد پیش می‌آید گاهی اوقات سبب به دست‌آوردن جوابهای غیر قبول برای مسائل می‌شود و یکی‌از مباحث بسیار مشکل آنالیز عددی بحث در این مقوله، یعنی، پیش‌بینی اثرات خطای نمایش اعداد در نتایج عددی می‌باشد.

اینک کمی به نظریه نمایش اعداد می‌پردازیم. اگر A عددی حقیقی‌ومثبت باشد A دارای بسط اعشاری منحصر بفرد زیر است: (به [۱۱] صفحات ۵۸۱ تا ۵۸۳ مراجعه کنید.)

$$A=a_m\times 10^m+a_{m-1}\times 10^{m-1}+\cdots$$

که‌در آن $a_m\neq 0$، $0\leqslant a_i\leqslant 9$ و بینهایت بار $a_i\neq 9$. (توجه کنید که اگر شرط آخر را برداریم، با توجه به اینکه $0/9999\cdots=1$، بعضی اعداد می‌توانند دوبسط اعشاری داشته باشند. البته آلگوریتمی که قبلاً ارائه شد تنها یك بسط ارائه می‌دهد که در شرایط فوق نیز صدق می‌کند.)

مثلاً،

$$\frac{22}{7}=3/\overline{142857} \quad \text{و} \quad \frac{2}{3}=0/\overline{6}$$

و

$$\sqrt{2}=1/41421\cdots \quad \text{و} \quad \frac{3017}{198}=15/2\overline{37}$$

لم - اگر بسط اعشاری A مختوم یا متناوب باشد A عددی گویا است. (صفحهٔ ۱۳۰ کتاب حساب و جبر سال دوم ریاضی فیزیك را نیز ملاحظه کنید.)

برهان. واضح است که اگر بسط اعشاری A مختوم باشد

A گویا است. لذا، فرض می‌کنیم

$$A = U/a_1a_2\cdots a_m\overline{b_1b_2\cdots b_n}$$

که در آن U جزء صحیح A است و $b_1b_2\cdots b_n$ دسته ارقامی هستند که مرتباً تکرار می‌شوند. (توجه کنید که ممکن است m صفر باشد). می‌توان نوشت:

$$A - U/a_1a_2\cdots a_m = 10^{-m}\times 0/\overline{b_1b_2\cdots b_n}$$
$$= 10^{-m} + b_1b_2\cdots b_n(10^{-n}+10^{-2n}+\cdots)$$
$$= \frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^m(10^n-1)}$$

چون عدد سمت راست تساوی اخیر گویا است و عدد $U/a_1a_2\cdots a_m$ نیز گویا است، نتیجه می‌گیریم که A گویا است. (منظور از $b_1b_2\cdots b_n$ عددی است که از ارقام b_1 تا b_n حاصل می‌شود.)

با توجه به معادل بودن یک گزاره با عکس نقیض آن داریم:

نتیجه - اگر A عددی گنگ باشد بسط اعشاری آن نامختوم است و متناوب نیست.

مثال:

عددی را به دست آورید که بسط اعشاری آن $15/2\overline{37}$ باشد.

بنابر قضیه فوق‌الذکر ($n=2$ ، $m=1$ ، $U=15$ ، $b_1b_2=37$ و $c_1=2$)

$$A = 15/2 + \frac{37}{10(10^2-1)} = 15/2$$
$$+ \frac{37}{990} = \frac{15085}{990} = \frac{3017}{198}.$$

۳- ارقام با معنا

در ریاضیات اعداد

۱/۲۰۰ و ۱/۲۰ و ۱/۲

متساویند. اما در فیزیک چنین نیست. اگر گفته شود طولی را اندازه گرفتیم ۱/۲۰ متر بود این بدان معناست که وسیله اندازه‌گیری دقتی تا حد سانتیمتر داشته (حداکثر خطا ۰/۵ سانتیمتر بوده است) و اگر گفته می‌شد که آن طول ۱/۲۰۰ متر است معلوم می‌شد که واحد اندازه‌گیری دقتی در حد میلیمتر داشته است (حداکثر خطا ۰/۵ میلیمتر بوده است). لذا، صفرهای جلوی این اعداد را، که نوعی دقت را بما می‌فهمانند، صفرهای با معنا گویند. برای ارائه تعریفی نسبتاً دقیق از ارقام با معنای یک عدد فرض کنید A عدد اعشاری مخالف صفری باشد. واضح است که A را همواره می‌توان به صورت

$$A = a\times 10^b \qquad (*)$$

نوشت که در آن

$$1 \leqslant |a| < 10$$

و b چنان انتخاب می‌شود که تساوی (*) برقرار باشد. در این صورت گوئیم A به صورت علمی[5] نمایش داده شده است، a را مانتیس و b را نمای A نامیم.

تعریف - فرض کنید a عددی اعشاری باشد و $1 \leqslant |a| < 10$. در این صورت، ارقام با معنای a عبارتند از ارقام مخالف صفر a، صفرهای بین این ارقام و صفرهایی که در جلوی عدد بمنظور نوعی دقت قرار دارند. ارقام با معنای عدد اعشاری مخالف صفر A همان ارقام با معنای مانتیس A تعریف می‌شود.

مثال:

(آ). اگر

$A = 23/76$ آنگاه $A = 2/376\times 10^1$

و تعداد ارقام با معنای A چهار است.

(ب). اگر

$A = 0/0076$ آنگاه $A = 7/6\times 10^{-3}$

و تعداد ارقام با معنای A دو است.

(پ). اگر

$l = 2000$ متر آنگاه $l = 2/000\times 10^3$ متر

و l دارای چهار رقم با معنا است.

(ت). اگر

$d = 870$ کیلومتر آنگاه $d = 8/70\times 10^5$ متر

و d دارای ۳ رقم با معنا است.

اینک به چگونگی انتخاب تعدادی متناهی از ارقام بسط اعشاری یک عدد مخالف صفر می‌پردازیم. این کار بدو صورت انجام می‌شود.

الف - قطع کردن[6]: بسط اعشاری عدد را از جائی که مایلیم قطع می‌کنیم. مثلاً،

اعداد زیر تا ۲ رقم اعشار (2D)[7] قطع شده‌اند:

$\sqrt{2}=1/41(2D)$ و $\sqrt{3}=1/73(2D)$

و

$$\frac{2}{3}=0/66(2D)$$

می‌توان گفت که اعداد سمت راست تساویهای فوق قطع شدهٔ اعداد سمت راست تا ۳ رقم با معنا (3S)[8] هستند.

ب ـ گرد کردن[9]: اگر بخواهیم اعداد بالا را تا دو رقم اعشار گرد کنیم به بسط اعشاری آنها

$$0/5\times 10^{-2}$$

اضافه می‌کنیم و بعد حاصل را تا دو رقم اعشار قطع می‌کنیم. گرد شدهٔ چند عدد در زیر آمده است:

$\sqrt{2}=1/41(2D)$ و $\sqrt{3}=1/73(2D)$

و

$$\frac{2}{3}=0/67(2D)$$

با توجه به اینکه

$$\left|\frac{2}{3}-0/66\right|=\frac{2}{300} \quad \text{و} \quad \left|\frac{2}{3}-0/67\right|=\frac{1}{300}$$

ملاحظه می‌شود که گرد کردن خطای کمتری نتیجه می‌دهد در حقیقت خطای قطع کردن می‌تواند تا دو برابر خطای گرد کردن باشد [۱۲]. بطور کلی، گرد کردن تا n رقم اعشار چنین تعریف می‌شود:

فرض کنید

$$A=U/c_1c_2\cdots c_nc_{n+1}\cdots$$

گرد شدهٔ A تا n رقم اعشار عبارت است از قطع شدهٔ

$$A+0/5\times 10^{-n}$$

تا n رقم اعشار که آن را با a نمایش می‌دهیم و معمولاً بصورت زیر می‌نویسیم:

$$A=a(nD)$$

مثلاً،

$\sqrt{2}=1/414(3D)$ و $\frac{2}{3}=0/667(3D)$

$\frac{4}{3}=1/33(2D)$ و $\pi=3/142(3D)$

و

$$\frac{15}{7}=2/01(2D)$$

به سادگی ملاحظه می‌شود که اگر a گرد شدهٔ A تا n رقم اعشار باشد

$$|A-a|\leqslant 0/5\times 10^{-n} \qquad (2)$$

نامساوی (۲) نشان می‌دهد که هرچه n بزرگتر باشد a به A نزدیکتر خواهد بود. لذا، دقت کامپیوتر یا ماشین حسابی بیشتر است که بتواند ارقام بیشتری از بسط اعشاری یک عدد را در خود ذخیره کند.

مسائل

۱ـ ثابت کنید که در مبنای r

$$\frac{1}{r-1}=0/\overline{1}$$

و

$$\frac{1}{r+1}=0/\overline{0r'} \quad \text{و} \quad (r'=r-1)$$

۲ـ بسط $\frac{1}{g^2+g+1}$ را در مبنای g به دست آورید.

۳ـ نشان دهید که در مبنای ۱۰،

$$\frac{1}{9^2}=0/\overline{012345679}$$

و بطور کلی اگر

$$r_2=r-3 \quad \text{و} \quad r_1=r-1 \quad r>2$$

ثابت کنید که

$$\frac{1}{(r-1)^2}=0/0123\cdots r_2r_1$$

۴ـ عدد $\frac{1}{(99)^2}$ را با کسر اعشاری نمایش دهید.

۵ـ می‌دانیم که بسط هرعدد گویا در مبنای $r>1$ مختوم است یا نامختوم ومتناوب (به[۱۱] صفحهٔ ۵۸۱ مراجعه کنید). ثابت کنید اعداد زیر گویا نیستند:

$$0/123456789101112\cdots$$

(بعداز ممیز اعداد طبیعی آمده‌اند)

$$0/1001000010000001\cdots$$

(به تعداد صفرهای بین یکها هر بار دو تا اضافه می‌شود)

۶ـ اگر m طبیعی و بزرگتر از ۱ باشد ثابت کنید عدد

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m^4}+\frac{1}{m^9}+\cdots=\sum_{n=1}\frac{1}{m^{n^2}}$$

گویا نیست.

بقیه در صفحه ۲۳

معرفی عدد e (۱)

تنظیم از: جواد لالی
عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

عدد e یکی از اعداد مهم ریاضی، همردیف عدد π، است. اهمیت آن نه فقط در ریاضیات محض است، بلکه در ریاضیات کار بسته نیز نقش حیاتی دارد. این عدد اولین بار به‌وسیله لئونهارت اویلر[۱] کشف شده است. نمادی که برای این عدد به کار رفته از اویلر است، و آن حرف اول کلمه EULER می‌باشد. او پیشنهاد نمود که این عدد به‌عنوان مبنای لگاریتم به کار رود. در سالها ۱۷۲۸ به بعد، زمانی که اویلر حدود بیست سال عمر داشت، این عدد و نماد آن را در مقاله‌های منتشر نشدهٔ خود به کار می‌برده است. البته، امروزه این عدد به عنوان مبنای لگاریتم نپر[۲] (یا طبیعی) به کار می‌برند، و انتخاب صفت نپر، برای آن، تنها بدین خاطر است که جان نپر (۱۵۵۰–۱۶۱۷) اولین فردی بود که به اختراع لگاریتم پرداخت. نپر، بحث خود را دربارهٔ لگاریتمها درسال ۱۶۱۴، در رساله‌ای تحت عنوان «شرح قانون شگفت‌انگیز لگاریتمها»، شروع و منتشر کرد. این اثر حاوی جدولی است که لگاریتم سینوس زوایا را برای دقیقه‌های متوالی یک کمان به دست می‌دهد. از بین لگاریتمها، با مبناهای مختلف، آنهایی که بیش از دیگران اهمیت دارند، یکی با مبنای ۱۰ است که به لگاریتم معمولی[۳] معروف است؛ و دیگری، با مبنای عدد

$$e = 2/7182818\cdots$$

است که به لگاریتم طبیعی[۴] (یا لگاریتم نپری) مشهور است. عدد e گذشته از آنکه به عنوان مبنای لگاریتم طبیعی به کار می‌رود، در تعریف بسیاری از توابع آنالیز نقش اساسی دارد. فرمول بسیار مهم

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

از اویلر است، که در آن i واحد موهومی است و در معادله $x^2+1=0$ صدق می‌کند. در این فرمول، با قرار دادن $x=\pi$ رابطه جالبی به صورت

$$e^{i\pi}+1=0$$

حاصل می‌شود که ارتباط بین پنج تا از مهمترین اعداد ریاضی را بیان می‌کند؛ که این اعداد عبارتند از ۰، ۱ که، به ترتیب عضو بی‌اثر اعمال جمع و ضرب است؛ i واحد موهومی e و π دو عدد اصم و از اعداد متعالی هستند، یعنی؛ در هیچ چند جمله‌ای با ضرایب صحیح صدق نمی‌کنند. اویلر، با روشهای صوری، به تعداد زیادی از انواع رابطهٔ فوق، نظیر رابطه [$i^{i}e^{\pi/2}=1$ یا $i^{i}=e^{-\pi/2}$] دست یافت که معکوس i^i یک عدد حقیقی است.

کاربرد دیگر عدد e در تعریف توابع مثلثاتی، بخصوص، در آنالیز مختلط است. به‌عنوان مثال، توابع سینوس و کسینوس به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left[e^{ix}-e^{-ix}\right]$$

یا

$$\cos x = \frac{1}{2}\left[e^{ix}+e^{-ix}\right]$$

همچنین، مبنای تعریف توابع مثلثاتی هیپربولیک و بسیاری از توابع مقدماتی دیگر تابع نمایی e^x است. آنهایی که کم و بیش مطالعاتی در ریاضیات کار بسته یا محض دارند، بخوبی نقش حیاتی e را در گسترش مفاهیم ریاضی درک می‌کنند. و جای بسی خوشحالی است که شورایی در مرکز تحقیقات وزارت

آموزش‌وپرورش، جهت تألیف و تدوین کتابهای درسی، تشکیل شده است. قرار است این عدد و کاربرد مختصری از آن، درکتابهای درسی‌آورده شود. در این مقاله، سعی شده است، روشهای مختلف معرفی این عدد، با مقدمات لازم جهت بیان‌آن، بیان‌گردد تا هم بتواندکمکی برای تدوین‌کنندگان کتابهای درسی باشد و هم دبیران ریاضی را برای تدریس کتابهای درسی جدید التألیف آماده‌کند. مطالبی‌که در این زمینه، با مقدمات لازم،گردآوری شده است به چهار صورت ذیل میان خواهد شد:

اولین‌آن، با استفاده از نامساوی میانگین هندسی و حسابی، با مقدمات ابتدایی، به صورت ذیل تنظیم شده است؛ دومین روش با استفاده از اصل تمامیت و استفاده از مفاهیم دنباله‌ها است‌که عدد e را دقیق‌تر معرفی می‌کند؛ و سومین روش تعریف عدد e به‌کمك سریها؛ و چهارمین روش تعریف‌آن به کمك انتگرال‌ها و استفاده از لگاریتم در مبنای e است.

۱. روش اول

مقدماتی‌که در این روش مورد نیاز است، تنها نامساوی میانگین هندسی وحسابی است‌که اثبات‌آن چندان مشکل نیست ومی‌توان برهان‌آن را درسطح دبیرستان، برای دانش‌آموزان، ارائه داد.

فرض‌کنیدکه A میانگین حسابی و G میانگین هندسی تعدادی متناهی از اعداد حقیقی نامنفی باشد. دراین صورت، $A \geqslant G$. برای حالت خاص، وقتی‌که دوعدد a و b مورد نظر باشد، نامساوی به صورت

$$\frac{a+b}{۲} \geqslant \sqrt{ab}$$

تبدیل می‌شود. برهانهای مختلفی برای اثبات این نامساوی ارائه شده است[۵]. در اینجا، برهانی ارائه می‌دهیم‌که‌کمی طولانی است، ولی، بسیار ساده و مقدماتی است.

۱۰۱ قضیه (نامساوی میانگین (یا واسطه) هندسی و حسابی). فرض‌کنیدکه A و G، به ترتیب، میانگین حسابی و هندسی اعداد حقیقی نامنفی

$$(۱) \quad a_۱ \text{ و } a_۲ \text{ و } \dots \text{ و } a_n$$

باشند، به طوری‌که،

$$(۲) \quad A=\frac{۱}{n}(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)$$

و

$$G=(a_۱a_۲\cdots a_n)^{۱/n}$$

دراین صورت، $A \geqslant G$. تساوی فقط و فقط وقتی برقرار می‌شودکه

$$(۳) \quad a_۱=a_۲=\cdots=a_n$$

تبصره: اگر شرط (۳) برقرار باشد، بدیهی است‌که $A=G$. عکس‌آن را با برهان خلف بیان می‌کنیم. یعنی؛ اگر a_iیی موجود باشدکه متمایز از دیگران باشدآنگاه $A \neq B$، یا $A > G$. اما، این نامساوی معادل این است که $G^n < A^n$. یا

$$(۴) \quad a_۱a_۲\cdots a_n < A^n.$$

برای اثبات نامساوی میانگین، کافی است‌که نامساوی (۴) را ثابت‌کنیم.

دراینجا، الگوریتمی ارائه می‌دهیم،که به‌کمك‌آن، نامساوی (۴) را ثابت می‌کند. اساس کار این‌آلگوریتم چنین است؛ در مراحل مختلف، با قرار دادن اعدادی، با حاصلضربهایی با مقادیر بیشتر، حاصل $a_۱a_۲\cdots a_n$ را افزایش می‌دهیم تا حداکثر پس‌از n مرحله عبارت A^n به‌دست‌آید. البته، تغییرات به‌گونه‌ای است‌که حاصلجمع اعداد تغییر نمی‌کند، ولی حاصلضرب‌آنها افزایش می‌یابد. به عبارت دقیق‌تر؛

آلگوریتم: فرض‌کنید x و y، به‌ترتیب،کوچکترین و بزرگترین اعداد (۱) باشند. به‌سادگی ثابت می‌شودکه $x \leqslant A \leqslant y$ (چرا؟). در اولین مرحله، دو عامل A و $x+y-A$ را بجای x و y قرار می‌دهیم. چون حاصلضرب این دو عدد از xy بیشتر است، پس عبارت حاصلضرب افزایش می‌یابد ولی حاصلجمع‌آن ثابت می‌ماند. همین عمل را برای اعداد جدید تکرار می‌کنیم. بهتر است، قبل‌از توضیحاتی در این زمینه، جهت درك بیشتر آلگوریتم، دو مثال ارائه دهیم.

۲۰۱ مثال: فرض‌کنیدکه اعداد ۲، ۳، ۴، ۶ و ۲۰ مورد نظر باشند. بنابراین، میانگین حسابی اعداد ۷ است؛ زیرا،

$$A=\frac{۱}{۵}(۲+۳+۴+۶+۲۰)=۷$$

می‌خواهیم ثابت‌کنیم‌که

$$۲\times۳\times۴\times۶\times۲۰ < ۷^۵.$$

و این بیان عددی نامساوی (۴) است. آلگوریتم فوق را به کار می‌بندیم. بنابراین،

$$\begin{aligned}2\times3\times4\times6\times20 &< 3\times4\times6\times7\times15\\ &< 4\times6\times7\times7\times11\\ &< 6\times7\times7\times7\times8\\ &< 7\times7\times7\times7\times7=7^5\end{aligned}$$

طبق آلگوریتم ارائه شده، میانگین حسابی اعداد مذکور ۷ است. در اولین مرحله، ۲ و ۲۰، به ترتیب، کوچکترین و بزرگترین این اعداد هستند، که بجای آنها، اعداد ۷ و

$$x+y-A=2\times20-7=15$$

را قرار می‌دهیم. چون

$$2+20=7+15 \quad \text{و} \quad 2\times20<7\times15$$

پس حاصلضرب آنها افزایش یافته است، درحالیکه میانگین حسابی تغییر نمی‌کند. اعداد جدید، اعداد ۳، ۴، ۶، ۷ و ۱۵ است، که کوچکترین آنها ۳ و بزرگترین آنها ۱۵ است که بجای آن دو عدد ۷ (یعنی، A) و ۱۱ یعنی،

$$x+y-A=3+15-7=11$$

را قرار می‌دهیم، که در این مرحله نیز حاصلضرب اعداد افزایش می‌یابد. اگر دو مرحله دیگر آلگوریتم را تکرار کنیم، نامساوی ذیل حاصل می‌شود

$$2\times3\times4\times6\times20<7^5$$

با محاسبات مستقیم می‌توان صحت این نامساوی را بررسی کرد.

۳.۱ مثال: نامساوی

$$1\times6\times7\times10\times11\times19<9^6$$

حالت خاص دیگری از نامساوی (۴) است. با بکارگیری آلگوریتم فوق، و تکرار آن، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}1\times6\times7\times10\times11\times19 &< 6\times7\times9\times10\times11\times11\\ &< 7\times8\times9\times9\times10\times11\\ &< 8\times9\times9\times9\times9\times10\\ &< 9\times9\times9\times9\times9\times9=9^6\end{aligned}$$

نکته جالب این آلگوریتم این است که بجای اعداد x و y، که کوچکترین و بزرگترین اعداد در هر حاصلضرب است، دو عدد A و $x+y-A$ را قرار داده‌ایم، حاصلجمع اعداد همواره یکسان است، بنابراین، میانگین حسابی تغییر نمی‌کند ولی میانگین هندسی افزایش می‌یابد. زیرا، در این آلگوریتم، هنگامیکه a_1، a_2، ...، a_n تبدیل به n عامل دیگر می‌کنیم، میانگین حسابی این اعداد A است و با توجه به تساوی

$$(x+y-A)+A=x+y,$$

میانگین حسابی اعداد جدید نیز A خواهد شد. اما، چرا حاصلضرب جدید افزایش می‌یابد؟ برای جواب بدین پرسش، ثابت می‌کنیم که

$$xy<A(x+y-A).$$

در این نامساوی، با انتقال xy به سمت دیگر، خواهیم داشت

$$0<Ax+Ay-A^2-xy$$

$$0<(A-x)(y-A)$$

چون $x<A<y$ و دو عامل $A-x$ و $y-A$ مثبت‌اند، پس نامساوی فوق برقرار است.

بالاخره، مشاهده کردیم که اگر آلگوریتم فوق را چندین‌بار برای حاصلضرب اعداد a_1، ...، a_n تکرار کنیم، ما را به عدد A^n هدایت می‌کند. زیرا، در هر مرحله یك یا دو عامل به A تبدیل می‌شود و حاصلضرب آنها افزایش می‌یابد، این موضوعی است که در مثالها نشان داده شده است. بنابراین، نامساوی (۴) و همچنین قضیه فوق ثابت شده است.

از قضیه فوق نتیجه جالب ذیل حاصل می‌شود:

۴.۱ نتیجه: اگر a_1، a_2، ...، a_n اعداد حقیقی نامنفی باشند آنگاه

$$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\geqslant n\,a_1a_2\cdots a_n$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار می‌شود که a_iها مساوی باشند.

اینك، مقدمات لازم جهت تعریف e و محاسبه تقریبی آن مهیا شده است. سعی ما در این روش بر این پایه استوار است که برای ارائه مطالب از مقدمات کمتری استفاده شود و استفاده از هر مطلب، در سطح تعریف و یا نتایج حاصل از آن باشد.

می‌دانیم که دنباله (یارشته) تابعی است که دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی است.

به ازای هر عدد صحیح مثبت n، دو دنباله f و g را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

و

$$g(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

بنابراین، $f(1)=2$، $f(2)=\frac{9}{4}$، $f(3)=\frac{64}{27}$، ...، .

بهمین ترتیب

$$g(1)=4\text{ ، } g(2)=\frac{27}{8} \text{ و } g(3)=\frac{256}{81}$$

ابتدا ثابت می‌کنیم که

$$(5)\quad f(1)<f(2)<f(3)<\cdots<f(n)<f(n+1)<\cdots$$

اگـــــــر دنباله‌ای در شرط فـــوق صدق کند، آن را صعودی مـــی‌خوانند. بـــرای اثبات (۵)، نامساوی میانگین هندسی و حسابی را برای $n+1$ عدد ذیل به کار می‌بریم

$$1,\ \left(1+\frac{1}{n}\right),\ \left(1+\frac{1}{n}\right),\ \cdots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right).$$

حاصلجمع این اعداد $n+2$ و حاصلضرب آنها $f(n)$ است. بالنتیجه، خواهیم داشت،

$$\frac{n+2}{n+1}>[f(n)]^{1/(n+1)}$$

از طرفی

$$f(n+1)=[(n+2)/(n+1)]^{(n+1)}$$

بنابراین، دوطرف نامساوی بالا را به‌توان $n+1$ می‌رسانیم. در این صورت، نامساوی

$$f(n+1)>f(n)$$

نتیجه می‌شود. بنابراین، f صعودی است.

نتیجه دوم ما نیاز به روش مشابه دارد؛ یعنی، اینکه

$$(6)\quad g(1)>g(2)>g(3)>\cdots>g(n)>g(n+1)>\cdots$$

اگـــر دنباله‌ای، مانند g، در شرط فوق صدق کند آنگاه g را نزولی خوانند. نامساوی(۶) را می‌توان با بکار بستن میانگین هندسی و حسابی، برای $n+1$ عدد ذیل ثابت کرد،

$$1,\ \left(1-\frac{1}{n}\right),\ \left(1-\frac{1}{n}\right),\ \cdots,\ \left(1-\frac{1}{n}\right).$$

مجموع این اعداد n و حاصلضرب آنها $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ است.

بنابراین، خواهیم داشت

$$\frac{n}{n+1}>\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n/(n+1)},$$

کـــه اگـــر دو طرف را بتوان $n+1$ برسانیم، نامساوی ذیل حاصل می‌شود

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}.$$

عبارت دو طرف نامساوی فوق را وارون مـــی‌کنیم، نامساوی ذیل نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}<\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$$

و

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n+1)}<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}.$$

و این همـــان اثبات نامساوی $g(n)<g(n-1)$ است. بالنتیجه، g نزولی است.

ذیلاً، ثابت مـــی‌کنیم کـــه هرعدد از دنبالـــه صعودی (۵) کـــوچکتر از هرعدد از دنباله نزولـــی (۶) است. این بدین معنی است که؛

به ازای هر دو عدد صحیح مثبت n و k،

$$(7)\quad f(n)<g(k)$$

اثبات این نامساوی در سه مرحله انجام می‌گیرد.

مرحله اول، ثابت مـــی‌شود کـــه به ازای هـــر عدد صحیح مثبت n،

$$(8)\quad f(n)<g(n)$$

این اثبات نامساوی (۷) را، برای حالتی کـــه $n=k$، برقرار می‌کند. دومرحله دیگر، حالتی است که $n<k$ یا $n>k$ که جداگانه مورد بحث قرار می‌گیرد.

حالت $n=k$. چون

$$g(n)-f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$$

$$=\frac{f(n)}{n}.$$

بنابراین، اتحاد ذیل حاصل می‌شود

$$(9)\quad g(n)-f(n)=\frac{f(n)}{n}.$$

$f(n)$ صعودی است، پس به‌ازای هر n، $\circ < ۲ \geqslant f(n)$.
بنابراین، نامساوی (۸) ثابت می‌شود.

حالت $k < n$. با توجه به اینکه f صعودی است و نامساوی (۸)،

$$f(n) < f(k) \quad \text{و} \quad f(k) < g(k)$$

بنابراین، $f(n) < f(k)$ و این همان اثبات نامساوی (۷) است.

حالت $k > n$. چون g نزولی است، پس

$$f(n) < g(n) < g(k)$$

اینک، حالت خاص نامساوی $f(n) < g(k)$، وقتی که $k=۱$، نامساوی $f(m) < g(۱)$ را نتیجه می‌دهد. چون $g(۱) = ۴$، پس به ازای هرعدد صحیح مثبت n، $f(n) < ۴$.
از طرفی بنابر (۹)،

$$\circ < g(n) - f(n) = \frac{f(n)}{n} < \frac{۴}{n}$$

$$(۱۰) \quad \circ < g(n) - f(n) < \frac{۴}{n}$$

نامساوی فوق نشان می‌دهد که به ازای هرعدد صحیح مثبت n، حاصل $g(n) - f(n)$ عددی مثبت است، و اگر n بقدر کافی بزرگ شود، مقدار آن از هرعدد حقیقی مثبتی کوچکتر می‌شود. چون $f(n)$ صعودی و $g(n)$ نزولی است و هریك ازجملات $f(n)$ از هر یك از جملات $g(n)$ کوچکتر است، پس با افزایش n، جملات این دو دنباله به عدد منحصر بفردی (مطابق شکل ۱) بهم نزدیك می‌گردد.

عدد منحصر بفرد با خاصیت فوق را عدد e می‌نامند.

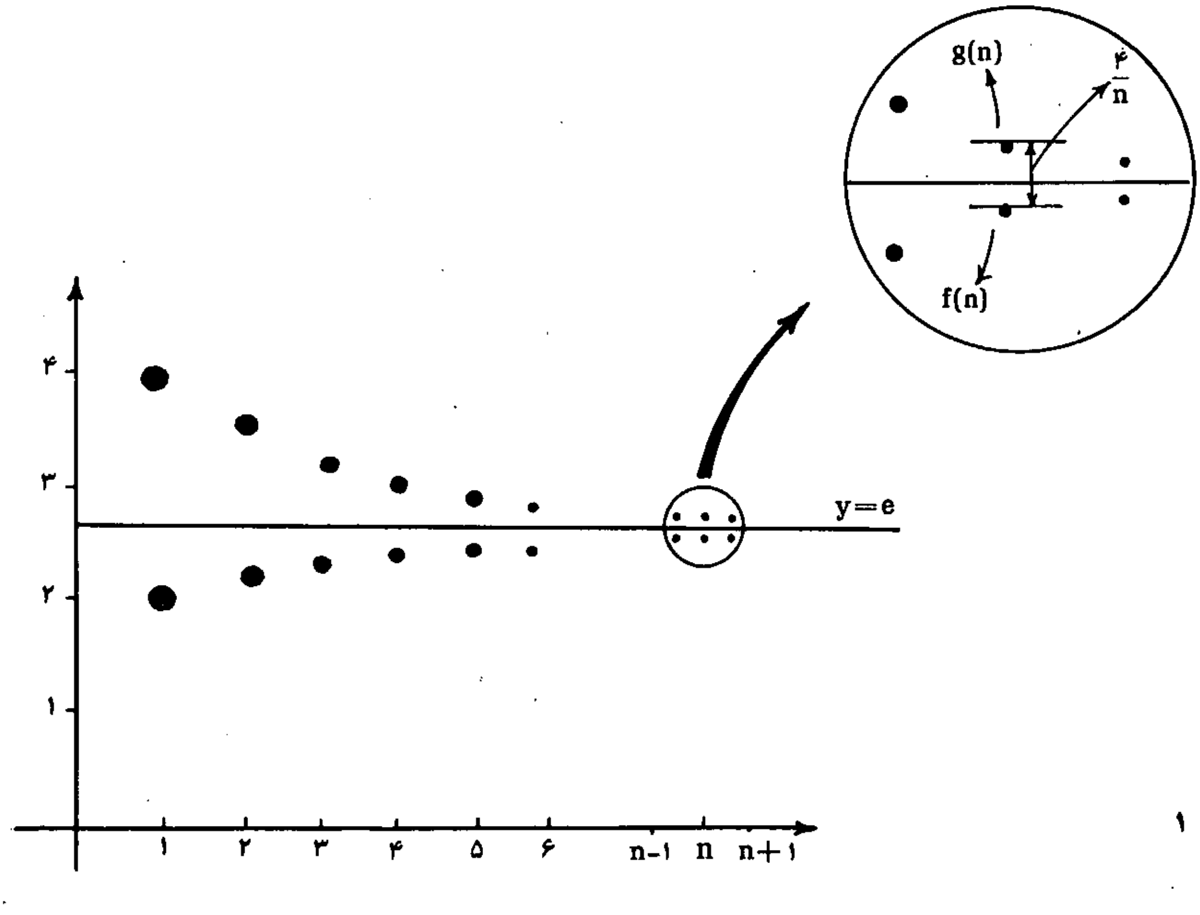
البته وجود چنین عددی بیشتر به مفاهیم آنالیز و خاصیت دستگاه اعداد حقیقی؛ بالاخص اصل تمامیت، بستگی دارد و این موضوعی است که کمتر به استفاده از آن علاقمندیم.

تا بحال وجود عدد e را ثابت کردیم و روش محاسبه تقریبی آن را نیز ارائه داده‌ایم. بنابراین، مطالب گفته شده را می‌توان به صورت ذیل خلاصه کرد.

۵۰۱ قضیه: فرض کنید که f و g همان دنباله‌هایی باشند که قبلاً تعریف شده‌اند. در این صورت،

(الف) f صعودی و g نزولی است.

(ب) به ازای هر دو عدد طبیعی n و k،



شکل ۱

$$0 < g(n)-f(n) < \frac{4}{n} \quad \text{و} \quad f(n) < g(k)$$

(پ) یك و تنها یك عدد حقیقی، مانند e، وجود دارد که به ازای هر n، $f(n) < e < g(n)$. به عبارت دیگر، e تنها عددی است که در نامساوی ذیل صدق می‌کند.

$$(11) \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

اینك از رابطه فوق مقدار تقریبی e را با هر تقریب دلخواه می‌توان محاسبه کرد، به عنوان مثال برای محاسبهٔ تقریبی e، تا چهار رقم اعشاری، به صورت ذیل عمل می‌کنیم؛

$$f(10^4) = 2/7181 \quad \text{و} \quad g(10^4) = 2/71840$$

بنابراین، مقدار تقریبی e، عددی بین این دو عدد است و با دقت سه رقم اعشاری، مقدار e برابر ۲/۷۱۸ است و تا هفت رقم اعشاری مقدار e چنین است:

$$e = 2/7182818$$

روش‌های مختلفی برای حفظ ارقام چنین عددی موجود است. ممکن است یك جمله ساده، یا یك ضرب‌المثل معروف، و یا یك بیت شعری موجود باشد که تعداد حروف آن متناظر ارقام عدد e باشد. البته جمله جالب و ساده‌ای که بتواند چنین عددی را تداعی کند به دست نیاورده‌ام. ولی، می‌توان با افراز کردن ارقام این عدد، به‌صورت ذیل، ارقام آن را بخاطر سپرد.

دو، هفتصد وهیجده ، دو، هشتصد وهیجده.

پانوشتها:

1) Leonhard Euler
2) Napier
3) Common Logarithms
4) Natural Logarithms
5) در مجله رشد آموزش ریاضی، سال دوم، شماره ۸، زمستان ۱۳۶۴، تحت عنوان «براهین دیگری در باب نامساوی واسطه هندسی و حسابی» چهار برهان برای اثبات این نامساوی ارائه گردیده است.

منبع:

۱ــ آشنایی با تاریخ ریاضیات، جلد دوم، هاورد و ایوز، ترجمه دکتر محمد قاسم وحیدی‌اصل، مرکز نشر دانشگاهی تهران، چاپ اول ۱۳۶۸.

بقیه از صفحه ۱۷

یادداشتها

1. Sources of error
2. Model
3. Data
4. Mistake
5. Scientific form
6. Chopping
7. D حرف اول Decimal به معنی «اعشاری» است.
8. S حرف اول Significant به معنی «بامعنا» است.
9. Rounding

مراجع

[1] جبه‌دار مارالانی، پرویز و نیکخواه بهرامی، منصور، آنالیز عددی و روشهای کامپیوتری (۱۳۶۰) مؤسسه انتشارات و چاپ دانشگاه تهران.

[2] بهفروز، غلامحسین و میرنیا، میرکمال، نظریه و کاربردهای آنالیز عددی (۱۳۶۴) مرکز نشر دانشگاهی.

[3] بابلیان، اسماعیل و میرنیا، میرکمال، نخستین‌گامها درآنالیز عددی (۱۳۶۶) مرکز نشر دانشگاهی.

[4] ریاضیات محاسباتی، جهاد دانشگاهی صنعتی شریف.

[5] بابلیان، اسماعیل و مالك‌نژاد، خسرو، محاسبات عددی (۱۳۶۶)، (۱۳۶۷)و(۱۳۶۹) مؤسسه تحقیقاتی وانتشاراتی نور.

[6] میرنیا، میرکمال و موسوی، میر رحیم، روشهای بهگزینی (۱۳۶۶) انتشارات میقات.

[7] خان‌محمدی هزاوه، علی‌اکبر، حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی (۱۳۶۷) نشرگستره.

[8] عالمزاده، علی‌اکبروبابلیان، اسماعیل و امیدوار، محمدرضا، آنالیز عددی (۱۳۶۸) انتشارات منصوری.

[9] رشدآموزش ریاضی شماره ۱۳ و ۱۴ صفحات ۳۴ تا ۴۲.

[10] مصاحب، غلامحسین، تئوری‌مقدماتی اعداد(۱۳۵۵)انتشارات کتابفروشی دهخدا.

[11] مصاحب، غلامحسین، آنالیزریاضی(۱۳۴۸)مؤسسه انتشارات انقلاب اسلامی (فرانکلین سابق).

[12] Hamming, R. Numerical methods for Scientists & engineers. (1962) Mc Graw Hill Book.

مباحثی در هندسه

تنظیم از: حسین غیور

هندسه اقلیدسی به نام اصول، نخستین دانش با روش اصل موضوعی است که در ۳۰۰ سال قبل از میلاد بوسیله اقلیدس تدوین و تألیف شده است. کتاب اصول که از بزرگترین کشفیات در تاریخ علم به شمار می‌آید شامل پنج اصل و هشت اصل متعارفی و تعدادی تعریف و قرارداد و قضایاست.

اصول پنجگانه عبارتند از:

۱ـ از دو نقطه تنها یك خط راست می‌گذرد.

۲ـ هر پاره‌خط را می‌توان از هر یك از دو طرف به اندازه پاره‌خط معلومی امتداد داد.

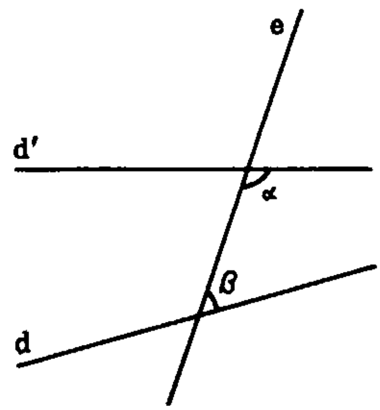
۳ـ به مرکز هر نقطه می‌توان دایره‌ای رسم کرد که شعاع آن مساوی پاره‌خط معلومی باشد.

۴ـ همه زاویه‌های قائمه قابل انطباق بر یکدیگرند.

۵ـ اگر خطی دو خط دیگر را قطع کند و با آنها دو زاویه بسازد چنانچه مجموعشان کمتر از دو قائمه باشد آنگاه که دو خط مفروض را از دو طرف امتداد دهیم در طرفی که زاویه‌های کوچکتر از دو قائمه واقع شده‌اند متقاطع می‌شوند.

در تلاش و کوششی که بعدها برای اثبات اصل پنجم به‌کار رفت، برای این اصل هم‌ارزهایی پیدا شده که یکی از آنها همان اصلی است که امروزه به جای اصل پنجم به کار می‌رود.

(۶ـ از نقطه واقع در خارج خط تنها یك خط می‌توان موازی با آن رسم کرد.)



تبصره ـ از دانشمندان ایرانی حکیم عمر خیام نیشابوری اولین کسی بود که برای اثبات اصل پنجم اقدام کرد. خیام در رساله (شرح ما اشکل من مصادر اقلیدس) هشت قضیه طرح می‌کند که قضیه هشتم توازی دوخط عمود بر یك خط است.

برای اثبات این قضیه تقاطع دو خط را از نظر فلسفی مردود می‌داند. دو قرن بعد دانشمند دیگر ایرانی خواجه نصیرالدین طوسی اثبات قضیه هشتم خیام را که بنیاد فلسفی داشت نپذیرفت و کوشید برای اثبات اصل پنجم فقط از چهار اصل اول استفاده کند. که بعدها برهان آن به وسیله دیگران رد شد.

شکل یکی از قضایایی را که خواجه نصیر برای اثبات اصل پنجم به کار برده درکتابهائی که در اروپا در باره پیدایش هندسه‌های غیر اقلیدسی طبع و چاپ شده به نام خود او دیده می‌شود. پی‌گیری اثبات اصل پنجم کتاب اصول، در اروپا که تازه از خواب قرون وسطائی بیدار شده بوده تا اوایل قرن بیستم ادامه پیدا کرد، و بالاخره منجر به پیدایش هندسه‌های نا اقلیدسی شد.

در این دوران اصول هیلبرت در بازسازی و تکمیل و تنقیح اصول و تعاریف کتاب اصول اقلیدسی به کار رفت که در تاریخ ریاضی اهمیت بسیار دارد، وآشنائی و برخورداری از آن برای هر ریاضی‌دان بویژه دبیران محترم ریاضی ضرورت دارد. (این اصول در سال ۱۳۲۵ هجری شمسی به همت استاد دکتر اسدالله آل‌بویه و مرحوم حسین هورفر تألیف ودرکتاب هندسه سال اول متوسطه درکتابهای درسی چاپ شد و هنوز سال تحصیلی تمام نشده بود که از برنامه حذف گردید.)

هندسه‌هائی که از آغاز تأسیس دارالفنون (۱۲۶۴ هـ . ق) تا به حال در کشور ما چاپ و انتشار یافته ترجمه کتبی است که بعداز نهضت علمی در مدارس اروپا تدریس می‌شده است. دراین کتابها درترسیمات هندسی که با پرگار وخط کش انجام می‌شود پرگار (فرو ریختنی) که در اصول اقلیدس به کار می‌رفته اصلاح شده و به صورت پرگارهای فعلی درآمده که به کار بردن آن از ترسیمات هندسی باعث سهولت و پیشرفت عمل شده است. کتاب اصول بعداز اقلیدس، باکشف مقاطع مخروطی در قطع مخروط دوار به وسیله آپولونیوس (۲۵۵ ق . م) و کارهای بزرگترین ریاضی‌دان عصرقدیم ارشمیدس (۲۱۲ ـ ۲۸۷ ق . م) درپیدایش، وتعیین دقیق محیط و مساحت دایره، و سطح و حجم کره و متفرعات آن و مساحت قطعه سهمی و حجم بیضوی و ... به وسعت و

نمای آن افزوده شد و تا قرن هفدهم نزدیک ۲۰ قرن دراوج قله اعتلا و عظمت دانش بشری درخشید. ازاین تاریخ به‌بعد است که باکشف عدد منفی در جبر پاره‌خطها و زوایا وگاهی مساحتها اندازه‌های جبری مثبت و منفی پیدا کردند، و هندسه مجدداً پیشرفت خود را ادامه داد. ودرآن تعریفها و قضایای جالب و جدیدی به عظمت سابق، پیدا شد و تبدیلات مهمی مانند تقارن محوری و مرکزی و انتقال و دوران و تجانس و همانندی و قطب و قطبی، و انعکاس ... و غیره پیدا شد که سه تبدیل اول به طور ناقص درکتاب اصول دیده می‌شود. در اوائل قرن نوزدهم به وسیله دانشمندان بزرگی چون گاوس و لوباچفسکی و ریمان دو هندسه که اصل پنجم آن مغایر اصل پنجم اقلیدس است کشف شد یکی هندسه ریمانی که توازی خطی راکه ازیك نقطه خارج خط مفروض رسم می‌شود باآن خط نفی می‌کند ودیگری توازی را با تعداد بیشمار می‌پذیرد که اولی هندسه ریمانی و دومی هندسه لوباچفسکی یا(هذلولوی) است. باکشف نسبت عام انیشتاین دانشمند بزرگ قرن بیستم، ثابت شد هندسه ریمانی در فضای عالم وجود دارد وهندسه اقلیدسی حدفاصل بین هندسه لوباچفسکی و ریمانی است.

یادآوری ۱- ترسیمات هندسی فقط به وسیله خط‌کش و پرگار انجام می‌گیرد.

یادآوری ۲- در تعریف بعضی اشکال هندسی مانند خط و صفحه و ... تعریف‌ها حذف شده است.

بنابراین خط وصفحه ازتعریف نشده‌ها می‌باشند یعنی تعریف ندارند.

یادآوری ۳- اصول متعارفی (بدیهیات) بنام اصول درآمده است یعنی کلمه متعارفی را باید ازآن حذف کرد.

علت این‌که این جانب حسین غیور بازنشسته دانشگاه تربیت معلم سخنرانی خود را در محضر همکاران محترم دبیران استان خوزستان و اعضای محترم اداره آموزش وپرورش آن استان درباره اصول هندسه آغاز کردم این است‌که:

بعداز چهل سال خدمت فرهنگی که بیست سال‌آن در دبیرستان‌ها و قریب ۲۰ سال دیگردر دانشسرای‌عالی ودانشگاه تربیت‌معلم صرف شدبه این نتیجه رسیدم که در درس هندسه چه در شهرستانها و چه در مرکز به اصول هندسه اهمیت داده نمی‌شود یعنی بنائی است‌که می‌خواهند بی پایه‌آن را به بالا برسانند،چون شفاهاً دلایل خود را در این باره‌که جنبه تجربی دارد به عرض دوستان رسانده‌ام با ذکر چند مثال این موضوع را خاتمه می‌دهم.

بسیاری از دانش‌آموزان ممتاز وحتی بعضی ازدبیران اوقات گرانبها وعزیزخود را صرف این می‌کنندکه بعضی از مسائل معروف لاینحل را حل‌کنند و کار بزرگی را انجام دهند در صورتی‌که با توجه به اصول هندسه ثابت می‌شود این‌گزاره‌که دانشمندان‌گفته‌اند (تثلیث زاویه محال است) خود چون قضیه‌ای در هندسه اقلیدسی است، بنابراین درست است.

در چهار سالی‌که در مجله رشد کار می‌کنم هر هفته ۳ تا ۴ نامه دارم. که در آنها برای اثبات تثلیث زاویه قلم‌فرسائی کرده‌اند درصورتیکه درمجله رشد شماره ۶ و ۵ آقای دکتر جمالی ازصفحه ۵۰ تا ۵۴ ثابت‌کرده است که‌تثلیث زاویه محال است. ومجدداً تکرارمی‌کنم درصورتیکه با اصول هندسه و پذیرفتن این‌که با پیشرفت ریاضی ثابت شده است‌که مسائل مزبور با اصول اقلیدس ناسازگار است وقابل حل‌نیست، واین خبری است راست و دروغ نمی‌باشد!

قسمت دوم سخنرانی بنده راجع‌به این موضوع بودکه در همه فصلهای هندسه بعدازاتمام هرفصل مسائل ساده‌ای‌که برای دانش‌آموزان متوسطی‌که درس را یاد گرفته‌اند قابل حل باشد بدهند وازآنها بخواهندکه خود سئوال را جواب دهند و اگر مسائل‌کتاب نامرتب و مشکل است مسئله‌های ساده‌ای طرح‌کنند و به دانش‌ـ آموزان بفهمانندکه مسئله وقتی مفید است که خود انسان حل‌کند نه از دیگران بپرسد. بعداز اتمام هر فصل درآخر کار می‌توان یك مسئله نمونه‌که تا حدی مشکل است پرسید و بعداز یك هفته حل‌آنرا از همه خواست‌که درس برای دانش‌آموزان قوی و پیشرفته نیز جالب باشد.

من درسالهای اول‌تدرسیم نصف ساعت را صرف این کار می‌کردم‌که ازشاگردان سه یا چهار سئوال ساده بپرسم و حل آنها را بخواهم. اگر دانش‌آموزان با این سبك و سیاق یکدوره هندسه بخوانند چنان قوی می‌شوندکه معلم می‌تواند حل مسائل مشکل خود را ازآنها بخواهد.

*** چگونه مسئله هندسه را حل‌کنیم.ـ**

این سئوالی است‌که اکثر دانش‌آموزان و معلمین جواب‌آن را می‌خواهند. جواب این سئوال چنین است. وقتی در تمام اصول هندسه‌به شرحی گذشت مسائل ساده و مناسب به وسیله متعلم حل شود و این عمل دو سه بار انجام بگیرد به طوری‌که صورت قضایا حفظ شود. اگرمسئله‌ای را که ازخارج بدون این‌که بدانیم مربوط به کدام‌فصل است ازما بپرسند باید ببینیم در شکل مسئله و مفروضات‌آن درکدام قضیه هندسه بکار رفته اگر این تشخیص درست باشد می‌توان در حل مسئله پیشرفت و اگر به قضیه دیگری نیازباشدآن راحل‌کرد.

بقیه در صفحه ۳۵

مسائل ویژه دانش‌آموزان سال اول و دوم

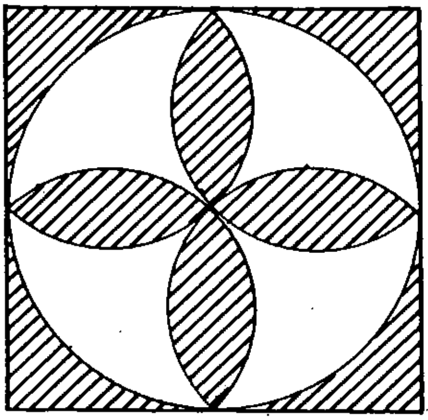
۱. در مثلث ABC میانه‌هـــای AK و CM را رسم می‌کنیم، اگر زاویه‌های $B\hat{A}K$ و $B\hat{C}M$ هر کدام برابر 30° باشند ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

راهنمایی: از چهارضلعی محاطی AMKC استفاده کرده ثابت کنید مثلث متساوی‌الساقین است.

۲. در شکل زیر ثابت کنید مساحت قسمت هاشور زده برابر مساحت قسمت هاشور نزده است.

مسائل ویژه دانش‌آموزان

تنظیم از: محمود نصیری



۳. ثابت کنید به ازاء هر $a \in R$ عبارت،

$$(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10$$

همواره مثبت است.

۴. اگر $a \geqslant 0$، $b \geqslant 0$، $c \geqslant 0$ و $d \geqslant 0$، آنگاه

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$$

راهنمائی: از نامساوی واسطه حسابی و هندسی بین دوعدد استفاده کنید.

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy} \quad ، \quad x \text{ و } y \geqslant 0$$

۵. نامعادله زیر را حل کنید،

$$\log_2^2 (x-1)^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 5$$

جواب:

$$\left(1,\ 1+\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\right) \cup (3,\ +\infty)$$

۶. اگر $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$، ثابت کنید

$$\alpha-\frac{\alpha^3}{4} < \sin\alpha$$

راهنمائی: ثابت کنید،

$$\alpha-\frac{\alpha^3}{4} < \alpha\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) < \sin\alpha$$

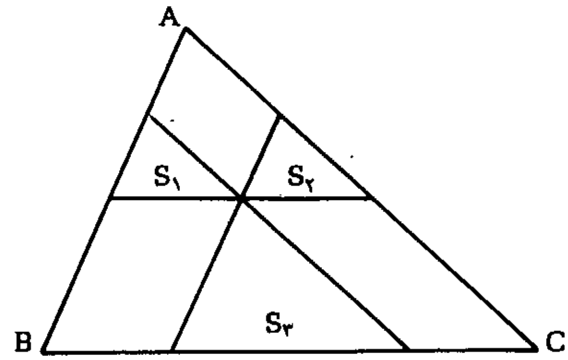
۷. به ازاء چه مقادیر a معادله زیر دو ریشه دارد؟

$$x^2-4x-2|x-a|+a+2=0$$

جواب:

$$a > \frac{7}{3} \quad \text{یا} \quad a < 2$$

۸. مطابق شکل زیر از نقطه O داخل مثلث ABC، سه خط به موازات اضلاع مثلث رسم می‌کنیم اگر مساحت هریك از



سه مثلث حاصل را به‌ترتیب به S_1، S_2 و S_3 و مساحت مثلث ABC را به S نشان دهیم ثابت کنید

$$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$$

فرستنده: محمدرضا یزدانی دانش‌آموز شیراز.

۹. در چهارضلعی محدب ABCD نقطه‌های P و Q به ترتیب وسطهای BC و CD می‌باشند. هرگاه خطوط AP و AQ قطر BD از چهارضلعی را به سه قسمت متساوی تقسیم کنند ثابت کنیدکه چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۱۰. سه زاویه تصاعد عددی تشکیل می‌دهند و سینوسهای آنها به تصاعد هندسی می‌باشند قدر نسبت تصاعد هندسی را پیدا کنید.

جواب: $q=\pm 1$

مسائل ویژه دانش‌آموزان سوم و چهارم

۱. مطلوب است محاسبه

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1^i+2^i+\cdots+9^i}{10^i}$$

سپس $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ را پیدا کنید.

فرستنده: حسین راعب همدان.

راهنمائی:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^i+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{10}\right)^i+\cdots+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{9}{10}\right)^i$$

۲. ثابت کنید

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2}=\frac{x}{2}$$

فرستنده: فریبرز ساجد تهران.

راهنمائی: رابطه $kx-1<[kx]\leqslant kx$ را به‌ازاء $k=1$ و ۲ و ... و n به کار ببرید و سپس از قضیه اصل فشار استفاده کنید.

۳. اگر h ارتفاع وارد بر وتر و r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویه باشند، ثابت کنید،

$$\sqrt{2}-1\leqslant\frac{r}{h}<\frac{1}{2}$$

فرستنده: افشین امینی دانشجو.

راهنمائی: اگر a وتر مثلث قائم‌الزاویه باشد ثابت کنید

$$b+c\leqslant a\sqrt{2}$$

بنابراین

$$a<b+c\leqslant a\sqrt{2}$$

۴. اگر a، b و c اعدادی صحیح باشند به طوری‌که

$$ab=c^n \quad \text{و} \quad (a,b)=1$$

آنگاه اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که

$$a=x^n \quad \text{و} \quad b=y^n$$

فرستنده: عباس موسوی‌نژاد دبیر ریاضی قم.

راهنمائی: فرض کنید $d=(a,c)$ و نتیجه بگیرید

$$d=\left(\frac{c}{d}\right)^n \quad \text{و} \quad a=d^n$$

۵. اگر

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ثابت کنید،

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+m}{m}=\binom{n+m+1}{n+1}$$

فرستنده: آرتا صدرزاده تهران.

راهنمائی: رابطه

$$\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}-\binom{n+k}{k-1}$$

را به ازاء $k=1$ و ۲ و ... و m به کار ببرید.

بقیه در صفحه ۳۷

هم‌ارزی در نامعادلات

تهیه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

چه در حل معادلات و چه در حل نامعادلات منظور پیدا کردن همه مقادیر مجهول است که در ازاءآنها، معادله یا نامعادله برقرار باشد. هریك از این مقادیرکه در معادله و یا نامعادله صدق می‌کنند، ریشه یا جواب‌آن معادله و یا نامعادله نامیده می‌شوند.

واضح است که این‌ریشه‌ها باید چنان باشند تا در ازاءآنها مقادیر دوطرف معادله، یا نامعادله قابل محاسبه گردند. می‌دانیم مجموعه مقادیری‌که در ازاءآنها هردو طرف معادله یا نامعادله معنی پیدا می‌کنند، دامنه معادله و یا نامعادله نام دارد. و ریشه‌های معادله یا نامعادله، جزء این دامنه است نه بالعکس. یعنی همه مقادیر دامنه ممکن است جواب معادله یا نامعادله نباشد. مثلاً در $\log_2 x > 1$، دامنه $x > 0$ است. $x = \frac{1}{2}$ در دامنه قرار دارد، اما جواب نامعادله نیست.

اگر در نامعادله $\log_2 x > \log_2 2$، از طرفین تساوی لگاریتمها را حذف‌کنیم خواهیم داشت

$$x > 2$$

یعنی وقتی پایه لگاریتم بزرگتراز واحد باشد، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.

(در این باره بیشتر صحبت خواهیم‌کرد.)

در حل معادلات و یا نامعادلات، با ساده‌کردن‌آنها، به معادلات یا نامعادلات ساده‌تری می‌رسیم. اما اغلب‌آنها، با معادلات و یا نامعادلات اصلی معادل نیستند. یعنی بعضی‌از مقادیرکه در دامنه تعریف نبودند، بعداز تغییر، در دامنه قرار می‌گیرند و یا برعکس. به عبارت دیگر در این تبدیلات، دامنه وسیع‌تر ویا تنگتر می‌گردد. بنابراین ممکن است دراثر اینگونه تغییرات، جوابهای خارجی وارد معادله یا نامعادله بشوند و یا بعضی ریشه‌ها حذف گردند.

اکنون نمونه‌هایی ازاشتباهاتی راکه معمولاً دانش‌آموزان مرتکب‌آن می‌شوند، نشان می‌دهیم و سپس راه پیشگیری از آنها را یادآور می‌شویم.

از معادله،

$$\log_3 x < 2 \qquad (1)$$

نتیجه می‌شود،

$$x < 9 \qquad (2)$$

اما همه مقادیر $x < 9$ در (۱) صدق نمی‌کند، زیرا مقادیر قابل قبول باید مثبت هم باشند. پس $0 < x < 9$.

به این ترتیب، در رسیدن از (۱) به (۲)، دامنه گسترش پیداکرده و برای نامعادله (۱)، جواب خارجی پیدا شده است. $(x \leqslant 0)$

بالعکس، اگر از (۲) به (۱) برسیم، معلوم می‌شودکه در ازاء لگاریتم‌گرفتن از طرفین (۲)، دامنه تنگتر شده و تمام ریشه‌های منفی نامعادله (۲) حذف می‌گردد.

باتوجه به این موضوع،که در این نوع تغییرات ما همیشه با ریشه‌های خارجی و یا حذف ریشه‌ها مواجه هستیم، بنظر می‌رسد همواره باید، جوابها را در معادله یا نامعادله امتحان کنیم. اما اگر اینکار در معادله هم به خاطر محدود بودن تعداد ریشه‌ها ممکن باشد، در نامعادله‌که تعداد جوابها بی‌شمارند عملی نیست. بنابراین، در حل نامعادلات، از عملیاتی‌که دامنه را تغییرمیدهند، باید پرهیز کرد. یا اگرضمن تبدیلات دامنه گسترش پیداکرد، بایدآن مقدار از دامنه راکه

گسترش پیدا کرده، کنار گذاشت و بخشی از آن را درنظر گرفت که دامنه نامعادله اصلی بوده است.

باید درنظر داشت ممکن است در این نوع تبدیلات، به نامعادلات غیر هم‌ارز (دو نامعادله را هم‌ارز می‌نامند که تنها ریشه‌های مشترك داشته باشند. نامعادلاتی که اصلاً جواب نداشته باشند هم، هم‌ارزمحسوب می‌شوند، مانند $|x| < 0$ و $\sqrt{x} < 0$.)

برسیم، بدون اینکه دامنه تغییر کرده باشد. مثلاً نامعادله زیر را درنظر بگیرید

$$x^2 < x \tag{۳}$$

از تقسیم طرفین نامعادله به x یك نامعادله غیر هم‌از بدست می‌آید.

$$x < 1 \tag{۴}$$

در (۳) همه مقادیر $x < 1$ صدق نمی‌کند، بلکه مقادیر قابل قبول عبارت است از:

$$0 < x < 1$$

باوجود این، دامنه هردو نامعادله اعداد حقیقی هستند. یعنی در این تبدیلات گرچه دامنه تغییر نکرده است، اما جواب خارجی برای (۳) پیدا شده است.

$$(x \leqslant 0)$$

اکنون اگر (۴) در در x ضرب کنیم، (۳) را خواهیم داشت که همه جوابهای منفی و صفر خود را از دست می‌دهد.

(می‌دانیم که وقتی طرفین نامعادله را بر $x \neq 0$ تقسیم می‌کنند باید علامت آن‌را درنظر داشت. اما همانطور که قبلاً اشاره شد، بعضی‌از دانش‌آموزان با نادیده‌گرفتن آن دچار اشتباه فاحش می‌شوند و ما خواستیم پی‌آمد چنین اشتباهاتی را نشان بدهیم.)

از آنچه که در بالا گفته شد، به اهمیت نامساویهای هم‌ارز، و نامعادلات هم‌ارز پی می‌بریم. و در زیر به بعضی‌از نامساویهای هم‌ارزکه در حل نامعادلات توانی و لگاریتمی کاربرد زیادی دارند، اشاره می‌کنیم.

لم - اگر $a > 1$، آنگاه

$$a^x > 1 \iff x > 0 \tag{آ}$$

$$a^x < 1 \iff x < 0 \tag{ب}$$

این لم را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۱- اگر $a > 1$، آنگاه

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \text{و} \quad f(x) > g(x)$$

هم‌ارز یکدیگرند به عبارت دیگر،

اگر $a > 1$، آنگاه

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ اگر و تنها اگر $f(x) > g(x)$

اثبات. فرض‌کنیم $f(x) > g(x)$ ثابت می‌کنیم

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

یا

$$a^{f(x)} - a^{g(x)} > 0$$

اگر

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

آنگاه $h(x) > 0$، داریم

$$a^{g(x)+h(x)} - a^{g(x)} > 0$$

$$a^{g(x)}(a^{h(x)} - 1) > 0$$

$a^{g(x)}$ به ازاء جمیع مقادیر x مثبت است و داخل پرانتز هم بنابر لم بالا مثبت می‌باشد. پس قضیه ثابت شده است.

بالعکس، اگر $a^{f(x)} > a^{g(x)}$، ثابت می‌کنیم

$$f(x) > g(x)$$

به فرض داریم،

$$a^{f(x)} - a^{g(x)} > 0$$

یا

$$a^{f(x)}(1 - a^{g(x)-f(x)}) > 0$$

$a^{f(x)}$ همواره مثبت است. پس باید ثابت کنیم

$$a^{g(x)-f(x)} < 1 \quad \text{یا} \quad 1 - a^{g(x)-f(x)} > 0$$

و این بنابر لم بالا درست است.

قضیه ۲- اگر $0 < a < 1$ آنگاه،

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \text{و} \quad f(x) < g(a)$$

هم‌ارز یکدیگرند. به عبارت دیگر، اگر $0 < a < 1$، آنگاه، $a^{f(x)} > a^{g(x)}$، اگر و تنها اگر $f(x) < g(x)$.

اثبات. اگر

$$b = \frac{1}{a} > 1 \quad \text{و} \quad f(x) < g(x)$$

باید ثابت کنیم،

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{f(x)} > \left(\frac{1}{b}\right)^{g(x)}$$

یا

$$b^{f(x)} < b^{g(x)}$$

چون $1 < b$، پس بنابر قضیه ۱، برقرار است.
عکس قضیه را هم می‌توان از آنجا نتیجه گرفت.

مثال ۱- نامعادله را حل کنید،

$$\sqrt[3]{2^{\frac{3x-1}{x-1}}} < 8^{\frac{3-x}{3x-7}} \qquad (1)$$

نامعادله (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$2^{\frac{3x-1}{3(x-1)}} < 2^{\frac{3(x-3)}{3x-7}}$$

بنابر قضیه ۱، نامعادله (۱) هم‌ارز است با

$$\frac{3x-1}{3(x-1)} < \frac{3(x-3)}{3x-7} \qquad (2)$$

(نامعادلات (۱) و (۲) هم جهت هستند.)
از نامعادله (۲) نتیجه می‌شود،

$$\frac{3x-1}{3x-3} - \frac{3x-9}{3x-7} < 0$$

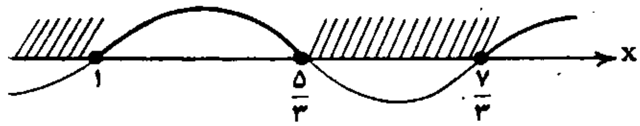
یا

$$\frac{12x-20}{(3x-3)(3x-7)} < 0$$

$$\frac{x-\frac{5}{3}}{(x-1)\left(x-\frac{7}{3}\right)} < 0$$

نامعادله اخیر را به روش فواصل حل می‌کنیم. مجموعه جوابهای نامعادله (۱) به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$(-\infty, 1) \cup \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$$



(جوابهای صورت و مخرج را به ترتیب صعودی روی محور اعداد منتقل می‌کنیم و در هر فاصله عدد دلخواهی را به جای x قرار میدهیم تا علامت کسر (در این مسأله) تعیین بشود. سپس جواب مورد نظر را انتخاب و بقیه فواصل را کنار می‌گذاریم. شکل بالا را نگاه کنید.)

مثال ۲- نامعادله را حل کنید

$$(0/04)^{5x-x^2-8} < 625 \qquad (3)$$

حل - چون $(0/04)^{-2} = 625$ نامعادله مفروض را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$(0/04)^{5x-x^2-8} < (0/04)^{-2}$$

بنابر عکس قضیه ۱، نامعادله (۳) هم‌ارز است با

$$5x - x^2 - 8 > -2 \qquad (4)$$

(نامعادلات (۲) و (۴) مختلف‌الجهت هستند.)
با حل نامعادله (۴) مجموعه جواب نامعادله (۳) را پیدا می‌کنیم که برابر است با $(2, 3)$.

مثال ۳- نامعادله را حل کنید

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2} \qquad (5)$$

حل - داریم،

$$2^{x+2}(1-2-2^2) > 5^{x+2}(5^{-1}-1)$$

$$2^{x+2}(-5) > 5^{x+2}\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$\frac{2^{x+2}}{5^{x+2}} < \frac{4}{25}$$

یا

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} < \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

نامعادله اخیر، هم‌ارز است با،

$$x+2 > 2$$

و از آنجا مجموعه جواب نامعادله (۵) چنین خواهد بود، $(0, +\infty)$.

مثال ۴- نامعادله را حل کنید

$$\frac{1}{(0/5)^x - 1} - \frac{1}{1-(0/5)^{x+1}} \geqslant 0$$

حل - با قرار دادن $(0/5)^x = y$ نامعادله بصورت زیر نوشته می‌شود،

$$\frac{1}{y-1} - \frac{1}{1-0/5y} \geqslant 0$$

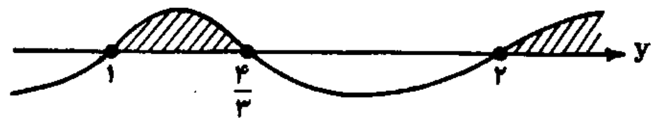
پس از تبدیلات لازم،

$$\frac{y-\frac{4}{3}}{(y-1)(y-2)} \geqslant 0$$

با استفاده از روش فواصل خواهیم داشت،

$$1 < y \leqslant \frac{4}{3}$$

$$y > 2$$



به این ترتیب حل نامعادله مفروض به حل دستگاه نامعادلات زیر منجر می‌شود،

$$1 < (0.5)^x \leqslant \frac{4}{3} \ ، \ (0.5)^x > 2$$

یا

$$(0.5)^0 < (0.5)^x \leqslant (0.5)^{\log_{0.5}\frac{4}{3}}$$

و

$$(0.5)^x > (0.5)^{-1}$$

ازآخرین نامعادلات نتیجه می‌شود

$$(-\infty\ ,\ -1) \cup \left[\log_{0.5}\frac{4}{3}\ ,\ 0\right)$$

که جواب نامعادله مفروض است.

مثال ۵- نامعادله را حل کنید،

$$8^x + 18^x - 2 \times 27^x > 0 \qquad (۶)$$

حل ــ نامعادله (۶) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$(2^x)^3 + 2^x(3^x)^2 - 2(3^x)^3 > 0$$

با قرار دادن $u = 2^x$ و $v = 3^x$ یك نامعادله درجه سوم همگن به دست می‌آید،

$$u^3 + uv^2 - 2v^3 > 0 \qquad (۷)$$

چون $v = 3^x$، داریم $v > 0$ بنابراین با تقسیم طرفین (۷) بر v^3 (با نگهداشتن علامت (۷)) یك نامعادله هم‌ارز به دست می‌آوریم،

$$\left(\frac{u}{v}\right)^3 + \frac{u}{v} - 2 > 0$$

با قرار دادن $z = \frac{u}{v}$ خواهیم داشت

$$z^3 + z - 2 > 0$$

$$(z-1)(z^2+z+2) > 0$$

ازآنجا $z > 1$.

پس حل مسأله، به حل نامعادله زیر منجر می‌شود،

$$\frac{2^x}{3^x} > 1$$

یا

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

از نامعادلهٔ اخیر، جواب نامعادله (۶) به دست می‌آید: $(-\infty\ ,\ 0)$.

مثال ۶- نامعادله را حل کنید

$$(x^2+x+1)^x < 1 \qquad (۸)$$

چون مبین سه جمله‌ای x^2+x+1 منفی و ضریب x^2 مثبت است، بنابراین x^2+x+1 همواره مثبت خواهد بود. سمت راست نامعادله (۸) را می‌توان به صورت $(x^2+x+1)^0$ نشان داد. پس نامعادله (۸) چنین نوشته می‌شود

$$(x^2+x+1)^x < (x^2+x+1)^0 \qquad (۹)$$

نه قضیه ۱ و نه عکس آن، در اینجا کارساز نیستند، زیرا با دانستن اینکه $x^2+x+1 > 0$، نمی‌توان دانست آیا x^2+x+1 بیشتر از واحد است و یا کمتر. به ازاء $x^2+x+1 > 1$ خود قضیه ۱ و به‌ازاء $x^2+x+1 < 1$ عکس آن را می‌توان در اینجا بکار برد.

پس، دو حالت اتفاق می‌افتد:

$$x^2+x+1 > 1 \quad \text{یا} \quad x^2+x+1 < 1$$

بنابراین نامعادله (۹) هم‌ارز است با دستگاههای زیر،

$$\begin{cases} x^2+x+1 > 1 \\ x < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+x+1 < 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

یا،

$$\begin{cases} x(x+1) > 0 \\ x < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x+1) < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

دستگاه اول جواب ندارد. از دستگاه دوم نتیجه می‌شود، $(-\infty\ ,\ -1)$ که جواب نامعادله (۸) است.

* * *

قضیه ۳- اگر $a > 1$، $f(x) > 0$ و $g(x) > 0$،

آنگاه $f(x) > g(x)$ و $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ هم‌ارز یکدیگرند به عبارت دیگر،

اگر $a > 1$، $f(x) > 0$ و $g(x) > 0$، آنگاه $f(x) > g(x)$ اگر و تنها اگر $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

اثبات ـ می‌دانیم

$$a^{\log_a N} = N$$

چون $a > 1$ پس بنابر قضیه ۱، هم‌ارز حکم،

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

را به صورت زیر می‌نویسیم

$$a^{\log_a f(x)} > a^{\log_a g(x)} \qquad (A)$$

یا

$$f(x) > g(x)$$

که این نامساوی بنا به فرض داده شده است.

عکس قضیه را می‌توان هم از (A) نتیجه گرفت.

قضیه ۴ـ اگر $0 < a < 1$، $f(x) > 0$ و $g(x) > 0$، آنگاه $f(x) > g(x)$ و $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ هم‌ارز یکدیگرند. به عبارت دیگر، اگر $0 < a < 1$، $f(x) > 0$ و $g(x) > 0$، آنگاه $f(x) > g(x)$، اگر و تنها اگر $\log_a f(x) < \log_a g(x)$.

اثبات ـ چون $0 < a < 1$ بنابر قضیه ۲، هم‌ارز حکم $\log_a f(x) < \log_a g(x)$، چنین نوشته می‌شود

$$a^{\log_a f(x)} > a^{\log_a g(x)} \qquad (B)$$

از آنجا،

$$f(x) > g(x)$$

و این نامساوی به فرض برقرار است. از (B) می‌توان عکس قضیه را هم نتیجه گرفت.

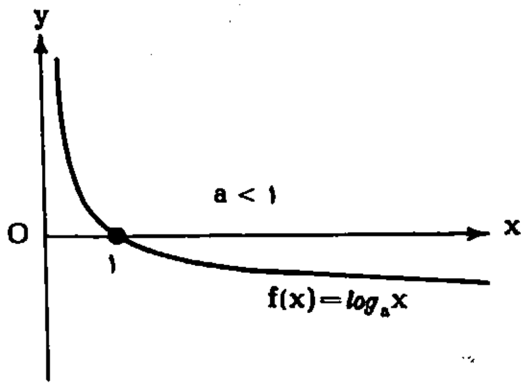
قضیه‌های ۳ و ۴ را می‌توان با دستگاههای زیر هم، نمایش داد،

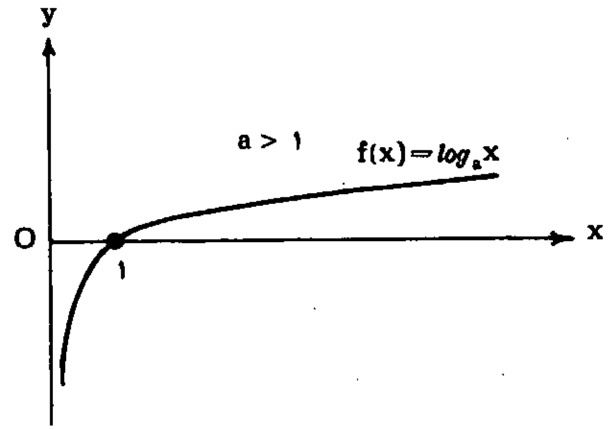
$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \qquad (1)$$

هم‌ارز است با:

$$\text{اگر } a > 1 \qquad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \qquad (2)$$

$$\text{اگر } 0 < a < 1 \qquad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \qquad (3)$$





یادآوری ـ اگر $a > 1$، نامعادله (۱) وآخرین نامعادله دستگاه (۲) هم‌جهت هستند.

اگر $0 < a < 1$ نامعادله (۱) وآخرین نامعادله (۳) مختلف‌الجهت هستند.

مثال ۱ـ نامعادله را حل کنید:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \leqslant -1 \qquad (4)$$

چون $-1 = \log_{\frac{1}{2}} 2$، نامعادله (۴) بصورت زیر نوشته می‌شود،

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 2 \qquad (5)$$

پایه لگاریتم $a = \frac{1}{2}$، یعنی $0 < a < 1$ و در نتیجه بنابر قضیه ۴ هم‌ارز نامعادله (۵) را به صورت دستگاه زیر

می‌نویسیم،

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11} > 0 \\[2mm] \dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11} \geq 2 \end{cases}$$

دستگاه حاصل، هم‌ارز است با،

$$\frac{2x^2-4x-6}{4x-11} \geq 2$$

که ازآنجا جواب نامعادله (۴) برابر می‌شود با،

$$[2,\ 2/75) \cup [4,\ +\infty)$$

مثال ۲- نامعادله را حل کنید

$$\log_2 \frac{4}{x+3} > \log_2(2-x)$$

حل ـ بنابر قضیه ۱، نامعادله مفروض هم‌ارز دستگاه زیر است.

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x+3} > 0 \\[2mm] 2-x > 0 \\[2mm] \dfrac{4}{x+3} > 2-x \end{cases}$$

ازآنجا،

$$\begin{cases} -3 < x < 2 \\[2mm] \dfrac{(x+2)(x-1)}{x+3} > 0 \end{cases}$$

سرانجام جواب نامعادله چنین خواهد بود،

$$(-3,\ -2) \cup (1,\ 2)$$

مثال ۳- نامعادله را حل کنید

$$\log_{0/2}(x^3+8) - 0/5\log_{0/2}(x^2+4x+4) \leq \log_{0/2}(x+58) \qquad (6)$$

حل ـ نامعادله (۶) هم‌ارز دستگاه زیر است،

$$\begin{cases} x^3+8 > 0 \\ x^2+4x+4 > 0 \\ x+58 > 0 \\ \log_{0/2}(x^3+8) - 0/5\log_{0/2}(x+2)^2 \leq \log_{0/2}(x+58) \end{cases}$$

و سرانجام

$$\begin{cases} x > -2 \\ x_1 \neq -2 \\ x > -58 \\ \log_{0/2}(x^3+8) - \log_{0/2}\sqrt{(x+2)^2} \leq \log_{0/2}(x+58) \end{cases}$$

ازآنجا

$$\begin{cases} x > -2 \\[2mm] \log_{0/2}\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{|x+2|} \leq \log_{0/2}(x+58) \end{cases}$$

چون، $x > -2$، داریم،

$$|x+2| = x+2$$

و

$$\begin{cases} x > -2 \\ \log_{0/2}(x^2-2x+4) \leq \log_{0/2}(x+58) \end{cases} \qquad (7)$$

بالاخره با استفاده از قضیه ۴، هم‌ارز نامعادله دوم دستگاه (۷) را هم می‌نویسیم

$$\begin{cases} x > -2 \\ x^2-2x+4 \geq x+58 \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} x > -2 \\ x^2-3x-54 \geq 0 \end{cases}$$

ازآنجا جواب نامعادله (۶) چنین می‌شود،

$$[9,\ +\infty)$$

مثال ۴- نامعادله را حل کنید

$$\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x) \qquad (8)$$

حل ـ هیچ‌یك از قضایای ۳ و ۴ در اینجا کارساز نیستند. زیرا نمی‌دانیم $(x-2)$ کوچکتر و یا بزرگتر از واحد است.

اگر $x-2 > 1$، آنگاه از قضیه ۳ استفاده می‌کنیم و اگر $0 < x-2 < 1$ از قضیه ۴. بنابراین دو حالت درنظر می‌گیریم.

۱) $x-2 > 1$

۲) $0 < x-2 < 1$

پس حل مسأله، منجر به حل دستگاههای زیر می‌شود،

$$\begin{cases} x-2>1 \\ 2x-3>0 \\ 24-6x>0 \\ 2x-3>24-6x \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} 0<x-2<1 \\ 2x-3>0 \\ 24-6x>0 \\ 2x-3<24-6x \end{cases}$$

از دستگاه اول داریم، $\frac{27}{8}<x<4$ و از دستگاه دوم، $2<x<3$ پس جواب نامعادله (۸) عبارت است از،

$$(2,\ 3)\cup\left(\frac{27}{8},\ 4\right)$$

مثال ۵- نامعادله را حل کنید

$$\log_2^2(x-1)^2-\log_{0/5}(x-1)>5 \qquad (9)$$

حل ـ چون

$$\log_2(x-1)^2=2\log_2|x-1|$$

و

$$\log_{0/5}(x-1)=\frac{\log_2(x-1)}{\log_2 0/5}=-\log_2(x-1)$$

پس نامعادله (۹) به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$4\log_2^2|x-1|+\log_2(x-1)>5 \qquad (10)$$

با قرار دادن

$$y=\log_2(x-1)$$

و ازآنجاکه $x-1>0$ پس

$$|x-1|=x-1$$

در نتیجه نامعادله (۱۰) چنین نوشته می‌شود،

$$4y^2+y-5>0$$

$$y>1 \quad \text{یا} \quad y<-\frac{5}{4}$$

حل مسأله منجر به حل دستگاه زیر می‌شود

$$\log_2(x-1)<-\frac{5}{4} \quad ، \quad \log_2(x-1)>1$$

یا

$$(11)\begin{cases} \log_2(x-1)<\log_2 2^{-\frac{5}{4}} \\ \text{و} \\ \log_2(x-1)>\log_2 2 \end{cases}$$

از معادله اول دستگاه (۱۱) داریم

$$0<x-1<2^{-\frac{5}{4}}$$

در نتیجه

$$1<x<1+\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$$

از معادله دوم دستگاه (۱۱) نتیجه می‌شود

$$x-1>2 \quad \text{یا} \quad x>3$$

پس جواب معادله (۹) چنین خواهد بود

$$\left(1,\ 1+\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\right)\cup(3,\ +\infty)$$

* * *

در پایان یادآوری می‌کنیم که با استفاده از قضایای گذشته و فرمول اصلی لگاریتم

$$a^{\log_a N}=N$$

می‌توان نتایج زیر را هم نوشت:

اگر $a>1$، آنگاه $\log_a x<\alpha$ اگر و تنها اگر $0<x<a^\alpha$.

اگر $a>1$، آنگاه $\log_a x>\alpha$ اگر و تنها اگر $x>a^\alpha$.

اگر $0<a<1$، آنگاه $\log_a x<\alpha$ اگر و تنها اگر $x>a^\alpha$.

اگر $0<a<1$، آنگاه $\log_a x>\alpha$ اگر و تنها اگر $0<x<a^\alpha$.

منابع:

و. و. زورین، بازآموزی ریاضیات.

گ. دوروفیف، م. روتاروف، ن. روزوف، ریاضیات مقدماتی (انتشارات میر ۱۹۷۳ و ۱۹۸۸).

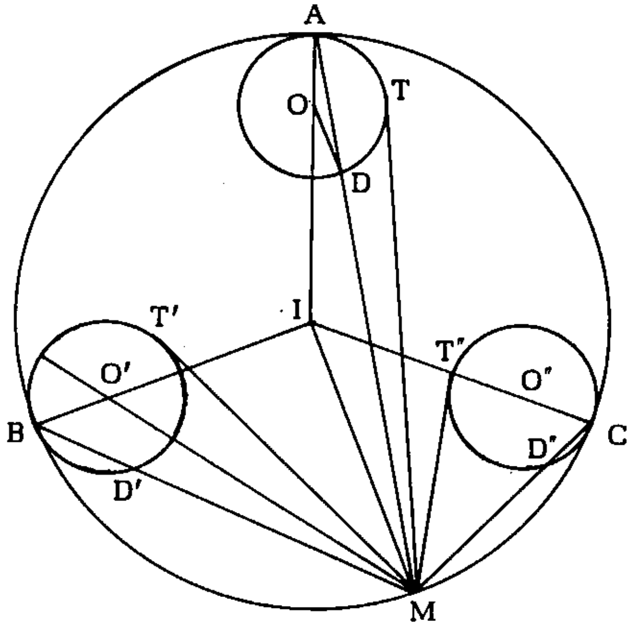
و. لیوینتکو، آ.مورکـوفسکی، جبر و مثلثات (انتشارات میر ۱۹۸۷).

بقیه از صفحه ۲۵

در بعضی از مسائل که مشکل باشد به قضایای دیگر نیاز داریم و باید این عمل تکرار شود. بغیر از قضایا که باید با تکرار در اثبات آنها صورت آنهـا را از حفظ باشیم بعضی از احکام و مسائل اصلی هستند که در هندسه‌هائی که از طرف استادان فن نوشته شد. درمتن هندسه (نه در تمرینات) مطرح شده است که باید آنها را نیز به‌خاطر بسپاریم. بنده در سخنرانی خود مسئله‌ای را مطرح کردم که از من پرسیده بودند و با این روش آن را حل کرده بودم. صورت آن مسئله را می‌نویسم. و آنرا با استفاده از، رهنمودهای جالب ومفید وممتع استاد دکتر امیدعلی کـرم‌زاده در سخنرانی در تالار باشکوه اداره کل آموزش و پرورش استان خوزستان برای دبیران که بنده یکی از آنها بودم ایراد فرمودند.

مسئله ـ سه دایره با شعاع‌هـای برابر دو به دو با هم مماس خارجند و هر سه در دایره‌ای محاط و بـا آن مماسند، مفروض است. نقطه‌هـای تماس سه دایره مفروض محیط آن را بـه سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند از نقطه مفروض روی دایرهٔ بزرگتر سه مماس به سه دایرهٔ مساوی رسم می‌کنیم ثابت کنید اندازه یـکی از این مماسهـا مساوی مجموع اندازه‌های دو مماس دیگر است.

من برای حل این مسئله که باید ثابت کنم $MT=MT'+MT''$ فکر کـردم چون دایره‌هـای کـوچك محاط در دایره بزرگ و با آن در A و B و C مماسند. و چون سه دایره کوچك دو بـه دو با هم مماس خارجند بـه‌سادگی ثابت می‌شود A و B و C دایره را به سه کمان مساوی تقسیم می‌کنند.



ابتدا بـا استفاده از قضیه بطلـمیوس ثابت می‌شود که

$$MA=MB+MC$$

(در چهارضلعی محاطی ABMC قضیه بطلمیوس را بنویسید.

$$AM \cdot BC=AB \cdot MC+AC \cdot MB$$

و

$$(۱)\quad MA=MB+MC$$

چون دایرهٔ بزرگ با هریك از دایره‌های کوچك مماس داخل است، هر دایرهٔ کوچك یا بزرگ متجانس یکدیگرنـد در تجانس بـه مرکز نقطهٔ تماس و نسبت $\frac{R}{R-r}$ در دو مثلث AOD و AIM چـون OD موازی با IM است.

$$\frac{MA}{MD}=\frac{IA}{IO}=\frac{R}{R-r} \Longrightarrow$$

$$MD=\frac{R-r}{R}MA$$

$$MT^{2}=MA \cdot MD=MA\,\frac{R-r}{R}MA=\frac{R-r}{R}MA^{2}$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود

$$MT=\sqrt{\frac{R-r}{R}}\,MA$$

$$MT'=\sqrt{\frac{R-r}{R}}\,MB$$

و

$$MT''=\sqrt{\frac{R-r}{R}}\,MC$$

ازسه تساوی اخیر و تساوی (۱) را نتیجه می‌گیریم

$$MT=MT'+MT''$$

این مسئله‌ای بود که چند سال قبل اثبات کرده بودم و همانطور که قبلاً[۱] اشاره شد، این جانب بـا استفاده از بیانـات دکتر کرم‌زاده مسئله را به این نحو که در شکل مشاهده می‌کنید تعمیم دادم کـه سه دایرهٔ با شعاع‌های مساوی داخـل دایرهٔ بزرگتر ومماس با آن، با هم هروضعی داشته باشند (مماس‌یا متقاطع یا متخارج) مانعی ندارد.

بقیه از صفحه ۳

می‌گردید. دستهٔ اول که سخنرانیهای اصلی کنفرانس را تشکیل می‌داد در سالن شهید شریعتی دانشکده علوم پزشکی تشکیل می‌شد.

سخنرانیهای آموزش ریاضی درسالن دانشکده علوم برگزار می‌گردید. در این سالن بیش‌از چهارصد نفر دبیر که ۱۲۵ نفر ازسراسرکشور و ۳۰۰ نفراز استان اصفهان بود حضورمی‌یافتند تنظیم برنامه‌های سخنرانی دبیران باکوشش دفتر تحقیقات و همکاری انجمن ریاضی ایران وکمیته برگزاری بیست‌ویکمین کنفرانس ریاضی تنظیم وانجام می‌شد. آقایان دکتر بیژن‌زاده ـ دکتر کرمزاده ـ دکتر رضوی ـ دکتر احمدی، دکتر تومانیان، دکتر هدایتی ومهندس باقری با سخنرانیهای جالب وآموزنده بر اطلاعات علمی دبیران افزودند.

دو میزگرد با حضور دبیران و عده‌ای از اعضاء شورای برنامه ریزی ریاضی دفتر تحقیقات تشکیل گردید و جزئیات ریز مواد ریاضی تصویب شده درشورای ریاضی (غیراز جبر) مورد بررسی قرارگرفت البته ریز مواد قبلاً تکثیر شده و در اختیار دبیران محترم قرار گرفته بود. در میزگرد دوم مشکلات جاری آموزش ریاضی وکتابها بررسی گردید و از دبیران خواسته شدبا بیان جنبه‌های ضعف وقوت کتابهای ریاضی فعلی پیشنهاداتی برای بهبود تألیف کتب جدید ریاضی ارائه دهند ویا بعداً به دفترتحقیقات ارسال دارند. دراین میزگرد مسائل مربوط به المپیاد ریاضی نیز مطرح و پاسخ داده شد. در کنفرانس ریاضی از مفید بودن مجلات رشد به ویژه رشد آموزش ریاضی بحث و اظهار نظر شدکه رشد ریاضی کمك مؤثری در ارتقاء سطح دانش ریاضی دبیران و دانش‌آموزان کشور دارد.

پیشنهاد شد قبل‌از شروع تألیف، ریزمواد تهیه شده در شورای ریاضی به سراسرکشور ارسال و یکی دو سمینار دیگر نظیرسمینار و میزگردهای اصفهان تشکیل گردد تا مؤلفین آینده بیشتر در جریان آموزش ریاضی در دبیرستانها قرار گیرند همچنین پیشنهاد شد قبل‌از تولید و توزیع انبوه کتابهای جدید مثلاً یکسال جلوتر، کتابهای جدید به تعداد دبیران ریاضی کشور تکثیر و برای اظهار نظر برای آنها فرستاده شود و ازآنها درخواست گردد تا نظرات خود را به تهران ارسال دارند تا در تجدید نظر نهایی ازآنها استفاده شود و اینکار در حقیقت بجای تشکیل کلاسهای آزمایشی انجام گردد.

دراینجا جا دارد از برادران دکتر جعفر زعفرانی دبیر محترم انجمن ریاضی و دکتر سید محمود خاتون‌آبادی رئیس کمیته اجرائی کنفرانس که در برگزاری کنفرانس آموزشی دبیران نهایت همکاری‌ومساعدت نمودند سپاسگزاری بعمل آید.

با توجه به گسترش مسائل تحقیقی‌آموزشی ریاضیات بسیار بجاست که کنفرانس سالانه آموزش ریاضیات با برنامه ریزی قبلی با همکاری دفتر تحقیقات و انجمن ریاضی ایران همراه با کنفرانس ریاضی ایران برگزار و مسائل پیشرفت تحصیلی در زمینه ریاضیات را از قبل‌از دبستان تا دانشگاه مورد بررسی قرار دهد. درعصر روز سوم میزگردی تحت عنوان بیست سال فعالیت انجمن ریاضی ایران یا بررسی ریاضیات ایران در ۲۰ سال گذشته با شرکت آقایان دکتر رجبعلی‌زاده ـ دکتر زارع نهندی ـ دکتر امیدعلی کرمزاده ـ دکتر بهبودیان ـ دکتر رجب‌زاده مقدم و دکتر جعفر زعفرانی تشکیل گردید.

ابتدا آقای دکتر بهبودیان آماری ازتعداد ریاضیدانان کشور ارائه وپیرامون تهیه کتابی که حاوی کلیه مشخصات ریاضیدانان کشور است سخنانی ایراد داشتند. البته رقم در حدود ۱۲۰ ریاضیدان مقیم کشورکه دارای درجه دکترای ریاضی هستند می‌باشدگو اینکه رقم خوشحال‌کننده است ولی فی‌الواقع با توجه به گسترش شاخه‌های مختلف این علم، این رقم اندك می‌نماید. متاسفانه چند ده برابر این تعداد ریاضیدان ایرانی در سایرکشورها به تحقیق و تدریس اشتغال داردکه آمار دقیق آن در دست نیست.

مسائل برنامه ریزی دروس رشته ریاضی درسطح کارشناسی توسط آقای دکتر قاسمی استاد ریاضی دانشگاه تربیت‌معلم گزارش شد، این برنامه ریزیهاکه با شرکت اساتید ریاضی در دورهٔ تعطیلی موقت دانشگاهها و شرکت فعال انجمن به سازمان رسید در مجموع برنامه‌ای موفق بوده است و وضع ناهمگون برنامه‌های ریاضی را در قبل از پیروزی انقلاب

دگرگون و این برنامه‌ها را با محتوای عمیق‌تر تصویب و به اجرا درآمد.

مسائل مربوط بـه برنامه‌ریزیهای ریاضی پیش دانشگاهی قرار بود توسط آقای دکتر کرمزاده استاد ریاضی دانشگاه شهید چمران انجام گردد. ولـی ایشان تنگناهای دوره‌های آموزشی در سطـح کارشناسی و کارشناسی ارشد و تنزل کیفیت و کمیت آموزش ریاضی را بخصوص در سنوات اخیر مورد ارزیابی و انتقاد قرار دادند.

آقای دکتر زارع‌نهندی استاد ریـاضی دانشگـاه تهران پیرامون برنامه مسابقات المپیاد ریاضی تـوضیحاتی دادند و اظهار داشتند که برگزاری این مسابقات سهم بسیار مهمی در گرایش بیشتر دانش‌آموزان مستعد به‌این رشته درسالهای اخیر شده است و از سازمان پژوهشی و برنامه ریزی درسی وزارت آموزش و پرورش کـه مبتکر انجام این مسابقات بوده است تشکر نمود همچنین ایشان دربارهٔ سهمیه‌های امتحانات ورودی دانشگاهها، بـه خصوص در رشته ریاضی تذکراتی دادند و یادآور شدندکـــه این سهمیه‌ها در دانشگاه موفق نبوده‌اند و انرژیها به هدر می‌رود.

آقای دکتر رجبعلی‌زاده استاد ریاضی دانشگاه کرمان پیرامون راه‌اندازی دوره‌هـــای دکترای ریاضی در سالهـای اخیر، چگونگی آن و اینکه چگونه می‌توان اینگونه دوره‌ها را بهتر کرد سخنانی ایراد کردند.

یادآور می‌شود دورهٔ دکترای ریاضی هم اکنون در چهار دانشگاه کشور، دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشگاه تربیت‌معلم، دانشگاه تهران ودانشگاه صنعتی‌شریف برقرار است.آقای دکتر رجب‌زاده مقدم استاد ریاضی دانشگـاه مشهد در مورد دورهٔ کارشناسی ارشد ریاضی سخنانی ایراد داشتند. ایشان اظهـار بازگشایی اینگونه دوره‌ها را در دانشگاههـای کشور امری موفق بـــــه حساب آورد و آن را از نظـر کیفیتی در سطح دانشگاههای معتبر جهان دانست.

درآخر ازشرکت‌کنندگـان خواسته شد تا نظرات خود را پیرامون گزارش داده شده اظهـار نمایند. بعضی از اساتید و دانشجویان شرکت‌کننده پیشنهاداتی برای بهبود کیفیت آموزش و تحقیق ریاضی به میز گرد ارائه دادند.

بقیه از صفحه ۲۷

۶. آیا $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-[x])$ وجود دارد؟ درصورت مثبت یا منفی بودن جواب،آن را ثابت کنید.

۷. فرض‌کنید $M(x_1, y_1)$ و $N(x_2, y_2)$ دو نقطه دلخواه از تابع

$$y=ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0)$$

باشند.

اگـر از نقطه (x_0, y_0) واقـع بر نمودار تابع بتوان مماسی برآن به موازات پاره خط MN رسم کرد آنگاه

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$$

۸. فرض کنیم

$$f(x)=\begin{cases} x^{25}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

ثابت‌کنید $f'(0)$ ، ... ، $f^{(n)}(0)$، وجـود دارند. و $f^{(n)}$ در $x=0$ ناپیوسته است. ($f^{(n)}$ مشتق nام تابع f است).

۹.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x\sin^{11}x}}$$

را حساب‌کنید.

راهنمائی: فرض‌کنید $t=tg\,x$.

۱۰. مربع $ABCD$ به‌ضلع a مفروض است اوساط اضلاع AB، BC، CD و DA را بـه تـرتیب K، L، M و N می‌نامیم. ربع دایره بـه مرکز A و بـه شعاع AB خطوط NL و KM را در نقاط E و F قطع می‌کند.

۰۱ ثابت‌کنید AE و AF زاویه A از مربع را بـه سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنند.

۰۲ اگـر امتداد DF ضلع BC را در G قطع‌کند رابطه $\overline{DG}^2=2\overline{BG}^2$ را ثابت‌کنید.

۰۳ طـولهـای KF، FM، BG و DF را بـرحسب a حساب‌کنید.

راهنمائی: ثـابت‌کنید مثلثهـــــای ABF و ADE متساوی‌الاضلاع هستند.

مسائل شماره ۲۵

تهیه و تنظیم از:
ابراهیم دارابی

۱ــ ثابت کنید در مثلث ABC که درآن

$$\hat{A}=\alpha \quad \text{و} \quad \hat{B}=\beta \quad \text{و} \quad \hat{C}=\gamma$$

می‌باشد، ارتفاع نظیر رأس A در نقطه مرکز ارتفاعی (محل برخورد سه ارتفاع مثلث) به نسبت

$$\frac{AH}{HD}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}$$

تقسیم می‌شود. H مرکز ارتفاعی مثلث است.

۲ــ n مربع دلخواه مفروضند. ثابت کنید می‌توان آنها را طوری برید که از کنار هم قرار دادن قطعات حاصل از آنها، مربع جدیدی ساخته بشود.

۳ــ وجوه جانبی هرم مثلث‌القاعده‌ای، دو به دو بریکدیگر عمودند. اگر مساحت‌های آنها را $Q_۱$، $Q_۲$، $Q_۳$ بنامیم، حجم هرم را حساب کنید.

۴ــ ثابت کنید

$$\log_۳\log_۳\underbrace{\sqrt[۳]{\sqrt[۳]{\cdots\sqrt[۳]{۳}}}}_{n\ \text{بار}}=-n$$

۵ــ کوچکترین عدد پنج رقمی را پیدا کنید که اگر رقم آخر آن را قبل‌از رقم اول قرار دهیم پنج برابر بشود. (رقم آخر را برمی‌داریم قبل‌از رقم اول قرار می‌دهیم.)

۶ــ α را چنان تعیین کنید که ریشه‌های معادله زیر تشکیل یك تصاعد عددی بدهند

$$۳x^۴-۲(۴\sin^۲\alpha+۲\sin^۲ ۲\alpha+۱)x^۲ +۴-۲\cos^۲\alpha-\cos^۲ ۲\alpha=۰$$

(فرستنده: عبدالحسین کلهری دانشجوی فنی تهران)

۷ــ همه مقادیر پارامتر α، $۰\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{۲}$ را طوری تعیین کنید که به ازای آنها مینیمم تابع

$$f(x)=۳x^۴+۴x^۳(\cos\alpha-\sin\alpha)-۳x^۲\sin ۲\alpha$$

در فاصله $-\sin\alpha<x<\cos\alpha$ حداقل مقدار را داشته باشد.

۸ــ مطلوب است رسم نمودار و برد تابع

$$f(x)=(x-۲)\varphi(x+۱)$$

درصورتیکه

$$\varphi(x)=\begin{cases} ۰ & x<۰ \\ ۱ & x\geqslant ۰\end{cases}$$

۹ــ در داخل یك صفحه n خط مستقیم طوری رسم شده‌اند که هیچ دو خطی باهم موازی نیستند و هیچ سه خطی از یك نقطه نمی‌گذرند. این خطوط صفحه را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟

۱۰ــ با استفاده از تابع

$$f(x)=(a_۱x+b_۱)^۲+(a_۲x+b_۲)^۲+\cdots+(a_nx+b_n)^۲$$

نامساوی زیر را که به نامساوی شوارتز مشهور است نتیجه بگیرید

$$(a_۱b_۱+a_۲b_۲+\cdots+a_nb_n)^۲\leqslant(a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_n^۲)(b_۱^۲+b_۲^۲+\cdots+b_n^۲)$$

۱۱ـ عضوهای منفی دنباله

$$x_n = \frac{C^4_{n+4}}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n}$$

را پیدا کنید. (منظور از C^4_{n+4} ترکیب و P_n تبدیل است.)

۱۲ـ مطلوب است

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1+tg\,x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

۱۳ـ دایره‌ای به معادله $x^2-2x+y^2=0$ را حول محور $x=4$ دوران می‌دهیم. حجم حادث از این دوران را پیدا کنید.

۱۴ـ مطلوب است

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{3}{4}}}$$

۱۵ـ ثابت کنید اگر n عددی صحیح و نامنفی باشد، آنگاه

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

که درآن

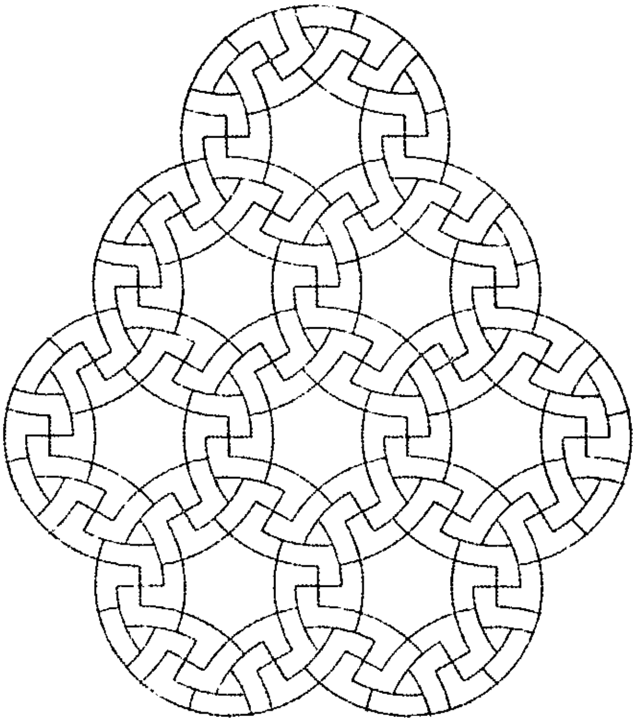
$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n \text{ و } 0! = 1 ،n \geqslant 1$$

۱۶ـ n کیسه هر یك n مهره دارند که در اولی D مهره سفید، در دومی $D+1$ مهره سفید و... در nامی $D+n-1$ مهره سفید است. یك کیسه انتخاب کرده و K مهره بیرون می‌آوریم مطلوب است احتمال اینکه هر K مهره سفید باشند.

(فرستنده: محمد آذرتاش دبیر ریاضی)

۱۷ـ G یك گروه دوری است. ثابت کنید اگر G نامتناهی باشد تعداد زیرگروههای G نیز نامتناهی است.

۱۸ـ G یك گروه دلخواه است ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه G نامتناهی باشد، آن است که تعداد زیرگروههای G نامتناهی باشد.



المپیاد ریاضی آبادان
هفتمین دورهٔ
مسابقات ریاضی کشور

تنظیم از: میرزا جلیلی

ـ در سال تحصیلی جاری، مرحلهٔ نهائی مسابقات ریاضی کشور درشهرآبادان برگزار گردید. دانش‌آموزان دختر و پسر همراه با سرپرستان خود از روز چهارشنبه ۱۱ بهمن ماه ۶۸ به‌آبادان وارد و اسکان داده شدند. دو چیز در این شهر جنگ‌زده جلب توجه می‌کرد یکی جنب‌وجوش، هیجان و

تحرك بچه‌ها برای مسابقه بود که از جوانی توانائی و انرژی فوق‌العاده آنها حکایت داشت و دیگری شهر جنگ‌زده، ستم کشیده وزجر دیده آبادان بود که آرام‌آرام به همت نیروهائی که عزم بازسازی مناطق جنگی را دارند می‌رود تا زیربار توپ‌وخمپاره دشمن قد علم کند. اما چرا شهرآبادان برای مسابقات انتخاب شده بود؟

مراسم افتتاحیه مسابقه

مراسم افتتاحیه مسابقات در صبح روز ۱۲ بهمن ماه آغاز دهۀ مبارکه فجر در سالن دانشکده نفت آبادان و با حضور امام جمعه محترم آبادان، رئیس سازمان پژوهش و برنامه ریزی مدیرکل آموزش و پرورش استان و مقامات مسئول پالایشگاه نفت آبادان و دانش‌آموزان برگزار گردید. ابتدا آیاتی از کلام‌الله مجید قرائت و سپس دو سرود «یارب» و «خوزستان» وسیلۀ دسته‌کر دانش‌آموزان اجرا گردید. آنگاه امام جمعه آبادان حضرت حجة‌الاسلام و المسلمین حاج‌آقاجمی مطالبی در زمینه اهمیت علم دراسلام و اینکه حضرت رسول اکرم صلى‌الله‌عليه‌وآله‌وسلم فرموده‌اند اطلب‌العلم و لو بالصین اظهارداشتند وافزودند مادرگذشته دانشمندان اسلامی چون خواجه نصیرالدین طوسی و شیخ بهائی و دیگران داشته‌ایم که به علم ریاضی خدمت کرده‌اند. ایشان همچنین دانش‌آموزان را به علم همراه با تقوی توصیه فرمودند.

سپس جناب‌آقای دکتر حداد عادل معاونت محترم وزیر و رئیس سازمان پژوهش‌که خود بنیان‌گذار این مسابقات در کشور هستند پس‌از تبریك بمناسبت آغاز دهۀ فرخنده فجرچنین فرمودند:

چرا مسابقات در شهرآبادان؟ در حال‌حاضرآبادان يك شهرسرپائی نیست وآمادگی برای اجرای برنامه‌های گوناگون ندارد. راحتر بودکه این مسابقات را در تهران برگزار کنیم و از جهات مختلف و برحسب ظاهر کارها بهتر وآسانتر انجام می‌شد. اما هدف از برگزاری مسابقات درآبادان این بودکه شما دانش‌آموزان عزیز در این دو یا سه روزی‌که در اینجا سپری می‌کنید تجربه مفید و معقولی بیاندوزیدکه يك ذخیره ذهنی ورهنمود برای شما در زندگی‌آینده باشد. خطاب من به دانش‌آموزان سالهای‌آخر دبیرستان است‌که در مرز دانش‌آموزی ودانشجوئی هستند اینان به يك‌کشتی می‌مانندکه در لنگرگاه بوده وآماده سفر به دریا و اقیانوس باشند، شما درآستانۀ قدم‌گذاشتن به فعالیتهای اجتماعی هستید و به زودی وارد دانشگاه می‌شوید مسئولیت‌های بیشتری بردوش شما قرار خواهدگرفت. و بعداً وارد زندگی پر طوفان و تلاطم جامعه می‌شوید. آبادان می‌تواند به شما درسی یاد دهدکه‌آموزنده و راهنمای‌آینده شما در زندگی باشد. می‌توانید به‌آنچه در آینده برخورد می‌کنید نیك بیاندیشید. می‌توانید شهری را تصورکنیدکه روزی مرکز فعالیت نفتی در خاورمیانه بوده است. جائی است‌که استعمار پیر انگلستان حضور داشته است. این شهر مرکز تسلط اقتصادی و سیاسی انگلستان در کشور ما بوده است. راجع به نفت فکرکنید، اهمیت نفت برای‌کشور و استفاده ازآن در اقتصاد. به تأثیر اجتماعی و سیاسی‌آن نقش این شهر در تاریخ نفت ایران، قراردادهائی مثل قرارداد دارسی، ملی شدن صنعت نفت، کنسرسیوم‌که چقدر نفت از این شهر می‌بردند و چقدر بابت‌آن به ما پول می‌دادند وآبادان در این جریان چه نقش اساسی داشته است و بهمین ترتیب فکرکنید راجع به‌خوزستان پرآب‌ترین استان کشور، حاصلخیزترین منطقه ایران، استانی‌که هم نفت دارد و هم‌آب دارد به بینید مردم‌آن درگذشته چگونه زندگی می‌کرده‌اند؟

مردم محروم این خطه از سرزمین ما با اینهمه امکانات، چه زندگی اندوهباری درگذشته داشته‌اند خوب بیاندیشیدکه در گذشته بر مردم این ناحیه چه‌گذشته است؟ اما واقعیتی‌که می‌تواند خاطرۀ دائمی برای شما باشد خاطرۀ جنگ است. الان جنگ در کار نیست ولی بر در و دیوار هرمحله وهرخانه آثار جنگ را می‌بینید. برای ما که در طول جنگ ساکن آبادان و خرمشهر نبوده‌ایم تصور اینکه جنگ چه بر سر این دو شهرآورده است دشوار بود ولی اکنون از نزدیك می‌بینیم که چگونه دیوار هر خانه‌ای سوراخ سوراخ شده است. آیت‌الله جمی درطول جنگ در شهرآبادان بودند و نیزکسان دیگری‌که از خمپاره و توپ نترسیدند ماندند و فداکاریها کردند تا شهر را زنده نگهدارند تا امروز شما در این شهر جمع شوید و مسابقه ریاضی بدهید. نخلهای سر بریده و نیمه سوخته، مدارس نیمه ویران شده، خانه‌های نیمه ویران بیمارستانهای فروریخته شده همه و همه می‌توانند به شما بگویندکه دشمن با ماچکارکرده است؟ چرا با ما جنگ‌کردند؟ ما که با کسی جنگ نداشتیم اما آنها می‌خواستندکه ۸ سال کشورما را مورد تجاوز قراردهند،هنوزهم‌همین‌قصد را دارند.

مهمترین مسأله این بودکه ما در حال انقلاب بودیم ارتش قبل‌از انقلاب ایران از هم پاشیده شده بودآمریکا و انگلیس نیز اطلاع داشتند وفکر می‌کردند تا قبل‌از اینکه‌آرایش جدید و نظم در ارتش پایدار گردد باید به ایران حمله‌کرد و کار را تمام‌کرد. خلاصه کنم که این جنگ ادامهٔ درگیریها و جنگهای خیابانی بود وقتی آمریکا درخیابانها موفق نشد، ودر۱۷ شهریور شکست خورد وغافلگیر جنبش مردم شد تصمیم گرفت ازطریق عراق با ۳۰۰۰ تانك و ۱۲۰۰ لشکر به ما حمله‌کنند به خبرنگاران و روزنامه نویسان که باخودآورده بودند وعده کرده بودندکه ما ظرف ۳ روز کار را تمام خواهیم‌کرد ولی دیدیدکه این سه روز ۸ سال طول‌کشید و چیزی نیز نصیب آنها نشد ولی ما از اسلام، انقلاب و میهن خود دفاع کردیم و این دفاع به چه قیمتی تمام شد خودتان بهتر می‌دانید چه جوانانی در این دفاع جان خود را فدا کردند چه خونها ریخته شد چه‌کسانی در دفاع ازآبادان وخرمشهر جان باختند ایثار و فداکاری‌کردند، خون دادند، سینه خود را جلو توپ وتانك سپرکردند وقطعه قطعه شدند تا این شهرها باقی بمانند. آثار اینهمه‌گلوله بردر و پیکر شهر می‌بینید این شهرها را از

هر طریق که می‌توانستند گلوله‌باران‌کردند سختی‌ها مشکلات رنجها خونها راکه می‌بینیم چه خاطراتی را در ما زنده می‌کند و چه احساس‌کلی می‌کنیم. هروقت در کار اداری خسته می‌شویم به یادآنهاکه در شبها زیررگبار گلوله برای رفتن از این طرف به‌آن طرف شهید شدند بیفتیم‌آنها شهید شدند تا آبادان را حفظ‌کنند من خودم در مقابل این فداکاریها واقعاً خجالت می‌کشم که بگویم برای انقلاب خدمت کرده‌ام یا خدمت می‌کنم خدمت‌آنهائی‌کردندکه به فرمایش امام عمل کردند و حصرآبادان را شکستندآنهائی‌که حماسه‌آفریدند و مقاومت‌کردند و شهر را نجات دادند در وجب به وجب این خاك جوانهای برومند جان خود را از دست داده تا آن وجب خاك را پس گرفته‌اند وحفظ‌کرده‌اند همهٔ اینها برای این است که انقلاب برجا بماند و ما امروز اینجا به‌نشینیم و اندیشه برای خدمت فردا بکنیم. فردای بازسازی و ساختن دوباره آبادان.

آنهائی‌که اینجا شهید شدندکم استعداد نبودندکسانی بودندکه مدارج علمی را طی‌کرده بودند وآخرین مدرك علمی دانشگاه داشتند اینجاآمدند و شهید شدند.

شهید دکتر چمران‌که در همین اطراف بشهادت رسید در سال ۱۳۳۱ از دبیرستان البرز دیپلم ریاضی‌گرفت و سپس وارد دانشکده فنی شد و شاگرد اول شد و برای ادامهٔ تحصیل به‌آمریکا رفت و از دانشگاه برکلی‌که یکی از ده دانشگاه خوب‌آمریکاست دکترا گرفت. این شخص همه چیز داشت. علم، عنوان ظاهر ولی همه را رها کرد و برای دفاع به خوزستانی‌که مورد تجاوز قرارگرفته بودآمد و در همین دیار بشهادت رسید.

روزی‌که ملت برای امام و انقلاب‌آغوش‌گشودند و جان و خانه وآشیانه خود را فدا کردند می‌خواستند این‌کشور به دست بیگانگان نیفتد و بعداز جنگ ما سربلند باقیمانده‌ایم که مملکت به‌دست خود ما اداره می‌شود. ایرانی می‌اندیشد، ایرانی طرح می‌ریزد و ایرانی اجرا می‌کند این است ثمره ۸ سال جنگ.فکر کردیم‌که دانش‌آموزان ممتازی‌که ما به‌آنها چشم امید دوخته‌ایم به‌آبادان بیایند و جای پای جنگ را به بینید هم از نزدیك شاهد فعالیت و احیای مجدد شهر باشند.

فردا شما بازدیدی ازپالایشگاه خواهید داشت عکس‌های پالایشگاه در زمان جنگ دیده‌اید و اکنون هم می‌بینید. این پالایشگاه در تیررس دشمن بوده و از خط مقدم جبهه تا پالایشگاه دویست یا سیصد متر بیشتر فاصله نداشته و دشمن هرروز پالایشگاه را به توپ بسته و یا بمباران هوائی‌کرده است ولی خوشبختانه خواهید دیدکه در مدت‌کوتاهی این پالایشگاه به دست مهندسان و کارشناسان و تکنیسین‌ها و کارگران متعهد ایرانی بازسازی شده و اکنون سرپا ایستاده است و ما آن را سمبل بازسازی‌آبادان بعداز جنگ می‌دانیم شما هم باید بعداز فارغ‌التحصیل شدن‌آماده خدمت و بازسازی دراین مناطق‌جنگ‌زده بشوید شماخوب‌درس بخوانیدکشور ما به دانشمندان فیزیك و ریاضی بسیار نیازمند است و شما دانشمندان‌آینده‌کشور هستید.

ما در این چند سال با برگزاری مسابقات المپیاد ریاضی‌و فیزیك و برای تأمین نیروی انسانی قدم‌هائی برداشته‌ایم. نتایج این مسابقات افتخارآمیز بوده است می‌توانید این خاطرات را بازگوکنید خاطرات‌کوبا؟ آقای دکتر نجفی وزیر محترم‌آموزش وپرورش‌که در سفرکوبا سرپرست تیم ایران بودند توضیح فرمودندکه سرپرست تیم نروژ میگفت خوب بود شما در سال اول به عنوان ناظر شرکت می‌کردید و ممکن است همهٔ بچه‌ها صفر بگیرند و روحیه‌شان خراب شود اما بعداز اعلام نتیجه تیم ایران در بین ۴۸ کشورشرکت کننده ردیف بیست‌وششم راکسب‌کرد و نروژ در ردیف بعداز

ایران قرار داشت؟ وقتی سرپرست تیم نروژ در جلسو تابلو اعلانات نتایج را دید و چشمش به ما افتاد دهانش از تعجب باز ماند درکو با ما یك مدال برنز گرفتیم در استرالیا که باز جناب آقای دکتر نجفی سرپرست تیم ایران بودند ما یك مدال نقره و سه مدال برنز گرفتیم و در بین ۵۰ کشور شرکت کننده ردیف ۱۸ را کسب کردیم و در مسابقات برانشویك آلمان در بین ۵۱ کشور ما ردیف ۱۴ را به‌دست آوردیم و ازکشورهای غربی تنها آمریکا آلمان غربی و فرانسه از ما جلو افتادند و انگلیس در ردیف بیستم بعداز ما قرارگرفت. در این مسابقه ما دو مدال نقره و سه برنز و یك دیپلم افتخار گرفتیم. اگر ما اعتمادبنفس داشته باشیم سرمایه اصلی برای سازندگی کشور داریم، جوانهای ما باهوش هستند و استعداد هم دارند و می‌توانند علم بیاموزند و تحقیق کنند و در ردیف دانشمندان بنام جهان قرار گیرند. الان جوانهای ۱۸ ساله ما مسائلی از فیزیك و ریاضی حل می‌کنند که جوانهای انگلیس و آمریکا نمی‌توانند هیچ دلیلی وجود ندارد که این جوانان در ۳۵ سالگی نتوانند کشفیاتی در فیزیك و ریاضی بنمایند و از این کشورها جلو بیفتند. عدم موفقیت فعلی ما به علت مشکلات گذشته، بی‌توجهی و بهاندادن به استعداد جوانهای مستعد کشور بوده است. اگر بتوانیم مشکلات دانشگاهها را حل کنیم همین رقابتی که در سطح دیپلم داریم درسطح بالای علمی نیز به دست خواهیم آورد و این دور نیست خداوند هم وعده فرموده که اگر ایمان، تعهد، ایثار و کوشش داشته باشیم اوهم به ما کمك خواهدکرد به قول امام قدس‌سره شریف به همت شما جوانان عزیز ایران را بجائی برسانیم که احتیاج به هیچ کشور خارجی نداشته باشد.

المپیاد آینده درکشور چین برگزار خواهد شد برای بازآموزی تیم ایران ازهم اکنون برنامه‌ریزی شده و گروهی از اساتید و کمیته ملی المپیاد ریاضی کشور دقیقاً کوشش دارد که بچه‌ها را برای المپیاد آینده آماده سازد من در اینجا از تمام دانشگاهیانی که صمیمانه در تهیه سؤال، تصحیح اوراق همکاریهای صمیمانه و مؤثر با سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی وزارت آموزش‌وپرورش داشته‌اند تشکروسپاسگزاری می‌نمایم دوستان دانشگاهی از اهواز، کرمان، اصفهان، تبریز به تهران آمده و با ما همکاری می‌نموده‌اند و گاهی اوقات برای رسیدن به تهران ۲۴ ساعت در راه بوده‌اند. دراثراین کوشش‌ها ما تجربیات زیادی بدست آورده‌ایم و بچه‌ها را با آمادگی بیشتری به میدان مبارزه خواهیم فرستاد. دانش‌آموزان گذشته المپیاد نیز با ما هنوز قطع رابطه نکرده‌اند و من گهگاه آنها را در دفتر تحقیقات می‌بینیم و این مجله ریاضیدان جوان وسیلهٔ آنها تنظیم می‌شود امید است که ما به زودی بتوانیم باشگاه پژوهشگران جوان را تشکیل بدهیم که شما دانش‌آموزان ممتاز عضو آن بشوید. تاکنون در تهران چندین محل نیز دیده شده تشکیل این باشگاه انشاءالله قریب‌الوقوع است بعداً شعبات این باشگاه در شهرستانها نیز دائر خواهد شد.

خبر خوبی که برای شما دارم این است که سازمان انرژی اتمی ومرکز تحقیقات فیزیك و ریاضی این مؤسسه اعلام کرده است که به‌آن دسته از دانش‌آموزان ریاضی و فیزیك که جزء شش نفر اول قرار بگیرند بورس ماهانه تحصیلی خواهد داد درحال‌حاضر بنیاد خیریه البرز نیز همه ساله به ۱۰ نفر اول مسابقات بورس می‌دهد.

جناب آقای دکتر حداد عادل معاونت محترم وزیر رئیس سازمان پژوهش وبرنامه‌ریزی درسی درجمع شرکت کنندگان نماز جمعه هفته فرمودند:

ـ ما به‌آبادان آمده‌ایم تا یاد شهداء، جانبازان، فداکاران و ایثارگران این شهر را گرامی بداریم و به‌آنها اطمینان‌خاطر بدهیم که ما راه‌آنها را ادامه خواهیم داد.

ـ ما به اینجا آمده‌ایم تا به مردم دلیر و فداکار آبادان مخصوصاً حضرت حجةالاسلام والمسین جمی که در تمام مدت جنگ با یارانش درآبادان ماندند وشهر را نگه‌داشتند تبریك بگوئیم.

ـ دانش‌آموزان به اینجا آمده‌اند تا سختیها، رنجها مصائب و مشکلاتی که شهردرطول ۸ سال جنگ متحمل شده ازنزدیك به بینند.

ـ دانش‌آموزان به اینجا آمده‌اند تا شاهد فداکاریها ـ جانفشانیها و ایثار مردم آبادان در زمان جنگ باشند.

ـ ما به اینجا آمده‌ایم تا پیام شهر را وآنچه براین شهردر طول ۸ سال جنگ گذشته است به تمام مردم ایران برسانیم.

ما اینجا آمده‌ایم تا شاهد و ناظر مشکلات، سختی‌ها و معضلات فعلی آن باشیم و این پیام را وسیلهٔ دانش‌آموزان عزیز به تمام مردم ایران برسانیم تا در بازسازی این شهر شرکت و مساعدت نمایند.

گزارش مسابقات

در سال تحصیلی جاری برای آنکه فرصت بیشتری برای آماده سازی تیم ایران باشد مرحلهٔ نخست مسابقات با شرکت

۳۰۰۰ نفر دانش‌آموز شرکت‌کننده در آذرماه در مراکز استان برگزار شد. سؤالات امتحانی این مرحله ازمسابقات در تهران وسیلهٔ اساتید فن طرح و از طرف دفتر تحقیقات بـه مسئولین امتحانات استانها که به تهران آمده بودند تحویل گردید اوراق این مـرحله ابتدا در استانها تصحیح شد و بعد ریز نمرات ۲۰ نفر دانش‌آموز ممتاز هر استان همراه با اوراق آنها به تهران فرستاده شد این اوراق در تهران وسیلهٔ اساتید مـورد تجدید نظر قرار گرفت و نتیجه نهائی اعلام گردید.

قابل ذکر است که در تصحیح مجدد در تهران تغییراتی در نمرات داده شده وسیله استانها بـه عمل آمد طوری کـه بعضاً دانش‌آموزی که در استان خود اول شده بود بعداز تجدیدنظر وسیلهٔ اساتید طراح در تهران جـزء انتخاب شدگـان قـرار نگـرفت. لذا لازم است در سالهای آینده استانها از اعلام نتیجه اوراق تصحیح شده در استان خود پرهیز کنند.

آمار کل پذیرفته شدگان در مرحله اول ۱۵۵ نفر و شرکت کنندگان در مرحله دوم به صورت زیر است.

دختر	۱۸	نفر
پسر	۱۳۶	«
غائب	۱	«

اسامی دانش‌آموزان بـه تفکیك استانها و به ترتیب حروف الفباء در پایان این گزارش آمده است.

طرح سؤالات مـرحلهٔ دوم در آبـادان و بـا کمك اساتید، دبیران و کارشناسان دفتر تحقیقات انجام گـرفت و امتحان در دو نـوبت بعدازظهر روز پنجشنبه ۶۸/۱۱/۱۲ و صبح جمعه ۶۸/۱۱/۱۳ برگزار گـردید تعداد سؤالات مثل مرحله اول در هرنوبت ۳ تا و امتیاز هر سؤال ۷ نمره بود اوراق مرحله دوم وسیلـهٔ اساتید طـراح تصحیح و بعداز روشن شدن کلی نتایج مجدداً اوراق ۳۰ نفر از دانش‌آموزان ممتاز در هر دو امتحان مورد تصحیح و تجدیدنظر قرار گرفت و کمیته المپیاد ریاضی بعداز ساعتها مشاوره ۶ نفر نهائی را بـه شرح زیـر انتخاب نمود.

۱ـ وحید توسلی ازاستان تهران دبیرستان نیکان سال‌چهارم.

۲ـ حمیدرضا داودی از شاهـرود استان سمنان دبیرستان امام خمینی کلاس سوم.

۳ـ علی رجـائی از استان تهران دبیرستان علامه حلـی و دانش‌آموز دورهٔ المپیاد فیزیك کلاس چهارم.

۴ـ آرش رستگار از تهران دبیرستان مطهری دانش‌آموز المپیاد فیزیك کلاس چهارم.

۵ـ پیمان کسائی از تهران دبیرستان علامه حلی کلاس سوم.

۶ـ بهرنگ نوحی از تهران از دبیرستان علامه حلی کلاس سوم.

قابل ذکـر است کـه اسامی ۶ نفر دانش‌آموز ممتاز طـی مراسم باشکوهی که در بعدازظهر روز ۶۸/۱۲/۲۶ با حضور جناب آقای دکتر نجفی وزیر محترم آموزش و پرورش، جناب دکتر حدادعادل، دانش‌آمـوزان ممتاز فیزیك و ریـاضی و خانواده آنها و جمعی از علاقمندان اعلام و جوائزی به آنها داده شد.

در حاشیهٔ مسابقات

جلسه دبیران ریاضی

در صبح روز ۶۸/۱۱/۱۳ و زمـانی کـه دانش‌آمـوزان مشغول امتحان نـوبت دوم بودنـد بـرادر دکتر حداد عادل معاونت محترم وزیر و رئیس سازمـان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی و مدیر کـل محترم دفتر تحقیقات با دبیران سرپرست و کارشناسان گروه ریاضی جلسه‌ای تشکیل دادند که در آن آقایان پایدار، کرباسی، احمدی، دادفرنیا، کیوان و سلطانی به نوبت صحبت کردند که اهم بحثها به شرح زیر بود:

ــ شرایط امتحان برای دانش‌آموزان شهرستانی و تهرانی و حتی دانش‌آموزان مـراکـز استانها یکسان نیست تهرانیها کتابهـای متعدد المپیاد و مسابقات در اختیار دارنـد مجلات رشد ریاضی و یا ریاضیدان جوان زودتر به آنها می‌رسد و به دست شهرستانیهـا دیرتر مـی‌رسد در نتیجه دانش‌آمـوزان شهرستانی عقب می‌مانند.

ــ پیشنهاد شد که دانش‌آموزانی که از سال سوم در المپیاد شرکت می‌کنند رهـا نشوند و دفتر تحقیقات با آنها در تماس باشد و آنها را با مطالب علمی تغذیه نماید.

ــ بعضی اوقات بین دبیران ریاضی و مسئولین برای تشکیل کلاسهای المپیاد اختلاف نظر وجود دارد کـه اگـر همکاری بیشتر در این زمینهٔ وجود داشته بـاشد مسلماً نتیجه شهرستانها بهتر خواهد بود.

ــ از دفتر تحقیقات خواسته شود که جلو حل المسائل‌های بدون نام ونشان کـه به قیمت‌های گـزاف بـه فروش می‌رسد گرفته شود.

ــ در مورد تغییر کتب ریاضی دبیرستان تعجیل شود چـه

بـا عوض شدن کتب ریاضی دورهٔ ابتدائی و راهنمائی ممکن است ناهماهنگی‌هـائی بین این کتب و کتب ریاضی دبیرستان وجود داشته باشد.

ـ ازشهرستانها نیز سؤال خواسته شود و دبیران شهرستانی نیز در طرح سؤالات شرکت داده شوند.

ـ امروزه داوطلب شغل دبیری بسیارکم شده و باید دراین راستا اقدامات مؤثری صورت گیرد.

ـ در بعضی‌از مناطق رئیس دبیرستان یـا رئیس‌آموزش و پرورش یك نفر دیپلمه انتخاب مـی‌شودکـه ۳۰ نفر یا بیشتر ابواب جمع لیسانسیه داردو در این زمینه توصیه‌های لازم به شهرستانها بشود.

ـ بعداز امتحانات سؤالات و حل‌آنها به دبیران داده شود کـه وقتی دانش‌آموزان از دبیران خـود سؤال می‌کندآنها بتوانند جوابگو باشند.

ـ به استانهـا توصیه شودکـــــه سرپرستان حتماً از بین لیسانسیه‌های ریاضی انتخاب شود تا مشکلی پیش نیاید.

سؤالات مرحله دوم

در زیر سؤالات ریاضی مـرحله دوم المپیاد همراه با حل آنها آورده شده است.

مرحله نهایی هفتمین **تاریخ برگزاری: ۶۸/۱۱/۱۲**
دوره مسابقات ریاضی **شروع مسابقه : ۳ بعدازظهر**
دانش‌آموزی‌کشور **مدت : ۳ ساعت**

مبارزه علمی برای جوانان زنده‌کـردن روح جستجو وکشف واقعیتها و حقیقت‌هاست.

«امام خمینی قدس سره»

۱ الف) ثابت‌کنید بـرای هـر عـدد صحیح و مثبت n، نامساوی زیر برقرار است:

$$\sqrt{n-1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

ب) یك عدد طبیعی n پیداکنید‌که:

$$\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=12$$

($[x]$ نمایش جزء صحیح عدد حقیقی x است).

۲ کـرهٔ S به مرکز O و به شعاع R و نقطه ثابت P روی‌آن داده شده است. سه نقطه A، B و C روی‌کـره به گونه‌ای حرکت می‌کنندکه‌کنج $P-ABC$ همواره‌کنج سه قـائمه است. ثابت‌کنید صفحهٔ مثلث ABC از نقطه ثابتی می‌گذرد.

۳ اگر $\{a_n\}_{n\geq 1}$ یك دنباله باشدکه

$$a_1=1 \text{ و } a_2=2$$

و

$$(n\geqslant 2)\quad a_{n+1}=$$
$$1+a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}+(a_1a_2a_3\cdots a_{n-1})^2$$

ثابت‌کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)=2$$

مرحله نهایی هفتمین **تاریخ برگزاری: ۶۸/۱۱/۱۳**
دوره مسابقات ریاضی **شروع مسابقه : ۹ صبح**
دانش‌آموزی‌کشور **مدت : ۳ ساعت**

نسل جوان در حرکت عظیم ملت ایران باید پیشرو باشد.

«آیت‌ا... خامنه‌ای»

۴ دریك مسابقه ورزشی m تیم شرکت‌کرده‌اند، می‌دانیم هر دو تیم یکبار باهـم مسابقه داده‌اند و نتیجه هر مسابقه برد یك تیم و باخت تیم دیگر بوده است (یعنی نتیجه مساوی نبوده است). ثابت‌کنید نتایج هرچه باشد یك تیم ورزشی مانند x وجود داردکه برای هرتیم مانند y، یا x از y برده است و یا اینکه یك تیم z وجود داردکـه x از z برده و z از y برده است.

۵ ثابت‌کنید برای هـر عدد طبیعی $n>1$ معادلهٔ زیر دارای جواب صحیح نیست:

$$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+\frac{x}{1}+1=0$$

۶ خط D را نسبت به مثلث ABC **وفادار** گویند هرگاه در صفحهٔ آن مثلث بوده و قرینه‌های‌آن نسبت به سه ضلع مثلث مزبور همرس (متقارب) باشند.

ثابت‌کنید برای هـردو مثلث واقع در یك صفحه‌کـه‌کلیهٔ زاویه‌های‌آنها حاده می‌باشند، یا تنها یك خط وفادار نسبت به آن دو وجود دارد و یا به تعداد نامتناهی.

اسامی دانش‌آموزان به تفکیک استان و به ترتیب حروف الفبا

استان آذربایجان شرقی

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان	منطقه	دبیرستان
۱	فاطمه اللهی	تبریز	ناحیه ۳	الزهرا (ص)
۲	محمدرضا بیننده	»	» ۳	امیر خیزی
۳	مهدی پورصادق	»	» ۲	—
۱	سید حسین محسنی‌زنوز	»	» ۱	والفجر

استان آذربایجان غربی

۱	مسعود قیاسی‌معاصر	ارومیه		چمران
۲	کامیل مادو	»		»

استان اصفهان

۱	ملیحه افبونیان	اصفهان	ناحیه ۲	بهشت‌آئین
۲	مسعود بابائی‌زاده	زرین‌شهر		طالقانی
۳	مهرداد شمسی	اصفهان	ناحیه ۳	شهید بهشتی
۱	سهیل صادقی	»	» ۳	» »
۵	محمدحسین فروزانفر	نائین		شهید چمران
۶	مجتبی قلی‌زاده	اصفهان	ناحیه ۵	شهید نبوی‌منش
۷	حمیدرضا نقشینه	»	» ۳	عدل
۸	شنتیایار احمدیان	»	» ۲	شهدای ادب

استان ایلام

۱	کورش افشار	ایلام		شهید رجائی
۲	بیژن صفوی	ابدانان		امام خمینی

استان باختران

۱	ابوالحسین آقاجانی	کنگاور		امام خمینی
۲	بابك معقولی	باختران	ناحیه ۲	دبیرستان نمونه
۳	فرهاد نادربان	»	» ۲	» »
۱	فریدون نوری	»	» ۲	» »

استان بوشهر

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان	منطقه	دبیرستان
۱	پژمان موسوی	بوشهر		سعادت

استان تهران

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان	منطقه	دبیرستان
۱	کیوان آقابابائی‌سامانی	تهران		المپیاد فیزیك (شهرکرد-استاد مطهری)
۲	امیرحسین ابدال	«		علامه حلی
۳	پورنگ ابوالمعصومی	کرج		شهید رجائی
۴	سید ابراهیم اکرمی	تهران	منطقه۱۶	شهید فاطمی
۵	فرخ ایاذی	«	« ۳	رازی
۶	حسین باطنی	«	« ۹	نمونه امام صادق (ع)
۷	حامد بطحاتی‌هاشمی	«	« ۱۲	علوی
۸	محمدرضا پاکزاد	«		علامه حلی
۹	فاطمه تهرانی‌مقدم	«	منطقه۱۲	علوی اسلامی
۱۰	نیما تقوی‌نیا	«		المپیاد فیزیك (مشهد - جباریان)
۱۱	وحید توسلی	«	منطقه ۱	نیکان
۱۲	کورش توکلی‌میهمی	«		علامه حلی
۱۳	بابك تیمورپور	«		(رازی) المپیاد فیزیك
۱۴	محمدصادق ثبات	«		(علوی) المپیاد فیزیك
۱۵	امیرعباس جعفرزاده	«	مقطقه ۲	تزکیه
۱۶	سیدعلی حاجی‌میری	«		(علامه حلی) المپیاد فیزیك
۱۷	پوریا حباب	«		علامه حلی
۱۸	نوشین حبیبی‌مرند	کرج		زینب
۱۹	رضا حسین‌نژاد	تهران		(نمونه رشد) المپیاد فیزیك
۲۰	مانی حمزیان	«	منطقه ۲	مفید
۲۱	فرزاد خندان	«		علامه حلی
۲۲	علی رجایی	«		(علامه حلی) المپیاد فیزیك
۲۳	پریسا رحیمی‌درآباد	«		فرزانگان
۲۴	فرید رزازی	«		(علامه حلی) المپیاد فیزیك
۲۵	آرش رستگار	«		(مطهری) المپیاد فیزیك
۲۶	سیامك رصدی	«	منطقه ۸	کمال
۲۷	هومن رنجبران‌جهرمی	«		علامه حلی
۲۸	خشایار روحانی‌منش	«		«
۲۹	سهراب رهبر	«	منطقه ۸	دانشمند
۳۰	حامد ساجدی	«		(علامه حلی) المپیاد فیزیك
۳۱	سعید سرکاراتی	«		« « «
۳۲	مازیار سعیدیان	«	منطقه ۳	رازی

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان	منطقه	دبیرستان
۳۳	علی سلیمانی‌پوبا	»	» ۸	کمال
۳۴	محمد سلیمانی‌نیا	»		علامه حلی
۳۵	یوسف سلیم‌پور	»	منطقه ۱۱	شهید مفتح
۳۶	بهزاد سیاه‌کلاه	»	» ۱	(نیکان) المپیاد فیزیک
۳۷	حسین شجاعی	»		علامه حلی
۳۸	فرامرز صابری‌حسین‌آباد	»		»
۳۹	محمدرضا صدیق‌دامغانی‌زاده	»		»
۴۰	مجید صدیقی‌نژاد	تهران	منطقه ۱۶	نمونه رشد
۴۱	عرفان صفر	»		علامه حلی
۴۲	شهاب صنایعی‌لطف‌آبادی	»	منطقه ۳	رازی
۴۳	حسین طلوع‌شریفی	»		علامه حلی
۴۴	مهدی عسکری	»		»
۴۵	پیام عندلیب	»	منطقه ۳	شهید منتظری
۴۶	مریم فاضل‌سرجویی	»	» ۶	شهداء هفتم‌تیر
۴۷	ارسلان فرخ	»		علامه حلی
۴۸	مهبد فولادوند	»	منطقه ۸	کمال
۴۹	مجید قاسمی	»	» ۱۶	نمونه رشد
۵۰	مهدی قاسمی‌نراقی	»		علامه حلی
۵۱	رضا قربانی‌زرین	»	منطقه ۱۲	علوی
۵۲	کامبیز کاویانی	»		المپیاد فیزیک (نیکان)
۵۳	غلامرضا کبیری	»	منطقه ۹	نمونه امام صادق (ع)
۵۴	پیمان کسائی	»		علامه حلی
۵۵	وهرز کمیجانی برجلوئی	»		»
۵۶	علی گلکاری	شهریار		وحدت
۵۷	مهدی مجیدی‌ذوالنبین	»		علامه حلی
۵۸	علی مهجور	»	منطقه ۶	البرز
۵۹	شهرام محسنی‌پور	»		علامه حلی
۶۰	سید علی محمدی‌راد	»		»
۶۱	پیمان مشکوة	»		(آیت‌الله سعیدی) المپیاد فیزیک
۶۲	سید محمد موسوی‌جهان‌آبادی	»	منطقه ۱۲	علوی
۶۳	سید عبدالعظیم موسوی‌شوازی	»	» ۱۶	نمونه رشد
۶۴	علیرضا موسوی‌فاطمی	»		علامه حلی
۶۵	علی میری	»	منطقه ۱۳	طالقانی
۶۶	داریوش ناظمی‌سلمان	»	» ۱۱	شهید مفتح
۶۷	کورش نصرتی	»		علامه حلی

استان تهران

ردیف	نام و نام خانوادگی	سهرستان	منطقه	دبیرستان
۶۸	محمدرضا نصیری‌سروی	قم		شهید محمدباقر صدر
۶۹	علیرضا نصیری‌اوانکی	تهران		علامه حلی
۷۰	فرشاد نقاش‌شوشتری	»		(علوی) المپیاد فیزیك
۷۱	بهرنگ نوحی	»		علامه حلی
۷۲	ژیلا نیك‌نژاد	کرج		زینب
۷۳	آرش یزدان‌بخش	تهران		(علامه حلی) المپیاد فیزیك

استان چهارمحال

ردیف	نام و نام خانوادگی	سهرستان	منطقه	دبیرستان
۱	آیت‌الله کریمزاده	شهرکرد		علامه طباطبائی
۲	احمد مردانی	»		شهید استکی

استان خراسان

ردیف	نام و نام خانوادگی	سهرستان	منطقه	دبیرستان
۱	هادی بخشایش‌اول	مشهد	منطقه ۲	فردوسی
۲	پیمان جرقی‌مقدم	»	» ۴	دستغیب
۳	داود جعفری	»	» ۲	فردوسی
۴	جلال زردی	قاین		شریعتی
۵	مهدی شریف‌زاده	بیرجند		نمونه تربیت
۶	فوژان قربانیان	مشهد	منطقه ۳	آزادگان
۷	میمنت مسرت مشهدی	»	» ۲	نمونه اندیشه
۸	هایده ناظمیان	»	» ۳	آزادگان
۹	بهرام هجرانی	»	» ۳	حکمت

استان خوزستان

ردیف	نام و نام خانوادگی	سهرستان	منطقه	دبیرستان
۱	حمیدرضا سلطان‌زاده	شوش		امام خمینی
۲	نگار شهنی کرم‌زاده	اهواز		الزهرا
۳	فرشتهٔ عطار	دزفول		کوثر

استان زنجان

ردیف	نام و نام خانوادگی	سهرستان	منطقه	دبیرستان
۱	ابراهیم رحیمی‌علیسرائی	قزوین		شریعتی
۲	سید حامد شجاعی	»		»
۳	محمد شکیبانیا	»		پاسداران
۴	مسعود طاهرخانی	»		»

استان سمنان

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان	منطقه	دبیرستان
۱	سید مرتضی حسینی	شاهرود	—	امام خمینی
۲	حمیدرضا داودی	»	—	»
۳	عباس عباسپورتمیجانی	سمنا	—	دهخدا

استان سیستان و بلوچستان

۱	شیوا نارویی‌نژاد	زاهدان	—	بنت‌الهدی صدر
۲	همایون نصرت‌پناه	»	—	امام خمینی

استان فارس

۱	داریوش ابجدیان	شیراز	ناحیه ۲	توحید بك
۲	محمدعلی اوجی	»	» ۲	»
۳	اسفندیار بامداد	»	» ۲	»
۴	فرزاد سلامی	»	» ۲	شهید شرافتیان
۵	علی‌محمد عالیجی	»	» ۲	شهید شرافتیان
۶	امید لیاقت	»	» ۲	»

استان کردستان

۱	فرزاد رضایی	سنندج	—	رنج‌آوری
۲	کورش کاکه‌خانقاهی	»	—	شهید قصری

استان کرمان

۱	مهدی ایرامنش	کرمان	—	طالقانی
۲	علیرضا حسین‌خانی	»	—	شهدا ۱۰
۳	رضا فرهی مقدم	»	—	ایرانشهر
۴	سید جواد هاشمی	»	—	طالقانی

استان کهکیلویه و بویراحمد

۱	علی ثابت‌اقدام	کچساران	—	امام خمینی

استان گیلان

۱	رضا الفتی‌صابر	رشت	ناحیه ۲	شهید دکتر بهشتی
۲	نوید باژرانزاده	بندرانزلی	—	فردوسی
۳	فاطمه ربیعی‌کنارسری	رشت	ناحیه ۲	دهخدا

۴	فرشید شعبانی	»	» ۲	شهید دکتر شریعتی
۵	اسماعیل فرجی‌جوینی	»	» ۲	» » »
۶	فهیمهٔ فروحی	»	» ۲	دهخدا

استان لرستان

۱	علیرضا توکلی	الیگودرز	امام خمینی
۲	امین‌الله زرگریان	دورود	دهخدا
۳	پرویز مرادی‌پور	خرم‌آباد	امام خمینی

استان مازندران

ردیف	نام و نام خانوادگی	شهرستان	منطقه	دبیرستان
۱	سید محمود سخابی	آمل	—	امام صادق (ع)
۲	احمدرضا شیرزاد	فریدون‌کنار	—	امام خمینی
۳	آرمان منصوری	قائم‌شهر	—	شهداء
۴	مجید نریمان‌نژاد	آمل	—	امام خمینی

استان مرکزی

۱	حسین سبزعلی	محلات	—	دکتر بهشتی
۲	گیتا شیخ‌الاسلامی	اراک	—	تزکیه
۳	علی اکبر کرمی	ساوه	—	امام باقر (ع)

استان هرمزگان

۱	منوچهر عسکری	بندرعباس	—	نمونه جامعه الصادق
۲	کورش محمدی‌چالانچی	»	—	ابن‌سینا

استان همدان

۱	جواد ابراهیمی‌دهقانپور	همدان	—	ابن‌سینا
۲	علیرضا توکلی	کبوترآهنگ	—	شهید بهشتی
۳	کتایون لباف	همدان	—	پروین اعتصامی

استان یزد

۱	حمیدرضا حسینی‌ابوطالبی	یزد	—	باقرالعلوم
۲	محمدصالح‌شرافت‌بفرونی	یزد	—	رازی

حل مسائل شماره ۲۲

تهیه و تنظیم از: محمود نصیری

۱. حاصلضرب دو ریشه از چهار ریشه معادله

$$x^4-18x^3+kx^2+200x-1984=0$$

برابر ۳۲− است مقدار k را پیدا کنید.

حل. فرض کنیم x_1، x_2، x_3 و x_4 ریشه‌های معادله فوق باشند. بنابر روابط بین ریشه‌ها داریم

$$\begin{cases} (1) & x_1+x_2+x_3+x_4=18 \\ (2) & x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_3x_4=k \\ (3) & x_1x_2x_3+\cdots+x_2x_3x_4=-200 \\ (4) & x_1x_2x_3x_4=-1984 \end{cases}$$

اگر $x_1x_2=-32$ آنگاه $x_3x_4=62$ و لذا رابطه (۳) چنین داریم؛

$$x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4(x_1+x_2)=-200$$

$$-32(x_3+x_4)+62+x_2)=-200$$

از رابطه فوق با توجه به رابطه (۱) به دست می‌آید؛

$$\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_3+x_4=14 \end{cases}$$

حال از رابطه (۲) مقدار k به دست می‌آید.

$$-32+62+(x_1+x_2)(x_3+x_4)=k$$

یا

$$k=86$$

۲. ثابت کنید

$$\frac{1}{\pi}=\frac{1}{4}\,tg\,\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}\,tg\,\frac{\pi}{8}+\frac{1}{16}\,tg\,\frac{\pi}{16}+\cdots$$

حل. فرض کنیم

$$S_n=\sum_{r=2}^{n}\frac{1}{2^r}\,tg\,\frac{\pi}{2^r}$$

با توجه به اتحاد

$$tg\alpha=cotg\alpha-2\,cotg\,2\alpha$$

داریم

$$S_n=\sum_{r=2}^{n}\frac{1}{2^r}\left(cotg\,\frac{\pi}{2^r}-2\,cotg\,\frac{\pi}{2^{r-1}}\right)$$

بنابه قاعده ادغام نتیجه می‌شود

$$S_n=\frac{1}{2^n}\,cotg\,\frac{\pi}{2^n}$$

لذا

$$S=\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim \frac{1}{2^n}\cot g\frac{\pi}{2^n}=\frac{1}{\pi}$$

تذکر: اگر تابع f در نقطه صفر حد داشته باشد و هر دنباله‌ای مانند $\frac{1}{2^n}$ به صفر میل کند، آنگاه $f\left(\frac{1}{2^n}\right)$ نیز به حد تابع در نقطه صفر میل خواهد کرد.

۳. ماکزیمم تابع f با ضابطهٔ

$$f(x)=(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2$$

به ازاء چه مقداری از x به دست می‌آید. و این مقدار ماکزیمم را پیدا کنید.

حل. ضابطه تابع را به صورت

$$f(x)=(1-x)^4(1-x^2)(1+2x)^2$$

می‌نویسیم، اگر $|x|\leqslant 1$ آنگاه $f(x)\geqslant 0$ و اگر $|x|>1$ آنگاه $f(x)<0$. بنابراین کافی است فقط به ازاء xهائی که $|x|<1$ تابع را بررسی کنیم.

بنابر نامساوی واسطه هندسی و حسابی در مورد پنج عامل $1-x$ و یك عامل $1+x$ و دو عامل $1+2x$ چنین داریم

$$(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2\leqslant$$

$$\left(\frac{5(1-x)+(1+x)+2(1+2x)}{5+1+2}\right)^{5+1+2}=1$$

در نتیجه به ازاء هر x،

$$\operatorname{Max} f(x)=1 \text{ و } f(x)\leqslant 1$$

و این ماکزیمم وقتی رخ می‌دهد که همه عاملها مساوی باشند؛

$$1-x=1+x=1+2x$$

یعنی $x=0$.

۴. فرض کنیم به ازاء هر $-1\leqslant x\leqslant 1$،

$$-1\leqslant ax^2+bx+c\leqslant 1$$

که a، b و c اعداد حقیقی هستند. ثابت کنید به ازاء هر $-1\leqslant x\leqslant 1$، داریم

$$-4\leqslant 2ax+b\leqslant 4$$

تعمیم مسأله فوق چنین است.

اگر

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$$

یك چند جمله‌ای از درجه n با ضرائب حقیقی $a_n,\ldots,a_1,a_0$ باشد. به طوریکه برای هر $-1\leqslant x\leqslant 1$،

$$-1\leqslant f(x)\leqslant 1$$

ثابت کنید برای هر $-1\leqslant x\leqslant 1$،

$$-n^2\leqslant f'(x)\leqslant n^2$$

حل. اگر

$f(x)=ax^2+bx+c$ آنگاه $f'(x)=2ax+b$

و چون $f'(x)$ اکیداً یکنواست لذا ماکزیمم و مینیمم خود را درنقاط انتهائی اختیار می‌کند. واین مقادیر اکسترمم درفاصله $[-1, 1]$ برابر

$$f'(-1)=-2a+b \quad \text{و} \quad f'(1)=2a+b$$

است. برای محاسبه مقادیر فوق چنین داریم

$$(1)\ -1\leqslant f(-1)=a-b+c\leqslant 1$$

$$(2)\ -1\leqslant -f(0)=-c\leqslant 1$$

$$(3)\ -1\leqslant f(1)=a+b+c\leqslant 1$$

از جمع روابط (۱) و (۲) داریم

$$(4)\ -2\leqslant a-b\leqslant 2$$

از جمع روابط (۲) و (۳) داریم

$$(5)\ -2\leqslant a+b\leqslant 2$$

و از جمع روابط (۴) و (۵) داریم

$$-2\leqslant a\leqslant 2$$

و از این رابطه و روابط (۴) و (۵) به دست می‌آید؛

$$-4\leqslant 2a-b\leqslant 4$$

یا

$$-4\leqslant -2a+b\leqslant 4$$

و

$$-4\leqslant 2a+b\leqslant 4$$

که مشخص است مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f'(x)$ در فاصله $[-1, 1]$ می‌باشند. در نتیجه به ازاء هر

$$-1\leqslant x\leqslant 1 \text{ ، } -4\leqslant 2ax+b\leqslant 4$$

۵. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I=\int_{۱}^{۵}\frac{\sqrt{۷-x}}{\sqrt{۱+x}+\sqrt{۷-x}}\,dx$$

حل. اگر

$$۱+x=۷-t$$

آنگاه

$$dx=-dt \quad \text{و} \quad x=۶-t$$

پس

$$I=\int_{۵}^{۱}\frac{\sqrt{۱+t}}{\sqrt{۷-t}+\sqrt{۱+t}}(-dt)$$

$$=\int_{۱}^{۵}\frac{\sqrt{۱+t}}{\sqrt{۷-t}+\sqrt{۱+t}}\,dt$$

$$=\int_{۱}^{۵}\frac{\sqrt{۱+x}}{\sqrt{۱+x}+\sqrt{۷-x}}\,dx$$

بنابراین،

$$۲I=\int_{۱}^{۵}dx=x\Big|_{۱}^{۵}=۲ \Longrightarrow I=۲$$

تذکر:

اگر f در فاصله $[a, b]$ تابعی انتگرالپذیر باشد به سادگی ثابت می‌شود،

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$$

پس اگر

$$f(x)=\frac{\sqrt{۷-x}}{\sqrt{۱+x}+\sqrt{۷-x}} \quad \text{و} \quad a=۱ \quad \text{و} \quad b=۵$$

آنگاه

$$f(۶-x)=\frac{\sqrt{۱+x}}{\sqrt{۷-x}+\sqrt{۱+x}}$$

و لذا انتگرال محاسبه می‌شود.

۶. فرض کنیم A یك ماتریس حقیقی ۳×۳ با دترمینان منفی باشد. نشان دهید هیچ ماتریس حقیقی B روی اعداد حقیقی وجود ندارد به طوری که A یك ماتریس الحاقی (وابسته) ماتریس B باشد.

حل. فرض کنیم A ماتریس الحاقی ماتریس B باشد یعنی $A=\mathrm{adj}B$. در این صورت $AB=|B|I$ که $|B|=\det B$ و از این رابطه نتیجه می‌گیریم

$$|A|=|B|^{۲} \quad \text{یا} \quad |A|\,|B|=|B|^{۳}$$

اما $|A|<۰$ لذا رابطه $|A|=|B|^{۲}$ غیر ممکن است.

۷. فرض کنیم A و B دو عضو یك گروه باشند بقسمی که $ABA=BA^{۲}B$، $A^{۳}=۱$. و به ازای nای $B^{۲n-۱}=۱$ ثابت کنید $B=۱$. (۱ عضو خنثی گروه است).

حل. چون $A^{۳}=۱$ لذا

$$ABA=BA^{-۱}B \quad \text{و} \quad A^{۲}=A^{-۱}$$

بنابراین

$$AB^{۲}=ABA\cdot A^{-۱}B=BA^{-۱}BA^{-۱}B$$
$$=BA^{-۱}\cdot ABA=B^{۲}A$$

لذا به استقراء به سادگی داریم،

$$AB^{۲k}=B^{۲k}A$$

در نتیجه

$$AB=AB^{۲n}=B^{۲n}A=BA$$

یعنی A و B تعویض‌پذیر می‌باشند و چون

$$ABA=BA^{۲}B$$

نتیجه می‌گیریم $A^{۲}B=A^{۲}B^{۲}$ یا $B=B^{۲}$

و چون $B\neq ۰$، لذا $B=۱$.

۸. اگر x یك عدد حقیقی مثبت و n یك عدد صحیح منفی باشد ثابت کنید

$$۱+\frac{n}{۱+x}\leqslant\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{n}$$

حل، ابتدا نامساوی برنولی را یادآوری می‌کنیم اگر x عددی حقیقی، $x\geqslant -۱$ و n عددی طبیعی باشد آنگاه $(۱+x)^{n}\geqslant ۱+nx$ این نامساوی با استقراء به سادگی ثابت می‌شود.

حال اگر $m=-n$ آنگاه $m>۰$ بنابر نامساوی فوق داریم:

$$\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{n}=\left(\frac{x}{۱+x}\right)^{-n}=\left(\frac{۱+x-۱}{۱+x}\right)^{m}$$

$$=\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^m \geqslant 1-\frac{m}{1+x}$$
$$=1+\frac{n}{1+x}$$

تذکر. اثبات نامساوی Bernoulli

اگر $n=1$ یا $1+x=0$ آنگاه برقرار است فرض کنیم

$$(1+x)^k \geqslant 1+kx$$

چون $1+x>0$ لذا با ضرب طرفین نامساوی در $1+x$ داریم؛

$$(1+x)^{k+1} \geqslant (1+kx)(1+x)$$
$$=1+(k+1)x+kx^2 \geqslant 1+(k+1)x$$

۹. سه عدد طبیعی متمایز پیدا کنید به طوری که مجموع معکوسات آنها عددی طبیعی باشد.

حل. فرض کنیم این سه عدد طبیعی a، b و c باشند و باید $a<b<c$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=n$$

که درآن n عددی طبیعی است. چون a، b و c به ترتیب نمی‌توانند کوچکتر از ۱، ۲ و ۳ باشند در نتیجه

$$n=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$$

لذا $n=1$ و چون

$$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$$

پس

$$\frac{1}{a}<n=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{3}{a}$$

که در نتیجه $1<a<3$ لذا $a=2$ و

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$$

چون $\frac{1}{c}<\frac{1}{b}$ در نتیجه

$$\frac{1}{b}<\frac{1}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{2}{b}$$

بنابراین

$$\frac{1}{b}<\frac{1}{2}<\frac{2}{b} \quad \text{یا} \quad 2<b<4$$

که $b=3$ است و سرانجام $c=6$ به دست می‌آید.

۱۰. فرض کنیم k کوچکترین عدد صحیح مثبت با خاصیت زیر باشد:

اعداد صحیح ومتمایز m_1، m_2، m_3، m_4 و m_5 موجود باشند به طوری که چند جمله‌ای

$$P(x)=(x-m_1)(x-m_2)(x-m_3)(x-m_4)(x-m_5)$$

درست k ضریب مخالف صفر داشته باشد.

اعداد صحیح m_1، m_2، m_3، m_4 و m_5 را بقسمی تعیین کنید که k مقدار مینیمم خود را بگیرد و این مقدار k را پیدا کنید.

حل. از فرض واضح است که ضریب x^5 مخالف صفر است لذا می‌توانیم بنویسیم؛

$$P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

همچنین از d و e حداقل یکی مخالف صفر است زیرا در غیر این صورت عامل x^2 وجود دارد و دو تا از m_iها مساوی و برابر صفر می‌شوند.

از طرف دیگر بنابر روابط بین ریشه‌ها داریم؛

$$\sum_{i=1}^{5} m_i^2=\left(\sum_{i=1}^{5} m_i\right)^2-2\sum_{i<j} m_i m_j=a^2-2b$$

اما، $\sum_{i=1}^{5} m_i^2>0$ لذا $a^2-2b>0$ و حداقل یکی از a یا b مخالف صفر است.

بنابراین $k\geqslant 3$.

قرار می‌دهیم $m_1=-2$، $m_2=-1$، $m_3=0$، $m_4=1$ و $m_5=2$. سپس

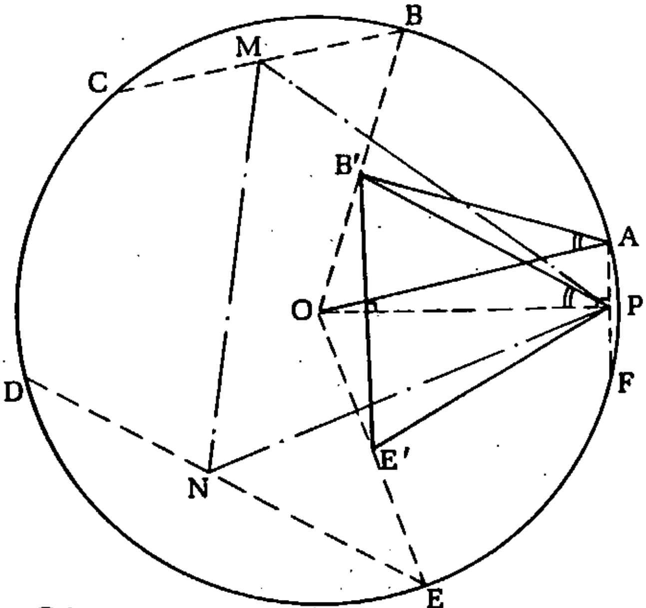
$$P(x)=x(x^2-1)(x^2-4)=x^5-5x+4$$

بنابراین $k=3$ و این مقدار k با انتخاب m_iها به دست می‌آید.

۱۱. بردایره (C) به مرکز O سه کمان AB، CD و EF هم جهت بوده و اندازه هریک 60° است. اگر B' وسط OB و E' وسط OE، M، N و P به ترتیب وسطهای وترهای BC، DE و AF باشند. ثابت کنید مثلثهای $PB'E'$ و PMN متساوی‌الاضلاع هستند.

حل. چون $\widehat{AB}=\widehat{EF}$ و P وسط AF است بنابه تقارن $PB'=PE'$، یعنی مثلث $PB'E'$ متساوی‌الساقین است. از

طرف دیگر مثلث OAB متساوی‌الاضلاع ولذا AB' بر OB عمود و زاویه OAB' برابر °۳۰ است و چـون چهارضلعی $OPAB'$ محاطـی است، در نتیجه اندازه زاویه OPB' نیز برابر °۳۰ و مثلث $PB'E'$ متساوی‌الاضلاع است.

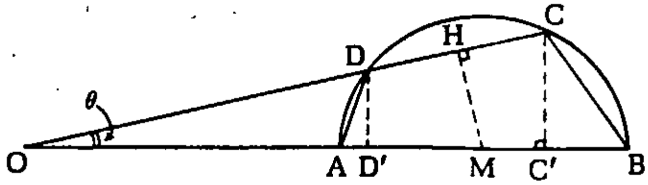


برای قسمت دوم گـوئیم، MB' موازی و مساوی $\frac{OC}{۲}$ و NE' موازی و مساوی $\frac{OD}{۲}$ و چون زاویه $C\hat{O}D$ برابر °۶۰ است لـذا زاویـه بین MB' و NE' نیز برابر °۶۰ است. همچنین $MB'=NE'$. بنابراین در دوران بـه مرکز P و زاویه °۶۰ که B' بر E' منطبق می‌شود، M نیز بر N منطبق می‌گردد. یعنی

$$M\hat{P}N=۶۰^\circ \quad \text{و} \quad PM=PN$$

و در نتیجه مثلث PMN متساوی‌الاضلاع است.

۱۲. مطابق شکل زیر از نقطه O روی امتداد قطر AB از نیم دایره قاطع ODC را رسم مـی‌کنیم. ثابت‌کنید مساحت چهارضلعی ABCD وقتی ماکزیمم است‌کـه تصویر عمودی DC روی قطر AB برابر R شعاع نیمدایره باشد.



حل. فرض‌کنیم M مرکز دایره، وبرای سادگی محاسبات شعاع نیمدایره را برابر واحد انتخاب می‌کنیم. فرض‌کنیم،

$$\widehat{COB}=\theta \quad \text{و} \quad OM=m \quad \text{و} \quad CD=۲a$$

در مثلث قائم‌الزاویه OMH داریم؛

$$\cos\theta=\frac{OD+a}{m}$$

یا

$$OD=m\cos\theta-a$$

و لذا،

$$OC=OD+۲a=m\cos\theta+a$$

و

$$OC\cdot OD=m^۲-۱$$

یا

$$m^۲\cos^۲\theta-a^۲=m^۲-۱$$

در نتیجه،

$$a=\sqrt{۱-m^۲\sin^۲\theta}$$

همچنین

$$OA=m-۱ \quad \text{و} \quad OB=m+۱$$

بنابراین،

$$S_{ABCD}=S_{OBC}-S_{OAD}$$
$$=\frac{۱}{۲}OB\cdot OC\sin\theta-\frac{۱}{۲}OA\cdot OD\sin\theta$$
$$=\frac{۱}{۲}\big((m+۱)(m\cos\theta+a)$$
$$-(m-۱)(m\cos\theta-a)\big)\sin\theta$$
$$=m(a+\cos\theta)\sin\theta$$
$$=m\sin\theta(\sqrt{۱-m^۲\sin^۲\theta}+\cos\theta).$$

اکنون اگر از رابطه فوق نسبت به θ مشتق بگیریم از مساوی صفر قرار دادن مشتق و مرتب کردن‌آن چنین داریم؛

$$(۲a\cos\theta-۱)(a+\cos\theta)=۰$$

و از رابطه فوق ماکزیمم وقتی به دست می‌آید که

$$۲a\cos\theta=R \quad \text{یا} \quad ۲a\cos\theta=۱$$

۱۳. اگر O و I به ترتیب مراکز دایره‌هـای محیطی و محاطی داخلی مثلث ABC و نقاط M، H و D به ترتیب پای میانه و ارتفاع و نیمساز رأس A روی ضلع BC باشند مثلث ABC را در هریك از حالتهای ذیل رسم کنید.

الف ـ نقاط O، M و I معلوم باشند.

ب ــ نقاط O، H و D معلوم باشند.

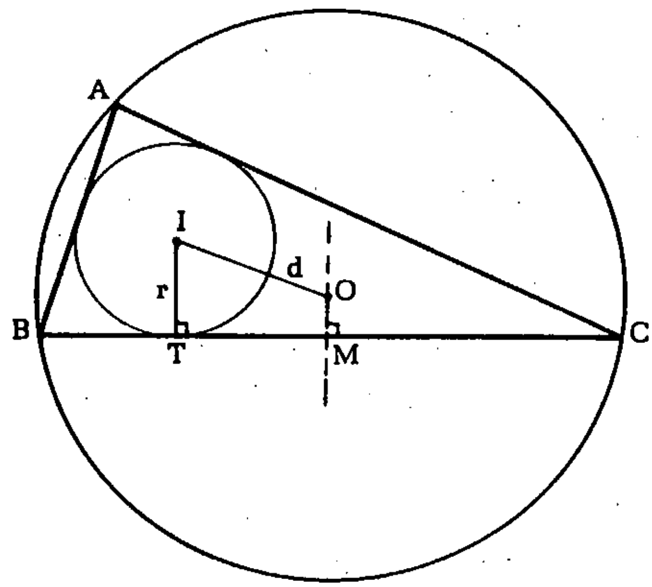
حل.

الف) فرض کنیم O و M برهم منطبق نباشند.

همچنین فاصله دو نقطه O و I را برابر d می‌گیریم.

واضح است که فاصله I تا ضلع BC برابر r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC است. چون OM معلوم است اگر از M خطی عمود بر OM رسم کنیم ضلع BC روی آن واقع است و دایره‌ای که به مرکز I بر این خط مماس می‌شود، همان دایره محاطی داخلی مثلث ABC است. لذا r نیز معلوم است. اکنون بنا بر رابطه اویلر،

$$d^2=R(R-2r)$$



که R شعاع دایره محیطی مثلث ABC است داریم،

$$R=r+\sqrt{r^2+d^2}$$

یعنی R نیز معلوم می‌شود.

پس دایره محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم رئوس B و C مشخص می‌شوند، از B مماس بر دایره محاطی داخلی مثلث را رسم می‌کنیم رأس A نیز مشخص می‌شود.

اگر O و M برهم منطبق و I منطبق بر آنها نباشد، آنگاه مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است. و در این حالت جواب منحصر به‌فردی نداریم. و r هر مقداری می‌تواند باشد به طوری که $0<r\leqslant d$. اگر $r=d$ آنگاه مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. اگر $r=\frac{d}{\sqrt{2}}$ آنگاه زوایای مثلث ۹۰°، ۶۰°، ۳۰° می‌باشند.

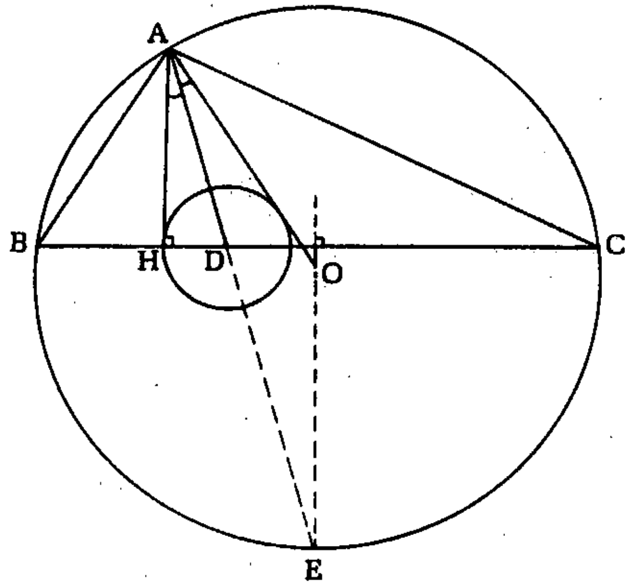
حل.

ب ــ ابتدا فرض می‌کنیم H و D برهم منطبق نباشند.

می‌دانیم در هر مثلث، نیمساز هر زاویه، نیمساز زاویه بین ارتفاع و قطر دایره محیطی گذرنده از رأس آن زاویه نیز می‌باشد. (با توجه به شکل آن را ثابت کنید).

لذا اگر به مرکز D و شعاع DH دایره‌ای رسم کنیم این دایره بر OA و AH مماس است.

بنابراین برای رسم، ابتدا خط DH را رسم می‌کنیم، سپس دایرهٔ به مرکز D و شعاع DH را رسم کرده از H و همچنین از O مماسهائی بر آن رسم می‌کنیم محل تلاقی این دو



مماس رأس A می‌باشد به این ترتیب، OA یعنی R شعاع دایره محیطی مثلث ABC نیز مشخص می‌شود. دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم دو رأس B و C نیز مشخص می‌شوند.

اگر D و H برهم منطبق شوند مثلث متساوی‌الساقین است و مسأله بی‌شمار جواب دارد. هر دایره به مرکز O و شعاع بزرگتر از OH که رسم کنیم، یك مثلث مشخص می‌شود در حالت خاصی که O، H و D هر سه برهم منطبق شوند، مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین می‌شود.

۱۴. اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$ ثابت کنید

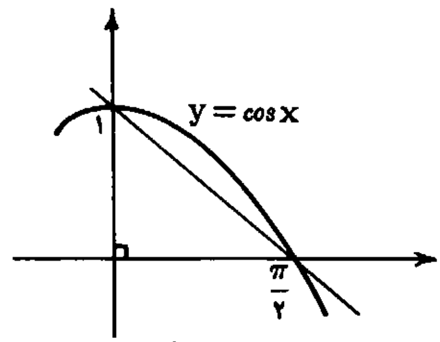
$$tg x<\frac{\pi x}{\pi-2x}$$

حل. می‌دانیم اگر

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $\sin x < x$.

اکنون اگر نمودار تابع $y=\cos x$ را در فاصله $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$ درنظر بگیریم معادله خطی که نقاط $(0 , 1)$ و $\left(\frac{\pi}{2} , 0\right)$ را بهم وصل می‌کند

$$f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$$



است و همواره در فاصله $\left(0 , \frac{\pi}{2}\right)$ پائین‌نمودار $y=\cos x$ است. لذا در فاصله $\left(0 , \frac{\pi}{2}\right)$، $\cos x > 1 - \frac{2x}{\pi}$ (در واقع تابع $y=\cos x$ در فاصله $\left(0 , \frac{\pi}{2}\right)$ محدب است).

بنابراین

$$tg x = \frac{\sin x}{\cos x} < \frac{x}{1 - \frac{2x}{\pi}} = \frac{\pi x}{\pi - 2x}$$

۱۵. فرض‌کنیم که s واسطه هندسی اعضای مجموعه S متشکل از n عدد مثبت باشد. اگر S_k زیر مجموعه ناتهی kام S و s_k واسطه هندسی اعضای S_k باشد نشان دهید که s واسطه هندسی s_kها است.

حل. فرض‌کنیم،

$$S = \{x_1 , x_2 , \cdots , x_n\}$$

و S_k زیرمجموعه غیرتهی S شامل k عضو باشد، $k > 0$.
اگر s_k واسطه هندسی اعضای S_k باشدآنگاه،

$$1 \leqslant i < j \cdots < e \leqslant n ، s_k = \sqrt[k]{\underbrace{x_i x_j \cdots x_e}_{k \text{ تا}}}$$

می‌دانیم تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی S برابر $\binom{n}{k}$ است و هر عضو S متعلق به $\binom{n-1}{k-1}$ تا از این زیر مجموعه‌های k عضوی می‌باشد. حال اگر s' واسطه هندسی s_kها باشدآنگاه،

$$s' = \sqrt[\binom{n}{k}]{\sqrt[k]{(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\binom{n-1}{k-1}}}}$$

$$= (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{\binom{n-1}{k-1}}{k\binom{n}{k}}}$$

$$= (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} = s$$

۱۶. اگر x، y و z اعدادی صحیح باشند جوابهای معادله‌های زیر را پیدا کنید.

الف ـ $1 + 3^x = 7^y + 3^z$

ب ـ $1 + 5^x = 7^y + 5^z$

حل.

الف ـ اگر $y = 0$، آنگاه $3^x = 3^z$ و لذا $x = z$.
اگر $y < 0$، آنگاه

$$0 < 7^y = 1 + 3^x - 3^z < 1$$

که نتیجه می‌دهد

$$x < z < 0$$

لذا،

$$7^y + 3^z < 1 \quad \text{و} \quad 1 + 3^x > 1$$

که یك تناقض است، پس $y < 0$ نمی‌تواند باشد.
اگر $y = 1$،آنگاه

$$3^{x-1} - 3^{z-1} = 2 \quad \text{یا} \quad 3^x - 3^z = 6$$

که در نتیجه $z = 1$ و $x = 2$.
فرض‌کنیم $y \geqslant 2$. پس $1 + 3^x > 49$ ولذا $x > 3$ و $z \geqslant 1$. با کاهش به پیمانه ۲۷، (۱) اگر $z = 1$ و ۲ یا $z \geqslant 3$ آنگاه به ترتیب

$$y \equiv 4, 3, 0 \pmod{9}$$

دو حالت اول با کاهش به پیمانه ۳۷ خارج شده درصورتی که حالت سوم در همان همنهشتی به دست می‌آید

$$x \equiv z \pmod{18}$$

که اثبات‌آن با توجه به (۱) به هنگ ۷ غیر ممکن است.
بنابراین جوابها فقط $(x, 0, x)$ و $(2, 1, 1)$ هستند.

ب ـ مانند آنچه در قسمت الف بیان شد یک دسته جواب $y=0$ و $x=z$ است و درحالتی‌که $y>0$ معادله جواب ندارد. فرض کنیم $y>0$. با به کار بردن به پیمانه ۵ به دست می‌آید، $y\equiv 0 \pmod{4}$. سپس با کاهش به پیمانه ۲۱ به دست می‌آید $x\overset{6}{\equiv}1$ و $z\overset{6}{\equiv}3$ یا $x\overset{6}{\equiv}0$ و $z\overset{6}{\equiv}4$، درصورتی‌که با کاهش به پیمانه ۹ به دست می‌آید

$$y=1 \pmod{3}$$

سرانجام، با به کار بردن به پیمانه ۱۳، هیچ جوابی وجود ندارد و لذا جوابها همان $y=0$ و $x=z$ است.

۱۷. الف ـ آیا عدد صحیحی مانند x موجود است که از تقسیم آن بر ۸ و ۱۲، به ترتیب باقیمانده‌های ۶ و ۷ به‌دست آید؟ درصورتی‌که باقیمانده x در تقسیم بر اعداد ۸ و ۱۲ به ترتیب، ۲ و ۱۰ باشد کلیه این نوع xها را پیدا کنید. (درصورت وجود).

ب ـ فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند. شرط لازم و کافی برای اینکه باقیمانده‌های x درتقسیم بر m و n، به ترتیب برابر a و b باشد، چیست؟

حل. باید دستگاه معادلات همنهشتی
$$\begin{cases} x\equiv 6 \pmod{8} \\ x\equiv 7 \pmod{12} \end{cases}$$
جواب مشترک داشته باشد که این ممکن نیست، زیرا ازمعادله اول نتیجه می‌شود $x=8k+6$ که اگر آن را در معادله دوم قرار دهیم داریم،

$$8k+6\equiv 7 \pmod{12} \quad \text{یا} \quad 8k\equiv 1 \pmod{12}$$

چون بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک ۸ و ۱۲ عدد ۱ را عاد نمی‌کند پس معادله جواب ندارد. $(8,\ 12)\nmid 1$.

برای آنکه باقیمانده x بر ۸ و ۱۲ به ترتیب ۲ و ۱۰ باشد باید دستگاه
$$\begin{cases} x\equiv 2 \pmod{8} \\ x\equiv 10 \pmod{12} \end{cases}$$
دارای جواب باشد. که این دستگاه جواب دارد زیرا

$$x=2+8k$$
$$2+8k\equiv 10 \pmod{12}$$
$$8k\equiv 8 \pmod{12}$$
$$k\equiv 1 \pmod{3}$$

لذا

$$k=1+3t$$

و

$$x=2+8k=10+24t$$

درحالت کلی ثابت می‌شود که دستگاه معادله همنهشتی
$$\begin{cases} x\equiv a \pmod{n} \\ x\equiv b \pmod{m} \end{cases}$$
جواب دارد (یعنی جواب مشترک دارد) اگر و فقط اگر

$$a\equiv b \pmod{(m,\ n)}$$

که $(m,\ n)$ ب.م.م m و n است.

۱۸. روی دایره مفروضی، شش نقطه A، B، C، D، E و F به تصادف و مستقل، به طور یکنواخت انتخاب شده‌اند. احتمال اینکه دو مثلث ABC و DEF جدا از هم باشند، یعنی هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند، چیست؟

حل. نقطه A را انتخاب می‌کنیم. دو مثلث هیچ نقطه مشترکی ندارند اگر و فقط اگر پنج نقطه باقیمانده، در جهت عقربه‌های ساعت از A خوانده شوند. آنها به صورت

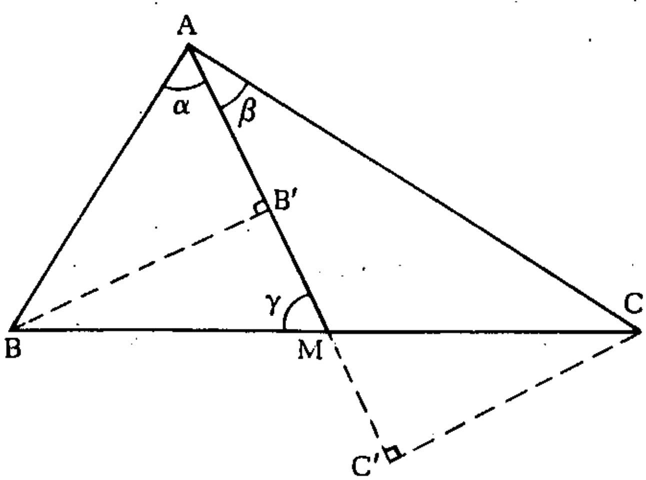
PQXYZ، PXYZQ یا XYZPQ

مرتب می‌شوند که P و Q جایگشتهای B و C و X، Y، Z جایگشتهای D، E و F هستند. چون پنج نقطه B، C، D، E و F می‌توانند به صورت !۵ مرتب شوند بنابراین احتمال برابر است با،

$$\frac{3\times 2!\times 3!}{5!}=\frac{3}{10}$$

۱۹. ثابت کنید اگر میانه AM از مثلث ABC با اضلاع AB و AC به‌ترتیب زوایای α و β و با ضلع BC زاویه γ بسازد، در این صورت

$$\frac{2}{tg\gamma}=\frac{1}{tg\beta}-\frac{1}{tg\alpha}$$



حل. از B و C برمیانه AM عمود می‌کنیم، داریم؛

$$tg\gamma=\frac{BB'}{MB'}=\frac{CC'}{MC'}$$

$$tg\alpha=\frac{BB'}{AB'} \quad \text{و} \quad tg\beta=\frac{CC'}{AC'}$$

و

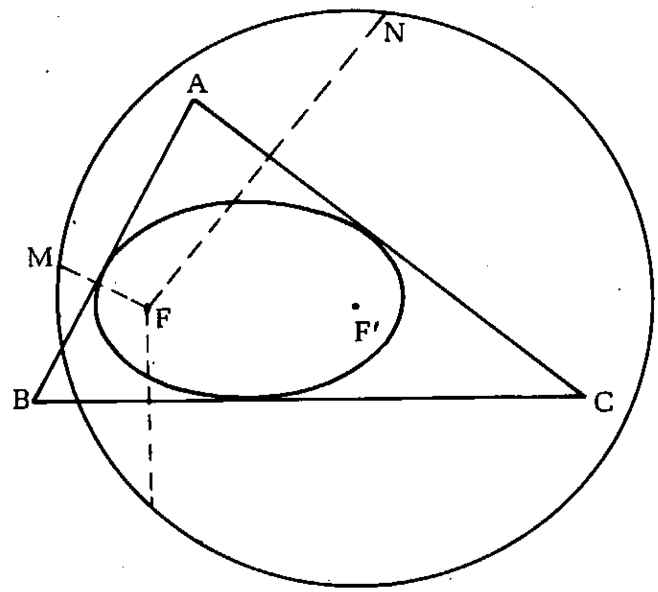
$$BB'=CC' \text{،} MB'=MC'$$

بنابراین

$$\frac{1}{tg\beta}-\frac{1}{tg\alpha}=\frac{AC'}{CC'}-\frac{AB'}{BB'}$$

$$=\frac{AC'-AB'}{BB'}=\frac{2MB'}{BB'}=\frac{2}{tg\gamma}$$

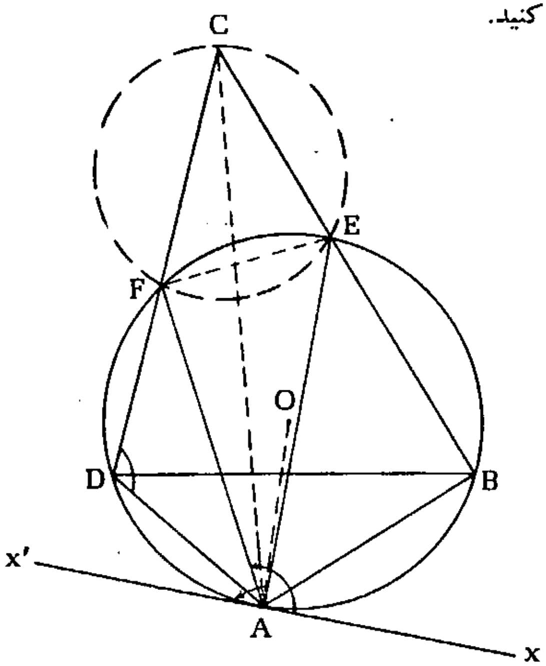
۴۰. ثابت کنید مرکز دایره‌ای که از قرینه‌های نقطه دلخواهی در درون مثلث مفروض نسبت به‌اضلاع آن می‌گذرد، درون آن مثلث واقع است.



حل. فرض کنیم F نقطه‌ای دلخواه داخل مثلث ABC باشد و M، N و P قرینه‌های F نسبت به اضلاع مثلث باشند. در این صورت همواره یك بیضی وجود دارد که F یك کانون و سه ضلع مثلث سه مماس بر آن باشند. بنابراین M، N و P روی دایره هادی کانون دیگر بیضی واقع‌اند و چون‌کانون F' همواره داخل بیضی قرار دارد لذا درون مثلث است. یعنی F' مرکز دایره درون مثلث است.

حل مسأله مسابقه شماره ۱۸

از چهارضلعی دو قطر و زوایا معلوم است چهارضلعی را رسم کنید.



حل. فرض کنیم ABCD چهارضلعی مطلوب باشد چون از A مماس x'x را بر دایرهٔ محیطی مثلث ABD رسم کنیم؛ $A\hat{B}C=x'\hat{A}E$ و $x\hat{A}F=A\hat{D}C$ همچنین قطر BD چهارضلعی و زاویه $D\hat{A}B$ ازآن معلوم‌اند، لذا شعاع دایره محیطی مثلث ABD معلوم است. بنابراین برای حل چنین عمل می‌کنیم. از نقطه اختیاری A روی x'x دو خط AF و AE را چنان رسم می‌کنیم که

$$E\hat{A}x'=\hat{B} \quad \text{و} \quad F\hat{A}x=\hat{D}$$

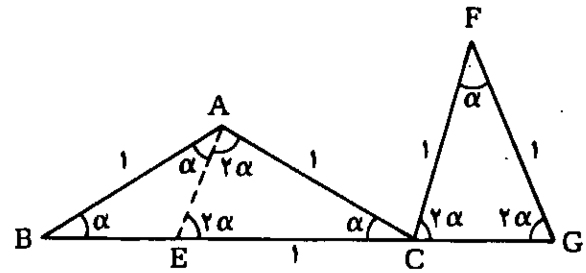
و از A عمودی بر x'x اخراج کرده و روی‌آن OA را مساوی شعاع دایره محیطی مثلث DAB جدا می‌کنیم. (این شعاع از رسم‌کمان درخور زاویه A که روی BD رسم می‌شود، به دست می‌آید) ولذا دایره محیطی مثلث ABD را رسم می‌کنیم تا دو نقطه E و F مشخص شوند. سپس روی EF کمان در خور زاویه C را رسم کرده و به مرکز A و شعاع AC دایره‌ای رسم می‌کنیم که‌کمان فوق را در C قطع کند؛ از C به E و F وصل می‌کنیم خطوط حاصل هرجا دایره محیطی مثلث ABC را قطع کنند، B و D مشخص می‌شوند.

تعیین پاره‌خطی که طول آن عدد طلایی است و روش ساده رسم پنج ضلعی منتظم

تنظیم از: دکتر حسن صادقی ـ عضو هیأت علمی دانشگاه مشهد

الف: رسم پاره خطی که اندازه آن عدد طلایی $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ است.

۱: مثلثی که زوایای داخلی آن مضرب صحیحی از $\alpha = 36^\circ$ باشد به یکی از دو صورت زیر است که به صورت مثلث‌های متساوی‌الساقین رسم شده‌اند که قاعده‌های آنها بر یك خط واقع است.



۲: در مثلث ΔABC اگر $AB = AC = 1$ باشد نقطه E را برضلع BC چنان اختیار می‌کنیم که $EC = AC = 1$ باشد در این صورت اگر $BC = x$ باشد $EB = x - 1$ است.

۳: نتیجه مرحله ۲ این است که ΔAEB با ΔBAC متشابه است و داریم:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{AB}$$

یا

$$\frac{1}{x} = \frac{x-1}{1}$$

و

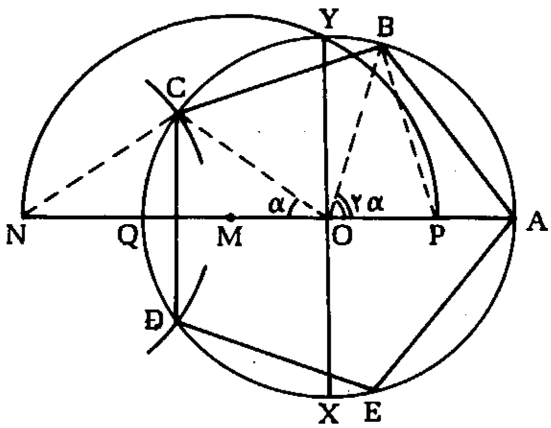
$$x^2 - x - 1 = 0 \implies x = \left| \begin{array}{l} \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ \text{یا} \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array} \right.$$

پس قاعده مثلث متساوی‌الساقین ΔBAC که زاویه رأس آن 108° و ساقهای آن برابر واحد باشند عدد طلایی $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ است. به سادگی نتیجه می‌شود که قاعده مثلث متساوی‌الساقین ΔCFG عدد $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ یعنی عکس عدد طلایی است.

ب: رسم پنج ضلعی منتظم

۱: دایره‌ای رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم O مرکز دایره و R شعاع آن است.

۲: دوقطر عمود برهم AQ و YX از این دایره را رسم می‌کنیم.



۳: به مرکز M، نقطه وسط OQ و به شعاع MY دایره‌ای رسم می‌کنیم. این‌دایره خط $\overleftrightarrow{AQ}$ را درنقاط P و N قطع می‌کند.

۴: به مرکز P و به شعاع R (شعاع دایره O) دایره‌ای رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن را با دایره O نقاط B و E می‌نامیم. همچنین به مرکز N و به شعاع R دایره دیگری رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن را با دایره O و نقاط C و D می‌نامیم. پنج ضلعی ABCDE پنج ضلعی منتظم است. زیرا با فرض $R = 1$ به سادگی نتیجه می‌شود که دو مثلث متساوی‌الساقین ΔNCO و ΔOBP همان‌خواص مثلثهای قسمت الف را دارند و

$$ON = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

و

$$OP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

و

$$(\angle BOA)^\circ = 72^\circ$$

مرجع:

Mathematics Teacher. N. 8: 1989.

اسامی خوانندگانی
که حل مسائل ۲۳را برای ما فرستاده‌اند

تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱- آقای علیرضا فیض بخشی دانشجوی رشته ریاضی از دانشگاه تبریز: ۱۱-۳

۲- آقای ایوب‌پور پرویزیان دانشجوی دانشگاه تبریز: ۲۰-۷-۱۱-۴-۳

۳- آقای عظیم شایقی دانشجوی رشته ریاضی از دانشگاه تبریز: ۲

۴- آقای محمدرضا هریسی از تبریز: ۱۴-۲۰-۱۱-۶-۳

۵- آقای ارشك حمیدی، دانش‌آموز از تهران: ۱-۲-۳-۴-۵

۶- آقای مهران محرمیان دانش‌آموز از مشهد: ۱-۴-۶-۷-۸-۱۳-۱۴

۷- آقای محمد علیاری دانش‌آموز از تبریز: ۱-۲-۴-۶-۷-۹-۱۰-۱۹

۸- آقای مهدی نجفی‌خواه، دانشجوی ریاضی دانشگاه علم و صنعت: ۱-۲-۶-۱۴-۱۱-۴-۵

۹- آقای محمدمهدی امینی - دانش‌آموز قرچك ورامین: ۱-۲-۳-۱۱

۱۰- آقای فرشید شعبانی دانش‌آموز رشت: ۱-۲-۸-۱۰-۱۴

۱۱- آقای محمد رمضانی دانش‌آموز تهران: ۴-۱۱

۱۲- روزبه طوری - دانش‌آموز از اصفهان: ۱-۲-۱۴-۱۶

۱۳- آقای پیام ناصرطیوب دانش‌آموز از شیراز: ۳-۸

۱۴- آقای کورش معبر دانشجوی رشته الکترونیك، خانم کتایون معبر دانش‌آموز چهارم ریاضی: ۱-۲-۳-۴-۵-۶-۸-۱۱-۱۴-۱۷-۲۰

۱۵- آقای علی ثابت‌قدم دانش‌آموز ازگچساران: ۱-۲-۳-۴-۷-۹-۱۱-۱۳-۱۴-۱۶-۱۷-۱۹

۱۶- آقای سعید عرفانیان، از مشهد: ۱-۲-۱۱-۱۹

۱۷- آقای حسین روانشاد دانش‌آموز از قم: ۱-۲-۸-۱۱-۱۴

۱۸- خانم نازنین دانش‌آموز از بندرانزلی: ۱

۱۹- آقای پژمان سوداگری دانش‌آموز از تهران: ۳-۷-۹-۱۱-۱۴-۱۸-۲۰

۲۰- آقای آرش صباحی‌فرد، دانش‌آموز: ۱

۲۱- آقای اردوان عوض‌دوانی دانش‌آموز از شیراز: ۱-۲-۳-۴-۸-۱۰-۱۱-۱۴-۱۹

۲۲- آقای شاهین موسوی، دانش‌آموز از مشهد: ۱-۳-۵-۶-۱۰-۱۱-۱۹

۲۳- آقای هومن نمیرانیان دانش‌آموز: ۱-۲-۳-۸-۱۳

۲۴- آقای اصغر حسن‌نژاد دانش‌آموز از تبریز: ۱-۲-۸

۲۵- خانم رویا فرهی‌مقدم دانش‌آموز ازکرمان: ۱-۴-۸

۲۶- آقای رضا فرهی‌مقدم دانش‌آموز ازکرمان: ۱-۲-۳-۴-۷-۹-۱۱-۱۴-۱۷

۲۷- آقای داریوش افتخارپور دانشجو از تهران: ۱-۲-۶-۱۰-۱۱-۱۹

۲۸- آقای حسین پیرهادی دانش‌آموز از تهران: ۱-۲-۱۹

۲۹- آقای هادی هادی‌زاده از نجف‌آباد: ۱۰-۱۶

۳۰- آقای مسعود ترکمن دانش‌آموز از تهران: ۸-۱۱

۳۱- آقای حمیدرضا نادعلیزاده، دانش‌آموز از مشهد: ۱-۲-۱۰-۱۹

۳۲- آقای حمیدرضا مهریزی، دانش‌آموز از تهران: ۱

۳۳- آقای محمدمهدی امینی دانش‌آموز ازقرچك ورامین: ۲۰

۳۴- آقای مسعود طاهرخانی از قزوین: ۲-۲۰

اسامی همکاران و دانش‌آموزانی که حل صحیح مسائل شمارهٔ ۲۲ و شماره‌های قبلی را فرستاده‌اند.

تهیه و تنظیم از: محمود نصیری

علی‌اکبر جاوید مهر دبیر ریاضی از ساوه: ۱،۲،۹،۱۷،۱۹.

داوید ربیب دانش‌آموز از تهران: ۷،۸،۹،۱۹.

بهزاد انشائیان از تهران: ۱،۲،۴،۵،۷،۸،۱۵،۱۹.

سید مهدی هاشمی دانش‌آموز از قم: ۱،۲،۳،۴،۵،۱۴،۱۹،۲۰.

محمد علیپور اسکندانی دانشجو از تبریز: ۱،۲،۳،۵،۷،۸،۹،۱۴،۱۶،۱۷،۱۹.

غلامرضا صفری‌نژاد دانش‌آموز از بندرانزلی: ۱،۲،۴،۵،۷،۸،۹،۱۳،۱۵،۱۷،۱۸،۱۹.

کوروش بهادری و محمد اسفندیار دانش‌آموز از فریدون‌کنار: ۱،۲،۴،۷،۸،۹،۱۵،۱۹.

سعید عرفانیان دانش‌آموز از مشهد: ۲،۸،۹،۱۹.

علی احمدی دانش‌آموز از تهران: ۱،۲،۱۹.

محمدعلی مهدی‌آبادی دانشجو از بیرجند: ۱،۸،۹،۱۰،۱۵،۱۹.

داریوش افتخارپور دانشجو از تهران: ۱۴،۱۹.

ماهیار شکرچی دانش‌آموز از بندرانزلی: ۲،۸،۱۹.

پریسا مددی دانش‌آموز از مسجد سلیمان: ۱۹.

کورس معبر دانشجو، کتایون معبر دانش‌آموز: ۱،۸.

پژمان سوداگری دانش‌آموز از تهران: ۱،۵،۱۹.

محرم‌آقاپور دانش‌آموز از تبریز: ۱،۳،۸،۱۹.
از ارسال حل مسائل مسابقه متشکریم.

رضا امیرخانی دانش‌آموز از تهران: ۷،۹،۱۳،۱۹.

حسن لاغری‌فیروزجایی دانش‌آموز از بابل: ۱،۲،۴،۱۹.

غلامرضا پیرهادی دانش‌آموز از تهران: ۲.

آرمان امامپور دانش‌آموز از بندرانزلی: ۱۹.

حمیدرضا معصومی دانش‌آموز از قم: ۱،۲،۳،۵،۱۹.

ضرغام مومن‌زاده دانش‌آموز از رشت: ۴،۹.

عبدالله جانزاده دانش‌آموز قزوین: ۲.

امید ممتحن دانش‌آموز از شیراز: ۲.

حمیدرضا زارع‌دوست دانش‌آموز از کاشمر: ۸،۹،۱۷،۱۸،۱۹.

محمدرضا سلطان‌پناه دانشجو از خرم‌آباد: ۵،۸.

غضنفر فدوی دانش‌آموز از گرگان: ۳،۸.

محمدجواد مؤمنی‌آشجردی: ۵.

امیرمعطر دانش‌آموز از تهران: ۱،۵.

سید شاهین حسینی دانشجو از تهران: ۱،۳،۴،۶.

رضا تهذیبی دانش‌آموز از رشت: ۱،۲،۴،۹.

امیرحسین صبوری دانش‌آموز از مشهد: ۱،۲،۸،۱۹.

افشین خاشعی دانش‌آموز از تهران: ۱،۹،۱۵،۱۹.

عباس توللی دانش‌آموز از شیراز: ۹،۱۷.

هادی هادی‌زاده دانش‌آموز از نجف‌آباد: ۱،۱۹.

سید ابوطالب گلباغی از رشت: ۱،۳.

مرتضی جعفری دانش‌آموز از بندرانزلی: ۳،۱۷،۱۸،۱۹.

رهی موسوی دانش‌آموز از تهران: ۴،۸.

علیرضا نوری دانش‌آموز از شیراز: ۱۳.

علی ثابت‌اقدام دانش‌آموز از گچساران: ۶،۱۳.

رضا ناصح و محمدرضا ناصح دانش‌آموز از مشهد: ۱،۸،۹،۲۰ و مسائلی از مسابقه دانش‌آموزی.

حاجی تویلی‌آهنگری: ۲،۱۹.

هما راستی دانش‌آموز از مشهد: ۲،۸.

قاسم علی‌پور دانش‌آموز: ۱،۲،۸،۱۹.

فریبرز ساجد دانش‌آموز از تهران: ۲،۵،۱۴،۱۹.

فرشاد ماهوشی دانش‌آموز از اصفهان: ۸،۱۴ و مسائل مسابقه دانش‌آموزی.

ارشک حمیدی دانش‌آموز از توران: ۲.

محمد علیاری دانش‌آموز از تبریز: ۱،۲،۳،۱۰،۱۹.
مسائل شما نیز دریافت شد متشکریم.

هادی بخشایش: ۱، ۷، ۱۳ از شماره ۱۹ـ۲۰.

دارا حجتی دانش‌آموز: ۱، ۱۳ از شماره ۱۹ـ۲۰.

مسعود کریمی دانش‌آموز از اصفهان: ۱، از ۱۹ـ۲۰.

امیرحسین صبوری دانش‌آموز از مشهد: ۱، ۳، ۱۳ از ۱۹ـ۲۰.

محمدرضا مختارپور دانشجو از تبریز: ۱، ۲، ۴، ۷، ازشماره ۱۹ـ۲۰.

سعید بـردار یاوری دانش‌آموز از سلماس: ۱، شمـاره ۱۹ـ۲۰.

داریوش افتخارپور ازتهران: ۲، ۴، ۱۱، ۱۲ ازشماره ۱۸.

ساسان بختیاری دانش‌آموز از تهران: ۱، ۷، ۲۰ ازشماره ۱۹ـ۲۰.

کیوان آقابابائی دانش‌آموز ازشهرکرد: ۱، ۷، ۱۰، ۱۳، ۲۰ شماره ۱۹ـ۲۰.

محمد جمالو دانش‌آمـوز از قم: ۱، ۷، ۱۳، ۱۷، ۹، ۱۱ شماره ۱۹ـ۲۰.

حمیدرضا سلطان‌زاده دانش‌آموز از شوش دانیال: ۱، ۱۳ شماره ۱۹ـ۲۰.

مهرداد جـلالیان دیپلمه از مشهـد: ۷ شماره ۱۹ـ۲۰ از اوسال مسائل تشکر می‌کنیم.

محمد مهدی‌امینی از قرچك ورامین: ۱، ۲، ۸، ۱۹.

مجید احسانی‌شهی دانش‌آموزازتهران، سید هادی هاشمی دانش‌آموز از رشت: ۱، شماره ۱۹ـ۲۰.

صدرالدین ابوترابی دانش‌آمـوز از تهران: ۱، ۱۳، ۷، ۱۶ شماره ۱۹ـ۲۰.

امیرعطا صهبایی دانش‌آموز از مشهد: ۲، ۹ شماره ۱۸.

رضا علاقه‌بندان دیپلمه از بندربوشهر: ۱۱.

بابك خراسانی دانش‌آموز از اردبیل: ۳، ۷، ۵، ۸، ۱۹.

فرشید شعبانی‌مطلق: ۱، ۲، ۳، ۹، ۱۹.

نادیا حبیبی دیپلمه از تهران: ۳، ۸، ۱۹.

فرهاد سلیمی دانش‌آموز از تهران: ۱، ۹.

محمد رحمانی دانش‌آموز از کاشمر: ۱۹.

محمد مرادی‌عارفی دانش‌آموز از کاشمر: ۱۸.

مجید وطنی باف از کاشمر: ۸، ۱۹.

محمدباقر کفاش‌امیری دانش‌آموز از تهران: ۱.

حسین راغب دانشجو از همدان: ۲، ۸، ۹، ۱۴.

یوسف احمدی دبیر ریاضی، احمدرضا شیرزاد، داریوش سعیدکیا دانش‌آمـوز، از بابلسر: ۱، ۲، ۳، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۵، ۱۷، ۱۸، ۱۹.

فریبرز میرزائی دانش‌آموز ازکرج: ۱، ۲، ۴، ۷، ۸، ۹، ۱۹.

فریدون نوذری دبیر دبیرستانهای سنندج: حـل مسألـه مسابقه شماره ۱۸.

بابك مطلب‌نژاد دانش‌آموز از تهران: حل مسأله مسابقه شماره ۱۸.

احمد و علیرضا بیگدلی از قم: حـل مسأله مسابقه شماره ۱۸.

شهریار شفیعی دانش‌آموز از چالوس: ۸، ۹.

پریسا رحیمی دانش‌آموز: ۱، ۳، ۹.

ابوالقاسم غضنفری دانش‌آموز: ۹.

تازه‌های کتب و نشریات ریاضی

نسخه‌هایی ازکتابهای جدید ذیل بـرای معرفی به دفتر مجله واصل شده است:

۱ـ مسائل مسابقه‌هـای ریاضی دبیرستانی ایرلکا، از سری کتب ریاضیات پیش دانشگاهـی ـ ۲۹؛ گـردآوری و حل، آرتینو، گـاگلیون، شل؛ تـرجمهٔ عبدالحسین مصحفی؛ ناشر: مرکز دانشگاهی، ۱۰۰۰ ریال.

۲ـ آشنایی بـا نظریه حلقه‌هـا، از منصور معتمدی؛ ناشر: دانشگاه شهید چمران اهواز؛ ۱۳۶۷، ۱۰۵۰ ریال.

۳ـ شماره ۱۷ مجله پژوهش در علم و صنعت از انتشارات سازمان پژوهشهای علمی وصنعتی ایران دریافت گردید.

جواب نامه‌ها

محمود نصیری

آقای جلال حمره ازآبدانان، پیشنهادهای شما در هیأت تحریریه مطرح گردید، موفق باشید.

آقای حسین میارنعیمی، کلاردشت، ضمن دریافت مسائل ۱ و ۷ ازشماره ۲۰ـ۱۹ برای محاسبه حدهائی که سؤال کرده‌اید معمولاً از لگاریتم وقضیه هوپیتال استفاده می‌کنیم برای نمونه یکی را حل می‌کنیم.

$$y=x^{\sin x} \quad \text{و} \quad x>0$$

بنابه پیوستگی تابع $x^{\sin x}$ به ازاء هر $x>0$، داریم؛

$$\lim_{x\to 0^+} Ln y = \lim_{x\to 0^+} \sin x Ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{Ln x}{\csc x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\cos x \csc^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{-x\cos x} = 0$$

لذا

$$\lim_{x\to 0^+} Ln y = 0$$

و بنابه پیوستگی تابع لگاریتم

$$\lim_{x\to 0^+} y = 1 \quad \text{یا} \quad Ln \lim_{x\to 0^+} y = 0$$

آقای امیر مطلبزاده دانش‌آموز قائن، ازارسال مسائل متشکریم باید منابع مسائل را ذکر کنید.

آقای مسعود پاکدامن دانش‌آموز مشهد، از تلاش شما متشکریم.

آقای داود اشتیاقی دانش‌آموز تهران، از تلاش شما متشکریم.

آقای مهدی موسوی دانشجو، سؤالات شمادرهیأت‌تحریریه مطرح گردید، موفق باشید.

آقایان وحیدآقایانی، کرج، نادر خورشیدی، شیراز، از لطف شما متشکریم، توابعی مانند $y=tg\frac{a}{x}$ متناوب نیستند بایدکمان برحسب یك تابع خطی باشد. موفق باشید.

آقای وحید دائمی دانش‌آموز مشهد، از اظهار لطف شما متشکریم. پیشنهاد شما در هیأت تحریریه مطرح گردید.

آقای محمد داوری‌اردکانی دبیر ریاضی، از حل مسأله۱۴ شماره ۱۸ متشکریم. امیدواریم بیش‌ازاین با ما همکاری کنید، موفق باشید.

آقای محمد مهرپویا دانش‌آموز بجنورد، مسائل ارسالی شما دریافت شد، مسائل باید با حل و ذکر منبع ارسال گردد.

آقای مسیب بهرامی دانش‌آموز شهرضا، از اظهار لطف شما متشکریم.

آقای محمد کمالی دانش‌آموز شیراز، از اظهار لطف شما متشکریم.

آقای افشین خاشعی دانش‌آموز تهران، از ارسال مسائل متشکریم، امیدواریم در شماره‌های بعدی ازآنها استفاده کنیم.

آقای مجید غلامرضائی دانش‌آموز قزوین، از تذکرات شما متشکریم، راه‌حل ارسالی شما برای مسأله ریاضیدان جوان صحیح است.

آقای فرهاد مقدم سلیمی تهران، از زحمتی‌که برای تهیه مقاله متحمل شده‌اید متشکریم. متأسفانه درج مقاله شما به این صورت امکان‌پذیر نیست. زیرا این مقاله با مقاله‌های درسهائی از ریاضیات آقای لالی و مقاله‌آقای دکتر جمالی وجه اشتراکی دارد.

آقای آرتا آریاپاد، روشی راکه به اصطلاح خودتان مشتق‌گیری بدون حد گفته‌اید نادرست است زیرا به طور غیر مستقیم شما ازحد استفاده‌کرده‌اید وقتی طرفین را بر $x-x_1$ تقسیم می‌کنید باید $x\neq x_1$، و این وقتی ممکن است‌که x به سمت x_1 میل کند.

آقای رضا الفتی‌صابر رشت، پیشنهادهای شما در هیأت تحریریه مطرح گردید. از ارسال حل مسائل المپیاد متشکریم، موفق باشید.

آقای م ـ ر ـ ز، تهران، از ارسال مسائل متشکریم، مسائل ارسالی شما معمولاً کلاسیك و تکراری می‌باشند، انشاالله ازآنها در بخش مسائل دانش‌آموزی استفاده خواهیم کرد.

آقای مرتضی جعفری دانش‌آموز بندرانزلی، از ارسال

مسائل تشکر می‌کنیم. صورت مسأله دوم نادرست است. صورت صحیح این مسأله چنین است:

از نقطه‌ای روی نیمساز داخلی یا خارجی یك زاویه خطی رسم کنید که اضلاع زاویه را در دو نقطه A و B قطع کند و AB برابر طول معلوم l باشد. در غیر این صورت مسأله قابل حل نیست این مسأله معروف به مسأله پاپوس است و در شماره‌های قبل حل شده است.

خانم ماندانا غفاری دانش‌آموز دزفول، از اظهار لطف شما تشکر می‌کنیم. فرمولهائی که ارسال داشته‌اید، در اکثر کتابهای ریاضی وجود دارد و اکثر دبیران در کلاس نیز آنها را بیان می‌کنند.

آقای ولی محمدی دانشجو تبریز، از ارسال مسائل متشکریم، باید منابع آنها را ذکر کنید.

آقای سید حسین رحمانی دانشجو تهران، از ارسال مسائل متشکریم، باید مسائل را با ذکر منبع و حل، ارسال دارید.

آقای مسعود شریفلو دانش‌آموز تهران، از اظهار لطف شما و ارسال مسائل تشکر می‌کنیم. درصورت مناسب بودن از آنها استفاده می‌کنیم.

ش ـ زرین دانش‌آموز تهران، از ارسال مسائل تشکر می‌کنیم، امیدواریم در مسائل دانش‌آموزی از آنها استفاده کنیم.

آقای رضا طباطبائی دانش‌آموز قم، از ارسال مسائل متشکریم.

آقای عبدالقادر یوسفی دانش‌آموز ارومیه، شما راه‌حل‌های خود را با راه‌حل‌هائی که در شماره ۲۳ درج‌شده است مقایسه کنید.

آقای سید احمد یعقوبی دانش‌آموز، $g(x)=x^2+1$ معکوس $f(x)=\sqrt{x-1}$ است، به شرطی که $x \geqslant 0$ باشد. باید توجه داشته باشید که در تابع و تابع معکوس آن جای برد و دامنه عوض می‌شود.

$$\begin{cases} y=\sqrt{x-1} \\ x \geqslant 1 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=y^2+1 \\ x \geqslant 1 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} f^{-1}(x)=y=x^2+1 \\ y \geqslant 1 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

واضح است که تابع $y=x^2+1$ با شرط $x \geqslant 0$ یك به یك است.

آقای رحیم شمسی دانش‌آموز تنکابن، راه حل معلم شما صحیح است موفق باشید.

آقای مسعود پاکدامن مشهد، از هر کدام از سؤالات شما یك نمونه حل می‌کنیم بقیه شبیه آن می‌باشند.

برای اثبات تساوی،

$$\sqrt[n]{\frac{42^n+63^n+84^n}{24^n+36^n+48^n}}=\sqrt{\frac{42^2+63^2+84^2}{24^2+36^2+48^2}}$$

چنین داریم،

$$\sqrt[n]{\frac{21^n(2^n+3^n+4^n)}{12^n(2^n+3^n+4^n)}}=\frac{7}{4}$$

که بستگی به n ندارد لذا طرف دوم نیز برابر $\frac{7}{4}$ است.

اثبات تساوی:

$$\sqrt[n]{\frac{402^n+603^n+804^n}{204^n+306^n+408^n}}=$$

$$\sqrt{\frac{402^2+603^2+804^2}{204^2+306^n+408^2}}$$

نیز مانند آن است. کافی است درصورت و مخرج از $\frac{201}{102}$ فاکتور بگیرید.

همچنین برای اثبات تساوی‌های نظیر،

$$(a\sin A+b\sin B)^2=(a^2+b^2)(\sin^2 A+\sin^2 B)$$

در یك مثلث، اگر دو طرف را بسط دهید به تساوی مسلم

$$(a\sin B-b\sin A)^2=0$$

می‌رسید که همان قانون سینوسها است.

خانم مهناز محمدی دانش‌آموز شیراز، از حل و ارسال مسائل تشکر می‌کنیم موفق باشید.

آقای حمیدرضا نصیری دانشجو اصفهان، ازارسال مسائل تشکر می‌کنیم. موفق باشید.

آقای محسن بهپور دانش‌آموز بندرانزلی، از حل مسأله مسابقه و مسأله شماره ۲ تشکر می‌کنیم.

آقای منوچهر عسکری دانش‌آموز بندرعباس، راه‌حل شما صحیح است، موفق باشید.

اخبار
گروه ریاضی

۱ـ ریز مواد و ریاضی دبیرستان در شورای برنامه‌ریزی کامل و آمادۀ چاپ برای نظر خواهی در رشد ریاضی شد.

۲ـ برنامه‌ریزی ریاضی ۴ ساله دانشسراهای مقدماتی پایان پذیرفت و کتاب ریاضی جدید برای سال اول از سال آینده وارد دانشسراها خواهد شد.

۳ـ المپیاد بین‌المللی ریاضی از تاریخ ۱۷ تا ۲۸ تیرماه در کشور چین برگزار گردید افراد تیم جمهوری اسلامی ایران به شرح زیر در این مسابقات شرکت کردند.

۱ـ آقای دکتر اسدالله رضوی استاد دانشگاه کرمان و نماینده مردم کرمان در مجلس سرپرست اول

۲ـ آقای دکتر امیدعلی کرمزاده استاد دانشگاه شهید چمران اهواز سرپرست دوم

۳ـ آقای علی رجایی ازدبیرستان علامه حلی تهران کلاس چهارم

۴ـ آقای آرش رستگار از دبیرستان مطهری تهران کلاس چهارم

۵ـ آقای بهرنگ نوحی از دبیرستان علامه حلی تهران کلاس سوم

۶ـ آقای پیمان کسایی ازدبیرستان علامه حلی تهران کلاس سوم

۷ـ آقای حمید توسلی از دبیرستان نیکان تهران کلاس چهارم

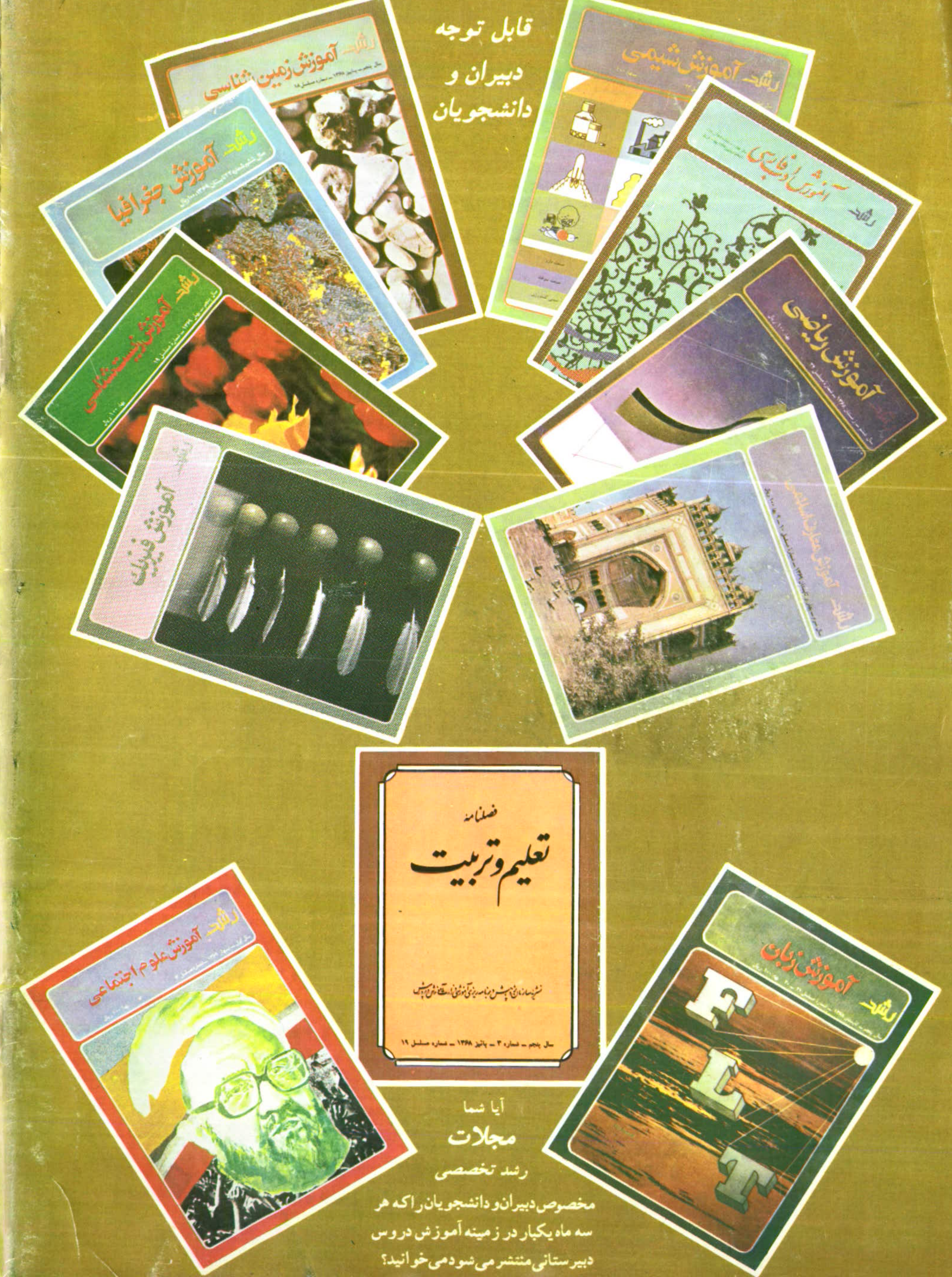
۸ـ آقای حمیدرضا داودی از دبیرستان امام خمینی شاهرود کلاس سوم

دانش‌آموزان نفرات ۳ تا ۶ موفق به دریافت مدال نقره شدند و تیم جمهوری ایران در بین ۵۴ کشور شرکت‌کننده ردیف ۱۴ را بخود اختصاص داد. گزارش مفصل این مسابقات را در شماره‌های بعدی از نظر شما خواهد گذشت.

۴ـ ازطرف سازمان پژوهش و برنامه ریزی درسی، آقایان دکتر محمدحسن بیژن‌زاده و دکتر بابلیان در چهل و دومین کنفرانس آموزش ریاضی در لهستان شرکت کردند.

گروه ریاضی

بازدید
دانش‌آموزان از مناطق
جنگ‌زده کشور (خرمشهر)


قابل توجه
دبیران و
دانشجویان
رشد آموزش زمین شناسی
رشد آموزش شیمی
رشد آموزش جغرافیا
رشد آموزش ادب فارسی
رشد آموزش زیست شناسی
آموزش ریاضی
رشد آموزش فیزیک
رشد آموزش معارف اسلامی
فصلنامه
تعلیم و تربیت
سال پنجم ـ شماره ۳ ـ پائیز ۱۳۶۸ ـ شماره مسلسل ۱۹
رشد آموزش علوم اجتماعی
رشد آموزش زبان
E
L
T
آیا شما
مجلات
رشد تخصصی
مخصوص دبیران و دانشجویان را که هر
سه ماه یکبار در زمینه آموزش دروس
دبیرستانی منتشر می شود می خوانید؟