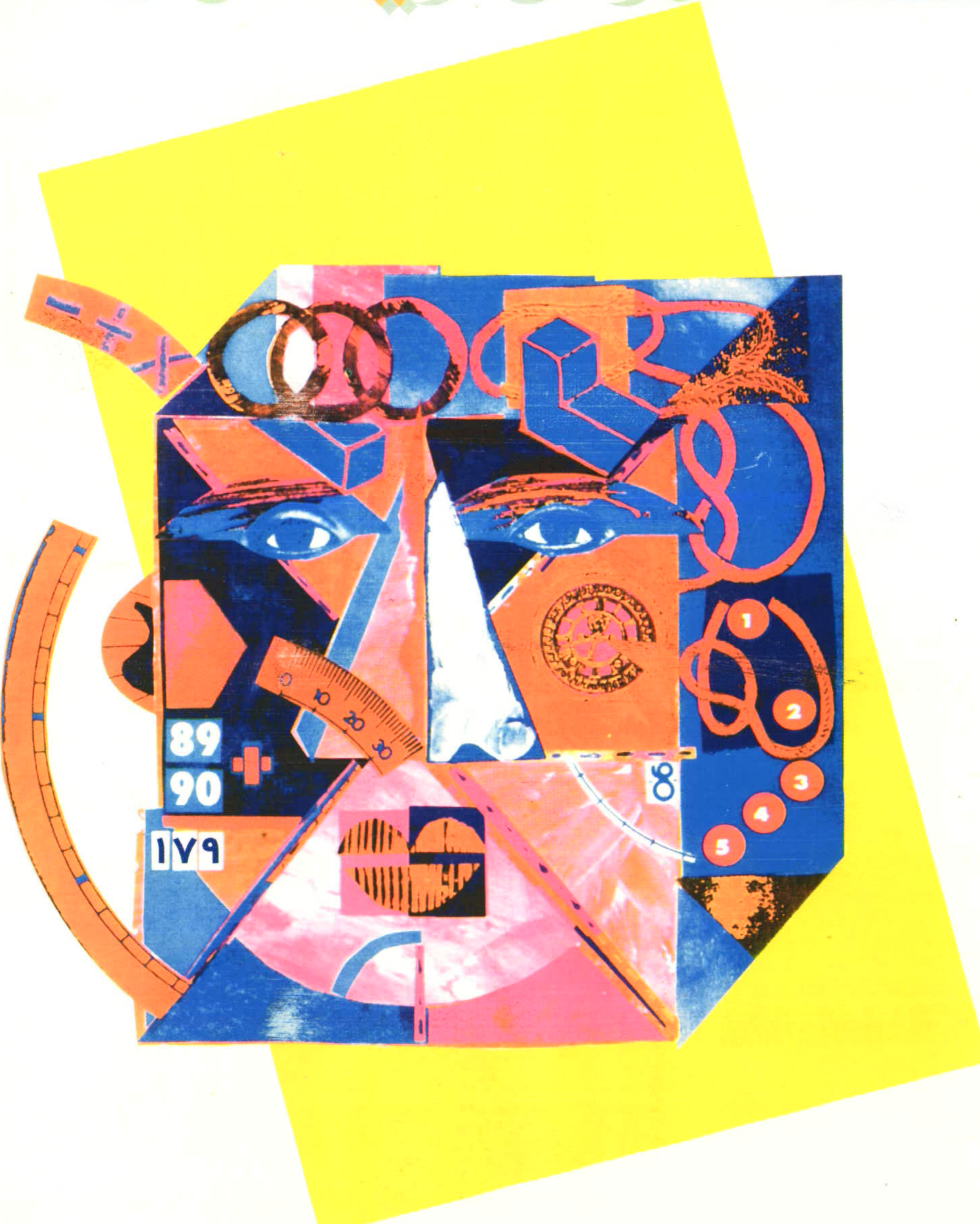
رشد

آموزش ریاضی

سال دوازدهم
شماره ۴۹
پاییز ۱۳۷۶
۲۰۰تومان



گروه بین المللی روانشناسی آموزش ریاضی

تنوع و تغییر در آموزش ریاضی

علاقه‌مندان می‌توانند برای کسب اطلاعات با دفتر مجلهٔ رشد آموزش ریاضی تماس بگیرند.

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد

آموزش ریاضی

در این شماره:

مجله رشد آموزش ریاضی نوشته ها و حاصل تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، بویژه آموزگاران، دبیران و مدرسان را، در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می پذیرد. مطالب باید یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود. شکل قرار گرفتن جدولها، نمودارها و تصاویر ضمیمه باید در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود. نثر مقاله باید روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت لازم مبذول گردد. مقاله های ترجمه شده باید با متن اصلی همخوانی داشته باشد و متن اصلی نیز ضمیمهٔ مقاله باشد. در متنهای ارسالی باید تا حد امکان از معادلهای فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود. زیرنویسها و منابع باید کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره صفحهٔ مورد استفاده باشد. مجله در رد، قبول، ویرایش و تلخیص مقاله های رسیده مختار است. آرای مندرج در مقاله ها، ضرورتاً مبین نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسشهای خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است. مجله از بازگرداندن مطالبی که برای چاپ مناسب تشخیص داده نمی شود؛ معذور است.

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

- شمارهٔ مسلسل، ۴۱
- سال تحصیلی ۷۷ ـ ۱۳۷۶
- پاییز ۱۳۷۶
- تیراژ، ۵۰۰۰ نسخه

- نشانی دفتر مجله، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۱۵۸۸
- تلفن امور مشترکین، ۹ـ ۸۸۲۱۱۶۰ داخلی ۴۲۲
- تلفن دفتر مجله، ۸۲۵۲۷۹
- تلفن مرکز توزیع، ۷۲۲۵۱۱۰
- چاپ، افست (سهامی عام)

یادداشت سردبیر

به نام خداوند خالق قلم

شروع سال تحصیلی و روانه شدن میلیونها دانش‌آموز سراسر کشور به مدرسه‌ها، رنگ و بوی ویژه‌ای به پائیز می‌دهد. این چشم و چراغهای آینده و مهمترین عاملان توسعه و بالندگی جامعه، با شور و شعف سال تحصیلی را شروع می‌کنند، امّا دیری نمی‌گذرد که تعداد قابل توجّهی از آنها، با دلزدگی و بی‌تفاوتی، برای پایان این سال و سالهای دیگر لحظه‌شماری می‌کنند. چرا؟ راستی علّت این افت انگیزه و علاقه چیست و مسولیّت پیگیری آن با چه کسانی است؟ پژوهشهای زیادی در رابطه با ریشه‌یابی علّتها انجام شده است و از جمله عوامل دخیل در این افت، به شرایط اجتماعی، اقتصادی، فرهنگی یاددهنده و یادگیرنده، برنامهٔ درسی، کتاب درسی، فضای آموزشی و اجرای آموزشی اشاره شده است.

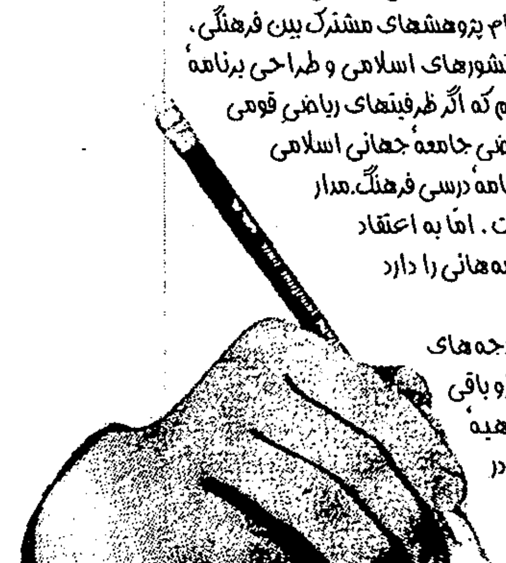
پس از یافتن پاسخ نسبی برای چرا های مطرح شده، بحث جدّی‌تر در مورد چگونگی رفع مشکلات است. برنامه‌ریزی اصولی برای رفع مشکلات، بایستی با تکیه بر یافته‌های پژوهشی در سطح ملی و بین المللی باشد. آموزش ریاضی در سطح بین المللی دارای پشتوانه‌های پژوهشی ارزنده‌ای است. در حالی که در ایران، آموزش ریاضی به عنوان یک حوزهٔ معرفتی، دوران قبل از طفولیت خود را می‌گذراند و تا رسیدن به یک بلوغ نسبی، راه درازی در پیش دارد. خوشبختانه، در جهت ایجاد یک بستر مناسب برای انجام پژوهشهای بکر و بنیادی و با توجه به ویژگیهای فرهنگی، اجتماعی این مرز و بوم، قدمهائی برداشته شده است. یکی از اقدامات مهّم برگزاری کنفرانسهای سالانه آموزش ریاضی است که از سال گذشته آغاز شده است. اقدام مهّم بعدی به تشخیص هیأت تحریریهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، اطلاع رسانی اصولی و به موقع دربارهٔ فعالیتهای پژوهشی در داخل و خارج ایران است و ارائه گزارشهای تفصیلی، تحلیلی از همایشهای تخصّصی آموزش ریاضی در راستای همین هدف است. گزارش های دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران و بیست و یکمین کنفرانس بین المللی روانشناسی آموزش ریاضی (PME 21) که در این شمارهٔ مجله چاپ شده‌اند از چند جهت قابل تأمّل هستند. مهمّ‌ترین اصل در ارائه گزارش علمی، روزآمد بودن آن است و خوشبختانه این دو گزارش، با فاصلهٔ مناسب، بعد از انجام کنفرانسها به اطلاع خوانندگان گرامی می‌رسد. دیگر آنکه این گزارشها می‌توانند از نظر انتخاب زمینه‌های پژوهشی مناسب و انتخاب چگونگی ساختار تشکیلاتی، اجرائی کنفرانسهای مشابه، مفید واقع شوند. به هر حال، در عصر اطّلاعات، باید به نقش محوری و کلیدی اطلاع رسانی بهای بیشتری داده شود، زیرا انباشته شدن داده‌ها در افراد بدون تبدیل به موقع آنها به اطلاعات و انتشار آنها، کمکی به جامعه نخواهد کرد و هیأت تحریریهٔ مجله امیدوار است که با آگاهی نسبت به نقش ویژهٔ اطلاع رسانی، در جهت انجام این وظیفهٔ خطیر کوشا باشد.

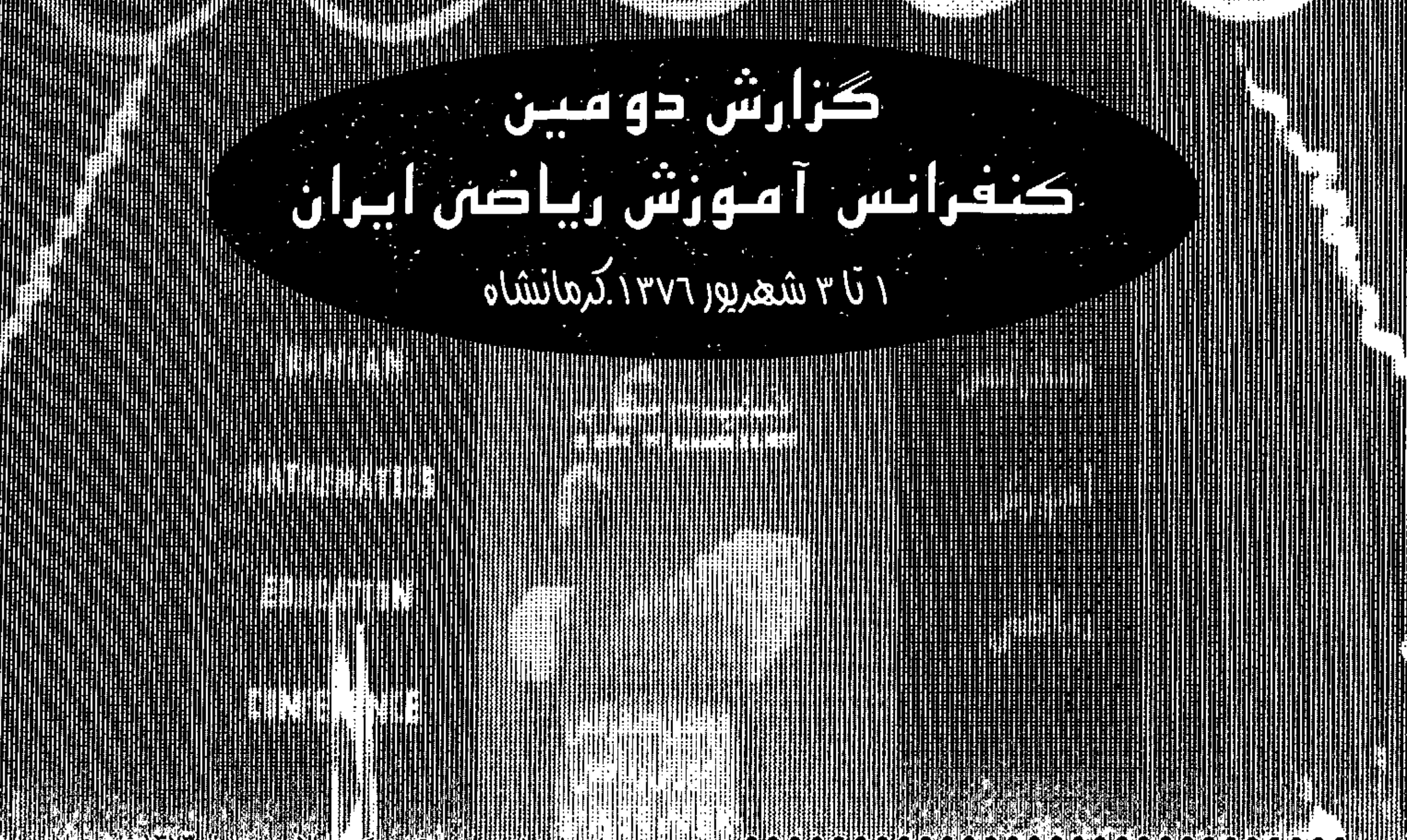
همچنین فصل پائیز از یک ویژگی چشمگیر برخوردار است و آن، برگزاری هشتمین اجلاس سران کشورهای اسلامی در ایران است. برگزاری این اجلاس می‌تواند فرصتهای مناسبی را جهت بحث و بررسی تبادلهای فرهنگی بین کشورهای اسلامی ایجاد کند. اخیراً در حوزهٔ آموزش ریاضی بحثهای جالبی پیرامون ارتباط و اتصال بین مقوله‌های ریاضی و سایر مقوله‌ها و فرهنگ و آموزش ریاضی مطرح شده‌اند. با توجّه به فرهنگ غنی اسلامی و با عنایت به نقش ایران در غنی‌سازی فرهنگ و تمدن اسلامی، باید چگونگی این ارتباط، هر چه بیشتر مورد پژوهش قرار گیرد و از یافته‌های این پژوهشها، برای تقویت آموزش ریاضی در کشورهای اسلامی به نحو شایسته‌ای استفاده شود.

تهیه‌کنندگان مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، به عنوان یکی از نشریه‌های آموزش ریاضی در ایران، از مسوّلان اجلاس در بخشهای آموزشی، فرهنگی تقاضا دارند که هر چه زودتر و هر چه وسیعتر، به تسهیل ارتباطات علمی، فرهنگی با کشورهای اسلامی از طریق برگزاری همایشهای علمی، آموزشی مخصوص کشورهای اسلامی، انجام پژوهشهای مشترک بین فرهنگی، تبادل دانشجو در رشتهٔ آموزش ریاضی، انجام بازدیدهای علمی توسط معلمان ریاضی کشورهای اسلامی و طراحی برنامهٔ درسی و تهیهٔ کتاب درسی ریاضی با توجّه به فرهنگ غنی اسلامی بپردازند. مطمئن هستیم که اگر ظرفیتهای ریاضی قومی با توجّه به تاریخ و تمدن درخشان ایرانی، اسلامی، شناسائی شده و فعّال شوند، آموزش ریاضی جامعهٔ جهانی اسلامی می‌تواند حرف اوّل را در دنیا بزند. در حال حاضر، تحقیقات متنوعی دربارهٔ چگونگی طرّاحی برنامهٔ درسی فرهنگ مدار انجام گرفته است و به اعتراف همه، تهیه برنامه‌هائی با این ویژگی، بسیار مشکل است. امّا به اعتقاد ما، فرهنگ و تمدن اسلامی در رابطه با ریاضی، راههای قابل دستیابی به این چنین برنامه‌هائی را دارد زیرا که تاریخ تمدن اسلامی، سرشار از تجربه‌های عملی و نظری در این زمینه است.

حرف آخر آنکه برای احیا و اعتلای آموزش ریاضی بر مدار فرهنگ اسلامی، به بودجه‌های پژوهشی کلان نیاز است. بدون بودجه و تخصیص امکانات، انجام این پژوهشها در حد آرزو باقی می‌مانند و تأخیر در انجام آنها، خدای ناکرده، زمینه‌ساز از خودباختگی فرهنگی و تهیهٔ برنامه‌های عقیم از نظر فرهنگی خواهد شد. در این باره حرف بسیار است. انشاءالله در شماره‌های آینده موضوع را ادامه خواهیم داد.

سردبیر.





گزارش دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

۱ تا ۳ شهریور ۱۳۷۶. کرمانشاه

کمیتهٔ علمی افتخار دارد که دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران و انتشارات آن را به عنوان یادواره، به ساحت مقدّس معلّمان و دانش آموزان شهید شهر کرمانشاه و روح شاد معلّمان و فرهنگیانی که در استان کرمانشاه صادقانه و عاشقانه تمام زندگی خود را وقف تعلیم و تربیت کردند تقدیم نماید. باشد که نام و یاد خاطره انگیزشان، حرکت بخش فعالیّتهای فرهنگی-آموزشی در مشهد این عزیزان گردد.

در سالهای ۱۳۴۹ و ۱۳۵۰، به همّت اعضای علاقمند جامعهٔ ریاضی، به ترتیب اولین و دومین کنفرانس ریاضی ایران در دانشگاههای شیراز و صنعتی شریف برگزار شدند. گزارشهای میزگردهای این دو کنفرانس نشان می‌دهد که آموزش ریاضی یکی از مسائل محوری این دو کنفرانس ریاضی بوده است. به‌خصوص در کنفرانس دوم، میزگردهائی با حضور چهره‌های سرشناس ریاضی ایران و جهان از جمله پروفسور هشترودی، پروفسور فاطمی، دیودونه، سوبولف و مک کارتی دربارهٔ برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ دبیرستان برگزار شد. این میزگردها، نقش عمده‌ای در تغییر برنامهٔ درسی ریاضی ایران در آن زمان ایفا کردند.

پس از اعلام موجودیت انجمن ریاضی ایران، مسئولیّت برگزاری کنفرانسهای سالانهٔ ریاضی به عهدهٔ انجمن ریاضی گذاشته شد. به دنبال استمرار کنفرانسهای ریاضی، نیاز به طرح مسائل موجود پیرامون آموزش و یادگیری ریاضی بیشتر و بیشتر احساس می‌شد و هر برنامه‌ای که در راستای آموزش ریاضی تدارک دیده می‌شد، به عنوان یک اقدام مثبت و سازنده، مورد استقبال معلّمان ریاضی شرکت کننده در کنفرانسهای ریاضی قرار می‌گرفت. این نیازها، فکر برگزاری کنفرانسهای سالانهٔ آموزش ریاضی را در دست اندرکاران آموزش ریاضی در وزارت آموزش و پرورش و انجمن ریاضی بیشتر تقویت کرد. بالاخره در سال ۱۳۷۳، پیشنهاد برگزاری کنفرانس‌های آموزش ریاضی در شورای اجرائی انجمن ریاضی ایران به بحث گذاشته شد.

«شورای اجرائی انجمن ریاضی ایران در جلسهٔ مورّخ ۷۳/۹/۱۶ موضوع برگزاری کنفرانس آموزش ریاضی را مورد بحث قرار داد. شورا با توجّه به نیازهای اساسی نظام آموزشی ریاضی کشورمان در سطوح مختلف و تأثیر غیرقابل انکار روشهای علمی آموزش ریاضی در ارتقاء فرهنگ ریاضی در سطوح مختلف و اهمیّت شناخت و بررسی مسائل و مشکلات آموزش ریاضی در این سطوح، لزوم برگزاری کنفرانسهای آموزش ریاضی را تصویب کرد.» (اسناد شورای اجرائی انجمن ریاضی ایران، ۱۳۷۳).

به دنبال این مصوّبه، در جلسهٔ افتتاحیهٔ بیست وششمین کنفرانس ریاضی کشور در فروردین ۱۳۷۴ که در دانشگاه شهید باهنر کرمان برگزار شد، آقای دکتر محمّدعلی نجفی وزیر محترم آموزش و پرورش وقت، بر لزوم برپائی کنفرانسهای آموزش ریاضی با مشارکت انجمن ریاضی ایران تأکید کردند. پس از آن، جلسه‌ای در تاریخ ۷۴/۳/۹ به دعوت آقای دکتر محمّد سپهری‌راد معاونت محترم نیروی انسانی و برنامه‌ریزی وزارت آموزش و پرورش وقت در دفتر ایشان تشکیل گردید که دبیر وقت انجمن ریاضی ایران آقای دکتر زارع نهندی نیز حضور داشتند، در آن جلسه قرار شد که اوّلین کنفرانس آموزش ریاضی ایران در تابستان ۱۳۷۵ به دلیل امکانات بالای اجرائی در شهر اصفهان برگزار گردد. آقای دکتر علی رجائی از دانشگاه صنعتی اصفهان نیز به دلیل سابقهٔ همکاری‌های طولانی با دبیران ریاضی و علاقمندی به آموزش ریاضی، به عنوان دبیر کمیتهٔ علمی اوّلین کنفرانس آموزش

ریاضی ایران انتخاب شدند. اوّلین کنفرانس آموزش ریاضی ایران از ۶ تا ۸ شهریور ۱۳۷۵ در مرکز آموزش عالی فنّی شهید مهاجر اصفهان برگزار شد[1].

به دنبال پیشنهاد برگزاری دومین کنفرانس آموزش ایران توسط ادارهٔ کلّ آموزش و پرورش استان کرمانشاه، تمهیدات لازم جهت برپائی کنفرانس در کرمانشاه انجام شد.

تشکیلات کنفرانس

دومین کنفرانس آموزش ریاضی دارای یک هیأت امنا و دو کمیتهٔ علمی و اجرائی بود و مدیرکل محترم وقت استان دبیر کنفرانس بودند و کمیتهٔ اجرائی در استان مسئولیت پیگیری کارهای اجرائی را در استان عهده دار بود.

اعضای کمیتهٔ علمی:

در انتخاب کمیتهٔ علمی دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، سعی در این بود که افرادی با توانائیهای علمی ـ آموزشی و آشنا با مسائل آموزش و پرورش از وزارت آموزش و پرورش و آموزش عالی انتخاب شوند. فهرست الفبائی اعضای کمیتهٔ علمی با محل کار آنها، نشاندهندهٔ تنوّع این انتخاب است:

ـ اسماعیل بابلیان	دانشگاه تربیت معلم تهران (نمایندهٔ شورای ریاضی دفتر برنامه ریزی و تألیف کتابهای درسی)
ـ یحیی تابش	دانشگاه صنعتی شریف (نمایندهٔ وزارت آموزش و پرورش)
ـ جواد حاجی بابائی	مسئول گروه ریاضی دفتر برنامه ریزی و تألیف کتابهای درسی
ـ سیدمرتضی حسنی نسب	وزارت آموزش و پرورش (نمایندهٔ دبیران ریاضی استان کرمانشاه)
ـ مهدی رجبعلی پور	دانشگاه شهید باهنر کرمان
ـ عبدالرضا سیّاره	دانشکدهٔ علوم دانشگاه رازی کرمانشاه
ـ مهرناز شهرآرا	دانشگاه تربیت معلّم تهران
ـ بیژن ظهوری زنگنه	دانشگاه صنعتی شریف (نمایندهٔ شورای ریاضی دفتر برنامه ریزی و تألیف کتابهای درسی)
ـ سهیلا غلام آزاد	دبیر ریاضی آموزش و پرورش استان تهران
ـ زهرا گویا	دانشگاه شهید بهشتی (دبیر کمیتهٔ علمی کنفرانس)
ـ اسدالله نیکنام	دانشگاه فردوسی مشهد (نمایندهٔ انجمن ریاضی ایران)

وظایف کمیتهٔ علمی: کمیتهٔ علمی دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران طی ۱۶ جلسه بحث و گفتگو و تبادل نظر، به تهیّهٔ هدفها، تعیین محورهای اصلی کنفرانس، فراخوان عمومی برای شرکت در کنفرانس و ارائهٔ مقاله از طریق آگهی های شمارهٔ ۱ و ۲، آرم کنفرانس؛ همچنین انتخاب پیشکسوتان و دعوت از مدعوین داخلی و خارجی، نحوهٔ داوری مقاله ها و تنظیم برنامه ها پرداخت که به بخشهائی از این فعالیّتها اشاره می شود:

الف) کمیتهٔ علمی، **هدف اصلی** برگزاری کنفرانس آموزش ریاضی را اعتلای آموزش ریاضی از طریق مشارکت سازندهٔ همهٔ دست اندرکاران آموزش ریاضی به خصوص معلّمان پرتوان، زحمتکش، با مطالعه و علاقمند به پژوهش در زمینهٔ آموزش ریاضی که به واقع، ستون فقرات هر نظام آموزشی هستند قرار داد.

ب) با توجه به هدف کنفرانس و نیازمندیهای جامعهٔ آموزش ریاضی، ***چهار محور اصلی*** برای کنفرانس تعیین شدند که عبارت بودند از:

ـ ضرورت تدوین استانداردهای ملّی برنامهٔ درسی؛

ـ نقش آموزش ریاضی در اعتلای ریاضیات؛

ـ ضرورت تحوّل در آموزش مستمر جهت اعتلای دانش حرفه ای معلّمان ریاضی؛

ـ شیوهٔ تدریس مفاهیم ریاضی با تأکید بر حسابان.

آرم کنفرانس، نمادی از کتیبه های بیستون بود و حروف میخی روی آن نشان دهندهٔ کلمهٔ «دومین» به خط میخی بود[2] که از روی متنهای

تاریخی تهیّه شده بود. علّت این انتخاب، نظریه‌پردازیهای جدید بر اساس شواهدِ تاریخیِ تازه یافت شده در مورد آثار ریاضیِ مکتوب در کتیبه‌های بیستون است. طبق این نظریه، احتمال می‌رود که قدمت ریاضی موجود در کتیبه‌های بیستون از پاپیروس رایند نیز بیشتر باشد.

انتخاب پیشکسوتان: از طرف کمیتهٔ علمی، آقای میرزاجلیلی و آقای سیّدمرتضی حسنی‌نسب به عنوان دو تن از پیشکسوتان معلمان ریاضی ایران انتخاب شدند. همچنین آقای یونس عابدین‌دوست نیز به پیشنهاد مدیرکل وقت استان کرمانشاه و دبیر کنفرانس و تأیید کمیتهٔ علمی، به عنوان معلّم پیشکسوت معرّفی شدند. این سه بزرگوار در ۳۰ سال گذشته، همگی منشأ اثرهای ارزنده و تلاشهای بی‌وقفه جهت تربیت دانش‌آموزان ایران و علاقمند کردن آنها به ریاضی بوده‌اند.

مدعوین داخلی: علاوه بر سخنرانهای مدعو، کمیتهٔ علمی از سردبیر یا هیأت تحریریهٔ مجله‌های ریاضی شامل نشر ریاضی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، خبرنامهٔ انجمن ریاضی، بولتن انجمن ریاضی، رشد آموزش ریاضی و برهان برای شرکت در کنفرانس دعوت به‌عمل آورد. همچنین، آقای مصحفی سردبیر محترم مجلهٔ یکان که نقش ارزنده‌ای در اعتلای دانش ریاضی ایران داشته است از مدعوین کنفرانس بودند. آقای پرویز شهریاری سردبیر مجلهٔ آشتی با ریاضیات در سفر بودند و کنفرانس نتوانست در خدمت ایشان باشد.

همچنین، دبیران کمیته‌های علمی همایشهای ریاضی در دو سال اخیر، دو نفر از اعضای انجمنهای معلمان ریاضی در هر استان، اعضای شورای ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی، اعضای شورای اجرائی انجمن ریاضی ایران، اعضای کمیتهٔ برنامه‌ریزی برای کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، اعضای کمیتهٔ برنامه‌ریزی ریاضی دورهٔ ابتدائی و راهنمائی، کارشناسان گروه ریاضی و کامپیوتر دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی و تعدادی از علاقمندان به آموزش ریاضی در آموزش و پرورش و دانشگاهها به کنفرانس دعوت شدند.

مدعوین خارجی: کمیتهٔ علمی کنفرانس با اعتقاد به اهمیّت تبادل تجربه‌ها و آشنائی با جریان جهانی پژوهشی در زمینهٔ آموزش ریاضی و ایجاد ارتباطات علمی مفید، مدعوین خارجی را انتخاب کرد. این افراد با توجّه به علاقه و سابقهٔ آنها در زمینه‌های تخصصّی و تجربی آموزش ریاضی انتخاب شدند. آقای پروفسور آلن بیشاپ از دانشگاه موناش استرالیا و خانم دکتر یوداریا محمّدیوسف از دانشگاه تکنولوژی مالزی به دعوت کمیتهٔ علمی کنفرانس و حمایت مالی و اجرائی وزارت آموزش و پرورش به ایران آمدند. همچنین، خانم دکتر زُلیخا اسماعیل و خانم منیره غزالی از مالزی نیز با هزینهٔ شخصی به ایران آمدند و در ایران، مهمان ادارهٔ کل آموزش و پرورش استان کرمانشاه بودند.

نحوهٔ داوری مقاله ها: کمیتهٔ علمی پس از دریافت مقاله‌های ارسالی به دبیرخانهٔ کنفرانس، اقدام به داوری مقاله ها با کمک چند تن از صاحبنظران کرد. از مجموع ۱۲۰ مقالهٔ دریافت شده، ۱۶ مقاله به صورت سخنرانیهای ۴۰ دقیقه‌ای، ۳۰ مقاله به‌صورت سخنرانیهای ۲۰ دقیقه‌ای، ۴ مقاله به صورت پوستر باچکیده و ۲۷ مقاله به صورت پوستر بدون چکیده پذیرفته شدند. در داوری مقاله ها سعی شد که موضوع مقاله ها دست کم ـ هرچند ناچیز ـ با هدفهای وسیعتر آموزش ریاضی و محورهای اصلی کنفرانس نزدیکی داشته باشد. از نظر موضوعی، به تشخیص داوران، سخنرانیهای ۲۰ دقیقه‌ای دارای مخاطبهای محدودتر و سخنرانیهای ۴۰ دقیقه‌ای شامل مخاطبهای وسیعتری بودند. پوسترهای باچکیده بالقوه توانائی تبدیل به یک مقالهٔ پژوهشی را داشتند امّا نیازمند تلاش بیشتری از جانب نویسندگان آنها بودند. پوسترهای بدون چکیده حاوی نکات ارزندهٔ آموزشی و ویژگی اطلاع‌رسانی بودند امّا کیفیّت مقاله‌ای نداشتند.

از ویژگیهای کنفرانسهای آموزش ریاضی اول و دوم، استقبال معلمان ریاضی و سایر علاقمندان به آموزش ریاضی از ارسال مقاله برای این دو کنفرانس بود. ممکن است بر کمیتهٔ علمی خرده‌گیری شود که با توجّه به نوپائی جریان آموزش ریاضی در ایران، نباید در داوری مقاله ها سختگیری می‌شد و به عنوان تشویق، بهتر بود که بیشتر مقاله ها پذیرفته شوند. با این حال، اعضای کمیته علمی بر این باور بودند که تشویق

بی‌پشتوانه و بی‌دلیل، باعث عقب‌ماندگی و زوال اعتماد به نفس می‌شود، در حالی که نقد علمی و صادقانه، لازمهٔ بالندگی و ارتقاء است. به همین خاطر، کمیتهٔ علمی کنفرانس امیدوار است که در کنفرانسهای بعدی، نحوهٔ داوری مقاله‌ها به تدریج دقیق‌تر و اصولی‌تر شود و به همان ترتیب، کیفیّت مقاله‌های ارسالی نیز بالاتر رود.

وظایف کمیتهٔ اجرائی: کمیتهٔ اجرائی از همان اوّلین روزهای تشکیل کمیتهٔ علمی، با جدیّت و پشتکار، امور اجرائی دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران در کرمانشاه را پیگیری نمود. دبیرخانهٔ دائمی کنفرانس در محلّ ادارهٔ کل آموزش و پرورش استان کرمانشاه دائر بود و کمیتهٔ اجرائی از جمله مسائل مربوط به پذیرش، ارسال نامه‌ها، بازسازی محلّهای برگزاری کنفرانس، انتظامات، مسکن، امور تغذیه و پذیرائی، تجهیزات، حمل و نقل، نمایشگاهها و برخی دعوتها را انجام داد. کمیتهٔ اجرائی با تمام توان خود و با وجود محدودیتهای موجود در استان، سعی کرد تا پذیرائی و امور اجرائی کنفرانس در شأن شرکت کنندگان باشد که باید به آنها به خاطر تلاشهای صادقانه و تحمّل زحمتهای زیاد تبریک گفت. البتّه باید درنظر داشت که به دلیل کمبود امکانات، مشکلاتی از جمله تجهیزات محل برگزاری کنفرانس و وسایل صوتی پیش آمد که باعث اختلال در ارائه چند سخنرانی گردید. با این حال، اینها در مقابل چهره‌های باز میزبانان کرمانشاهی ناچیز بودند.

میزبان کنفرانس: پس از موافقت اصولی وزیر آموزش و پرورش وقت جناب آقای دکتر محمّدعلی نجفی و معاونت برنامه‌ریزی و نیروی انسانی وزارت آموزش و پرورش در آن زمان، به ادارهٔ کل آموزش و پرورش کرمانشاه اطّلاع داده شد که میزبان دوّمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران خواهد بود. پذیرش این خبر برای استانی که از بسیاری جهات، دارای امکانات محدودی بود، سنگین می‌نمود. خوشبختانه، عزم‌جزم مسئولین اداره کل آموزش و پرورش استان، انجمن دبیران ریاضی استان کرمانشاه و بیش از ۳۰۰ نفر از عوامل اجرائی در ادارهٔ کل آموزش و پرورش استان کرمانشاه، امکان میزبانی شایستهٔ کنفرانس را فراهم آورد. با توجّه به تأکید وزارت آموزش و پرورش مبنی بر به‌کارگیری و تجهیز امکانات آموزش و پرورش و با نظارت و پیگیری مجدّانهٔ ادارهٔ کلّ آموزش و پرورش استان کرمانشاه، مرکز تربیت معلم شهید صدوقی و مرکز آموزش نیروی انسانی فرهنگیان کرمانشاه بازسازی و تجهیز شدند. همچنین، تمام خوابگاههای مورد استفاده برای کنفرانس نیز تجهیز شدند و این بخشی از دستاوردهای اجرائی کنفرانس برای شهر کرمانشاه بود.

انتخاب شعارهای مناسب در جهت همگانی کردن ریاضی از طرف کمیتهٔ علمی و پوشش بسیار مناسب شهر با پوسترها و شعارهای کنفرانس، از ظرافتهای کمیتهٔ اجرائی بود که به بهترین نحوی انجام گرفته بود. همچنین پوشش خبری کنفرانس در سطح استان مطلوب بود و دریافت سه خبرنامهٔ کنفرانس در طول برگزاری، نشان‌دهندهٔ تلاشهای فراوان همکاران در کمیتهٔ اجرائی بود.

لازم به ذکر است که دانشکدهٔ علوم دانشگاه رازی از همان ابتدا، با گشاده‌روئی اعلام کرد که کنفرانس می‌تواند از امکانات دانشگاه برای برگزاری کنفرانس استفاده کند. با این حال و با توجّه به تأکید وزارت آموزش و پرورش، تلاش‌های بی‌وقفهٔ کمیتهٔ اجرائی و ادارهٔ کل آموزش و پرورش استان کرمانشاه، باعث آماده شدن ساختمانهای آموزش و پرورش گردید که این همّت والا را باید به مسئولان وزارت آموزش و پرورش و ادارهٔ کل آموزش و پرورش استان تبریک گفت.

برنامه‌های علمی کنفرانس

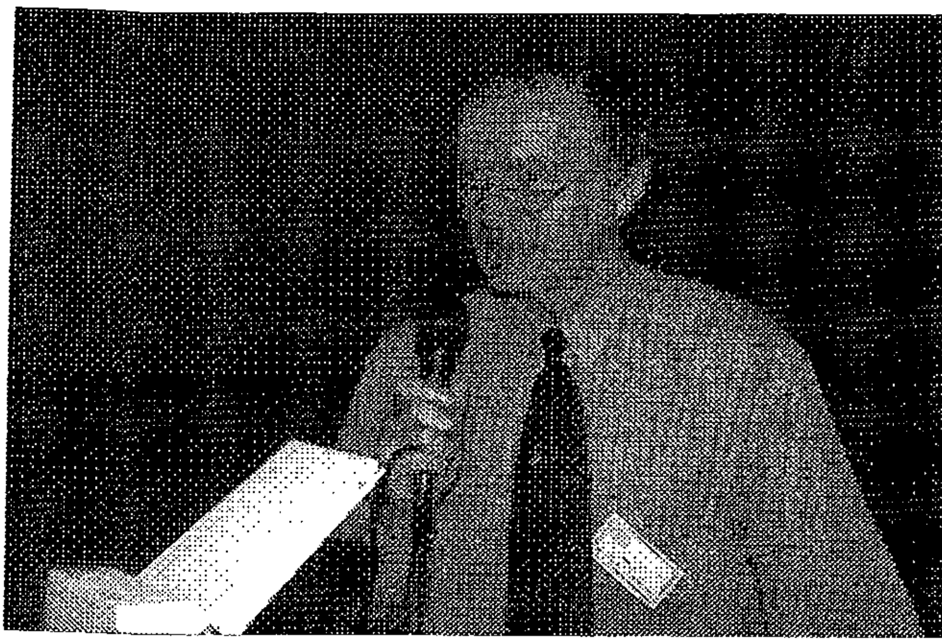
صبح روز اول: افتتاحیه:

دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران [و سرود جمهوری اسلامی ایران] با تلاوت آیات روحبخش قرآن مجید آغاز شد. پس از خوشامدگوئی جناب آقای حسن فرّخپور دبیر کنفرانس و نگارنده به عنوان دبیر کمیتهٔ علمی، از پیشکسوتها تجلیل به عمل آمد و لوح یادبودی خدمت آنها تقدیم شد. سپس ***استاد علّامه جناب آقای محمّدتقی جعفری*** دربارهٔ ***شهود و تجرید*** صحبت کردند و جمع را به فیض رساندند. موضوع سخنرانی استاد رابطهٔ نزدیکی با مباحث مطرح شده در فلسفهٔ تدریس و یادگیری ریاضی داشت.

برنامه‌های افتتاحیه با سخنرانی جناب آقای دکتر **غلامحسین شکوهی** از پیشکسوتان آموزش ریاضی ایران دربارهٔ ***نقدی بر روشهای آموزش مقدمات ریاضی*** ادامه یافت. عشق به کودکان و سوزدل آقای دکتر شکوهی از تک تک جمله‌های ایشان احساس می‌شد. آقای سیدمرتضی حسنی‌نسب از پیشکسوتان معلمان ریاضی کرمانشاه در معرفی آقای دکتر شکوهی، اشاره کردند که چگونه ایشان از تدریس در دورهٔ ابتدائی در روستاها شروع کردند و با طی مراحل مختلف، به بالاترین مدارج علمی-آموزشی رسیدند. ایشان خاطرنشان کردند که اولین کتاب روش تدریس ریاضی در حدود ۵۰ سال پیش توسط آقای دکتر شکوهی در ایران تألیف شد. ایشان در ایران از شاگردان دکتر هوشیار و در دورهٔ دکترا در سوئیس، از شاگردان مکتب پیاژه بودند.

در پایان مراسم افتتاحیه، پروفسور آلن‌بیشاپ که توسط نگارنده معرّفی شد، سخنراتی خود را تحت‌عنوان ***رابطهٔ فرهنگ با آموزش ریاضی*** ایراد کرد و سخنرانی ایشان همزمان در محل به فارسی ترجمه شد. نگارنده در معرفی پروفسور بیشاپ گفت: پس از اخذ مدرک کارشناسی ریاضی از انگلستان پروفسور بیشاپ برای ادامهٔ تحصیل به دانشگاه هاروارد رفت و پس از تکمیل دورهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، به مدت سه سال به تدریس ریاضی در دبیرستانهای ایالت ماساچوست مشغول شد. سپس به انگلستان بازگشت و دورهٔ دکترای تخصّصی خود را در آموزش ریاضی با موفقیّت به پایان رساند و پس از آن به مدّت ۲۳ سال در دانشگاه کمبریج به تدریس و تحقیق اشتغال داشت و به درجهٔ استادی رسید. بیشاپ انسانی چند بعدی و پژوهشگری ارزشمند است. او به تازگی دائرةالمعارف آموزش ریاضی را تدوین کرده است که توسط انتشارات کُلوور به چاپ رسیدهٔ است. بیشاپ چند سالی است که به دانشگاه موناش در استرالیا رفته است و در آنجا نیز، مطالعات خود را دربارهٔ فرهنگ و آموزش ریاضی دنبال می‌کند. او سالها سردبیر مجلهٔ بین‌المللی مطالعات آموزش ریاضی بود و عضو بسیاری از سازمانهای برجستهٔ آموزش ریاضی در دنیا است.

بیشاپ سخنرانی خود را با تأکید بر استفاده از ویژگیهای فرهنگی و در زمینهٔ محورهای اول و دوم کنفرانس پیش برد. او در مقدمهٔ سخنرانی‌اش گفت: «بیست‌وپنج سال تحقیق دربارهٔ آموزش ریاضی در مقابل تاریخ پرافتخار تمدّن ایران مانند یک چشم برهم زدن است.» متن انگلیسی سخنرانی پروفسور بیشاپ در «چکیدهٔ مقاله‌ها و مقاله‌های انگلیسی» دومین کنفرانس آموزش ریاضی آمده است و ترجمهٔ کامل آن نیز در مجلهٔ رشد شمارهٔ ۵۰ به چاپ می‌رسد.



بعدازظهر روز اول:

بعدازظهر روز اول شهریور برای ساعت ۱۰ : ۱۵ تا ۵۰ : ۱۵، پنج سخنرانی ۴۰ دقیقه‌ای پیش‌بینی شده بود که متأسفانه سه نفر از سخنرانها که همگی مدعو کنفرانس هم بودند، در کنفرانس به دلیل گرفتاریهای شخصی شرکت نکردند و چون دبیرخانهٔ کنفرانس، از عدم حضور آنها از قبل اطلاعی نداشت، در نتیجه در اجرای برنامه بی‌نظمی پیش آمد. دو سخنرانی دیگر با حضور جمع کثیری از شرکت کنندگان ارائه شد. از ساعت ۱۶ تا ۲۰ : ۱۶، پنج سخنرانی ۲۰ دقیقه‌ای ارائه شد و یکی از سخنرانها در محلّ حضور نداشت.

از ساعت ۱۰ : ۱۵ تا ۳۰ : ۱۶، همزمان با سخنرانیهای موازی، کارگاه ***اطلاع رسانی*** توسط خانمها مریم خادمی و فاطمه نخعی‌مقدم برپا شد.

از ساعت ۱۷ تا ۱۸، چهارمین سخنرانی عمومی توسط آقای دکتر سیدعباداللّه محمودیان از دانشگاه صنعتی شریف ایراد شد. آقای دکتر یحیی تابش ضمن معرّفی ایشان، به نقش برجستهٔ دکتر محمودیان در اشاعهٔ ریاضیات گسسته و تلاشهای وی در رابطه با آموزش دانش‌آموزان برگزیده برای المپیادهای ریاضی اشاره کردند. عنوان سخنرانی دکتر محمودیان ریاضیات گسسته و نقش آن در آموزش ریاضی بود. علّت

انتخاب این موضوع، ورود ***ریاضیات گسسته به برنامهٔ درسی ریاضی*** نظام جدید آموزش متوسطه و سهم فزایندهٔ آن در برنامه‌های درسی ریاضی بود. با توجه به محور چهارم کنفرانس که بررسی شیوه‌های تدریس مفاهیم ریاضی بود، ریاضیات گسسته به عنوان پوشش مناسبی برای مفاهیم غیر حسابان در ریاضیات مدرسه‌ای انتخاب گردید.

از ساعت ۱۸:۱۰ تا ۱۹:۳۰، میزگرد شورای ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی با حضور رئیس شورا آقای دکتر بابلیان و اکثریت اعضای شورا و در رابطه با مسائل و مشکلات کتابهای درسی تازه تألیف در نظام جدید آموزش متوسطه تشکیل گردید.

روز دوم:

پنجمین سخنران عمومی خانم دکتر یوداریا محمّدیوسف از کشور مالزی بودند. آقای دکتر رجبعلی‌پور ابتدا به معرّفی ایشان پرداختند و خاطرنشان کردند که خانم محمّدیوسف رسالهٔ دکترای خود را در زمینهٔ حل مسألهٔ ریاضی با تأکید بر حسابان با پروفسور دیویدتال در دانشگاه واریک نوشته‌اند و هم‌اکنون مشغول پژوهش و تدریس در دانشگاه تکنولوژی مالزی هستند. دکتر رجبعلی‌پور سخنرانی ایشان را تحت عنوان ***تدریس حقایق ریاضی در مقابل تدریس فرآیند تفکّر در ریاضی در دوره‌های کارشناسی آموزش ریاضی*** به فارسی ترجمه کردند. اصل مقالهٔ انگلیسی در «چکیدهٔ مقاله‌ها و مقاله‌های انگلیسی دومین کنفرانس آموزش ریاضی» چاپ شده است و در یکی از شماره‌های رشد، ترجمهٔ کامل این مقاله نیز به چاپ می‌رسد.

در ساعت ۹:۴۰ تا ۱۰:۲۰، پنج سخنرانی موازی ۴۰ دقیقه‌ای ارائه شد که یکی از سخنرانها، خانم منیره غزالی از مالزی بود و سخنرانی ایشان توسط خانم بخشعلی‌زاده از دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی ترجمه شد.

از ساعت ۱۱ تا ۱۱:۲۰، شش سخنرانی موازی ارائه شد و از ساعت ۱۱:۳۰ تا ۱۱:۵۰، شش سخنرانی موازی دیگر انجام گردید.

همزمان با برگزاری این دو گروه سخنرانی، کارگاه مدل‌سازی معادلات دیفرانسیل با استفاده از نرم‌افزار کامپیوتری از ساعت ۱۱ تا ۱۲ توسط خانم دکتر زُلیخا اسماعیل از مالزی برگزار گردید و با استقبال شدید شرکت‌کنندگان علاقمند مواجه شد.

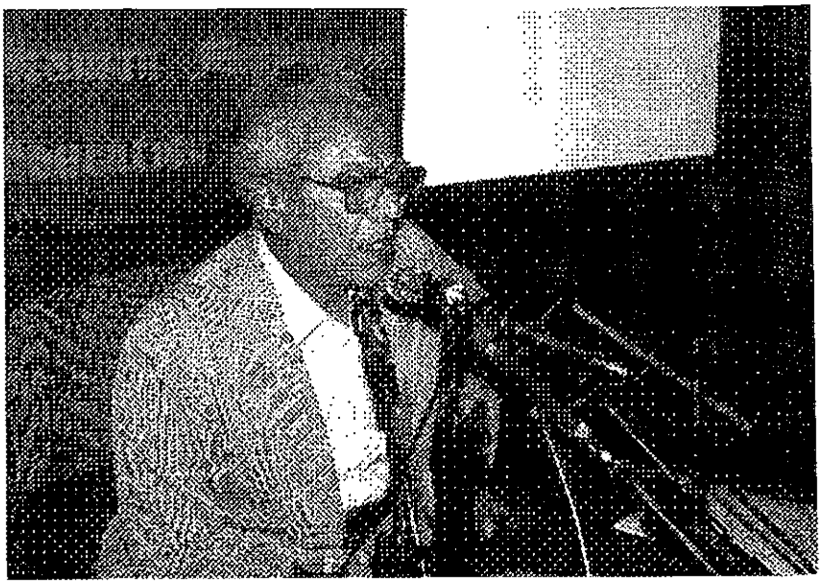
از ساعت ۱۲ تا ۱۳، میزگردی با حضور آقای دکتر شکوهی، پروفسور بیشاپ و دکتر زنگنه در رابطه با فلسفهٔ گروههای کاری و نحوهٔ تشکیل آنها برپا شد و با توجه به علاقهٔ عموم، قرار شد که با اندکی جابجائی در برنامهٔ روز آخر، مجدداً زمانی به گروههای کاری اختصاص یابد.

برای ساعت ۱۵ تا ۱۵:۲۰، شش سخنرانی موازی ۲۰ دقیقه‌ای پیش‌بینی شده بود. از ساعت ۱۵:۳۰ تا ۱۷، نمایشگاهی از پوسترهای باچکیده و بدون‌چکیده همزمان در یک محل برگزار شد. با وجود امکانات بسیار محدود فضائی، این نمایشگاه مملو از جمعیّت بود و بازدیدکنندگان راجع به موضوعهای ارائه شده بحث می‌کردند.

از ساعت ۱۷:۳۰ تا ۲۱:۳۰، برنامهٔ گردش و بازدید از مکانهای تاریخی شهر کرمانشاه بود.

روز سوم

از ساعت ۸:۳۰ تا ۹:۳۰، ششمین سخنرانی عمومی توسط آقای دکتر مهدی رجبعلی‌پور از دانشگاه شهید باهنر کرمان با عنوان «تعریفی جدید برای مفهوم بی‌نهایت کوچک» ایراد گردید. جناب آقای دکتر حسن صادقی از دانشگاه فردوسی مشهد معرّف ایشان بودند. آقای دکتر صادقی ایشان را یکی از بزرگترین ریاضیدانهای معاصر ایران نامید.

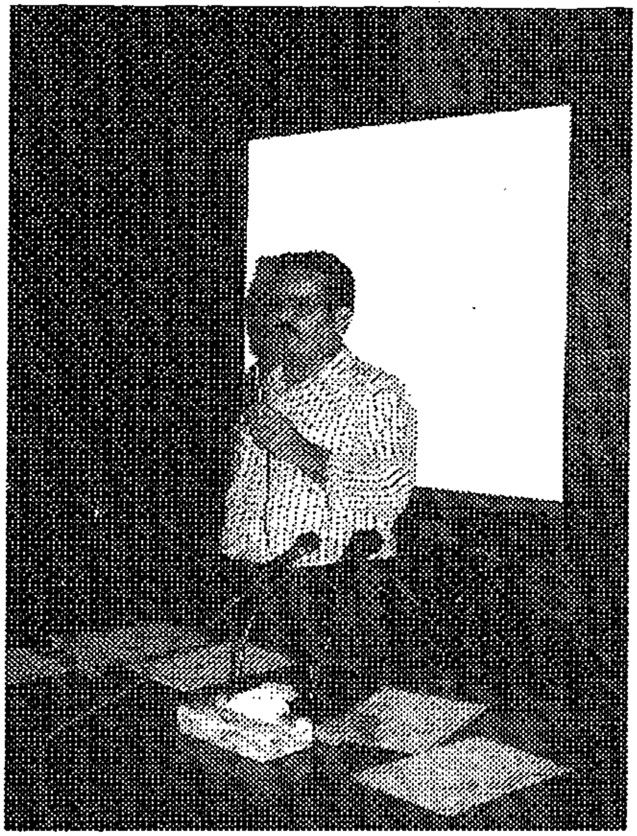


آقای دکتر رجبعلی‌پور در یک تدریس واقعی در حضور ۱۰۰۰ شنونده، به مشکلات درک مفاهیم اساسی حسابان از جملهٔ حدّ پرداختند و سپس با ارائهٔ تعریف دیگری از بی‌نهایت کوچکها، حسابان را بر آن اساس معرّفی کردند.

از ساعت ۹:۴۰ تا ۱۰:۲۰، شش سخنرانی موازی جهت ارائه درنظر گرفته شده بود که دو سخنرانی به علت عدم حضور سخنرانان تشکیل نگردید.

از ساعت ۱۱ تا ۱۱:۲۰، شش سخنرانی موازی ارائه شد.

از ساعت ۱۱:۳۰ تا ۱۲:۳۰، آخرین سخنرانی عمومی توسط نگارنده دربارهٔ «توسعهٔ حرفه‌ای معلمان ریاضی: یک ضرورت» ارائه



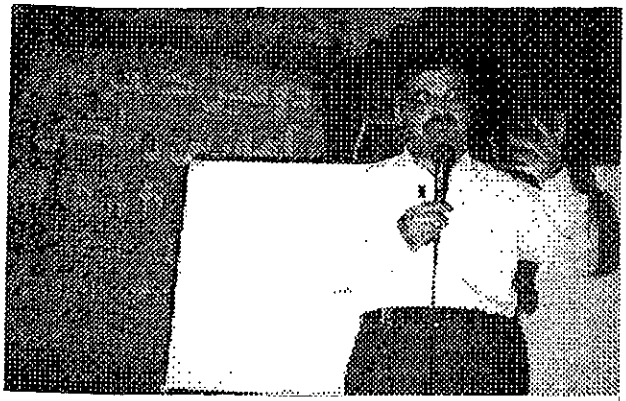
شد[1]. قبل از سخنرانی، آقای دکتر جواد بهبودیان سخنران را معرّفی کردند. موضوع اصلی سخنرانی در رابطه با ضرورت توسعهٔ مبانی نظری آموزش معلمان با تشخیص تفاوت یادگیری در کودک و بزرگسال بود. همچنین، از ساعت ۱۲:۳۰ تا ۱:۰۰، جلسهٔ پرسش و پاسخی با پروفسور بیشاپ در زمینهٔ آموزش معلمان تشکیل شد.

از ساعت ۱۵:۳۰ تا ۱۶:۳۰، دو میزگرد به طور موازی در دو سالن تشکیل شد. میزگرد حسابان توسط آقای دکتر رجبعلی‌پور اداره شد و با استقبال شرکت کنندگان روبرو شد. میزگرد دوم در رابطه با تشکیل گروههای کاری و چگونگی شکل گیری آنها بود که بحث آن در میزگرد قبلی مطرح شده بود (توضیح راجع به نتایج این میزگرد در انتهای گزارش می‌آید.)

بالاخره در ساعت ۱۷:۰۰ روز سوم شهریور، مراسم اختتامیه آغاز شد و پس از سخنرانی کوتاهی توسط مدیرکل آموزش و پرورش، دبیر کمیتهٔ علمی، معرفی آقای سپه‌پناه از طرف انجمن معلمان ریاضی کرمانشاه به عنوان معلّم پیشکسوت ریاضی استان و اهدای هدیه‌هائی از طرف ادارهٔ کل آموزش و پرورش استان کرمانشاه و توسط آقای فرخپور مدیرکل استان، آقای دکتر بهبودیان از شیراز و آقای دکتر مهری از تهران به سخنرانهای مدعو، کنفرانس به طور رسمی به کار خود پایان داد. پروفسور بیشاپ ضمن تشکر و قدردانی از برگزار کنندگان کنفرانس، خاطرنشان کرد که این سفر تا چه اندازه برای او در خنثی کردن تبلیغهای رسانه‌های غربی دربارهٔ ایران مفید بوده است. او گفت که به عنوان یک وظیفه، حتماً واقعیتِ آنچه را که در ایران دیده در مطبوعات آموزش ریاضی استرالیا منعکس خواهد کرد.

نمایشگاهها

در طول کنفرانس، علاوه بر نمایشگاه پوسترها، دو نمایشگاه نرم‌افزار خط میخی و نرم‌افزار درایو نیز برپا شد که مورد توجه واقع شد. آقای مختاری مسئول نمایشگاه نرم‌افزار خط میخی، جزوه‌ای نیز برای این نمایشگاه تهیّه کرده بود و در اختیار علاقمندان قرار داد. همچنین، خانم فرانک پهلوانی نیز جزوه‌ای برای چگونگی استفاده از



نرم‌افزار درایو تهیه کرد و در اختیار مشتاقان گذاشتند.

متأسفانه به دلایل مختلف، هیچ ناشری در کنفرانس شرکت نکرد و فقط مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شمارهٔ ۴۸ توسط نمایندهٔ رشد در کرمانشاه به معرض فروش گذاشته شد. البتّه لازم به ذکر است که از تمام ناشران درخواست شده بود که کتابهای حل‌المسائل و تست را در کنفرانس عرضه نکنند، اگرچه تأکید شده بود که مسئولیت انتخاب کتابها به عهدهٔ ناشران است.

چگونگی تشکیل گروههای کاری

معمولاً در کنفرانسهای بین‌المللی، افرادی که علاقمند به انجام پژوهش در مورد خاصّی هستند، به طور غیررسمی با هم به تبادل تجربه‌های خویش می‌پردازند. آنها پس از توافق بر سر یک موضوع، به طور رسمی‌تر و جدّی‌تری به تقسیم کار می‌پردازند و برای مدّت معینی، انجام کارهای پژوهشی دربارهٔ همان موضوع را شروع می‌کنند. چنین همکاریهائی باعث ایجاد روحیهٔ مشارکت در اعضای گروه، انجام پژوهشهای جدّی با تقسیم کار اصولی، ارائهٔ یافته‌های مختلف پژوهشی حول یک محور (موضوع مشترک) و ایجاد دلبستگی معنوی نسبت به پژوهشهای آموزشی و کنفرانسهای آموزشی می‌شود.

در دومین کنفرانس آموزش ریاضی و در دومین میزگرد مربوط به گروههای کاری، پروفسور بیشاپ مختصری راجع به تجربه‌های خویش از کار در گروههای مختلف کاری صحبت کردند. سپس به شرکت کنندگان پیشنهاد دادند در صورت تمایل و برای آنکه تشکیل گروههای

کاری رنگ واقعی به خود بگیرد، لازم است که برخی برنامه‌ریزی‌ها انجام گیرد.

به همین مناسبت، ایشان موضوع‌های پژوهشی مختلفی برای انجام کارهای پژوهشی و فقط به صورت یک پیشنهاد ارائه دادند. بیشاپ سپس بر ضرورت تعیین چگونگی اجرا تأکید کرد. آنگاه جمعیّت حاضر در سالن در پنج گروه شمال، جنوب، مشرق، مغرب و مرکز بر حسب تقسیم‌بندیهای جغرافیائی وزارت آموزش و پرورش قرار گرفتند. پس از این کار، از هر گروه خواسته شد تا سه نفر داوطلب یکی به عنوان هماهنگ کننده و دو نفر دیگر به عنوان رابط خود را معرّفی کنند. در ضمن تأکید شد که با توجه به جمعیّت کثیر خانمهای معلّم ریاضی، حتماً یکی از این سه نفر از بین خانمها باشند طبق توافق همگی، قرار شد از طریق مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، تمام ۱۵ نفری که از بین ۵ گروه داوطلب شده بودند، آدرسهای پستی و شمارهٔ تلفنهای تماس خود را در اختیار همهٔ افراد گروه خود قرار دهند تا انشاءالله افراد گروه بتوانند مشارکت بهتری باهم داشته باشند.

قبل از پایان میزگرد، جهت آشنائی بیشتر با نحوهٔ مشارکت فکری بین اعضای آن، پنج گروه تشکیل شده به بررسی موضوعهای پژوهشی زیر که از جانب پروفسور بیشاپ پیشنهاد شده بود پرداختند:

۱ ـ توسعهٔ اثبات کردن و ارائه استدلال
۲ ـ توسعهٔ انگیزه و طرز تلقّی دانش‌آموزان
۳ ـ چگونگی اتصّال ریاضی خارج مدرسه به داخل مدرسه
۴ ـ مشکلات (یادگیری ریاضی) دانش‌آموزان با زبان دوم
۵ ـ تجربه کردن با چیزهای مختلف از جمله کامپیوتر
۶ ـ تجربه کردن در رابطه با تدریس ترکیبیات
۷ ـ تجربه کردن در رابطه با تدریس احتمالات
۸ ـ تجربه کردن در رابطه با تدریس آمار و مدل‌سازی
۹ ـ تجربه کردن در رابطه با تغییر روش تدریس در هندسه

نتیجه‌های بررسیهای به‌عمل آمده، توافق گروهها بر موضوعهای زیر بود:

منطقهٔ مرکز: ۱، ۲، ۳، ۵، ۹
منطقهٔ شمال: ۲، ۳، ۶، ۷، ۸
منطقهٔ جنوب: ۲، ۳، ۷
منطقهٔ شرق: ۲، ۳
منطقهٔ غرب: ۲، ۳، ۴، ۵، ۷، ۸

جالب توجّه است که موضوعهای معرّفی شده در کنفرانس، بیشترین توجّه‌ها را به خود جلب کرده بود و فراوانی انتخاب موضوعهای ۲ و ۳ معرّف این مدّعاست.

کمیتهٔ علمی کنفرانس امیدوار است که همکاران گرامی که در گروههای پنج‌گانه عضو شده‌اند. حتماً در طی سال تحصیلی و در تابستان ۱۳۷۷ با هم در تماس باشند و به انجام تکلیفهای پژوهشی کوچک یا بزرگ بپردازند تا به یاری خدا، در سومین کنفرانس آموزش ریاضی که در کرمان برگزار خواهد شد، با دستهای پر شرکت کنند. بعد از انجام کارهای جدّی، آنگاه دور هم جمع شدن گروههای کاری بامعناتر خواهد بود، زیرا همه از قبل زمینهٔ مشارکت پیدا کرده‌اند و به یافته‌های قابل ارائه نیز دسترسی پیدا کرده‌اند. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی یک ستون خبری را به عنوان وسیلهٔ ارتباطی برای اعضای گروهها اختصاص می‌دهد و در همین جا از همهٔ اعضا استدعا می‌کند تا حتماً از این فرصت استفاده کنند و ارتباط با یکدیگر را قطع نکنند.

زهرا گویا
دبیر کمیتهٔ علمی دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

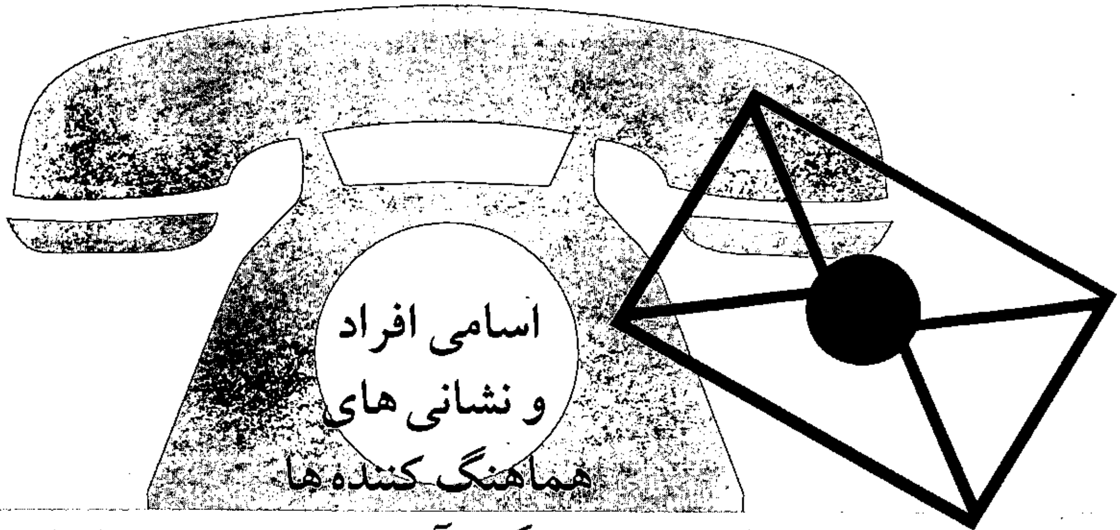
زیرنویسها:

۱ ـ برای اطّلاعات بیشتر به *راهنمای کنفرانس* و *مجموعه مقالات مدعوین* اولین کنفرانس آموزش ریاضی ایران مراجعه کنید.

۲ ـ نمایشگاه نرم‌افزار خط میخی توسط آقای مختاری در کنفرانس ارائه شد که مورد توجّه بازدیدکنندگان قرار گرفت.

3- Educational Studies in Mathematics

۴ ـ در کتابچهٔ راهنمای کنفرانس، ارائهٔ آخرین سخنرانی عمومی در بعدازظهر و قبل از اختتامیه بود. امّا بنا به درخواست تعدادی از شرکت‌کنندگان، زمان این سخنرانی با میزگردها جابجا شد.



در منطقه های پنج گانهٔ آموزشی - پژوهشی ایران

منطقه جنوب:

آدرس پستی: شیراز

۱ـ آقای احمد احسنت: میدان معلم، خیابان همت جنوبی، ۱۵ متری گلها، ۸ متری شبنم، پلاک ـ ۱۵۵

تلفن: ۶۶۸۹۹۹

۲ـ خانم صدیقه ابراهیمی: شیراز، پشت جهانگردی، جنب آژانس مسکن صبوری، منزل ابراهیمی

تلفن: ۷۶۸۸۹۷ـ۷۷۱۸۹۰

۳ـ آقای محمدعلی عظیمی: خیابان معدل، مرکز تحقیقات میرزای شیرازی یا صندوق پستی شماره: ۴۴۳ ـ ۷۱۶۴۵

تلفن: ۳۳۵۵۹۷

۴ـ اعظم ابراهیمی: بوشهر ـ میدان امام خمینی ـ مدیریت صنایع دستی استان بوشهر واحد مسکونی (آقای سهیلی) فاکس: ۳۶۲۲۹

تلفن: ۳۲۴۵۴

موضوعات:

۱ـ توسعهٔ اثبات کردن واثبات استدلال

۲ـ توسعهٔ انگیزه و طرز تلقی دانش آموزان

۳ـ چگونگی اتصال ریاضی خارج مدرسه به داخل مدرسه

۴ـ مشکلات دانش آموزان با زبان دوم

۵ـ تجربه کردن با چیزهای مختلف از جمله کامپیوتر

۶ـ تجربه کردن در رابطه با تدریس ترکیبیات

۷ـ تجربه کردن در رابطه با تدریس احتمالات

۸ـ تجربه کردن در رابطه با تدریس آمار و مدلسازی

۹ـ تجربه کردن در رابطه با تغییر روش تدریس هندسه

منطقهٔ غرب:

۱ـ ساغر کشیری: شهرکرد ـ گودال چشمه ـ خیابان جانبازان ـ کوچه ۴ـ پلاک ۳۱ منزل محمدرضا حیدری

تلفن: ۳۲۲۱۴ـ۰۳۸۱

۲ـ نسترن اسدی: سنندج: خیابان سعدی جنب شرکت توسعه صادرات کردستان پلاک ۲۱۰

تلفن: ۶۲۹۹۰

۳ـ اصغر امدادی: کرمانشاه ـ فرهنگیان فاز یک ـ خیابان شهلا جلیلیان ـ کوچه ۴۶

تلفن: ۸۴۰۳۰۵

منطقه شرق

۱ـ علی فرهوش: مشهد ـ خیابان آبکوه ـ دانشسرای شمالی کوچه گلایل ـ پلاک ۶

تلفن: ۸۱۰۰۷۹

۲ـ غلامرضا مصطفایی:

محل کار: مشهد ـ دبیرستان غیرانتفاعی مریم

تلفن: ۸۱۱۰۱۲

منزل: مشهد بلوار فردوسی ـ خیابان مهدی یک پلاک ۱۰۹

تلفن: ۷۱۲۶۷۲

۳ـ مشهد خیابان لشگر ثامن الائمه بعد از لشگر ۱۲ـ پلاک ۸۲

تلفن: ۴۸۶۴۸

منطقه شمال:

۱ـ عباس مهارلوئی ـ گرگان دبیرستان غیرانتفاعی فاطمه (س)

تلفن منزل: ۵۳۴۲۴

۲ـ بهرام صمدائی ـ قائم شهر ـ خیابان امام کوچه تیر پلاک ۷

تلفن منزل: ۲۵۰۳۲

۳ ـ روح انگیز نیک آئین ـ قائم شهر ـ مرکز پیش دانشگاهی دختران

منطقه مرکز

۱ ـ علی سهیلی: اراک ـ شازند ـ قدمگاه ۳۴۸۱ـ۰۸۶۸۲

یا آموزش و پرورش شازند ۲۱۴۷ ـ۰۸۶۴۷

۲ ـ سوسن پناهنده: تهران ـ انتهای خیابان معلم ـ کوچه شهید جلالی ـ پلاک ۱۳ تلفن اداره: ۶۷۳۶۹۹ پارک شهر ساختمان آفرینشهای هنری و علمی ـ گروه ریاضی ـ طبقه سوم

۳ ـ انسیه شاهدانی ـ تهران ـ خیابان تهران نو ـ خیابان ۱۵ متری انصاری ـ کوچه شهید ابوالقاسم ـ پلاک ۲۴

تلفن: ۷۸۱۶۸۳۸

نویسندگان: آنی هنری و مایکل هنری
مترجمان: روح‌الله جهانی‌پور ـ دانشگاه صنعتی شریف
عبدالرّضا سیّاره ـ دانشگاه رازی کرمانشاه

رویکرد فراوانی در تدریس احتمال در دبیرستانهای فرانسه

خلاصه

در سال ۱۹۹۱ برنامه درسی جدیدی برای دانش‌آموزان ۱۶ تا ۱۸ سال در فرانسه ارائه شد که در آن تحولات اساسی در شیوهٔ تدریس مبحث احتمال به چشم می‌خورد. این برنامهٔ درسی به دنبال برنامهٔ درسی دورهٔ کالج (۱۱ تا ۱۵ ساله‌ها) که شامل مطالعات مقدماتی دربارهٔ آمار و محاسبه‌های ساده با داده‌ها است، می‌آید. در سال اول این دوره، کلاس دوم (۱۵ـ۱۶ ساله‌ها)، مطالعهٔ توزیع‌های فراوانی ادامه داده و تکمیل می‌شود و تدریس احتمال در سال بعد به دنبال این سال می‌آید اما در آنجا هم اکیداً توصیه می‌شود که موضوع طوری تدریس شود که گویی دانش‌آموز برای اولین بار است که با آن برخورد می‌کند. روش تدریس احتمال در این برنامهٔ جدید متکی بر ایدهٔ «پایداری فراوانی‌های نسبی یک پیشامد وقتی که آزمایش به دفعات زیاد تکرار می‌شود» است. بنابراین این شیوهٔ معرفی احتمال از مفهوم پیشامدهای هم‌شانس که همان دید کلاسیک است ناشی نمی‌شود. تعریف کلاسیک احتمال و عرضهٔ سازمان یافتهٔ آن تا سال آخر دوره به تعویق می‌افتد.

در این مقاله مروری می‌کنیم بر این تغییر رویکرد و شیوهٔ جدید عرضهٔ مفهوم احتمال و چند رهیافت تاریخی در این باره را نیز گوشزد می‌کنیم. در بخش دوم مقاله چند مثال از تجربیات کلاسی در به کار بردن این شیوه جدید ارائه می‌شود.

بخش اول: معرفت شناسی و بُعد آموزشی

۱. ماهیت رویکرد جدید تدریس احتمال

در چند سطر زیر ماهیت رویکرد جدید دربارهٔ روش نگرش به مفهوم احتمال را که در اسناد برنامهٔ درسی آمده است، جمع‌آوری کرده‌ایم: (متن کامل را می‌توانید در انتهای مقاله ملاحظه کنید.)

در این برنامه هدف این بوده است که دانش‌آموزان بتوانند آزمایش‌های تصادفی ساده را انجام و توضیح دهند و احتمالهای مربوط به آنها را حساب کنند و از هرگونه عرضهٔ نظری احتمالات باید پرهیز شود. ایدهٔ احتمال باید بر اساس مطالعهٔ توزیع‌های فراوانی حاصل از تکرار یک آزمایش تصادفی تدریس شود. در اینجا تأکید بر رفتار فراوانی‌های نسبی این پیشامدها و پایداری نسبی این فراوانی‌های نسبی است زمانی که آزمایش به دفعات زیاد تکرار می‌شود.

این رویکرد در تدریس احتمال از طریق مفهوم فراوانی نسبی، با اطلاعات قبلی دانش‌آموز دربارهٔ آمار که در آن فراوانی نسبی را با مثالهای متعدد آماری آموخته است، پیوند برقرار می‌کند. به همین دلیل است که ما در مقابل مفهوم کلاسیک صوری احتمال، رویکرد «فراوانی» را مطرح می‌کنیم. در رویکرد صوری، تصادفی بودن نتایج یک آزمایش جزء اصول است و از پیش و به دلیل تقارن فرض می‌شود که دست کم تمام پیشامدهای ساده هم شانس هستند.

این مفهوم کلاسیک احتمال مستقیماً از مکاتبات بین پاسکال[1] و فرما[2] سرچشمه می‌گیرد. پاسکال معتقد بود که این شاخهٔ جدید ریاضی را باید «هندسهٔ شانس»[3] نامید. اما به پاس خدمات لاپلاس، این روش را «رویکرد لاپلاسی» به احتمالات می‌نامیم. در ابتدای قرن نوزدهم بود که لاپلاس قوانین کار با احتمالات را با بیان ۱۲

«اصل» که ممکن بود تعریف یا اصل موضوع باشد، وضع کرد. اولین اصل از این ۱۲ تا به این صورت بود: «اولینِ این اصول خود تعریف احتمال است که همانطور که دیده‌ایم، نسبت تعداد حالتهای مساعد به تعداد کل حالت‌های ممکن است.»

۲. ارتباط با مطالعات قبلی

باید توجه کرد که رویکردی که در این برنامهٔ جدید برای تدریس احتمالات برگزیده شده است با محتوای مواد درسی که دانش‌آموزان قبلاً و در سال دوم کالج مطالعه کرده‌اند همخوانی دارد، زیرا در آنجا هم تأکید بر روی فعالیت‌های عملی، و استفاده از مشاهده و حدس‌زدن، پیش از ارائه یک مدل ریاضی نظری بود.

در واقع بر عکس روش صوری ارائه و تدریس ریاضیات، برنامهٔ جدید زمینه‌ساز مطالعهٔ ابزارهای توصیفی واقعیات محسوس است. از این رو، اعتقاد بر این است که خود احتمال ابزار ریاضی است که در نتیجهٔ ایجاد یک الگوی ریاضی برای فعالیتی که در مورد آمار، بر مبنای گردآوری و سازماندهی داده‌ها است، به وجود آمده است. بنابراین معرفی صوری یک الگوی احتمال کنار گذاشته می‌شود و همانطور که در این برنامه‌ریزی جدید روشن شده است، «باید از هرگونه عرضهٔ نظری احتمال پرهیز کرد» زیرا علاوه بر اینکه نمی‌خواهیم در این سطح از آموزش، مشکلات تکنیکی و صوری را مطرح کنیم، بلکه هرگونه معرفی و تدریس احتمال از طریق «عرضهٔ نظری» با ماهیت اصلی برنامهٔ جدید تدریس منافات دارد.

۳. تدریس مفهوم احتمال

اکنون می‌خواهیم ببینیم چگونه می‌توان مفهوم توزیع‌های فراوانی را با ایدهٔ احتمال مرتبط ساخت. به عنوان اولین مثال، توزیع فراوانی ناشی از مطالعهٔ ویژگی معینی از یک جامعه را در نظر بگیرید. اگر ویژگی را کیفی فرض کنیم، وضعیت ساده‌تر خواهد شد، هر چند برای ویژگی‌های کمّی پیوسته هم، با تقسیم کردن مشاهدات به طبقات مختلف می‌توان وضعیت مشابهی را به دست آورد.

مثال ما دربارهٔ جنگل کوچکی مشتمل بر ۱۰۰۰ درخت است. (البته این یک وضعیت شبه محسوس است ولی می‌توان آن را تعمیم داد.) فرض کنید شش نوع درخت مختلف وجود دارند که آنها را با عددهای ۱ تا ۶ برچسب‌گذاری می‌کنیم. در اینجا به نسبت نوع‌های مختلف درختان به تعداد کل آنها علاقه‌مند هستیم. فرض کنید شمارشی از درختان از نوع‌های مختلف انجام شده و نتایج ثبت شده در جدول به دست آمده است:

نوع درخت	۱	۲	۳	۴	۵	۶
فراوانی	۷۰۰	۲۰۰	۵۰	۳۰	۱۰	۱۰
فراوانی نسبی	۰/۷	۰/۲	۰/۰۵	۰/۰۳	۰/۰۱	۰/۰۱

اگر همانطور که برنامهٔ جدید بیان می‌کند، «ایدهٔ احتمال بر اساس مطالعهٔ توزیع فراوانی است» کار را چگونه می‌توان ادامه داد؟ اینکه چگونه می‌توان این کار را انجام داد، چندان واضح نیست.

واقعیت اساسی این است که مفهوم احتمال فقط زمانی می‌تواند معنا یابد که دربارهٔ پیشامد ناشی از یک آزمایش تصادفی باشد:

«احتمال نمی‌تواند بدون تصادفی بودن وجود داشته باشد»

پیش از طرح مفهوم احتمال باید مفاهیم «پیشامد» و «تصادفی بودن» روشن شوند. به علاوه در برنامهٔ جدید تدریس احتمال این مطلب در همان اوایل تدریس مورد توجه قرار گرفته است: «هدف این است که دانش‌آموزان آزمایش‌های تصادفی ساده را انجام و توضیح دهند.» مفهوم حاصل از انجام فعالیتِ «توضیح نتایج یک آزمایش تصادفی» سر رشتهٔ بسیاری از مفاهیم دیگر است.

فرضهای مهمی به این مفهوم تصادفی بودن نسبت داده می‌شود. برای اینکه قدری کار ریاضی با این مفهوم انجام دهیم، محتاج کمی مدل‌سازی هستیم. خوشبختانه می‌توان این کار را با استفاده از مجموعه‌ها، زیرمجموعه‌ها و زبان و اعمال ریاضی همراه با آنها، انجام داد. بنابراین یک آزمایش تصادفی به مجموعهٔ کاملاً معینی از برآمدهای ممکن آن آزمایش منجر می‌شود.

علاوه بر اینها، آزمایش تصادفی باید تحت همان شرایط، *تکرارپذیر* باشد (دست کم در ذهن ما). یعنی وقایع تاریخی، پیشامدهای تصادفی تلقی نمی‌شوند و هیچ استنباط احتمالاتی نمی‌توان از آنها کرد. با این همه عبارت «همان شرایط» مبهم است: اگر برآمدهای مختلفی وجود داشته باشند آیا ممکن است یک آزمایش، دوبار و در شرایط یکسان انجام شود؟ زیرا یک تعیّن‌گرا در مواجههٔ با برآمدهای مختلف قبول نمی‌کند که آنها از انجام «یک آزمایش» حاصل شده باشند. بنابراین بهتر است از دیدگاه آزمایشی به این کلمات نظر افکنیم: دو آزمایش را معادل می‌خوانیم در صورتی که بتوان آنها را بر حسب کلمات یکسان، پارامترهای یکسان و با یک درجه از تقریب یا دقت بیان و توصیف کرد.

بالاخره اینکه برآمدهای یک آزمایش تصادفی نباید قابل پیش‌بینی باشند. به طور دقیقتر، هیچ روشی برای توصیف یا انجام

دادن یک آزمایش نباید قادر به تعیین برآمدهای آن باشد. هر یک از برآمدهای ممکن باید تحت شرایط آزمایش و کاملاً شانسی به دست آمده باشند.

بنابراین مفهوم تصادفی بودن با مفهوم شانس، با همهٔ مشکلات فلسفی و معرفت‌شناختی‌اش ارتباط دارد. (در واقع ریشهٔ لغات قمار، اتفاق، شانس، تصادف و غیره در کلمات بخت، رفتار غیرقابل کنترل، پرتاب تاس، بازیهای شانسی و غیره ریشه دارند.) مشکلات فلسفی مربوط به تصادفی بودن، انگیزه‌ای بوده‌اند برای مقدمهٔ طولانی که پوانکاره[4] برای کتاب ***«حساب احتمالات»***[5] خود نگاشته است. او می‌نویسد: [تعیّن‌گرایی لاپلاس معتقد است که] «کلمهٔ شانس مترادف ناآگاهی است. خوب! منظور از این حرف چیست؟... با این حساب، شانس باید چیزی غیر از نامی باشد که به ناآگاهی‌های خود می‌دهیم و در نتیجه می‌توانیم پدیده‌هایی را که دلیلشان را نمی‌دانیم به دو دسته تقسیم کنیم: یکی آنهایی که کاملاً شانسی رخ می‌دهند و حساب احتمالات، اطلاعات موقتی دربارهٔ آنها در اختیار ما قرار می‌دهد و دستهٔ دوم آنهایی هستند که شانسی رخ نمی‌دهند که دربارهٔ آنها هیچ چیز نمی‌توانیم بگوییم جز اینکه قادر به تعیین قوانین حاکم بر آنها نیستیم.»

این نکته نشان می‌دهد که برای درک مشکلات مفهومی احتمال باید بر موانع معرفت‌شناختی فائق آییم.

۴. شانس ـ گریز معرفت شناختی

دانش‌آموزان تا زمان رسیدن به سن ۱۶ سالگی از طریق انجام بازیهای شانسی مختلف با وضعیت‌هایی که متضمن تصادفی بودن است آشنایی یافته‌اند. حتی ممکن است نظراتی هم دربارهٔ احتمال داده باشند، بدون اینکه بدانند این نظرات چقدر موثق بوده است. اما نخستین بار در ریاضیات است که از آنها ارائه الگویی برای احتمال و نیز اندازه‌گیری آن، خواسته می‌شود. در گذر از درک تجربی دربارهٔ احتمال به رویکرد علمی به آن، نمی‌توانیم از بعضی کارهای اساسی دربارهٔ مفهوم شانس و مشکلات معرفت‌شناختی وابسته به آن بگریزیم. بامطالعهٔ سابقهٔ تاریخی موضوع به روشنی می‌توان این مشکلات را دید که البته به هیچ‌وجه سازگار و قطعی نیستند. پاسکال، برنولی[6]، دالامبر[7]، لاپلاس[8]، کورنو[9] و پوانکاره همگی در شرح و بسط این مشکلات سهم داشته‌اند. مروری بر نظرات ریاضیدانان گذشته، می‌تواند در بازپروری اندیشه‌های آنها دربارهٔ احتمالات مفید باشد. این کار باعث می‌شود، در مواجهه با درک دانش‌آموزان از احتمال، آمادگی لازم را داشته باشند.

آیا شانس وجود دارد؟ و چگونه می‌توانیم آن را تعریف کنیم؟ مفاهیم تصادفی بودن و شانس که خیلی با بازیهای کارت و پرتاب تاس ارتباط دارند، به صورت یک موضوع آبرومند ظاهر نشدند و مخالفانی هم داشتند: حتی نظرات فلسفی و خداشناسانه هم در این‌باره وجود داشت. مثلاً ژاکوب برنولی (۱۷۰۵_۱۶۵۴) در کتاب ***فن حدس زدن***[10] خود که تا سال ۱۷۱۳ منتشر نشد، می‌نویسد:

«اگر قرار باشد هرآنچه که در آینده هست، به طور حتم رخ دهد، دیگر خداوند چگونه دانش مطلق و قدرت مطلق بودن خویش را حفظ خواهد کرد؟»

«احتمال درجه‌ای از یقین است، ولی با یقین فرق می‌کند، همانطور که جزء با کل فرق می‌کند.» او می‌افزاید: «اگر یقین به طور معقول و همانگونه که بر ما اثر می‌گذارد در نظر گرفته شود، اندازهٔ دانش ما از واقعیت خواهد بود.»

ایدهٔ «تعیّن» خیلی صریح در مقالهٔ لاپلاس (۱۸۲۷_۱۷۴۹) با عنوان ***مشکلات فلسفی احتمال***[11] که در سال ۱۸۱۴ منتشر شد، مطرح شده است:

«وضعیت کنونی عالَم را می‌توانیم اثر وضعیت گذشتهٔ آن و دلیلی برای آنچه در آینده رخ خواهد داد بدانیم. بینشی که بتواند در یک لحظه تمامی اشیاء تشکیل‌دهندهٔ طبیعت و تمامی نیروهای مؤثر بر آن را بشناسد و آنقدر وسیع باشد که بتواند همهٔ این واقعیات را تحلیل کند، قانون حرکت بزرگترین اجرام سماوی و سبک‌ترین اتمها را در قالب یک فرمول درآورد؛ آنگاه چیزی برای او نامطمئن نخواهد بود و گذشته همچون آینده پیش چشم او قرار خواهد داشت.»

با این حساب آیا اصلاً شانس وجود ندارد؟ کورنو معتقد است که شانس، بروز برخورد بین دو سری از وقایع مستقل است، مثل وقتی که یک تکه آجر باعث می‌شود سقف خانه ناگهان بر سر ساکنین آن فرود آید. (رخدادی که ما نیز همانند ارسطو، توجه خاصی به آن داریم.)

رنه‌توم در مقدمه‌ای بر مقالهٔ لاپلاس می‌نویسد: «شانس محض مستلزم رخداد بدون دلیل یعنی یک شروع مطلق است. اما در توصیف ما از جهان واقعی هیچ نمونه‌ای از شروع مطلق وجود ندارد مگر خود خلقتِ عالم.»

به هرحال تصورات تعیّنی بر ضد پیشرفت‌های جدید علوم در قرن بیستم است. رنه‌توم به دلایل اساسی ادعا می‌کند که «در تضاد بین شانس و تعیّن، علم تعیّنی است.» آنگاه به پیروی از استعاره مشهور اینشتین می‌پرسد: «آیا تاس بازی یک سنّت الهی است؟» اما اصل عدم قطعیت هایزنبرگ مفهوم تعیّنی «مهبانگ» در پیدایش عالَم را رد می‌کند زیرا با اصل «علّت و معلول» منافات دارد. امروزه شانس ملاکی برای پیچیدگی اشیائی است که از دسترس

انسان خارج هستند، به ویژه آن اشیائی که از شرایط اولیهٔ بی‌نهایت کوچک ناشی می‌شوند. عقیدهٔ معاصر بر این است که وضعیت‌های پیچیدهٔ نامنظم زیربنای وضعیت‌های منظم هستند و می‌توان در یک چارچوب احتمالاتی آنها را پیش‌بینی کرد. مثال رایج در این مورد، حرکت براونی و قوانین ترمودینامیک گازها هستند. لذا از دیدگاه معرفت‌شناختی (یعنی دیدگاهی که به مفاهیم زیربنایی الگوهای ریاضی می‌پردازد) یک تعیّن‌گرای مطلق به تبعیت از لاپلاس، تصادفی بودن را ناشی از ناآگاهی ما از تمام علل یک واقعه و به دلیل پیچیدگی زیاد آن پدیده در مقایسهٔ با قدرت تحلیل و محاسبهٔ ما می‌داند: «احتمال تا اندازه‌ای به ناآگاهی ما و تا اندازه‌ای هم به قدرت درک ما بستگی دارد.»

این تعیّن‌گرایی باعث شد که دالامبر (در دایرةالمعارف خود به سال ۱۷۵۴) دچار یک خطای مفهومی شود. او ادعا می‌کرد که در یک بازی شیر یا خط بعد از سه بار متوالی ظاهر شدن شیر، آمدن شیر در پرتاب بعدی کمتر محتمل است. این همان تصور غلطی است که در روزنامه‌ها نیز در مورد بخت‌آزمایی (و بررسی آماری آن) مشاهده می‌شود.

برعکس، رویکرد کاملاً تصادفی به وقایع غیرقابل پیش‌بینی به ایدهٔ هم‌شانس بودن برآمدها منجر می‌شود که البته هیچ دلیلی برای رجحان یک برآمد بر دیگری وجود ندارد. در اینجا است که دانش‌آموزی که تصوری جز هم‌شانس بودن برآمدها ندارد می‌گوید: «برای وضعیت هوای فردا دو امکان وجود دارد. یا فردا هوا صاف است، و یا ابری است. پس اگر هیچ پیش‌بینی وضعیت هوا در کار نباشد، با احتمال $\frac{1}{2}$ فرداد هوا صاف خواهد بود.» اما آیا هنگام عبور از عرض خیابان هم، شانس سالم رسیدن ما به سمت دیگر خیابان $\frac{1}{2}$ است؟

در نوشته‌های دالامبر مشاهده می‌شود که او معتقد است، احتمال یک پیشامد، بوسیلهٔ تعداد نتایج مشاهده شده از یک آزمایش مشخص می‌شود و نیز احتمال یک رویداد به تفسیرهای ممکن از اطلاعات موجود درباره پیشامد بستگی دارد. (دانش‌آموزی هم پیدا می‌شود که بر عکس دانش‌آموز فوق مدعی است احتمال به دست آوردن یک ۵ و یک ۶ در پرتاب دو تاس یکسان با احتمال آمدن همین اعداد در پرتاب دو تاس ناهمرنگ برابر نیست) بنابر این دیدگاه احتمال یک واقعیت عینی نیست. یک مانع معرفت‌شناختی هم وجود دارد: لزوم تمایز گذاردن بین واقعیات عینی دربارهٔ یک پیشامد مشاهده شده و واقعیت‌هایی که به توانایی‌های ذهنی مشاهده کننده بستگی دارند. وضعیت مشابه زمانی رخ می‌دهد که دانش‌آموزان با احتمال شرطی مواجه می‌شوند.

بین تصادفی بودن محض که تمام علوم را به حدس‌های احتمالاتی تبدیل می‌کند و شخص را در مقابل ذهنیت خود قرار می‌دهد و تعیّن محض که حساب احتمالات را به واسطه فقدان دانش کافی به یک شکاف و توقف موقتی در اندازه‌گیریها مبدل می‌کند، باید جایی نیز برای شانس قائل شد، منتها تا زمانی که در کنار دیگر قوانین طبیعت، یک پدیدهٔ طبیعی به حساب آید. همانطور که لاپلاس هم تأکید می‌کند، قوانین طبیعت «به جای دقیقتر و دقیقتر شدن، تأثیرشان بر مبنای ابتنباط‌ها و قیاسهایی است که منعکس کنندهٔ یک رویکرد احتمالاتی‌اند، که در نتیجهٔ آن تمام دستگاه دانش بشری، به نظریهٔ احتمال محدود خواهد شد.»

۵. توصیف آزمایش تصادفی مربوط به یک توزیع فراوانی

اکنون بیایید به مثالمان در مورد درختان درون جنگل برگردیم. در این مثال آزمایش تصادفی که در معرفی مفهوم احتمال اساسی است، انتخاب «تصادفی» یک درخت است، با این قرارداد که «انتخاب تصادفی» یعنی «شانس» (به معنای طبیعی) انتخاب شدن هیچ یک از درختان، بزرگتر از دیگری نیست. آنچه با فرض هم شانس بودن انتخاب درختان به دست می‌آوریم، یکسان بودن احتمالهای پیشامدهای مقدماتی است که لاپلاس نیز بر اهمیت آنها تأکید می‌کند: «نظریه شانس عبارت است از تبدیل همهٔ پیشامدهای هم‌نوع به تعداد مشخص پیشامدهای هم‌شانس، یعنی پیشامدهایی که عدم یقین ما در مورد وقوع آنها یکسان است.» قسمت «یعنی» در این نقل قول دچار همان خطای مفهومی است که دانش‌آموز در مورد پیش‌بینی وضع هوا مرتکب شده بود. یعنی ناآگاهی ما از عوامل دخیل در وقوع یک پدیده منجر به فرض هم شانس بودن بشود. اما گویا برای لاپلاس، هم‌شانس بودن ویژگی ذاتی این وضعیت است زیرا به عنوان اصل دوم می‌افزاید: «اگر برآمدهای مختلف هم‌شانس نباشند، آنگاه امکانهای رخ دادن متناظر با آن برآمدها باید از ابتدا معین شوند که درست انجام دادن این کار پردردسرترین قسمت نظریهٔ شانس است.» لاپلاس در دومین اصلش، با ارائهٔ تعریف مذکور در بالا، در را برای استفاده از رویکرد فراوانی نسبی وقوع باز می‌گذارد. با این همه ملاحظه می‌کنیم که کندورست (Condorcet)[12] در نوشتهٔ خویش که در همان زمان به چاپ رسیده است، این دیدگاه را نمی‌پذیرد و می‌گوید: «اول از همه باید تعداد همهٔ پیشامدهای هم‌شانس را یافت و لازم است که آن پیشامدهایی را هم که فرض می‌شود همان احتمال وقوع را دارند به آن بیفزائیم به جز آن‌هایی که محاسباتشان کاملاً فرضی است.»

در حالت کلی آزمایش تصادفی وابسته به یک توزیع فراوانی منوط به انتخاب

«تصادفی» عنصری از یک جمعیت مورد مطالعه خواهد بود.

اما چگونه می‌توان انتخاب «تصادفی» داشت و هنوز هم از مساوی بودن شانس مطمئن بود؟ این یک مسئله واقعی است که به عنوان مثال در نمونه گیری از آرای عمومی با آن مواجه می‌شویم. در مورد مثال درختان جنگلی، روشی که برای انتخاب تصادفی یک درخت به دانش‌آموزان می‌توان پیشنهاد کرد این است که از بین اعداد یک تا هزار یک عدد را به تصادف انتخاب کنند. برای انجام این کار هم کافی است هر یک از سه رقم آن عدد را (اگر حداکثر سه رقم داشته باشد) «به تصادف» انتخاب کنند.

از جدول اعداد تصادفی[۱۳] هم می‌توان استفاده کرد. منتها سئوالی که پیش می‌آید این است که خود این جدول چگونه درست شده است. در واقع، اعداد تصادفی را می‌توان با کامپیوتر با استفاده از الگوریتمی بر مبنای باقیمانده‌های متوالی به هنگ یک عدد خیلی بزرگ، تولید کرد. بسط اعشاری یک عدد متعالی، یعنی یک دنبالهٔ متعالی نیز در این مورد کارگر می‌افتد که این همان الگوریتمی است که پوانکاره به کار بُرد. این فرآیندها، با دادن نقطهٔ شروع، به طور کاملاً مشخص انجام می‌شوند (مثلاً کافی است کلید مربوط به عدد تصادفی روی یک ماشین حساب را فشار دهید.) اما نتایج کاملاً غیرقابل پیش‌بینی هستند، مگر اینکه همهٔ محاسبات انجام شوند. نتایج تقریباً هم‌توزیع نیز هستند؛ و از این رو شبه تصادفی‌اند. به این ترتیب برای مطمئن ساختن دانش‌آموزان به امکان مشاهدهٔ تصادفی بودن می‌توان از یک جدول اعداد تصادفی استفاده کرد.

۶. پیشامدها، پیشامدهای مقدماتی و عالم سخن

در آزمایش احتمالاتی مربوط به درختان درون جنگل به دنبال شش احتمال متناظر با شش نوع مختلف از درختانی که به تصادف انتخاب می‌شوند، بودیم. پس باید یکی از ۶ برآمد ممکن متناظر با شش نوع درخت را انتخاب کنیم. بنابراین یک پیشامد به خانواده‌ای از پیشامدهای مقدماتی متعلق است. الگوی ریاضی این مسئلهٔ احتمالاتی ما را ملزم به استفاده از زبان مجموعه‌ها می‌کند. ترکیب‌های منطقی پیشامدها (و، یا، نقیض) با اشتراک، اجتماع و مکمل مجموعه‌ها نمایش داده می‌شوند. در ریزبرنامهٔ درسی فرانسه زبان مجموعه‌ها به خودی خود یکی از اهداف تدریس تلقی نمی‌شود. اما ملاحظه می‌کنیم که در بین آگاهی‌های لازم برای یک دانش‌آموز چیزهایی از قبیل «محاسبهٔ احتمال اجتماع پیشامدهای مجزا و محاسبهٔ احتمال رخ ندادن یک پیشامد» یافت می‌شود.

الگوی انتخاب تصادفی درخت در جنگل به الگوی سادهٔ کیسه‌ای محتوی مهره‌هایی از شش رنگ مختلف که فقط نسبت‌های رنگها معلوم است، برمی‌گردد. این مثالی است که باید به عنوان بخشی از کار عملی برنامهٔ تدریس احتمال به دانش‌آموزان داده شود. وقتی حجم جامعه مجهول است و فقط فراوانی‌های نسبی داده شده‌اند، نمی‌توانیم احتمال پیشامدهای مقدماتی را حساب کنیم، یعنی احتمال اینکه یک مهرهٔ خاص انتخاب شود را نمی‌دانیم. در مورد انتخاب درخت از جنگل می‌توانیم انتخاب یک گونه درختی خاص را یک پیشامد مقدماتی تلقی کنیم، ولی در اینجا این پیشامدها هم‌شانس نیستند. همانطور که لاپلاس هم تذکر می‌دهد، هنگام در نظر گرفتن مسألهٔ تخمین با استفاده از نمونه‌گیری، «محاسبهٔ درست احتمالهای پیشامدهای مقدماتی، یکی از پردردسرترین قسمتهای نظریهٔ شانس است.»

برنامهٔ تدریس می‌گوید که در چنین وضعیت‌هایی، یعنی «وقتی پیشامدهای مقدماتی از قبل داده نشده‌اند، باید با استفاده از افراز کردن جامعه مورد آزمایش آنها را ساخت.» و این منجر به «تعریف احتمال یک پیشامد به صورت مجموع احتمالهای پیشامدهای مقدماتی» می‌شود. پس می‌بینیم که مجموعهٔ پیشامدهای مقدماتی که عالم سخن را در یک بحث احتمالاتی تشکیل می‌دهد، نه نتیجهٔ توصیف آزمایش تصادفی است و نه به طور یکتا توسط آن معلوم می‌شود. اطلاعات مربوط به عالم سخن W، که برای انجام هرکاری در جبر پیشامدها باید به روشنی معلوم باشند، از فرآیند الگوسازی و در نتیجه انتخاب امکانهای نتیجهٔ آن آزمایش ناشی می‌شوند. پس می‌توان انتظار داشت که سئوالهای استانداردی از قبیل «مجموعهٔ پیشامدهای مقدماتی را معین کنید» ازتمرینهایی که به دانش‌آموزان داده می‌شود حذف و به جای آن سئوال «عالم سخن را طوری انتخاب کنید که آزمایش تصادفی را به بهترین نحو توصیف کند» قرار داده شود. فقط در همین اواخر است که در برنامهٔ درسی به مواردی مثل «حالتی را در نظر بگیرید که پیشامدهای مقدماتی هم‌شانس‌اند» برمی‌خوریم. این فرض به تعریف لاپلاس از احتمال و تمرینهایی که متضمن شمارش تعداد حالات مساعد هستند، منجر می‌شود.

۷. مفهوم احتمال

یکی از الگوهایی که احتمال به طور شهودی در آن ظاهر می‌شود، الگوی مهره و کیسه است. اگر در یک جامعه، فراوانی نسبی افرادی که واجد ویژگی A باشند، P باشد، آنگاه احتمال انتخاب تصادفی شخصی با ویژگی A، دقیقاً برابر است با P. از این رو، در وضعیت‌هایی که توزیع‌های فراوانی طبقات درون یک جامعه را می‌دانیم و عنصری «به تصادف» انتخاب می‌شود، نتیجهٔ «تعلق به طبقهٔ X» را می‌توان با فراوانی

نسبی طبقهٔ X در این جامعه توصیف کرد. مشاهده می‌کنیم که:

$$P = \frac{\text{تعداد افرادی که واجد ویژگی هستند}}{\text{حجم کل جامعه}}$$

مفهوم شهودی احتمال در این حالت همان مفهوم لاپلاسی احتمال است، البته در صورتی که اندازه جامعه معلوم باشد. اگر بخواهیم نمونه گیری آماری را نیز وارد کار کنیم و از آن برای «تخمین» احتمال‌های آزمایش‌های تصادفی بعدی استفاده کنیم، وضعیت قدری پیچیده‌تر خواهد شد. این مسئله‌ای است که مثلاً شرکت‌های بیمهٔ ماشین با آن مواجه هستند، زیرا آنها از آمار تصادفات در یک سال استفاده می‌کنند تا احتمال رخ دادن ۰، ۱، ۲، ... تصادف در سال آینده را تخمین بزنند. اگر داده‌های حاصل از یک جامعه را در مورد جامعهٔ دیگری به کار بریم، سئوالاتی مربوط به اثر حجم جامعهٔ مورد بررسی و «پایداری فراوانی‌های مشاهده شده» نیز پیش می‌آیند.

۸. تکرار یک آزمایش تصادفی به دفعات زیاد

در برنامه جدید تدریس احتمال هدف خاص دیگری هم وجود دارد و آن ارتباط دادن مفهوم احتمال با پایداری فراوانی نسبی یک پیشامد در تعداد زیادی از آزمایش‌های یکسان است. اما در راه رسیدن به این هدف مشکلاتی وجود دارد: بعضی از افرادی که روی کاربرد صحیح لغات حساسیت دارند، این طور استدلال می‌کنند که تعریف احتمال بر اساس حد فراوانی نسبی حالت خاصی از قانون اعداد بزرگ است با همان مشکلات معرفت‌شناختی مربوط به خودش (رجوع کنید به دالامبر)، ولی تدریس دقیق این قانون در این سطح دردسرهای زیادی به همراه دارد. علی‌رغم این موضوع افراد مذکور تأسف می‌خورند که چرا در برنامهٔ تدریس، بیان قانون اعداد بزرگ ملحوظ نشده است.

حتی در سال اول هم ایدهٔ توزیع فراوانی در آزمایش‌های تصادفی تکراری، منشاء مشکلات زیادی می‌شود. در اینجا خوب است لحظه‌ای بر بعضی از این مشکلات تأمل کنیم. آزمایش سادهٔ پرتاب یک سکه را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم احتمال $\frac{1}{2}$ برای «رو» یا «پشت» آمدن را از طریق فراوانی نسبی تعداد «رو» ها و «پشت»ها در تعداد دفعات زیاد انجام آزمایش، معرفی کنیم با مشکلات مفهومی متعددی روبرو می‌شویم. پرتابهایی که برای گردآوری داده‌های عددی انجام می‌شوند، حال تعداد دفعات این پرتاب هر چقدر می‌خواهد بزرگ باشد، فقط «نمونه»ای از آنچه را که واقعاً رخ می‌دهد، نشان می‌دهد. به همین دلیل، سئوال‌های زیر مطرح می‌شود:

- آیا باید جامعهٔ نمونه‌ای را مجموعهٔ همهٔ پرتابهای ممکن بگیریم، بالفعل یا بالقوه؟ در صورت مثبت بودن جواب تعداد اعضای چنین جامعه‌ای نامتناهی خواهد بود.
- آیا در چنین جامعه‌ای می‌توانیم از نسبت تعداد «پشت»ها به تعداد کل اعضای جامعه سخن بگوییم؟
- آیا با مشاهدهٔ نمونه‌ای از نتایج پرتاب سکه، می‌توان نتیجهٔ بقیهٔ پرتابها را پیش بینی کرد؟
- آیا تعداد پرتابها که ممکن است نامتناهی باشد تأثیری بر اعتبار نمونه و آنچه از نمونه به دست می‌آید دارد یا خیر؟ (البته می‌دانیم که تأثیری ندارد ولی این مطلب از دید شهودی واضح نیست.)

تازه اگر به این سئوالات به روشنی پاسخ دهیم با مسألهٔ تخمین روبرو می‌شویم: اگر در ۴۸٫۵ درصد دفعات پرتاب سکه، «پشت» آمده باشد، تا چه حد می‌توان به درستی این نتیجه که احتمال «پشت» آمدن $\frac{1}{2}$ است مطمئن بود؟ این مسأله اینقدر مشکل هست که نتوان آن را در سطح Post-bac مطرح کرد و آوردنش در این سطح حتی از نظر مفهومی هم پذیرفته نیست. مثلاً ممکن است سئوال شود که چرا ۰٫۵ و نه ۰٫۴۹ (سکه را می‌توان اریب فرض کرد.)

بنابراین در اینجا با نوعی تداخل مفاهیم روبرو می‌شویم. فراوانی نسبی مشاهده‌ٔ یک پیشامد در دفعات زیاد انجام یک آزمایش تصادفی *نمی‌تواند زمینه ساز مفهوم احتمال آن پیشامد باشد*. برای به دست آوردن نتایج درست از مشاهدهٔ پایداری فراوانی‌های نسبی، باید نکته فوق را همواره به یاد داشته باشیم. علی‌رغم این موضوع، برنامهٔ جدید تدریس پیشنهاد می‌کند که «احتمال بر اساس مشاهدهٔ پایداری نسبی فروانی نسبی یک پیشامد، f_n، وقتی تعداد دفعات انجام آزمایش، n، خیلی بزرگ است، تدریس شود.» بنابراین مشکل به تخمین احتمال حدی p مربوط نمی‌شود. بعلاوه در این حالت، بهترین تقریب برای p، فراوانی نسبی مشاهدهٔ پیشامد، به ازای بزرگترین n ممکن است و از پایداری حدی این فراوانی نسبی چیزی عاید ما نمی‌شود. همچنین، همانطور که برنامهٔ تدریس هم به صراحت بیان می‌کند، چنین پایداری فقط می‌تواند تقریبی یا «نسبی» باشد. در واقع همگرایی f_n به p به طور یکنواخت نیست: به ازای $P = \frac{1}{2}$، احتمال اینکه در آزمایش بعدی f_n متفاوت با P باشد $\frac{1}{2}$ است.

با همهٔ این حرفها، استفاده از ایدهٔ فراوانی نسبی، برای دانش‌آموزان مفید است، از این نظر که هم متوجه می‌شوند که برای محاسبهٔ فراوانی نسبی، تعداد دفعات انجام آزمایش مورد نیاز است و هم اینکه از درستی این رویکرد در تخمین احتمال پیشامدها اطمینان حاصل می‌کنند. در واقع این رویکرد خیلی خوب با کارهای عملی و استفاده از مشاهدات آماری در علوم اجتماعی تطبیق پیدا می‌کند. اگر در یک نمونهٔ به اندازهٔ کافی بزرگ از یک جامعه،

نسبت افرادی که دارای ویژگی A هستند، P باشد، می‌توانیم از این مقدار آزمایشی P استفاده کرده و احتمال این را که شخص دیگری که به تصادف از این جامعه انتخاب می‌شود، دارای ویژگی A باشد، تخمین بزنیم. بنابراین در این رویکرد فرض می‌کنیم که تعداد دفعات انجام آزمایش عدد بزرگی است و فراوانی نسبی نمونه‌های انتخابی به اندازهٔ کافی بزرگ، پایدار است.

در یک آزمایش تصادفی ساده، به وقوع پیشامدی مثل A علاقه‌مند هستیم. در ابتدا هیچ مجموعه‌ای از فراوانی‌های نسبی وجود ندارد که به این آزمایش نسبت داده شود و آنچه در این باره در برنامهٔ درسی آمده است چندان درست به نظر نمی‌رسد: «توزیع‌های فراوانی وابسته به یک آزمایش تصادفی...». این عبارت باید به این صورت بیان می‌شد: «توزیع‌های فراوانی وابسته به تکرار یک آزمایش تصادفی...». در این صورت یک دنباله از n آزمایش تصادفی خواهیم داشت که به هر کدام از آنها درصورت وقوع یا عدم وقوع پیشامد خاص A، عدد ۱ یا ۰ را نسبت می‌دهیم. به ازای هر n، یک توزیع فراوانی برای دو عدد ۰ و ۱ و نیز تعداد کل آنها را به دست می‌آوریم. در نتیجه به ازای هر n می‌توانیم فراوانی نسبی وقوع A را با دنبال کردن تکرارها از همان ابتدا، محاسبه کنیم و به این ترتیب دنباله‌ای از فراوانی‌های نسبی f_n به دست خواهد آمد که «همگرایی» آن را می‌توان از طریق نموداری مشاهده کرد، یا به زبان برنامهٔ درسی، «پایداری نسبی» f_n در همسایگی P (احتمال رخ دادن پیشامد A) قابل مشاهده است.

برای اینکه چگونگی استفاده از این رویکرد را روشن کنیم، مثالی از این رویکرد برای تدریس احتمال به دانش‌آموزان سال اول در بخش دوم این مقاله آورده شده است. در این مثال برای فراهم کردن یک زمینهٔ ذهنی دربارهٔ بزرگیِ n و تقریب f_n با احتمال P، جدولی از اعداد تصادفی مورد استفاده قرار گرفت که آزمایش ۱۰۰۰ بار پرتاب یک سکه را شبیه‌سازی می‌کرد. این، مثال معروف دالامبر را به یاد ما می‌اندازد:

احتمال ظاهر شدن دست کم یک «رو» در دوبار پرتاب یک سکه چقدر است؟

دالامبر در مقالهٔ خود با عنوان *«روها و پشت‌ها»* در دایرةالمعارف به این سئوال پاسخ می‌دهد. او می‌گوید: «شانس وقوع این رویداد دو به یک است!» لاپلاس هم در مقالهٔ خود با عنوان مشکلات فلسفی احتمالات گریزی به این سئوال می‌زند و می‌گوید: «فقط سه حالت مختلف وجود دارد که باید در نظر گرفته شود: «رو» در پرتاب اول که در آن صورت نیازی به پرتاب مجدد نیست؛ «پشت» در پرتاب اول و «رو» در پرتاب دوم؛ و بالاخره «پشت» آمدن در هر دو پرتاب اول و دوم. در نتیجه اگر همانند دالامبر این سه حالت را هم‌شانس فرض کنیم احتمال مورد نظر $\frac{2}{3}$ خواهد شد. حال آنکه واضح است که احتمال آمدن «رو» در پرتاب اول $\frac{1}{2}$ و احتمال هر کدام از دو مورد دیگر از موارد فوق $\frac{1}{4}$ است.»

«اگر آزمایش به دفعات زیاد تکرار شود» سه دنباله از فراوانی‌های نسبی حاصل را می‌توان به شکل نموداری مشاهده کرد که به این ترتیب می‌توان ایده‌ای از «پایداری نسبی» به دست آورد. تکرار آزمایش، دانش‌آموز را قادر می‌سازد تا بداند که تعداد دفعات انجام آزمایش چقدر باید باشد تا به چنین پایداری نسبی دست یابد. (یقیناً این تعداد از مرتبهٔ هزار خواهد بود.)

در اینجا یک سئوال دیگر هم پیش می‌آید و آن اینکه: آیا این آزمایش نشان می‌دهد که دالامبر در اشتباه بوده است؟ چرا دالامبر مرتکب چنین اشتباهی شد و مسئله را به طور عملی مورد آزمایش قرار نداد؟ و چرا حتی امکان انجام آزمایش عملی را رد کرد؟ پاسخ به این سئوال می‌تواند منجر به تغییراتی در الگوی ریاضی احتمال شود.

زیرنویس‌ها:

1- Pascal
2- Fermat
3- Geometry of chance
4- Poincar e′
5- Calcul des probabilit e′s
6- Bernolli
7- d'Alembert
8- Laplace
9- Cournot
10- Ars conjectandi
11- Essai philosophique sur les probaiilit e′s
12- Condoreect
13- Random numbers

شانس، آزمایش تصادفی و احتمال

۱ـ امتحان فردی

به منظور آگاهی از میزان ادراک اولیهٔ دانش‌آموزان از احتمال، یک امتحان کتبی بیست دقیقه‌ای از آنها به عمل آمد. سؤالات به شرح زیر بود.

اولین سؤال: در اینجا اطلاعاتی دربارهٔ نتایج یک قرعه‌کشی عمومی آورده شد. (جدولی شامل نتایج ۱۱۲۳ بار استخراج از گویهای قرعه که اعداد ۱ تا ۴۹ روی آنها درج گردیده به همراه اعدادی که در بیست استخراج آخر به دست آمده بود در اختیار دانش‌آموزان قرار داده شد.)

الف) آیا این اطلاعات برای تصمیم گیری در مورد عدد بعدی که استخراج می شود مفید است؟

ـ ۲۷ نفر پاسخ منفی و ۴ نفر پاسخ مثبت داده‌اند.

ب) اگر پاسخ مثبت است، کدام عدد را برای استخراج بعدی انتخاب می کنید؟

ـ در این مورد ۴ دانش‌آموز اعداد بسیار متفاوتی را انتخاب کردند.

دومین سؤال: پاسخ شما در مورد گزاره‌های زیر چیست؟ (در مورد آنها چگونه فکر می کنید؟)

الف) شانس اینکه فردا در اینجا هوا خوب باشد $\frac{1}{2}$ است.

ـ پانزده نفر پاسخ مثبت داده بودند و دو نفر از آنها اضافه کرده بودند که این سؤال مبهم است.

ـ دو نفر نوشته بودند که به این سؤال نمی‌توانند پاسخ دهند. یکی از آنها نوشته بود «این سؤال قابل طرح کردن نیست». و دیگری نوشته بود این سؤال «بی اساس است».

ـ هفت نفر پاسخ منفی داده و اضافه کرده بودند که «پیش‌بینی وضع هوای فردا بی‌معنی است. و یا وضع هوا تا فردا می تواند تغییر کند.»

ـ هفت نفر هم پاسخی ندادند.

ب) اگر دو سکه را پرتاب کنم، شانس یک به سه وجود دارد که یک‌رو و یک پشت بیاید.

ـ ۱۷ نفر با پاسخ مثبت شرح داده بودند که در این پرتاب دورو یا دو پشت و یا یک‌رو و یک پشت رخ می‌دهد.

ـ نه نفر پاسخ منفی داده بودند. در بین آنها سه نفر هیچ توضیحی در مورد پاسخ خود نداده بودند. سه نفر سعی کرده بودند که پاسخ خود را با عنوان مطالبی نظیر این که «نتیجه این آزمایش می تواند وقوع دو پشت نیز باشد» و یا «دو سکه می توانند به یک نتیجه منتهی شوند.» و یا «چون فقط دو سکه وجود دارد.» توجیه نمایند.

ـ یکی از محصلین پاسخ صحیح داده بود و نوشته بود «امکان دارد HH و HT و TH و یا TT رخ دهد که دو تا از این چهار حالت ممکن وقوع یک رو و یک پشت است».

ـ سه نفر نیز هیچ پاسخی نداده بودند.

ج) اگر زنی به تصادف از میان زنان باردار انتخاب شود، احتمال این که او دختر بدنیا بیاورد $\frac{1}{2}$ است.

ـ هیجده نفر پاسخ مثبت داده بودند. یک نفر از آنها اضافه کرده بود که «شاید به کروموزم بستگی داشته باشد» و بقیه اضافه کرده بودند که «این سؤال بی‌معنی است».

ـ پنج نفر پاسخ منفی داده بودند و یکی از آنها نوشته بود «آمار نشان میدهد که میزان تولد پسران بیش از دختران است» و بقیه گفته بودند که «این سؤال مبهم و بی‌معنی است».

ـ یکی از دانش‌آموزان بیان کرده بود که این غیر ممکن است و «باید یکسال منتظر ماند تا جنسیت نوزاد مشخص شود».

ـ شش نفر از دانش‌آموزان پاسخی نداده بودند.

۲ـ تفسیر و بررسی

در رابطه با سؤال اول و جایی که پاسخ منفی است واقعیت این است که در استخراجهای قبلی چه اتفاقی افتاده است و چه عواملی مؤثر بوده که در استخراج بعدی اتفاق نیفتد. بنابراین نتیجهٔ استخراج بعدی تصادفی بوده و قابل پیش‌بینی نیست.

با دقت در سؤال دوم متوجه می‌شویم که، مطرح ساختن پیشامدهایی که در رابطه با آزمایشهای قابل تکرار نیستند، بحثی فاقد ارزش است.

بنابراین توضیح و بیان یک آزمایش تصادفی برای مطالعهٔ پیشامدها و احتمالهای مربوط به همان آزمایش ممکن است. اگر کلمه «احتمال» جایگزین کلمهٔ عمومی «شانس» بشود دقت بیشتری در استفاده از کلمات شده است.

اکنون قادر به بررسی شرایط ضروری، برای تصادفی بودن یک آزمایش هستیم. این شرایط عبارتند از:

ـ امکان توصیف مجموعهٔ همهٔ نتایج ممکن آزمایش وجود داشته باشد.

ـ تحت شرایط یکسان بتوان آزمایش را تکرار کرد.

ـ نتیجهٔ آزمایش قابل پیش‌بینی نباشد.

به عنوان مثال، در قرعه‌کشی (سؤال ۱) که اعداد به تصادف انتخاب می‌شدند می توانیم از احتمال وقوع پیشامد «انتخاب عدد هشت» صحبت کنیم. برای تعیین این احتمال، برخی از دانش‌آموزان پیشنهاد کردند از تعداد دفعاتی که قبلاً در این آزمایش عدد هشت رخ داده است استفاده کنیم. البته این تغییر دارای اریبی به یک سمت است که بعداً شرح خواهیم داد.

مدتی کلاس درگیر تمرینی شد که در آن تمرین ازدانش‌آموزان خواسته شده بود از جامعه‌ای با توزیع فراوانی داده شده فردی

را به تصادف انتخاب کنند.

۳ـ مثالهایی از آزمایش تصادفی

الف: درختان یک جنگل

یک جنگل شامل هزار درخت از شش نوع مختلف را در نظر بگیرید. تعداد انواع درختان عبارتند از دویست درخت راش، سی درخت بلوط، ده درخت توس، پنجاه درخت کاج، هفتصد درخت صنوبر و ده درخت زبان گنجشک.

می‌خواهیم یکی از این هزار درخت را «به تصادف» انتخاب کنیم:

۱ـ چه پیشنهادی برای روش انتخاب دارید؟

۲ـ احتمال پیشامد «انتخاب یک درخت راش» یا «انتخاب یک درخت زبان گنجشک» و غیره چقدر است؟

۳ـ احتمال پیشامد «انتخاب یک درخت از خانوادهٔ کاجها» چقدر است؟ احتمال پیشامد «انتخاب درختی که از خانوادهٔ کاجها نباشد» چقدر است؟

در کلاس فوراً پاسخی برای اولین سوال داده شد. به این ترتیب که «شمارهٔ» درختان را روی هزار تکه کاغذ بنویسیم و سپس کاغذها را در یک جعبه بزرگ قرار داده و جعبه را تکان دهیم. تا تکه‌های کاغذ خوب مخلوط شوند و سپس یکی از آنها را بدون نگاه کردن بیرون بکشیم. همهٔ دانش‌آموزان با خوشحالی این روش را پذیرفتند. در مورد سؤال دوم، بعضی از دانش‌آموزان صحبت از نسبت تعداد درختان راش به تمام درختان جنگل کردند. همهٔ آنها قادر بودند از این طریق پاسخی به صورت $\frac{۲۰۰}{۱۰۰۰}$ یا $\frac{۱}{۵}$ و یا ۲۰٪ را به دست آورند.

این یک روش واضح و روشنی برای نشان دادن ایدهٔ احتمال است. در مورد مثال فوق می گوییم: «احتمال انتخاب یک درخت راش ۰٫۲ است».

محاسباتی که برای بدست آوردن احتمال انجام شد نشان میدهد که مقدار عددی احتمال باید ضرورتاً بین صفر و یک باشد. اگر H پیشامد «انتخاب یک درخت راش» باشد می نویسیم $P(H)=۰٫۲$.

سپس دانش‌آموزان این توضیحات را کامل نموده و احتمال برخی پیشامدها را محاسبه کردند، از جمله:

P (انتخاب درخت بلوط) P=(بلوط)

و به همین ترتیب:

P (زبان گنجشک)

=P (انتخاب درخت زبان گنجشک)

به منظور محاسبهٔ احتمال وقوع پیشامد «انتخاب یک درخت از خانواده کاج» دانش‌آموزان بی درنگ مقادیر (صنوبر) P و (کاج) P را با هم جمع کردند. در اینجا معلم می تواند با صراحت کامل بیان کند که پیشامد «انتخاب یک درخت از خانواده کاج» را می توان بوسیلهٔ اجتماع دو زیرمجموعهٔ F و S که به ترتیب پیشامدهای مربوط به انتخاب درختهای کاج و صنوبر است، نشان داد. چون مجموعه‌های F و S اشتراکی ندارند می توانیم بنویسیم:

$P(C) = P$ (یک درخت از خانوادهٔ کاجها)

$= P(F \cup S) = P(F)+P(S)$

که در آن C پیشامد «انتخاب یک درخت از خانوادهٔ کاجها» است.

برای محاسبهٔ احتمال پیشامد «انتخاب یک درخت که از خانواده کاج ها نباشد» دانش‌آموزان به طریق زیر عمل کردند:

P (یک درخت که از خانواده کاجها نباشد)

=P (راش) + P (توس) +P (بلوط)

+P (زبان گنجشک)

این احتمال را به شکل زیر نیز می توان نمایش داد:

$۱-P(F \cup S) =$

۱−P (انتخاب یک درخت از خانوادهٔ کاجها)

و یا $P(\overline{C}) = ۱ - P(C)$ که در آن $\overline{C}$ مکمل مجموعهٔ C از مجموعهٔ شامل هزار درخت است.

دانش‌آموزان پاسخ این سؤال تکمیلی را نمی‌دانستند که آیا ضروری است تعداد کل درختان و تعداد هر نوع درخت را به منظور پاسخگویی به سؤالات بدانیم؟

هدف از این سؤال ایجاد ایدهٔ تساوی احتمال پیشامد A یعنی P(A) و فراوانی نسبی ویژگی A در جامعه یعنی f_A است.

ب) روها یا پشت ها با دو سکه

به سؤال ۲ قسمت (ب) از امتحان برمی گردیم. راجع به این عبارت، چه می گویید: اگر دو سکه را پرتاب کنیم آیا شانس یک به سه برای آمدن یک رو و یک پشت وجود دارد؟

در پایان کلاس از دانش‌آموزان خواسته شد که دو سکه را ۴۰ بار پرتاب کنند و نتیجهٔ پرتابها را در جلسهٔ آینده با خود به کلاس بیاورند.

جلسه دوم (دو ساعت): رابطهٔ میان فراوانی نسبی و احتمال

۱ـ دنبالهٔ آزمایش پرتاب سکه

هر یک از دانش‌آموزان تعداد وقوع TT (دو پشت)، TH (یک پشت و یک رو) و HH (دو رو) در ۴۰ بار تکرار آزمایش را گزارش دادند. از روی نتایجی که همهٔ آنها به دست آورده بودند، فراوانی نسبی مربوط به هر یک از پیشامدها به این شرح محاسبه گردید:

$$P = \frac{\text{تعداد افرادی که واجد ویژگی هستند}}{\text{حجم کل جامعه}}$$

سپس دانش آموزان احتمال پیشامدها را به صورت زیر به دست آوردند:

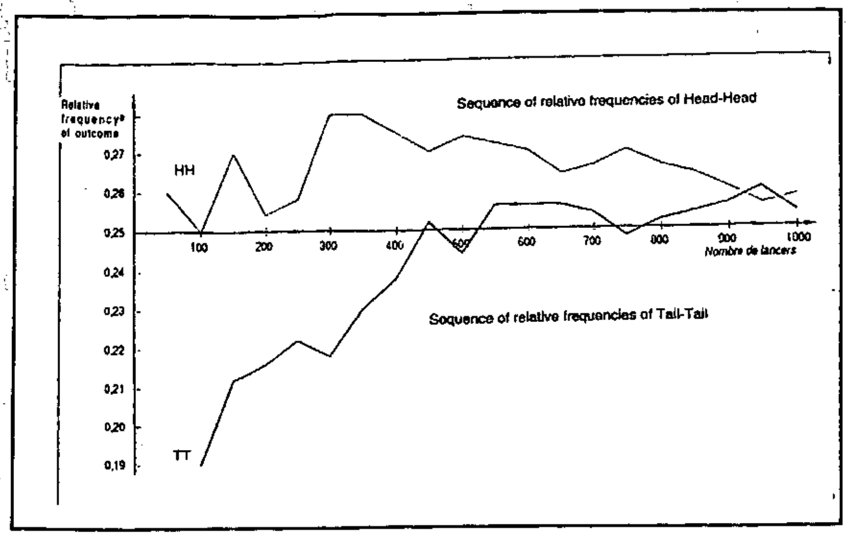
$P(TT) = ۰٫۲۱۳ \quad P(HH) = ۰٫۲۷$

$P(TH) = ۰٫۵۱۷$

اما آنهایی که جواب منفی به سوال ۲

قسمت (ب) داده بودند و به طور صحیح پاسخ را تصدیق می‌کردند وارد مباحثه شدند. نظر آنها این بود که موقعی که دو سکه را پرتاب می‌کنیم، می‌توانیم هر یک از حالات TT یا TH یا HT و یا HH را به دست آوریم، و منطقی است که بگوییم احتمال وقوع TH مساوی $\frac{۱}{۲}$ است زیرا شانس دو به چهار برای بدست آوردن یک شیر و یک خط وجود دارد.

سپس دانش‌آموزان نتیجهٔ ۱۰۰۰ بار پرتاب فرضی دو سکه را که از جدول اعداد تصادفی به دست آورده بودند ارائه کردند. همچنین نموداری تهیه کرده بودند که در آن فروانی نسبی پیشامدهای TT و HH به تصویر کشیده شده بود. البته آنها وقت زیادی صرفِ درک مفهوم این نمودار (نمودارمقابل) کرده بودند.



اکنون معلم می‌تواند تفاوت بین برآورد احتمال پیشامد TH از طریق فراوانی نسبی تعداد TH ها در n بار پرتاب (بهتر است n بزرگ باشد) و مقدار احتمال این پیشامد که از استدلال و تجزیه و تحلیل موقعیت به دست می‌آیند را بیان کند. در این مورد دانش‌آموزان موافق بودند که باید شانس‌های مساوی به هر یک از چهار جفت (T,H)، (H,T)، (T,T) و (H,H) نسبت داد و باید تاکید کرد که هر چهار پیشامد دارای احتمال وقوع مساوی بوده و احتمال هر یک برابر $\frac{۱}{۴}$ است؛ یعنی

P (یک رو و یک پشت) $= P[(T,H)$ یا $(H,T)] = P(T,H) + P(H,T) = \frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}$

$P[(T,T)] = \frac{۱}{۴}\ ,\ P[(H,H)] = \frac{۱}{۴}$

همچنین اگر تعداد پرتابهای دو سکه را افزایش دهیم از روی مشاهدات نتیجه خواهیم گرفت که برآوردهای احتمال هر چهار پیشامد به $\frac{۱}{۴}$ خیلی نزدیک است.

۲ـ احتمال استخراج یک عدد مشخص در قرعه کشی

سؤالی که از دانش‌آموزان شد این بود: احتمال استخراج گوی شمارهٔ ۲۷ از جعبه‌ای شامل ۴۹ گوی که از ۱ تا ۴۹ شماره‌گذاری شده‌اند، چقدر است؟

برای پاسخ دادن به این سؤال عده‌ای به جدول نتایج قرعه‌کشی که در امتحان به آنها داده شده بود نگاه کردند و عدد $\frac{۱۳۳}{۱۱۲۳}=۰/۱۱۸۴$ (عدد ۲۷ به تعداد ۱۳۳ بار در جدول آمده بود) را به عنوان جواب ارائه کردند.

بقیه، عدد $\frac{۱}{۴۹}=۰/۰۲۰$ را محاسبه کرده بودند. همگی آنها توافق داشتند که اشتباهی در این میان وجود دارد. این سؤال معمولاً در زمینهٔ قرعه‌کشی (بخت‌آزمایی) عمومی مطرح می‌شود که: اگر ۱۱۲۳ قرعه داشته باشیم آنگاه ۶×۱۱۲۳ گوی قرعه می‌توان استخراج کرد. یکی از شاگردان بعد از این بحث‌ها گفت: «در شش استخراجی که در قرعه‌کشی انجام می‌دهیم چون جعبهٔ گویها را کمتر و کمتر تکان می‌دهیم، شانس استخراج یک گوی (قرعه) خاص افزایش می‌یابد.»

علیرغم این موضوع بیشتر دانش‌آموزان عدد $\frac{۱۳۳}{۶۷۳۸}=۰/۰۱۹۷$ $(۱۱۲۳\times۶=۶۷۳۸)$ را محاسبه کردند. به همین طریق برای گویهای ۱۳ و ۳۸ به ترتیب احتمالهای ۰/۰۱۷۷ و ۰/۰۲۴۵ را به دست آوردند.

اما از دیدگاه احتمالاتی باید پذیرفت که هر یک از ۴۹ گوی دارای احتمال انتخاب مساوی هستند؛ یعنی

$P(۲۷) = P(۱۳) = P(۳۸) = \cdots = \frac{۱}{۴۹} = ۰/۰۲۰۴$

این، فرض هم احتمال بودن پیشامدهای ساده است.

هنوز سؤالات بسیار زیادی در مورد شانس و هم احتمال بودن باقی مانده است. در اینجا توجه خود را به ماهیت واقعی احتمال و تفاوت موجود بین نظریهٔ لاپلاس در مورد شانس (آینده معین شده است ولی ما باید سعی کنیم به وسیلهٔ احتمال روی اتفاقی که به زودی رخ خواهد داد کار کنیم) و مفهوم جدید شانس (به دلیل پیچیدگیهای موجود در جهان، دسته‌ای از پدیده‌ها، نامشخص و غیرقابل پیش‌بینی هستند و اهمیتی ندارد که چگونه مشاهدات را به کار ببریم) معطوف می‌کنیم.

یکی از دانش‌آموزان که به سوال ۱ امتحان پاسخ منفی داده بود به «سرنوشت»

اشاره کرد و به سایرین توصیه شد در این زمینه مطالعه‌ای داشته باشند.

بعد از دو جلسهٔ اول، ایجاد زمینه‌ای روی مفاهیم مورد بحث ضروری به نظر می‌رسید. یک ساعت و نیم وقت، صرف تهیهٔ برنامهٔ آموزشی مفاهیم زیر شد.

- آزمایش تصادفی- پیشامد ساده- مجموعهٔ مرجع Ω
- پیشامد- پیشامد بدیهی Ω - پیشامد غیرممکن $\varnothing$ - پیشامدهای ناسازگار
- احتمال‌های وقوع پیشامدهای ساده: خانواده‌ای از P_i ها بطوریکه $\sum_i P_i = 1$ و $0 \le P_i \le 1$
- احتمال وقوع یک پیشامد: مجموع احتمالات پیشامدهای سادهٔ تشکیل دهندهٔ آن پیشامد.
- فراوانی نسبی به عنوان برآوردی از احتمالات مقدماتی.
- هم احتمال بودن. محاسبه کردن احتمالات در ترکیب‌ها، تعریف لاپلاس از احتمال.
- مشاهدات تجربی: پایداری فراوانی نسبی موقعی که یک آزمایش به تعداد دفعات زیاد تکرار می‌شود.

در پایان بررسی مختصری روی اعداد «قوانین شانس»: قانون برنولی و قانون بزرگ که احتمالات را بوسیلهٔ برآوردی از مشاهدات آماری تعیین می‌کند انجام شد.

جلسهٔ سوم (نیم ساعت) ارزیابی ادراکات دانش‌آموزان

به دانش‌آموزان کار مختصری که جزئی از تکالیفشان بود داده شد تا برای دو هفتهٔ بعد آن را انجام دهند. در اینجا دو سؤال در مورد احتمال وجود داشت که حدوداً نیم ساعت برای بررسی آنها وقت لازم بود.

سؤالات و پاسخها در زیر آمده است:

اولین سؤال: سه سکه پرتاب شده‌اند،

الف) احتمال بدست آوردن سه پشت چقدر است؟

- از ۳۱ نفر ۲۷ نفر پاسخ صحیح $\frac{1}{8}$ را دادند.
- ۳ نفر پاسخ $\frac{1}{6}$ یا $\frac{1}{3}$ را دادند.
- یکی از دانش‌آموزان پاسخ $\frac{3}{4}$ را با ذکر دلیل زیر ارائه کرد.

ما می‌توانیم این حالتها را داشته باشیم:

$$T_1T_2H_3 \to \frac{1}{8},\ T_1H_2H_3 \to \frac{1}{8},$$
$$T_1H_2T_3 \to \frac{1}{8},\ H_1T_2T_3 \to \frac{1}{8};$$
$$H_1H_2T_3 \to \frac{1}{8};\ H_1T_2H_3 \to \frac{1}{8}$$

در نتیجه احتمال مورد نظر $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ است.

این دانش‌آموز اولاً $H_1H_2H_3 \to \frac{1}{8}$ را فراموش کرده و ثانیاً احتمال وقوع مکمل پیشامد مورد نظر را آن هم بدون توجه به پیشامد $H_1H_2H_3$ محاسبه کرده است.

ب) چگونه می‌توانید پاسخهای خودتان را به طور تجربی بررسی کنید.

- از ۳۱ دانش‌آموز، ۲۱ نفر پیشنهاد کرده بودند که سه سکه را به تعداد دفعات زیاد پرتاب کنیم. ۱۳ نفر از آنها به این موضوع اشاره کرده بودند که احتمال را می‌توان از فراوانی نسبی رخدادهای پیشامد TTT بدست آورد. ۷ نفر از آنها اشاره‌ای نکرده بودند که از پرتاب سه سکه چه نتیجه‌ای می‌خواهند بگیرند. و یکی از دانش‌آموزان به سادگی نوشته بود «احتمال می‌تواند محاسبه شود» بدون اینکه بگوید چگونه می‌توان آن را محاسبه کرد.
- سه نفر از دانش‌آموزان سه سکه را ۴۰ بار پرتاب کردند. دو نفر از آنها اشاره به اختلاف موجود در تعداد پیشامدها در ۴۰ بار پرتاب سه سکه داشتند و سه نفر از آنها گفتند که بیشتر از آنکه سه پشت بیاید، دو پشت و یک رو رخ خواهد داد. از جمله تفاسیری که در این مورد وجود دارد یکی تفسیر زیر است.

می‌توان هزار عدد به تصادف استخراج کرد و نتایج را برای حالات ممکن (HHH، HTT، THT، TTH، HHT، HTH، THH، TTT) ثبت، و تعداد دفعاتی که هر یک از حالات فوق رخ می‌دهد را به تعداد کل پرتابها (هزار بار) تقسیم کنیم و عددی نزدیک به ۰٫۱۲۵ را به دست آوریم.

این موضوع را می‌توان با پرتاب سه سکه نیز بررسی کرد. هرچه تعداد دفعات پرتاب زیاد باشد (مثلاً هزار بار) عدد دقیق‌تری را به دست خواهیم آورد. سکه‌ها را پرتاب کرده و تعداد دفعاتی را که TTT رخ می‌دهد به تعداد کل پرتابها تقسیم می‌کنیم و مشاهده خواهیم کرد که عدد حاصل مساوی نسبت $\frac{1}{8}$ است و از قبل نیز چنین فرضی را مدنظر داشتیم.

شما می‌توانید سه سکه را به تعداد دفعات زیاد پرتاب و منحنی فراوانی نسبی را رسم کنید (روی محور x ها شمارهٔ پرتابها و روی محور y ها فراوانی نسبی را قرار دهید). در این صورت می‌توانید شمارهٔ پرتابهای لازم برای آنکه منحنی در اطراف نقطهٔ ۰٫۱۲۵ به پایداری برسد را ملاحظه کنید.

دومین سؤال: نسبت اتومبیل سوارهایی که سالانه در فرانسه یک بار تصادف می‌کنند $\frac{1}{1000}$ است.

الف) اگر اتومبیل سواری را به تصادف انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد که این اتومبیل طی سال آینده یک بار تصادف کند؟

- ۲۵ محصل پاسخ دادند $\frac{1}{1000}$.
- ۶ محصل گفتند که پاسخ به این سؤال ممکن نیست.

ـ سه محصل ادعا کردند که این آزمایش تصادفی نبوده است. «این آزمایش تصادفی نیست، قابل تکرار نیست» یا «بررسی احتمال پیشامد فقط وقتی امکان پذیر است که پیشامد در شرایط یکسان قابل تکرار باشد». «$\frac{1}{1000}$ اتومبیل سوارها دارای یک تصادف هستند». «این یک آزمایش تصادفی نیست زیرا آزمایش تصادفی چیزیست که قابل تکرار باشد. تصادف یک قسمت و سرنوشت است. یک راننده می‌تواند با خوب راندن شانس تصادف کردن را نسبت به دیگران کاهش دهد. بنابراین برای این نوع رخدادها نمی‌توان احتمال محاسبه کرد.» در اینجا دانش‌آموزان دیدند که تصادف کردن یک آزمایش است اما نه آزمایشی که به تصادف از یک جامعهٔ تقسیم‌بندی شده به دست آمده باشد.

ب) آیا معلم ریاضی شما این نتیجه را به کار می برد؟

ـ ۴ نفر پاسخی ندادند.

ـ ۱۰ نفر پاسخ دادند بله، معلم ما اتومبیل دارد.

ـ ۵ نفر پاسخ دادند بله، اگر او اتومبیل داشته باشد.

ـ ۱ نفر پاسخ داد بله، اما او احتیاط می‌کند، این تنها یک احتمال است.

ـ ۶ نفر پاسخ دادند بله اگر او از روی شانس انتخاب شده باشد.

ـ ۱ نفر پاسخ داد، خیر.

ـ ۲ نفر پاسخ منفی دادند و اظهار داشتند «این بستگی دارد (به روش رانندگی و غیره)».

بطور خلاصه در این مقاله مفاهیم آزمایش تصادفی، برآورد احتمال بوسیلهٔ مشاهدهٔ پایداری فراوانی نسبی یک پیشامد مورد بررسی قرار گرفت و چند بحث فلسفی در رابطه با احتمال مطرح گردید.

مرجع اصلی

Annie Henry and Michel Henry, (1996). A Frequency approach to Probability in the French Secondary School. in Teaching Mathematices: The Relation ship between Knowledge Curriculum and Practice, I. R. E. M

فهرست مراجع

Pascal, Blaise (1623-1662) and fermat, Pierre (1601-1665): 'Correspondance entre Pascal et format-1654" in: Euurese de Pascal, ed, J. Chevalier, La Pléiade, Paris; Gallimard, 1963.

Bernoulli, Jacques (1667-1705), Ars conjectandi (1713), t.r. Meusnier, n., IREM de Rouen, 1987.

D'Alembert, Jean le Rond (1717-1783), La grande Encyclopédie, c. 1750-1780 and corres pondence.

Condorcet, Antoine (1743-1794), Elémens du calcul des probabilités, 1805; IREM de Paris VLL, 1986.

Laplace, Pierre-Simon (1749-1827), Essai philosophipue sur les probabilités, 5th edition, 1825; Christian Bourgeois, 1986.

Cournot, Antoine Augustin (1801-1877), "Exposition de la théorie des chances et des probabilités", Euvres complétes, v. 1, Vrin, 1984.

Poincaré, Henri (1854-1912), Calcul des probabilités, Gauthier-Villar, 1912, repub. Jacques Gabay, 1987.

History of probability

IREM Groupe Epistémologie et Hestoire, Mathématiques Au fil des âges, Gauthier-Villars, 1987. Bru, Bernard, 'Petite histoire du calcul des probabilités', in: Fragments d'histoire des mathématiques, Brochure APMEP, 41, 1981.

Epistemology of chance

Ekeland, lvar, Au hasard, Seuil, 1991.

Noël, Emile and France-Culture, Le hasard aujourd'hui, Points/ Sciences, 1991.

Ruelle, David, Hasard et chaos, Odile Jacob, 1991.

جواد بهبودیان
دانشکده علوم دانشگاه
شیراز

ماتریسهای مثلث خیام- پاسکال

از مثلث خیام- پاسکال n سطری می‌توان دو ماتریس مثلثی ساخت. ماتریس نخست یک ماتریس $n \times n$ است که از اضلاع مثلث ساخته می‌شود و آن را ماتریس خیام- پاسکال می‌نامیم. ماتریس دوم یک ماتریس $(n-2)\times(n-2)$ است که از اضلاع داخلی مثلث ساخته می‌شود و آن را ماتریس خیام- پاسکال درونی می‌نامیم. برای نمونه، درزیر مثلث خیام- پاسکال ۵ سطری و ماتریسهای آن را نشان می‌دهیم.

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱

مثلث خیام- پاسکال ۵ سطری

$$P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس خیام- پاسکال

$$\Pi_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

ماتریس خیام- پاسکال درونی

دراین مقاله ویژگیهای این دو ماتریس را بررسی می‌نمائیم. ماتریس اول را برای حل یک مسأله احتمال و ماتریس دوم را برای محاسبه مجموع توانهای kام ۱ تا n به‌کار می‌بریم.

پیشگفتار

مثلث خیام- پاسکال یکی از زیباترین مثلثهای عددی می‌باشد. این مثلث سحرآمیز پر از نکته‌های ریاضی است و سالها است که ریاضیدانان را به‌خود مشغول داشته است. پوستر سیزدهمین کنفرانس ریاضی کشور بااین مثلث مزین گردیده است. در گزارش این کنفرانس، نویسنده طی مقاله‌ای [۳] تاریخچه، دلیل نامگذاری، ساختار و ویژگیهای مثلث را به‌تفصیل شرح داده است. از زمان سیزدهمین کنفرانس ریاضی کشور تا امروزه ده‌ها مقاله پژوهشی و تفریحی دربارهٔ مثلث خیام- پاسکال نگاشته شده‌اند و هنوز مسائلی فراوان، برای کشف خواص این مثلث پرعمق، می‌توان مطرح نمود.

دراین مقاله ویژگیها و کاربرد دو ماتریس مهم را که دربستر یک مثلث خیام‌پاسکال n سطری جا دارند شرح می‌دهیم.

ماتریس نخست یک ماتریس پائین مثلثی $n \times n$ است که از اضلاع (سطرهای مایل) مثلث ساخته می‌شود و آن را ماتریس

خیام- پاسکال نامیده با P_n نشان می‌دهیم. ماتریس دوم یک ماتریس پائین مثلثی $(n-2)\times(n-2)$ است که از اضلاع (سطرهای مایل) داخلی مثلث ساخته می‌شود و آن را ماتریس خیام- پاسکال درونی نامیده با Π_n نشان می‌دهیم. درایه‌های ماتریس نخست را با p_{ij} و درایه‌های ماتریس دوم را با π_{ij} معرفی می‌کنیم. به آسانی داریم.

$$p_{ij}=\begin{cases}\binom{i-1}{j-1} & 1\le j\le i\le n\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

$$\pi_{ij}=\begin{cases}\binom{i+1}{j} & 1\le j\le i\le n-2\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

به‌عنوان مثال در زیر مثلث خیام- پاسکال ۵ سطری و ماتریسهای آن را می‌بینیم.

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

مثلث خیام- پاسکال ۵ سطری

$$P_5=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\1&3&3&1&0\\1&4&6&4&1\end{bmatrix}\quad \Pi_5=\begin{bmatrix}2&0&0\\3&3&0\\4&6&4\end{bmatrix}$$

ماتریس خیام- پاسکال درونی ماتریس خیام- پاسکال

ویژگیها و کاربرد P_n را دربخش ۱ و ویژگیها و کاربرد Π_n را دربخش ۲ بیان می‌داریم.

۱- ویژگیها و کاربرد ماتریس P_n

برای اینکه بتوانیم ویژگیهای ماتریس P_n را به‌خوبی دریابیم، نخست ماتریس تابعی خیام- پاسکال را که تعمیم P_n می‌باشد معرفی می‌نمائیم. این ماتریس، تابعی از متغیر حقیقی x است که آن را با $P_n(x)$ نشان داده و چنین تعریف می‌کنیم:

ماتریس تابعی $P_n(x)$ یک ماتریس پائین مثلثی $n\times n$ است که سطر kام آن، برای $k=1,2,\dots,n$، شامل جمله‌های بسط $(x+1)^{k-1}$ است. مثلاً $P_4(x)$ می‌شود:

$$P_4(x)=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\x&1&0&0\\x^2&2x&1&0\\x^3&3x^2&3x&1\end{bmatrix}\end{array}\quad\begin{array}{c}(x+1)^0\\(x+1)^1\\(x+1)^2\\(x+1)^3\end{array}$$

ملاحظه می‌شود که $P_n(0)=I_n$ و $P_n(1)=P_n$

یک قضیه اساسی درمورد $P_n(x)$ قضیه زیر می‌باشد که در [۱] و [۳] یافت می‌شود. ما این قضیه را از راه افراز ماتریسها و استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم:

قضیه ماتریس تابعی خیام- پاسکال- برای دو متغیر حقیقی x و y داریم:

$$P_n(x)P_n(y)=P_n(x+y)$$

اثبات- برای $n=1$ و $n=2$ قضیه درست است. فرض کنید برای $n-1$ درست باشد. اینک ثابت می‌کنیم که برای n هم درست است.

ماتریس $p_n(x)$ را به‌صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$P_n(x)=\begin{bmatrix}P_{n-1}(x)&0\\q_n(x)&1\end{bmatrix}$$

دراین افراز $q_n(x)$ یک ماتریس سطری است که از جمله‌های xدار بسط $(x+1)^{n-1}$ درست شده است. مثلاً در $P_4(x)$ داریم $q_4(x)=\begin{bmatrix}x^3&3x^2&3x\end{bmatrix}$. اینک بااستفاده از فرض استقرا، داریم.

$$P_n(x)P_n(y)=\begin{bmatrix} P_{n-1}(x) & 0 \\ q_n(x) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{n-1}(y) & 0 \\ q_n(y) & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} P_{n-1}(x+y) & 0 \\ q_n(x)P_{n-1}(y)+q_n(y) & 1 \end{bmatrix}=P_n(x+y)$$

با محاسبه ماتریسی، ثابت می شود که

$$q_n(x)P_{n-1}(y)+q_n(y)=q_n(x+y)$$

از این قضیه نتایج مهم زیر فوراً به دست می آیند:

$$P_n^k=P_n(k) \qquad k=1,2,\ldots$$

$$P_n(1)P_n(-1)=P_n(0)=I_n$$

بنابراین وارون P_n می شود $P_n^{-1}=P_n(-1)$.

کاربرد P_n ـ یک آزمایش برنولی را، که در آن شانس پیروزی p است، n بار مستقلاً انجام می دهیم. احتمال هر پیشامد به صورت

$$\sum_{i=0}^{n} a_i p^{n-i}(1-p)^i$$

می باشد. این احتمال یک چند جمله ای درجه n برحسب p است که در آن $0 \le a_i \le \binom{n}{i}$ یک عدد درست مثبت می باشد. مثلاً سکه ای را با $P(H)=p$ سه بار مستقلاً می ریزیم. احتمال اینکه دست کم دو بار پیاپی شیر بیاید برابر است با

$$2p^2(1-p)+p^3=-p^3+2p^2$$

حال این پرسش را مطرح می کنیم: یک چند جمله ای درجه n برحسب p با ضرائب اعداد درست چه موقع می تواند احتمال یک پیشامد باشد؟ چند جمله ای $\sum_{i=0}^{n} a_i p^{n-i}(1-p)^i$ (b_i عدد درست) درصورتی احتمال یک پیشامد است که داشته باشیم

$$\sum_{i=0}^{n} a_i p^{n-i}(1-p)^i=\sum_{j=0}^{n} b_j p^{n-j}$$

می توان نشان داد که تساوی بالا درصورتی برقرار می شود که

$$[a_0a_1\ldots a_n]=[b_0b_1\ldots b_n]P_{n+1}$$

حال اگر هر a_i در $0 \le a_i \le \binom{n}{i}$ صدق می کند، چند جمله ای داده شده احتمال یک پیشامد است. مثلاً می توان نشان داد که چند جمله ای $-p^3+2p^2$ احتمال یک پیشامد در ۳ پرتاب سکه می باشد.

۲ـ ویژگیها و کاربرد Π_n

دستیابی به ویژگیهای Π_n چندان آسان نیست زیرا این ماتریس در درون مثلث خیام ـ پاسکال بستر دارد. با اینحال می توان وارون آن را به آسانی از راه افراز ماتریسها پیدا کرد. برای این منظور می نویسیم

$$\Pi_n=\begin{bmatrix} \Pi_{n-1} & 0 \\ t_n & t_{nn} \end{bmatrix}$$

دراین افراز $t_n=\left[\binom{n-1}{1}\binom{n-1}{2}\ldots\binom{n-1}{n-3}\right]$ و

$$t_{nn}=\binom{n-1}{n-2}$$

فرض کنید I_n و وارون Π_n به نحوی افراز شوند تا با افراز Π_n همخوانی داشته باشند. حال می نویسیم

$$I=\Pi_n\Pi_n^{-1}=\begin{bmatrix} \Pi_{n-1} & 0 \\ t_n & t_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & b \\ C & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

درنتیجه داریم

$$B = T_{n-1}^{-1}$$
$$b = 0$$
$$C = -t_{nn}^{-1}t_n\Pi_{n-1}^{-1}$$
$$a = t_{nn}^{-1}$$

بنابراین وارون Π_n می شود

$$\Pi_n^{-1}=\begin{bmatrix} \Pi_{n-1}^{-1} & 0 \\ -t_{nn}^{-1}t_n\Pi_{n-1}^{-1} & t_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

مثلاً داریم

به‌کارگیری قاعده هوپیتال در محاسبه این گونه حدها بایستی ترفندهای دیگری به‌کار گرفت. دراین قسمت می‌خواهیم این حدها را محاسبه کنیم. روش حل برای مثال اول مبتنی برقضیه زیر است که آن را می‌توانیم روش تعویض متغیر نیز بنامیم.

قضیه ۴ ـ فرض کنید در یک همسایگی محذوف a مانند I به‌ازای هر x از I داریم:

$$g(x) \neq b$$

اگر

$\lim_{x\to a} g(x)=b$ و $\lim_{y\to b} f(y)=c$ آن‌گاه $\lim_{x\to a} f(g(x))=c$

اثبات: چون $\lim_{y\to b} f(y)=c$ ، برای هر $\varepsilon > ۰$ ، $\delta > ۰$ وجود دارد به‌طوری که

$$۰<|y-b|<\delta \Rightarrow |f(x)-c|<\varepsilon \qquad (۲)$$

از طرفی چون $\lim_{x\to a} g(x)=b$ ، برای $\delta > ۰$ ، $\delta' > ۰$ وجود دارد به‌طوری که

$$۰<|x-a|<\delta' \Rightarrow |g(x)-b|<\delta$$

اگر δ' راطوری‌انتخاب‌کنیم‌که $(a-\delta',a)\cup(a,a+\delta')\subseteq I$ ، آن‌گاه

$$۰<|x-a|<\delta' \Rightarrow ۰<|g(x)-b|<\delta \qquad (۳)$$

اکنون باکمک رابطه‌های (۲) و (۳) خواهیم داشت

$$۰<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(g(x))-c|<\varepsilon$$

یعنی $\lim_{x\to a} f(g(x))=c$.

مثال ۵ ـ $\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{\sin x}-\frac{۱}{\sin(\sin x)}\right)=۰$

حل: اگر فرض کنیم $f(y)=\frac{۱}{y}-\frac{۱}{\sin y}$ و $g(x)=\sin x$ ، آنگاه $\lim_{x\to ۰} g(x)=۰$ و تابع g دریک همسایگی محذوف ۰ مانند $\left(-\frac{\pi}{۲},۰\right)\cup\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)$ مخالف صفر است. همچنین بااستفاده از قاعدهٔ هوپیتال خواهیم داشت $\lim_{y\to ۰} f(y)=۰$. اکنون بنابهٔ قضیهٔ ۴، داریم

$\lim_{x\to ۰} f(g(x))=۰$ ، یعنی

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{\sin x}-\frac{۱}{\sin(\sin x)}\right)=۰$$

بااستفاده از این روش، می‌توان نشان داد که

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{\sin(\sin x)}-\frac{۱}{\sin(\sin(\sin x))}\right)$$
$$=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{\sin x}-\frac{۱}{\sin(\sin x)}\right)=۰$$

بطورکلی، بااستقراء ریاضی می‌توان نشان داد که

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{\sin^{(n)} x}-\frac{۱}{\sin^{(n+۱)} x}\right)=۰$$

که درآن $\sin^{(n)}$ یعنی ترکیب $\sin$ به‌تعداد n بار باخودش.

تبصره ۳ـ قضیهٔ ۴ در واقع بیان می‌کند که درشرایط خاص $\lim_{y\to b} f(y)=\lim_{x\to a} f(g(x))$ ، یعنی مثل اینست‌که از تعویض متغییر $y=g(x)$ استفاده کرده باشیم. مثلاً درمثال ۵، از تعویض متغییر $y=\sin x$ استفاده نموده‌ایم. به‌عبارت دیگر هرگاه هدف محاسبهٔ $\lim_{x\to a} f(g(x))$ باشد، می‌توان تعویض متغییر $y=g(x)$ را انتخاب نمود بااین شرط که $\lim_{x\to a} g(x)$ موجود باشد و اگر $\lim_{x\to a} g(x)=b$ ، آن‌گاه دریک همسایگی مخذوف a، تابع g مقدار b را نگیرد مگراینکه f در b پیوسته باشد. دراین صورت برای محاسبه $\lim_{x\to a} f(g(x))$ کافی است $\lim_{y\to b} f(y)$ را محاسبه کنیم. وقتی روش تعویض متغییر را درمحاسبه $\lim_{x\to ۰^+}\frac{e^{-۱/x}}{x}$ باتعویض متغییر $t=\frac{۱}{x}$ به‌کار بگیریم به‌جهت سهولت محاسبه و عدم کارآیی قاعده هوپیتال اهمیت این روش مشخص خواهد شد.

تبصره ۴ ـ باید توجه داشت که روش تعویض متغیر بامفهوم هم ارزی که درکتاب جبر و آنالیز سال چهارم دبیرستان آمده است تفاوت دارد. اگر کتاب جبر و آنالیز سال چهارم دبیرستان (مثلاً سال ۶۳) را ببینید، مفهوم هم‌ارزی به‌این صورت تعریف شده

$$\Pi_۴=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix} \qquad \Pi_۴^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

$$\Pi_۵=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۳ & ۰ \\ ۴ & ۶ & ۴ \end{bmatrix} \qquad \Pi_۵^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & ۰ \\ \frac{۱}{۴} & -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۴} \end{bmatrix}$$

کاربرد Π_n ـ می‌خواهیم برای $k=۰,۱,\ldots$ و عدد درست مثبت n،

$$S_k = ۱^k + ۲^k + \ldots + n^k$$

را پیدا کنیم.

درپیوست ۱ بایک روش احتمالی ثابت می‌کنیم که

$$\sum_{t=۱}^{k}\binom{k+۱}{t}S_t=(n+۱)^{k+۱}-(n+۱)=A_k \qquad (*)$$

به‌عنوان مثال برای ۳ , ۲ , ۱ =k با استفاده از (*) داریم:

$$\begin{cases} ۲S_۱ & = A_۱ \\ ۳S_۱+۳S_۲ & = A_۲ \\ ۴S_۱+۶S_۲+۴S_۳ & = A_۳ \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که ماتریس ضرائب برابر است با ماتریس خیام‌ـ پاسکال درونی یعنی $\Pi_۵$. بهٔ طورکلی باتعریف دو ماتریس ستونی زیر

$$S=[S_۱\ S_۲\ldots S_k]'$$

$$A=[A_۱\ A_۲\ldots A_k]'$$

و درنظر گرفتن $\Pi_{k+۲}$ داریم

$$\Pi_{k+۲}S = A$$

$$S = \Pi_{k+۲}^{-۱}A$$

بنابراین به‌کمک ماتریس خیام‌ـ پاسکال درونی می‌توانیم مجموع توانهای اول تا kام اعداد ۱ تا n را برای هر k و هر n بیابیم. با همین روش می‌توان مجموع توانهای kام جمله های یک تصاعد حسابی را پیدا کرد.

پیوست

برای اثبات فرمول (*) دربخش ۲ از روش احتمالی زیر استفاده می‌کنیم: فرض کنید متغیر تصادفی X هر یک از اعداد $۱,۲,\ldots,n$ را با احتمالهای مساوی $\frac{۱}{n}$ بپذیرد. امیدریاضی X^t برای عدد درست t می‌شود

$$E(X^t)=\frac{۱}{n}(۱^t+۲^t+\ldots+n^t)=\frac{۱}{n}S_t$$

بنابراین

$$S_t=E(nX^t)$$

حال امیدریاضی $g(X)=n(X+۱)^{k+۱}$ را از دوراه می‌یابیم:

با روش مستقیم:

$$E[g(X)]=۲^{k+۱}+۳^{k+۱}+\ldots+(n+۱)^{k+۱}$$

$$=S_{k+۱}+(n+۱)^{k+۱}-۱$$

با روش بسط:

$$E[g(X)]=E\left[n\sum_{r=۰}^{k+۱}\binom{k+۱}{r}X^r\right]$$

$$=n+\sum_{r=۱}^{k+۱}\binom{k+۱}{r}E(nX^r)$$

$$=n+S_{k+۱}+\sum_{r=۱}^{k}\binom{k+۱}{r}S_r$$

با مساوی قراردادن نتایج این دو روش فرمول (*) بهٔ‌دست می‌آید.

مراجع:

[1] Call, G.S. and Velleman, D.J. "Pascal's Matrices" American Mathematical Monthly, 1993, 372-376

[2] Jacob, B. "Linear Algebra" W-H. Freeman and Company, 1990,

۳ـ جوادبهبودیان، مثلث عددی خیام‌ـ پاسکال و مثلثهای شبیه آن، گزارش سیزدهمین کنفرانس ریاضی کشور در دانشگاه شهید باهنر کرمان، فروردین ۱۳۶۱ .

۴ـ جوادبهبودیان، آمار و احتمال مقدماتی، بنیادفرهنگی رضوی، چاپ هشتم، ۱۳۷۴ .

روایت معلمان

به دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله درنظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه‌ها به عمل دَر می آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می‌کند.
از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایتهای خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌ای خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آنها بپردازند.

عین‌اله پاشا
دانشگاه تربیت معلّم

ربع قرنی است که به استادی خود شاد شده‌ایم. در این سالهای دراز تدریس و سروکار داشتن با جوانان جویای نام، خاطرات تلخ و شیرین و تجربه‌های بسیار به یادگار مانده است. مطرح کردن این تجربه‌ها و رویهم انباشته شدن آنها سبب می‌شود تا گیرهای آموزشی و مشکلاتی که درک مطالب درسی پیش می‌آورند شناسایی شود و راه‌حل‌ها و پاسخ‌های مناسب برای آنها ارائه شود. زمانی که کار تدریس را شروع کردم، **شعف من به عنوان معلم آن بود که شاگردی مسأله‌ای را درست حل کند** و مهلتی بایست تا متوجه شوم که چیزهای دیگری هم برای رضایت بخشیدن و راضی شدن وجود دارند از جمله، کوششی است که محصل برای حل مسأله از خود بروز می‌دهد و چه‌بسا ممکن است ماحصل این کوشش به حل صحیح و کامل مسأله نیانجامد و حتی مسأله غلط حل شود. **مادامی که این کوشش وجود دارد، همانند ریشه‌ای که در آب است، امید ثمر می‌دهد.**

ذیلاً چند نمونه از این کوشش‌ها در درس احتمال که به نتیجه صحیح نرسیده‌اند ارائه می‌شود. اغلب این نمونه‌ها در کلاس‌های بازآموزی به وسیلهٔ همکاران دبیر مطرح شده‌اند.

۱ـ فرض کنید $P(A)=P(B)=۱$. ثابت کنید $P(A\bigcap B)=۱$.

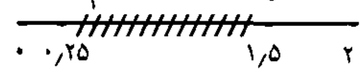
حل. از $P(B)=۱$ و $P(A)=۱$ نتیجه می‌شود که $B=S$ و $A=S$، در نتیجه $A\bigcap B=S$ و از اینجا $P(A\bigcap B)=۱$.

۲ـ فرض کنید $P(A)=P(B)=۰$، ثابت کنید $P(A\bigcup B)=۰$.

حل. از $P(B)=۰$ و $P(A)=۰$ نتیجه می‌شود که $A=\varnothing$ و $B=\varnothing$، لذا $A\bigcup B=\varnothing$ و از اینجا $P(A\bigcup B)=۰$.

۳ـ دو عدد به تصادف دربازهٔ (۱و۰) انتخاب می‌کنیم، احتمال آنکه مجموع این دو عدد بین ۰٫۲۵ و ۱٫۵ قرار گیرد چقدر است؟

حل. فرض کنید x و y دو عدد انتخاب شده باشند، در این صورت مجموع آنها یعنی x+y عددی بین ۰ و ۲ است و ما می‌خواهیم این عدد بین ۰٫۲۵ و ۱٫۵ باشد، با توجه به شکل زیر احتمال برابر $\frac{۱/۲۵}{۲}$ است.



۴ـ یک جفت تاس را می‌اندازیم، احتمال آنکه مجموع شماره‌ها برابر ۷ شود چقدر است؟

حل. در پرتاب یک جفت تاس مجموع شماره‌ها یکی از اعداد ۲، ۳، ...، ۱۲ است. در واقع $S=\{۲,۳,\dots,۱۲\}$. اگر فرض کنیم $A=\{۷\}$، آن گاه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۱۱}$$

۵ـ سکه‌ای را ۱۰ بار می‌اندازیم احتمال آنکه ۷ بار شیر بیاید چقدر است؟

حل. در پرتاب ۱۰ بار یک سکه، تعداد شیرها می‌تواند ۰، ۱، ...، ۱۰ باشد. بنابراین $S=\{۰,۱,\dots,۱۰\}$ با فرض $A=\{۷\}$، داریم

$$P(\text{۷بار شیر})=P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷}{۱۱}$$

۶ـ جعبه‌ای شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۸ مهرهٔ سیاه است. از این جعبه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آنکه حداقل یکی از آنها سفید باشد.

حل. تعداد صورت‌هایی که می‌توان سه مهره از بین ۱۳=۵+۸ مهره خارج کرد برابر $\binom{۱۳}{۳}$ است. برای آنکه مطمئن شویم حداقل یک مهرهٔ سفید خارج کرده‌ایم، ابتدا مهره‌ای از بین مهره‌های سفید انتخاب می‌کنیم. این عمل به $\binom{۵}{۱}$ صورت امکان‌پذیر است. حال ۲ مهره از بین ۱۲ مهرهٔ باقیمانده انتخاب می‌کنیم. این عمل به $\binom{۱۲}{۲}$ صورت امکان‌پذیر است. اگر این ۲ مهره و آن یک مهره را کنار هم بگذاریم تمام حالتهایی که حداقل یک مهرهٔ سفید در آن وجود دارد به دست می‌آید. بنابراین تعداد حالتهای مساعد برابر $\binom{۱۲}{۲}\binom{۵}{۱}$ است، در نتیجه احتمال مورد نظر عبارت است از

$$P(\text{حداقل یک سفید})=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۱۲}{۲}}{\binom{۱۳}{۳}}$$

این کوشش‌هایی است که دانش آموزانی برای حل این مسایل کرده‌اند. راه‌حل‌ها ظاهراً منطقی و درست هستند. اگر دانش‌آموزی در روند حل مسأله به این راه‌حل‌ها برسد، به سختی می‌تواند در نادرست بودن آنها شک کند. اشتباهی که در هر کدام از این راه حلها وجود دارند ناشی از عدم درک صحیح از موضوع و یا مفهومی خاص است و بنابر ماهیت مفاهیم و مطالب (مثلاً مجرد بودن برخی از آنها و یا بی‌مقدمه بودن برخی دیگر) و شرایط دانش آموزان (مثلاً شرایط سنی و میزان مهارتی که در ریاضیات کسب کرده‌اند) نباید این اشتباهات را به عنوان **ضعف** دانش‌آموز تلقی کرده و او را مرهون «محبت معلمانه» قرار داد! این اشتباهات در روند فکری دانش‌آموزانی که سعی می‌کنند مسائلی از این دست را حل کنند به قدری طبیعی است که اگر دانش‌آموز مسأله را صحیح حل کرده باشد یا از هوش فوق‌العاده‌ای برخوردار است و یا شاید این شک را برانگیزد که قبلاً با نکته موجود در مسأله مواجهه شده است. به همکاران توصیه می‌شود که پس از معرفی مطلب با حل مسائل ***متعدد و گوناگون*** الگوهای ثابت حل مسأله را در اختیار دانش‌آموزان قرار ندهند و اجازه دهند تا **دانش آموزان فعال با ارتکاب اینگونه *اشتباههای مبارک* حلاوت درک عمیق مطالب را تجربه کنند.**

در زیر راه‌حلهای صحیح این مسائل آورده می‌شود. انتظار می‌رود خوانندگان محترم نکات انحرافی و اشتباه موجود در راه‌حلهای ارائه شده در بالا را برای ما ارسال دارند و مخصوصاً توضیح دهند که چه عواملی باعث شده است که دانش‌آموزان مرتکب آن اشتباهها شوند.

حل ۱. داریم

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

حال به جای $P(A)$ و $P(B)$ مقدار ۱ را قرار می‌دهیم و با توجه به اینکه $0\le P(A\cup B)\le 1$ خواهیم داشت:

$$1+1-P(A\cap B)=P(A\cup B)\le 1$$

در نتیجه $P(A\cap B)\ge 1$، از طرفی چون $P(A\cap B)\le 1$، لذا $P(A\cap B)=1$.

حل ۲. با استفاده از دستور دمورگان و دستور $P(A)+P(\overline{A})=1$ می‌توان این مسأله را به عنوان نتیجه‌ای از مسأله ۱ حل کرد و یا آنکه به روش مشابه به نتیجهٔ مطلوب رسید.

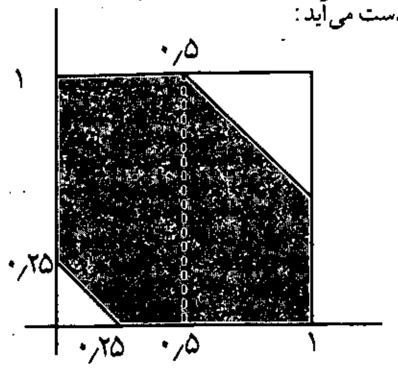
حل ۳. اگر نقطه‌ای به مختصات (x,y) در صفحه در نظر بگیریم، آن گاه فضای نمونه‌ای عبارت است از

$$S=\{(x,y)|\,0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 1\}$$

و پیشامد مورد نظر به صورت مجموعهٔ زیر است:

$$A=\{(x,y)|\ 0/25\le x+y\le 1/5\}$$

با رسم دو خط $x+y=1/5$ و $x+y=0/25$ و تعیین نواحی مربوطه، شکل زیر به دست می‌آید:



بنابراین

$$P(A)=\frac{\text{مساحت سطح هاشوردار}}{\text{مساحت مربع}}=0/84375$$

حل ۴. در پرتاب یک جفت تاس ۳۶ حالت داریم که در حالتهای زیر مجموع دو شماره برابر ۷ است:

(۱، ۶) و (۲، ۵) و (۳، ۴) و (۴، ۳) و (۵، ۲) و (۶، ۱)

پس احتمال مطلوب برابر $\frac{6}{36}$ است.

حل ۵. در این جا تعداد شیرها دارای توزیع دو جمله‌ای با $n=10$ و $p=\frac{1}{2}$ است پس

$$P(\text{۷ بار شیر})=\binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{\binom{10}{7}}{2^{10}}$$

حل ۶.

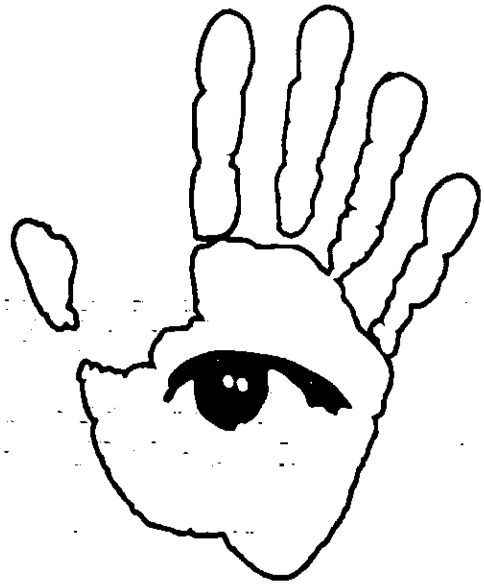
$$P(\text{حداقل یک سفید})=1-P(\text{هر سه سیاه})$$

$$=1-\frac{\binom{8}{3}}{\binom{13}{3}}$$

البته ممکن است مستقیماً نیز این مسأله را حل کرد:

$$P(\text{حداقل یک سفید})=P(\text{یک سفید و دو سیاه})+P(\text{دو سفید و یک سیاه})+P(\text{هر سه سفید})$$

$$=\frac{\binom{5}{1}\binom{8}{2}}{\binom{13}{3}}+\frac{\binom{5}{2}\binom{8}{1}}{\binom{13}{3}}+\frac{\binom{5}{3}}{\binom{13}{3}}.$$



نورالله نژادصادقی
عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه شهید چمران

مشاهده و تجسّم و نقش آن در آموزش و یادگیری ریاضیات

چکیده

مشاهده و تجسم از همان آغاز نقش اساسی در پیشرفت ریاضیات داشته‌اند. در یونان قدیم هندسه‌دانان اشکال هندسی خود را، بر روی شن‌ها رسم می‌نمودند و در مسیر همین کوششها برای حل مسائل هندسی بود که حساب دیفرانسیل وانتگرال پا گرفت و رشد خود را آغاز نمود. بنابراین نادیده گرفتن نقش مشاهده و تجسم بکمک تصاویر به معنی نادیده‌گرفتن بسیاری از ایده‌ها و مطالب ریشه‌دار در ریاضیات می‌باشد. در همان آغاز مطالعه مباحثی همچون توابع، پیوستگی و حد همه بر اساس مشاهده و تجسم بوده‌اند، بنابراین نادیده گرفتن و انکار کردن این نقش سبب قطع ارتباط ذهنی دانش‌آموز با ریشه‌های تاریخی این مباحث می‌شود. هرچند که در عمل ما همیشه از نقش تجسم و مشاهده در آموزش مفاهیم ریاضی دفاع کرده‌ایم، ولی خیلی از دانش‌آموزان در پذیرش و استفاده از آن اکراه داشته و بی‌میلی خود را نشان می‌دهند. آنها معمولاً محاسبات به کمک نمادهای جبری را بر روند تجسم و مشاهده به کمک اشکال و تصاویر ترجیح می‌دهند. در این مقاله سعی شده ضمن اقامه دلایل وجود این بی‌میلی، چند علت برای آن ذکر شود و پیشنهادهایی را برای ترغیب دانش‌آموزان در جهت استفاده از تصاویر و اشکال در حل مسایل ریاضی و درک عمیق آنها مطرح نماییم.

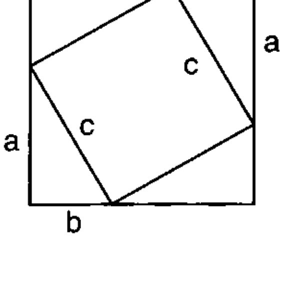
یکی از اهداف این مقاله این است که چگونه از مشاهده و تجسم جهت روشن کردن واقعیات و مفاهیم ریاضی بهره جوییم. در اینجا تجسم و مشاهده را مراحل شکل‌گیری منحنی‌ها و استفاده از ابزار هندسی در مفاهیم و مسایل ریاضی تعریف می‌کنیم. این نمایشها می‌توانند بوسیلهٔ نرم‌افزارهای کامپیوتری یا بوسیلهٔ دست تولید شوند. در مشاهده و تجسم واقعی از مسایل، نکات نادیدنی بصورت دیدنی مجسم و رویت می‌گردند. روش مشاهده و تجسم ایدهٔ جدیدی نیست، جداول و منحنی نمایش‌ها قدمتی همانند خود ریاضیات دارند، بخصوص هندسه که وابستگی انکارناپذیری با شکل و تصویر دارد.

البته تا مدت زمانی این مطلب برای تمام شاخه‌های ریاضی صادق بود. در حقیقت اگر نتوانیم ادعا کنیم که نیوتن هیچ قضیهٔ اساسی را در ریاضی اثبات نکرده، ولی میتوان گفت که بسیاری از اثباتها و دلایل وی بصورت انکارناپذیری متکی به تصاویر و اشکال بوده است.

مشاهده و تجسم یک مسئله چیزی بالاتر از مشاهدهٔ ظاهری با چشم است و همانطور که گفته شد بیشتر به معنی درک و فهم مسئله است، البته آن نوع درک و فهمی که با نگرش در تصاویر و اشکال درون مغز و چشم بوجود می‌آید. در اینجا به این موضوع اشاره می‌کنیم که در ریاضی و در بیشتر محاسبات علمی شخص ممکن است تصور و تجسم کند چیزی را که دیده نمی‌شود و هرگز دیده نخواهد شد. مشاهده و تجسم در ریاضی در حقیقت کاربرد ریاضی در رسم اشکال و منحنی‌ها نیست. همچنین یک تفکر مبهم و نامعلوم نیست، بلکه یک جایگزین برای فهم سطحی بوده و تفکریست که در قلب یک ایده و مفهوم ریاضی نفوذ می‌کند.

مشاهده و تجسم را نباید از بقیهٔ ریاضیات جدا کنیم. مشاهده و تجسم باید به سایر مولفه‌های تفکر ریاضی الحاق گردد. شخص باید بیاموزد که چگونه ایده‌های ریاضی را توسط نماد، اعداد و منحنی‌ها نمایش دهد و به آن توانایی برسد که بتواند طرح مناسبی را برای رسیدن به جواب نهایی مسئله خاص ارائه دهد.

اویلر و ون از جمله کسانی هستند که ابزار ترسیمی را برای حل مسایل بوجود آورده‌اند. بعنوان مثالی از کاربرد تجسم و مشاهده، قضیهٔ معروف فیثاغورس را در نظر می‌گیریم که می‌گوید در هر مثلث قائم‌الزاویه با اظلاع a,b,c که در آن c وتر است، همواره $a^2 + b^2 = c^2$. یک راه حل معروف این مسئله ساختن مربعی روی وتر مثلث، بصورت زیر می‌باشد:



با توجه به اینکه مجموع سه زاویهٔ هر مثلث ۱۸۰ درجه می‌باشد، مربعی به ضلع a+b خواهیم داشت، که با توجه به شکل:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$$

با حذف $2ab$ از طرفین خواهیم داشت: $a^2 + b^2 = c^2$

در این مسئله متوجه می‌شویم که شکل، نقش اساسی را در اثبات دارد. البته این بدین معنی نیست که نمیتوان راه حل دیگری را برای مسئله در نظر گرفت؛ بلکه منظور ما این است که این راه‌حل استفاده شایسته‌ای را از شکل نموده و ملاحظه می‌شود که بدون آن روابط و عبارات جبری ذکر شده کاملاً بی معنی می‌باشند. این نوع اثباتها همچنین هماهنگی جالب و ماهرانه‌ای را بین شکل هندسی و نمادهای جبری به معرض نمایش قرار می‌دهند. یکی از مزیت‌های این نوع اثباتها در اینستکه به محض بخاطر آوردن شکل مسئله، مفاهیم جبری همراه با آن در ذهن تداعی می‌شود. البته این یک امتیاز کلی برای تمام اثباتهای هندسی می‌باشد که به محض رسم شکل مناسب برای مسئله، حدس و دنبال کردن بقیهٔ اثبات مشکل نیست. البته یک خطر در رابطه با استفاده از شکلهای هندسی در اثباتها ما را تهدید می‌کند و آن اینستکه برای وضعیت و یک شکل خاص، استنباطی غلط شود. مثلاً در شکل قبل اگر چنین فرض شود که a همواره از b بزرگتر است، در اینصورت اثبات کلی نبوده و این چیزی نیست که قضیه خواهان آن می‌باشد. البته امکان وقوع خطا در استفاده از شکل‌های هندسی وجود دارد، ولی نباید این را جدی‌تر از امکان بروز خطا در اثباتهای جبری و تحلیلی بدانیم.

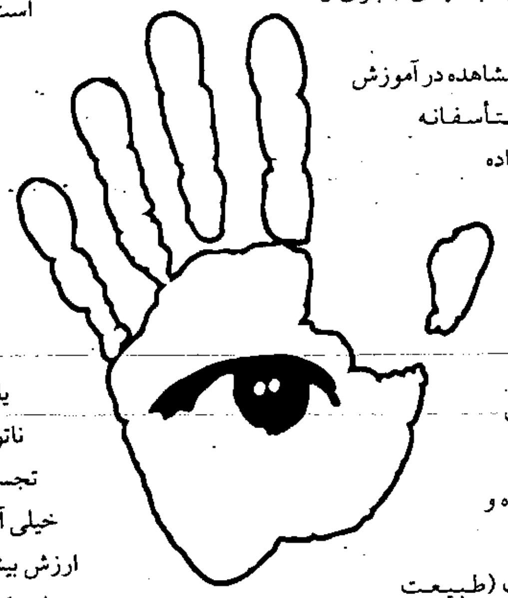
هرچند ما همیشه مدافع نقش تجسم و مشاهده در آموزش و یادگیری مفاهیم ریاضی بوده‌ایم، ولی متأسفانه بسیاری از دانش‌آموزان در پذیرش و استفاده از آن بی‌میلی نشان می‌دهند. آنها معمولاً محاسبات جبری بر اساس نمادها را بر تجسم و مشاهده ترجیح می‌دهند. سه دلیل برای این بی‌میلی می‌تواند وجود داشته باشد:

۱ـ مشاهده و تجسم مشکل‌تر است (جنبهٔ طرز تفکر)؛

۲ـ تدریس و یادگیری به روش مشاهده و تجسم مشکل‌تر است (جنبهٔ روانی کار)؛

۳ـ مشاهده و تجسم، ریاضی نیست (طبیعت ریاضیات).

اولین دلیل برای نشان دادن این بی میلی در دانش‌آموزان عبارت از اینستکه تفکر بر اساس تجسم و مشاهده در مقایسه با تفکر تحلیلی و محاسباتی به آگاهی و بینش و همچنین فعالیت بیشتر مغزی نیازمند می‌باشد. بنابراین، طبیعی خواهد بود اگر مشاهده کنیم که دانش‌آموزان نسبت به تفکر اولی واگرایی نشان می‌دهند. شاید مثال ساده‌ای بتواند منظور را روشن سازد. اگر از دانش‌آموزان خود بخواهیم که یک منحنی رسم کنند و بگویند کجا مشتق مثبت و کجا مشتق منفی است، ممکن است پاسخ مطلوبی را دریافت نکنیم. ولی اگر از آنها خواسته شود که بوسیلهٔ علائم و محاسبات این عمل را انجام دهند آنها فورا مشتق گرفته و تعیین علامت می‌کنند. آنها در حقیقت اینکار را انجام می‌دهند بدون اینکه معنی و مفهوم واقعی سئوال را درک و تجسم کرده باشند. البته ما واقعا نمی‌دانیم که چرا آنها اثباتهای جبری را بر روند تصویری ترجیح می‌دهند، ولی این را میدانیم که هروقت ممکن باشد آنها معمولا کار جبری و نمادی را بر تجسم و مشاهدهٔ اشکال ترجیح می‌دهند. هرچند که این مطلب در خصوص بسیاری از معلمان ریاضی نیز صحت دارد، ولی بنظر می‌رسد که موضوع برای ریاضی‌دانان حرفه‌ای متفاوت است. برای آنها انتخاب رسم شکل و مشاهده بستگی به طبیعت مسئله دارد و کمتر مربوط می‌شود به سلیقهٔ شخصی آنها در استفاده از تصاویر و اشکال. وقتی از ریاضی‌دانان سؤال می‌شود که آیا آنها در حل مسائل از مشاهده و تجسم و رسم شکل استفاده می‌کنند، برخی جواب می‌دهند که آنها همه چیز را بر حسب تصویر و شکل آن می‌بینند. البته جبریست‌ها در این زمینه تمایل کمتری نشان می‌دهند تا آنالیزدانان و همچنین این میل در جنس مونث بیشتر از جنس مذکر است [ماندی ـ Mundy].



دانش‌آموزان معمولا یک درک سطحی و ماشینی ازمفاهیم اساسی ریاضیات دارند و علت اینستکه آنها درک درستی از مفاهیم اولیهٔ نمادهای ریاضی بدست نیاورده‌اند. شاید دلیل این بی‌میلی را در توانایی و مهارتهای ماشینی میتوان جستجو کرد که آنها در استفاده از نمادها و روابط جبری بدست آورده‌اند و ضعف در یادگیری در اکثر مواقع مربوط می‌شود به ناتوانی شخص در ایجاد رابطه بین مشاهده و تجسم و مفاهیم تحلیلی ریاضیات و شاید یادگیری خیلی آسانتر خواهد شد اگر به مشاهده و تجسم ارزش بیشتری داده شود. تحقیقات ماندی، مونک و وینر تائید کننده این موضوع می‌باشد که دانش‌آموزان

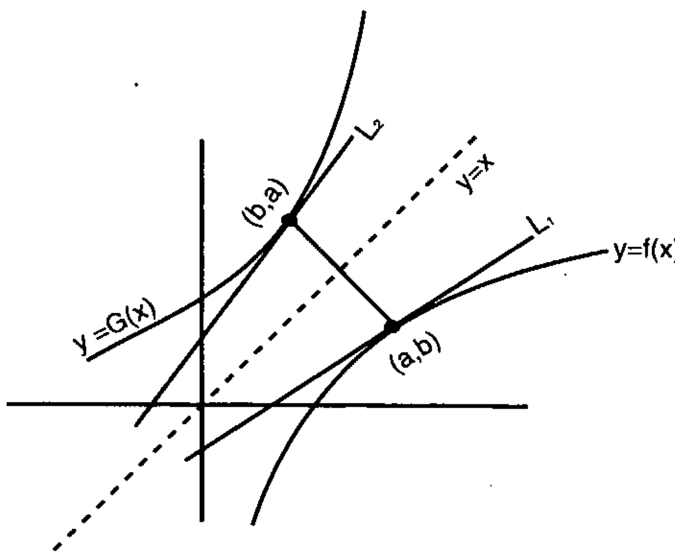
معمولا یک گرایش خیلی قوی بطرف تفکر جبری دارند. آنها همچنین بر این نکته تاکید می کنند که بسیاری از مشکلات در یادگیری (حداقل در ریاضیات عمومی) را می توان تقلیل داد، اگر دانش‌آموزان به سمتی سوق داده بشوند که مفاهیم اولیه ریاضیات را مشاهده و تجسم و سپس تجزیه و تحلیل نمایند.

فرض کنیم می‌خواهیم نشان دهیم که اگر G و F توابعی مشتق‌پذیر و معکوس یکدیگر باشند و (a,b) عضو F باشد آنگاه: $G'(b) = \left[F'(a)\right]^{-1}$

اثبات این مسئله بر حسب نمادهای جبری بصورت زیر است:

چون G و F معکوس یکدیگرند، پس $x = G(F(x))$ برای تمام xهای متعلق به حوزهٔ تعریف F؛ با مشتق‌گیری از طرفین رابطهٔ فوق داریم: $G'(F(x))F'(x) = 1$

حال اگر x را با a و F(x) را با b جایگزین کنیم، خواهیم داشت: $G'(b) = \left[F'(a)\right]^{-1}$



در اینجا $F'(a)$ همان ضریب زاویهٔ خط L_1 مماس بر منحنی $y = F(x)$ در نقطهٔ (a,b) و $G'(b)$ ضریب زاویهٔ خط L_2 مماس بر منحنی $y=G(x)$ در نقطهٔ (b,a) می‌باشند. ملاحظه می کنید که تفاوت زیادی بین دو روش وجود دارد، چه از نظر پیش‌نیازهایی که هر کدام از آنها نیازمند به آن می‌باشند و چه از نظر فهم مطلب که از تجزیه و تحلیل ناشی می شود. مثلا یکی از پیش‌نیازها در اینجا اینستکه بدانیم اگر دو خط نسبت به نیمساز y=x قرینه باشند، حاصل ضرب ضریب زاویهٔ آنها همواره یک است. اثبات تحلیلی مسئله ظریف و کوتاه می‌باشد و به پیش‌نیاز کمتری نیازمند است، همچنین درک آن برای دانش‌آموز خیلی آسان است. ولی اگر از دانش‌آموزان بخواهیم که معنی و مفهوم نمادهای بکار گرفته شده و نتیجه را به زبان ساده بیان کنند، یا بوسیلهٔ شکل نشان دهند، اکثراً قادر به پاسخ نخواهند بود، چرا که برداشت آنها از مسئله، یک برداشت سطحی و ماشینی میباشد. هرچند که قادرند نتیجه را به تمریناتی که مستلزم پیدا کردن مشتق تابع معکوس است اعمال نمایند.

اعتقاد بر طبیعت ریاضیات: برای ارتباط پیدا کردن با یکدیگر در خصوص مفاهیم ریاضی ما معمولا از راههای غیرتجسمی و با استفاده از نمادها و علائم ریاضی عمل می کنیم. این عادت بر این پایه استوار است که خیلی از ریاضیدانها و معلمین و دانش‌آموزان عقیده دارند که ریاضیات غیرتجسمی است و شهودی نیست. جالب توجه است که بسیاری هستند که اثبات به طریق شهودی را، یک اثبات نمی‌دانند و عقیده دارند که اثباتها حتما باید محاسباتی و بر اساس نمادها باشند، در غیر اینصورت اثبات محسوب نمی شوند. این طرز فکر سئوالات زیادی را درخصوص طبیعت ریاضی مطرح می سازد. بررسی نشان میدهد که اکثراً بر این اعتقادند که هرچند شکل و تصویر می‌تواند جهت به وجود آمدن یک اثبات بکار گرفته شوند، ولی تنها و تنها به یک طریق میتوان ارتباط ریاضی برقرار نمود و اثباتهای بدون حرف بعنوان یک اثبات ریاضی قابل پذیرش نیستند.

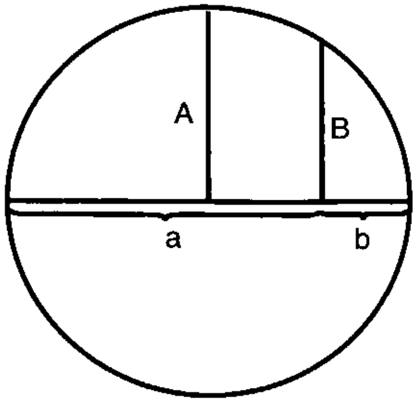
بنابراین ملاحظه می شود که چون به روشهای شهودی و تجسمی در اثباتها ارزش کمی داده می‌شود، این طرز تلقی توسط همین معلمین به دانش‌آموزان منتقل می شود و جای تعجب نیست اگر عکس‌العمل آنچنانی دانش‌آموزان را ناظر هستیم. همان‌طور که ذکر گردید، اکثر ریاضیدانان و معلمین در کارهای ریاضی روزانهٔ خود از روشهای تجسمی و مشاهده‌ای بهره می جویند؛ پس چرا این ایده را به شاگردان خود انتقال نمی‌دهند؟ و اگر این کار را انجام داده‌اند، چرا دانش‌آموزان پرورش لازم را پیدا نکرده‌اند؟

قبل از ادامهٔ بحث به مثالهای زیر توجه فرمایید:

ثابت کنید:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

اثبات به روش مشاهده و تجسم؛

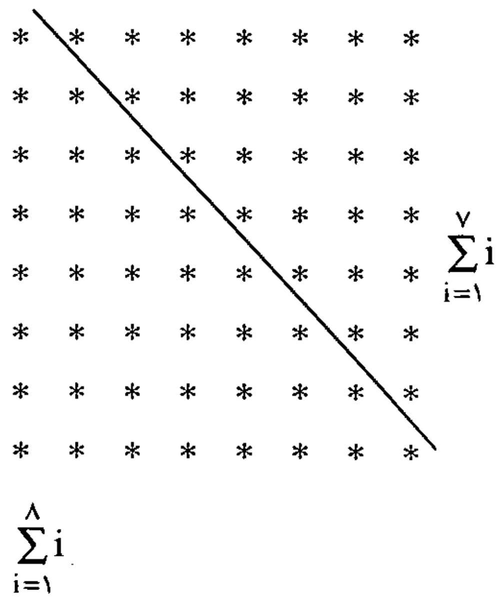


$$\frac{a+b}{2} = A \rangle B = \sqrt{ab}$$

یادآوری: در مثلث قائم‌الزاویه مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل ضرب دو قطعه‌ای که ارتفاع بر روی وتر جدا می‌سازد.

ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n-1} i = n^2$$

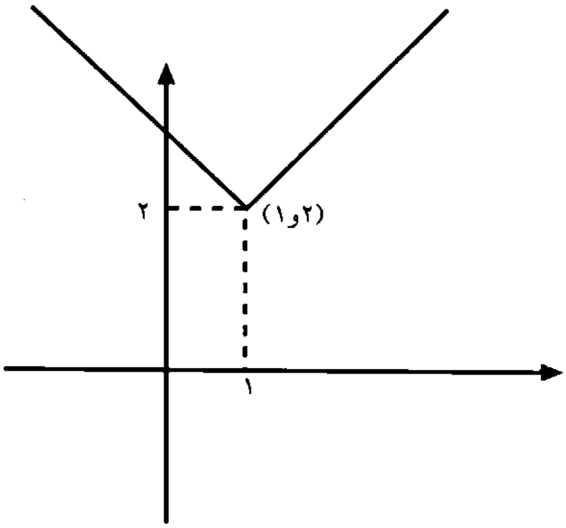


به عنوان مثال برای $n=8$ مشاهده می‌شود که:

$$\sum_{i=1}^{8} i + \sum_{i=1}^{7} i = 8^2$$

یک شکل و یا جدول شامل مجموعه‌ای از اطلاعات خلاصه شده و پیچیده می‌باشند که اگر بخواهیم این اطلاعات را بصورت جملات و عبارات بنویسیم، مسلماً فضای خیلی زیادی را اشغال می‌کنند. حتی اگر دو نمایش مختلف از یک مفهوم ریاضی، شامل اطلاعات یکسانی باشند، بسیاری از این اطلاعات، که در نمایش تحلیلی ضمنی و پنهان می‌باشند، در نمایش تصویری واضح و صریح هستند.

مثلا تابع $f(x)=|x-1|+2$



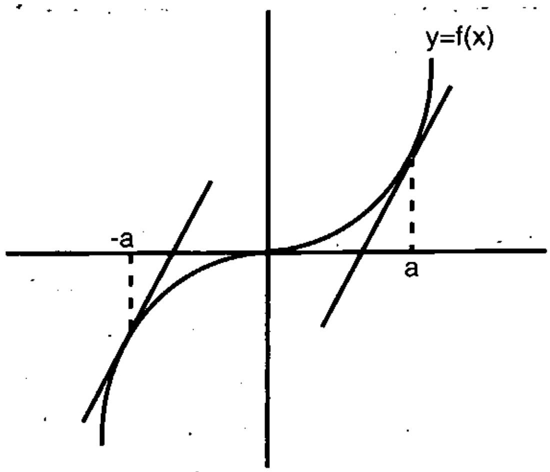
فورا ازروی شکل مشاهده می‌شود که تابع پیوسته است و تنها در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست و همچنین برای $x\rangle 1$ نزولی است و برای $x\langle 1$ صعودی است و ... از طرف دیگر فرمول تابع شامل تمام این اطلاعات می‌باشد ولی بصورت نهان و ضمنی و اگر بخواهیم یکی از موارد فوق را بررسی کنیم باید تابع را مورد کندوکاو قرار دهیم.

مسئله زیر را در خصوص مشتق تابع فرد در آزمونی مطرح کرده‌ایم و تعدادی از دانش‌آموزان چنین پاسخ داده‌اند:

$$F'(-a) = [F(-a)]' = [-F(a)]' = -F'(a)$$

مسلماً با رجوع به شکل فوراً میتوان دریافت که کار آنها غلط بوده ودر حقیقت $F'(-a) = F'(a)$ می‌باشد؛ شاید علت را بتوان در این جستجو کرد که در روند حل مسئله این دانش‌آموزان، قادر به ترسیم شکل و استفاده از آن نبوده‌اند، که فکر می‌کنیم مشکل دقیقا در همین جاست.

در شکل پایین ملاحظه می شود که $F'(-a) = F'(a)$ ، چون دو خط مماس با هم موازیند. بنابراین میتوان نتیجه گرفت که اطلاعات و داده‌ها بصورت شهودی میتوانند اغلب مفید باشند و این سودمندی بدین علت نیست که اطلاعات زیادتری در تصاویر وجود دارد، بلکه بدین علت است که این اطلاعات بصورت واضح و صریح نمایش داده شده‌اند. از طرف دیگر اگر روی دیگر سکه را نگاهی کنیم، متوجه می‌شویم که استفادهٔ صحیح از تصاویر و منحنی‌ها احتیاج به روند خاص تفکر دارد. تصاویر مفید هستند برای کسانی که بتوانند از آنها استفاده کنند. یک حل کنندهٔ مسئله در اکثر مواقع به آن معلوماتی احتیاج دارد و او را قادر سازد که بتواند یک تصوری واضح از مسئله ارائه دهد و از آن برای حل مسئله بهره جوید. بنابراین جای شگفتی نیست اگر می‌بینیم دانش‌آموزانی که بطریق مناسب آموزش ندیده‌اند، از رسم شکل پرهیز می‌کنند و نمی‌دانند چگونه از اطلاعات تصویری که به آنها داده شده استفاده نمایند، حتی اگر آن تصاویر را خودشان رسم کرده باشند.



نتیجه گیری:

جملهٔ معروفی است که می‌گوید: ارزش یک تصویر بیشتر از صد کلمه و حرف است. در حقیقت معنی این جمله اینستکه یک تصویر حتی نسبتا ساده، ممکن است حقایق بیشماری را شامل باشد، حقایقی که میتوان آنها را در شکل دید و خواند. یک تصویر در حقیقت نمایش فشرده‌ای از یک مفهوم است.

مثلا Category theory بر اساس خطوط پیکانی نمایش داده می‌شود و همانطور که مک‌لین در مقدمهٔ کتاب خود می‌نویسد:

تئوری... شروع می‌شود بامشاهدهٔ اینکه بسیاری از خواص سیستمهای ریاضی می‌توانند بصورت خیلی ساده‌ای در کنار هم گذاشته شده و بوسیلهٔ اشکالی از خطوط پیکانی نمایش داده شوند. در اینجا مطلب را با این جملات ختم می‌کنیم که ما اصلا از این دفاع نمی‌کنیم که نمایشهای شفاهی و کلامی در ریاضیات حتما باید بصورت تصویری باشند. باید ذکر کنیم که هر دوی اینها جای و ارزش خاص خود را دارند. همچنین خواهان آن نیستیم که به اثباتهای تحلیلی و جبری بهای کمتری داده شود.

پیشنهادات:

آموزش بر پایهٔ تجسم و مشاهده، ما را ملزم می‌سازد که بعضی توانائی‌ها و مهارتها را بیاموزیم. نه تنها باید ریاضی را خوب متوجه شویم بلکه باید یاد بگیریم که چگونه بوسیلهٔ اشکال و تصاویر ارتباط ریاضی برقرار کنیم.

معلمی که از روشهای شهودی و تجسمی استفاده می‌کند باید ترتیبی را مشخص سازد که موضوعات بر حسب آن ترتیب ارائه گردند و آنها را بطریق منظم و بصورت پیوسته ارائه دهد.

به دانش‌آموزان راههای مختلفی پیشنهاد گردد که بتوانند معلومات ریاضی خود را بسط و تعمیم دهند و از ایجاد ابهام و شک در آنها پرهیز کنیم.

مراجع:

[1] Douglas, D.G. Toward a lean and Lively Calulus: Report for Calculus at the College Level. MAA 1986

[2] A Source book for college mathemathics teaching, the mathematical Association of America 1990

[3] Kulbir singh sidhu, the teaching of mathematics, sterling publishers 1995

[4] Visulization in teaching and Learing mathematics, mathematical Association of America 1991

[5] Mac Lane, saunders, categories for working mathematicians, springer-verlag 1971

[6] Butler and wren, the teaching of secondary mathematics, Mac Graw Hill Inc., 1965

روش های تحدید و تعویض متغیر در محاسبهٔ حد

فریبرز آذرپناه،
عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه اهواز

مقدمه :

بسیاری از مفاهیم دقیق ریاضی، قبل از آنکه به‌خوانندهٔ آموزش داده شوند درغالب دیگری بیان می‌شوند. به‌خوانندهٔ درجهت به‌کارگیری این مفاهیم درمحاسبات آموزش داده می‌شود و از پرداختن به‌جزئیات خودداری می‌شود. گاهی دریک مقطع تحصیلی به مفهوم دقیق مطلبی که مرتّب از آن استفاده کرده‌ایم پرداخته نمی‌شود و این روش، اکثر اوقات به‌سود خواننده خواهد بود.

دانش‌آموزان دبستانی، برای اینکه بتوانند حروف الفباء را بنویسند ابتدا نوشتن کلمات را فرا می‌گیرند ووقتی تمام حروف دربطن کلمات به‌آنها آموزش داده شد، آنگاه حروف نیز جداگانه گفته می‌شوند. دانش‌آموز دبیرستانی یادانشجو به‌راحتی از اعداد حقیقی دربسیاری از موارد استفاده می‌کند بدون آنکه از پیچیدگیهای آن آگاه باشد. او تصور می‌کند که اعداد حقیقی را کاملاً می‌شناسد ولی اگر ماشین حساب دراختیار نداشته باشد از مقایسه دو عدد e^{π} و π^{e} درمی‌ماند و نمی‌داند که کدامیک کوچکتر است.

ما می‌دانیم که برای آموزش بسیاری از مفاهیم ریاضی درمقطع دبیرستان و دانشگاه احتیاجی به‌درک دقیق پیچیدگیهای اعداد حقیقی نیست. برخی از مفاهیم ریاضی نیز فقط به‌چند اصل مهمّ در اعداد حقیقی ارتباط پیدا می‌کنند که اغلب این اصول یادآوری می‌شوند. چه‌زمانی بایستی اعداد حقیقی را به‌طور دقیق آموزش داد؟ چرا دراکثر کتب آنالیز از ساختن اعداد حقیقی شانه خالی می‌کنند و یا به‌منابع دیگر ارجاع می‌دهند؟ اینکه کدام مطلب ریاضی درچه‌زمانی بایستی مطرح شود امر بسیار مهمّی است. چه‌بسا اگر یک مطلب مهمّ ریاضی درجای خود گفته نشود ممکن است باعث دلسردی بسیاری از دانش‌آموزان و دانشجویان شود و مسیر طبیعی حرکت فکری آنها را دگرگون سازد.

متأسفانه درکتابهای ریاضی دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی، چنین مواردی به‌چشم می‌خورد و اغلب سنگ‌بزرگ برداشته‌ایم. به‌جرأت می‌توانم بگویم که در دبیرستان بیشتر دانش‌آموزان مفهوم دقیق حد را فرا نمی‌گیرد. دانش‌آموز شاید با صرف وقت زیاد بتواند به‌روش ε و δ آن هم به‌طورمکانیکی و یا به‌عنوان سرگرمی، حدبرخی از توابع را به‌اثبات برساند، ولی به‌این معنی نیست که مفهوم دقیق حد را فراگرفته است. اکثر دانشجویان رشته‌ریاضی که درمقطع کارشناسی فارغ‌التحصیل می‌شوند، بعداز گذراندن آن همه دروس حساب دیفرانسیل و انتگرال، آنالیز و توپولوژی، نهایتاً اگر از آنها سئوال شود که روش ε و δ چه ارتباطی بادرستی مقدار حد دارد درتوضیح آن دچار اشکال می‌شوند. حال همین دانشجویان فارغ‌التحصیل بایستی به‌دانش‌آموز ۱۷ ساله مفهوم دقیق حد را بفهمانند.

ما که درتألیف کتابهای درسی دبیرستانی فعالیّت داریم، بایستی گذشته‌های خودمان را نیز بیاد آوریم. باید ببینیم وقتی که درسن ۲۰ سالگی دردانشگاه مفهوم دقیق حد را به‌ما آموزش دادند چه‌حالی به‌ما دست داد. سوای این، بایستی توانایی معلمین را نیز درنظر داشته باشیم. وقتی کوشی (Cauchy) برای نخستین‌بار تعریف دقیق حد را بیان نمود، برای بسیاری‌از ریاضیدانهای آن زمان قابل قبول نبود و آن را دقیق نمی‌دانستند و درصدد جایگزینی تعریف دیگری بودند. اکنون تصور کنید اگر بخواهیم این مفهوم را به‌دانش‌آموزان بیاموزیم، آنها چه‌برداشتی از ریاضیات خواهند داشت؟ تاریخ نشان می‌دهد که اکثراً احساس خواهند کرد که یاریاضیات نادقیق است و یا آنها ریاضیات را درک نمی‌کنند و هر دو مضر است.

دانش‌آموزانی که وارد دانشگاه می‌شوند، علاوه‌براینکه مفهوم دقیق حد را فرانگرفته‌اند اکثراً روش ε و δ را نیز به‌درستی به‌کار نمی‌گیرند و بعضی اوقات دچار اشتباهات فاحش

می‌شوند. به‌این ترتیب آموزش مفهوم حد در دانشگاه با دو مشکل مواجه خواهد بود، یکی بیرون راندن روش‌های نادرست که در ذهن دانش‌آموز نقش بسته و مستلزم صرف زمان است و دیگری جایگزینی مفهوم دقیق حد و آموزش روش‌های درست به‌جای آنها می‌باشد. من اعتقاد دارم به‌جای تدریس مفهوم دقیق حد در دبیرستانها، ابتدا مفهوم نزدیک شدن به یک عدد را با کمک جدولی از اعداد برای دانش‌آموز توضیح دهیم و سپس بر روشهای محاسبه حد تأکید کنیم. این روشها را حتی می‌توانیم به‌صورت قضیه‌های بدون اثبات درکتابها بیاوریم و دانش‌آموز را موظف کنیم که از این قضیه‌ها درمحاسبه حد استفاده کند. دراین مقاله به‌بهانه عنوان کردن دو روش برای محاسبه‌حد، قصد داریم مطالب بیشتری درمورد محاسبه حدها ارائه داده و مثالهای متعددی درخصوص محاسبه حدها به‌ویژه وقتی روش‌های معمول کارساز نیستند عنوان کنیم. اگرچه روش تحدید که دراین مقاله شرح داده شده است مناسب کتابهای دبیرستانی است، ولی منظور من از صحبتهای فوق این نیست که چنین روشهایی درکتابهای درسی دبیرستان گنجانده شوند.

محاسبه حد به روش تحدید

گاهی اوقات ضابطه‌ای که برای تعریف یک تابع درنظر گرفته می‌شود بسیار پیچیده است ولی در یک همسایگی I تعریف بسیار ساده و بدیهی دارد. دراین صورت در هرنقطهٔ $a \in I$، حدتابع درصورت وجود باحد تابع که درهمسایگی I شکل ساده‌ای پیدا کرده یکسان است. اغلب دانش‌آموزان و دانشجویان $\lim_{x\to 1^+} \frac{[x]^2-[x^2]}{x^2-1}$ را درکتب درسی دیده‌اند. می دانیم که تشخیص مقدار حد یا تشخیص وجود یا عدم وجود حد با استفاده از نمودار تابع نیز عملی است. وقتی قلمرو تابع $f(x)=\frac{[x]^2-[x^2]}{x^2-1}$ را درنظر بگیریم رسم نمودار آن به‌راحتی انجام نمی‌گیرد، ولی وقتی هدف این باشد که x از سمت راست به ۱ نزدیک شود، آنگاه رفتار f درنزدیکیهای ۱ و سمت راست ۱ اهمیت دارد. پس برای این منظور می‌توانیم تابع f را در هرفاصله $(1,1+\alpha)$، $\alpha>0$ محدود کنیم. مثلاً می‌توانیم فرض کنیم $x \in (1,\frac{4}{3})$، یعنی x را از کمتر از $\frac{4}{3}$ به ۱ میل دهیم، دراین صورت $f(x)=0$. اکنون رسم نمودار f درفاصله $(1,\frac{4}{3})$ و همچنین مقدار حد این تابع بسهولت انجام می‌گیرد، یعنی $\lim_{x\to 1^+} \frac{[x]^2-[x^2]}{x^2-1}=0$

هرگاه قلمرو f شامل مجموعه A باشد، آن‌گاه تابع $g: A \to R$ که به‌صورت $g(x)=f(x)$ برای هر $x \in A$ تعریف می‌شود تحدید f روی A نامیده می‌شود و آن را به‌صورت $g=f|_A$ نشان می‌دهیم. مثلاً اگر

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & -1<x<1 \\ 1 & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

آن‌گاه تحدید f روی $(-1,1)$ یعنی $f|_{(-1,1)}$ به‌صورت $f|_{(-1,1)}(x)=x^2$ خواهد بود. حال اگر هدف محاسبه $\lim_{x\to 0} f(x)$ باشد، مطابق بحث بالا کافی است $\lim f|_{(-1,1)}(x)=\lim x^2$ را محاسبه کنیم. این موضوع درقضیهٔ زیر دقیقاً بیان شده است. این قضیه درکتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌ چشم نمی‌خورد، ولی درمحاسبه حد بسیار سودمند است.

قضیهٔ ۱: هرگاه قلمرو تابع f شامل یک همسایگی محذوف a مانند I باشد و $g=f|_I$، آنگاه

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \lim_{x\to a} g(x)=b$$

اثبات: $\lambda>0$ را بقسمی درنظر می‌گیریم که $(a-\lambda,a)\cup(a,a+\lambda)\subseteq I$. فرض می‌کنیم $\lim_{x\to a} f(x)=b$. دراین صورت برای هر $\varepsilon>0$ عدد $\delta>0$ وجود دارد که

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon \qquad (1)$$

حال قرار می‌دهیم $\delta'=\min\{\delta,\lambda\}$. اگر $0<|x-a|<\delta'$، آنگاه از $x\in I$ نتیجه می‌شود $f(x)=g(x)$ و از $0<|x-a|<\delta$ مطابق (۱) خواهیم داشت $|g(x)-b|=|f(x)-b|<\varepsilon$، یعنی $\lim_{x\to a} g(x)=b$.

به‌عکس، فرض می‌کنیم $\lim_{x\to a} g(x)=b$. پس برای هر $\varepsilon>0$، عدد δ وجود دارد که $0<\delta<\lambda$ به‌طوری که اگر $0<|x-a|<\delta$، آنگاه $|g(x)-b|<\varepsilon$. چون $0<|x-a|<\delta<\lambda$، پس $x\in I$ و بنابراین

$|f(x)-b|=|g(x)-b|<\varepsilon$ ، یعنی $\lim_{x\to a} f(x)=b$.

تبصره ۱ـ مطابق قضیه ۱، هرگاه $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد و I یک همسایگی محذوف a واقع درقلمرو f باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a} f\Big|_I(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

نماد $f|_I(x)$ ، یعنی مقادیر f به‌ازای $x\in I$ را می‌توان به‌صورت $f|_{x\in I}$ نیز نشان داد. پس

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} f(x)\Big|_{x\in I}$$

مثلاً برای $f(x)=\begin{cases}x^2 & -1<x<1\\ 1 & \text{درغیراینصورت}\end{cases}$ ، داریم

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} f(x)\Big|_{x\in(-1,1)}=\lim_{x\to 0}x^2=0$$

قضیه ۱ برای هرهمسایگی محذوف a که درقلمرو f واقع باشد درست است و انتخاب درست همسایگی محذوف به‌ سهولت حل مسئله کمک می‌کند. طبیعی است هرچه همسایگی را کوچکتر درنظر بگیرید انتخاب مناسب‌تری خواهید داشت. این روش را روش تحدید می‌نامیم.

مثال ۱ـ مقدار $\lim_{x\to 1}\frac{x[x]^2-1}{x[x^2]-1}$ را به دست آورید.

حل: اگر فرض کنیم $f(x)=\frac{x[x]^2-1}{x[x^2]-1}$ و $I=(0,1)\cup(1,\frac{4}{3})$ ، آن‌گاه تحدید f روی I تابع ثابت ۱ است، یعنی $f|_I(x)=1$. زیرا اگر $0<x<1$ ، آن‌گاه $0<x^2<1$ و بنابراین $[x^2]=[x]^2=0$ و درنتیجه $f(x)=\frac{-1}{-1}=1$. درصورتی‌که $1<x<\frac{4}{3}$ ، آن‌گاه $[x]^2=[x^2]=1$. درنتیجه $f(x)=\frac{x-1}{x-1}$. حال چون $x>1$ ، پس $x-1\neq 0$ و می‌توان این عامل را از صورت و مخرج کسر حذف نمود، یعنی $f(x)=1$. اکنون طبق قضیه ۱،

$$\lim_{x\to 1}\frac{x[x]^2-1}{x[x^2]-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x[x]^2-1}{x[x^2]-1}\Big|_{x\in(0,1)\cup(1,\frac{4}{3})}=\lim_{x\to 1}1=1$$

قضیه ۱ را می‌توان برای حدهای یک‌طرفه و حد دربینهایت نیز تکرار کرد.

قضیه ۲ـ الف) اگر $\lambda>0$ وجود داشته باشد به‌طوری که قلمرو f شامل $(a,a+\lambda)$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a^+} f(x)=b$ اگر و تنها اگر

$$\lim_{x\to a^+} f\Big|_{(a,a+\lambda)}(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)\Big|_{x\in(a,a+\lambda)}=b$$

ب) اگر $\lambda>0$ وجود داشته باشد به‌طوری که قلمرو f شامل $(a-\lambda,a)$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a^-} f(x)=b$ اگر و تنها اگر

$$\lim_{x\to a^-} f\Big|_{(a-\lambda,a)}(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)\Big|_{x\in(a-\lambda,a)}=b$$

قضیه ۳ـ الف) هرگاه $a\in R$ وجود داشته باشد به‌قسمی که قلمرو f شامل (a,∞) باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to\infty} f\Big|_{(a,\infty)}(x)=\lim_{x\to\infty} f(x)\Big|_{x>a}=b$

ب) هرگاه $a\in R$ موجود باشد به‌قسمی که قلمرو f شامل $(-\infty,a)$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$ اگر و تنها اگر

$$\lim_{x\to-\infty} f\Big|_{(-\infty,a)}(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)\Big|_{x<a}=b$$

مثال ۲ـ $\lim_{x\to 2^-}\frac{[x^2]}{[x]^2}=3$

حل: اگر فاصله $(\frac{7}{4},2)$ را درنظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{[x^2]}{[x]^2}\Big|_{x\in(\frac{7}{4},2)}=3$$

زیرا وقتی $\frac{7}{4}<x<2$ ، آن‌گاه $3<\frac{49}{16}<x^2<4$. دراین صورت $[x^2]=3$ ، $[x]^2=1$ و

درنتیجه $\frac{[x^2]}{[x]^2}\Big|_{x\in(\frac{7}{4},2)} = 3$. اکنون بنا بهٔ قضیه ۲ (ب)،

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{[x^2]}{[x]^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{[x^2]}{[x]^2}\Big|_{x\in(\frac{7}{4},2)}=\lim_{x\to 2^-}3=3$$

خواننده می‌تواند با استفاده از قضیه ۲ (الف)، نشان دهد $\lim_{x\to 2^+}\frac{[x^2]}{[x]^2}=1$ و به‌این ترتیب ثابت کند که $\lim_{x\to 2}\frac{[x^2]}{[x]^2}$ وجود ندارد.

تبصره ۲ـ درمثال ۱ عامل ناصفر $x-1$ را از صورت و مخرج کسر حذف نمودیم. دانش‌آموزان و دانشجویان بایستی در حذف این نوع عوامل از طرفین یک تساوی و یا از صورت و مخرج یک کسر دقت کافی داشته باشند. بهٔحل نادرست زیر درمحاسبه $\lim_{x\to 1^+}\frac{[x]^3-1}{[x]^2-1}$ توجه کنید.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{[x]^3-1}{[x]^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{([x]-1)([x]^2+[x]+1)}{([x]-1)([x]+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{[x]^2+[x]+1}{([x]+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{[x]^2+[x]+1}{([x]+1)}\Big|_{x\in(1,2)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

توجه داشته باشید که درمحاسبهٔ فوق از این موضوع غافل بوده‌ایم که برای هر $0<\delta<1$ و برای هر $x\in(1,1+\delta)$ داریم $[x]-1=0$. وقتی $x\to 1^+$، ناگزیریم از محدوده $(1,1+\delta)$ گذر کنیم که دراین صورت عامل $[x]-1$ صفر خواهد شد ومجاز بهٔ حذف آن از صورت و مخرج کسر نیستیم.

درواقع چون قلمرو $\frac{[x]^3-1}{[x]^2-1}$ شامل هیچ فاصله‌ای بهٔ صورت $(1,1+\delta)$ نیست، $\lim_{x\to 1^+}\frac{[x]^3-1}{[x]^2-1}$ وجود ندارد. ولی برای محاسبه $\lim_{x\to 1^-}\frac{[x]^3-1}{[x]^2-1}$ عامل $[x]-1$ را می‌توانید از صورت و مخرج حذف کنید (چرا؟).

مثال ۳ـ $\lim_{x\to 0^+}\frac{[2x^2+x+1]}{x}$ وجود ندارد.

حل: داریم

$$\frac{[2x^2+x+1]}{x}\Big|_{x\in(0,\frac{1}{2})}=\frac{1}{x}$$

چون $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$ وجود ندارد، بنابهٔقضیهٔ ۲ (الف)، $\lim_{x\to 0^+}\frac{[2x^2+x+1]}{x}$ نیز وجود ندارد.

مثال ۴ـ $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{10-x}{x^2+1}\right]=-1$

حل:

$$\left[\frac{10-x}{x^2+1}\right]\Big|_{x\in(10,\infty)}=-1$$

زیرا وقتی $x>10$، آن‌گاه $10-x<0$ و بنابراین $-1<\frac{10-x}{x^2+1}<0$. پس طبق قضیه ۳ (الف)،

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{10-x}{x^2+1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{10-x}{x^2+1}\right]\Big|_{x\in(10,\infty)}=\lim_{x\to\infty}(-1)=-1$$

روش تعویض متغییر و عدم کارآیی قاعده هوپیتال

قاعدهٔ هوپیتال یکی از قواعدی است که اغلب محاسبه‌حدرا آسان می‌کند. سهولت‌به‌کارگیری این قاعده‌باعث‌شده‌که‌بیشتر دانش‌آموزان و دانشجویان قبل‌از هرچیز به‌این قاعده دل ببندند و تمام همّ وغمشان این است که شرایط به‌کارگیری این قاعده برایشان فراهم شود. ولی همان گونه که می‌دانیم مثالهایی هم وجود دارند که باوجود فراهم بودن شرایط لازم، هرچند بارکه قاعده هوپیتال را به‌کار گیریم باز هم به‌صورتهای مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ برمی‌خوریم. گاهی اوقات وقتی ازقاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم باعبارت مشکل‌تر و طولانی‌تری مواجه می‌شویم که ناچار می‌شویم از ادامه آن روند صرفنظر کنیم. مثلاً قاعده هوپیتال برای محاسبه

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin(\sin x)}-\frac{1}{\sin(\sin(\sin x))}\right) \quad و$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{\log(x+1)}-\frac{x}{\log x}\right),\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

کارایی ندارد. اگرچه هرکدام از این حدها را می‌توان بهٔ صورتهای مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ درآورد ولی باتکرار انجام قاعده هوپیتال یا کار بیشتر گره می‌خورد و یا صورتهای مبهم‌تکرار می‌شوند. جهت پیشگیری از تکرارهای بی‌نتیجه قبل‌از

به‌کارگیری قاعده هوپیتال در محاسبه این گونه حدها بایستی ترفندهای دیگری به‌کار گرفت. دراین قسمت می‌خواهیم این حدها را محاسبه کنیم. روش حل برای مثال اول مبتنی برقضیه زیر است که آن را می‌توانیم روش تعویض متغیر نیز بنامیم.

قضیه ۴ـ فرض کنید در یک همسایگی محذوف a مانند I به‌ازای هر x از I داریم:

$$g(x) \neq b$$

اگر

$\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ و $\lim\limits_{y\to b} f(y)=c$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=c$

اثبات: چون $\lim\limits_{y\to b} f(y)=c$ ، برای هر $\varepsilon>\circ$ ، $\circ<\delta$ وجود دارد به‌طوری که

$$\circ<|y-b|<\delta \Rightarrow |f(x)-c|<\varepsilon \qquad (۲)$$

از طرفی چون $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ ، برای $\delta>\circ$ ، $\circ<\delta'$ وجود دارد به‌طوری که

$$\circ<|x-a|<\delta' \Rightarrow |g(x)-b|<\delta$$

اگر δ' راطوری‌انتخاب‌کنیم‌که $(a-\delta',a)\cup(a,a+\delta')\subseteq I$ ، آن‌گاه

$$\circ<|x-a|<\delta' \Rightarrow \circ<|g(x)-b|<\delta \qquad (۳)$$

اکنون باکمک رابطه‌های (۲) و (۳) خواهیم داشت

$$\circ<|x-a|<\delta' \Rightarrow |f(g(x))-c|<\varepsilon$$

یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=c$.

مثال ۵ـ $\lim\limits_{x\to\circ}\left(\dfrac{۱}{\sin x}-\dfrac{۱}{\sin(\sin x)}\right)=\circ$

حل: اگر فرض کنیم $f(y)=\dfrac{۱}{y}-\dfrac{۱}{\sin y}$ و $g(x)=\sin x$ ، آنگاه $\lim\limits_{x\to\circ} g(x)=\circ$ و تابع g دریک همسایگی محذوف ۰ مانند $\left(-\frac{\pi}{۲},\circ\right)\cup\left(\circ,\frac{\pi}{۲}\right)$ مخالف صفر است. همچنین بااستفاده از قاعدهٔ هوپیتال خواهیم داشت $\lim\limits_{y\to\circ} f(y)=\circ$. اکنون بنابهٔ قضیهٔ ۴، داریم $\lim\limits_{x\to\circ} f(g(x))=\circ$ ، یعنی

$$\lim_{x\to\circ}\left(\frac{۱}{\sin x}-\frac{۱}{\sin(\sin x)}\right)=\circ$$

بااستفاده از این روش، می‌توان نشان داد که

$$\lim_{x\to\circ}\left(\frac{۱}{\sin(\sin x)}-\frac{۱}{\sin(\sin(\sin x))}\right)=\lim_{x\to\circ}\left(\frac{۱}{\sin x}-\frac{۱}{\sin(\sin x)}\right)=\circ$$

بطورکلی، بااستقراء ریاضی می‌توان نشان داد که

$$\lim_{x\to\circ}\left(\frac{۱}{\sin^{(n)} x}-\frac{۱}{\sin^{(n+۱)} x}\right)=\circ$$

که درآن $\sin^{(n)}$ یعنی ترکیب sin به‌تعداد n بار باخودش.

تبصره ۳ـ قضیهٔ ۴ درواقع بیان می‌کند که درشرایط خاص $\lim\limits_{y\to b} f(y)=\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$ ، یعنی مثل اینست‌که از تعویض متغییر $y=g(x)$ استفاده کرده باشیم. مثلاً درمثال ۵، از تعویض متغییر $y=\sin x$ استفاده نموده‌ایم. به‌عبارت دیگر هرگاه هدف محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$ باشد، می‌توان تعویض متغییر $y=g(x)$ را انتخاب نمود بااین شرط که $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ موجود باشد و اگر $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ ، آن‌گاه دریک همسایگی مخذوف a، تابع g مقدار b را نگیرد مگراینکه f در b پیوسته باشد. دراین صورت برای محاسبه $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$ کافی است $\lim\limits_{y\to b} f(y)$ را محاسبه کنیم. وقتی روش تعویض متغییر را درمحاسبه $\lim\limits_{x\to\circ^+}\dfrac{e^{-۱/x}}{x}$ باتعویض متغییر $t=\dfrac{۱}{x}$ به‌کار بگیریم به‌جهت سهولت محاسبه و عدم کارآیی قاعده هوپیتال اهمیت این روش مشخص خواهد شد.

تبصره ۴ـ باید توجه داشت که روش تعویض متغیر بامفهوم هم ارزی که درکتاب جبر و آنالیز سال‌چهارم دبیرستان آمده است تفاوت دارد. اگر کتاب جبر و آنالیز سال‌چهارم دبیرستان (مثلاً سال ۶۳) را ببینید، مفهوم هم‌ارزی به‌این صورت تعریف شده

که اگر حد دو تابع f و g در x_0 صفر بوده و علاوه بر آن $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$، آن‌گاه دو تابع f و g را وقتی x به x_0 نزدیک می‌شود هم‌ارز می‌نامند. مثلاً sinx و x وقتی x به صفر نزدیک می‌شود هم ارز می‌باشند. بعد از این تعریف عبارت نادرست زیر عنوان شده است. «در محاسبهٔ حد یک عبارت در نقطهٔ x_0 می‌توان به‌جای هر تابع شرکت کننده در آن عبارت یک تابع هم‌ارز آن (وقتی x به x_0 به‌نزدیک می‌شود) را قرار داد».

این عبارت به دانش‌آموز اجازه می‌دهد در محاسبهٔ حد در صفر هرکجا sinx وجود داشته باشد به‌جای آن x را قرار دهد. مثلاً مطابق این قاعده، برای محاسبه $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ می‌توانیم به‌جای sinx مقدار x را قرار دهیم که جواب نادرست صفر به‌دست خواهد آمد. ولی بعد از سه‌بار که از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم متوجه می‌شویم که $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$.

در مثال ۵ نیز اگر به‌جای sinx در عبارت $\frac{1}{\sin(\sin x)}$ مقدار x را قرار دهیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin(\sin x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin x}\right)=0$$

که اگر چه جواب درست است ولی راه‌حل نادرست است و مجاز به انجام این عمل نیستیم، متأسفانه به علت بیان نادرست و غیرضروری مفهوم هم‌ارزی که مدتها در کتاب جبر و آنالیز به دانش‌آموزان آموخته می‌شد. با وجود اینکه این بیان نادرست بعداً اصلاح شد، هنوز هم مشاهده می‌شود برخی از دانش‌آموزان که وارد دانشگاه می‌شوند هم‌ارزی را در محاسبه حد به‌طور نادرست به‌کار می‌گیرند. مفهوم هم‌ارزی در هیچکدام از کتابهای پایهٔ دانشگاهی و حتی در دروس آنالیز نیز مطرح نشده است. البته در درس‌های پیشرفته‌تر مانند نظریهٔ تحلیلی اعداد و نظریهٔ جمعپذیری این مفهوم برای مقاصد خاصی عنوان شده و نقش مهمی را ایفا می‌کند. ولی در محاسبهٔ حد توابع در سطوح متوسطه نه تنها ضروری نیست بلکه چندان کارایی هم ندارد و دانش‌آموز را از یک راه‌حل منطقی و یک خلاقیت و ابتکار ساده باز می‌دارد و به‌جای یک عمل ساده ضرب و تقسیم دانش‌آموز را مجبور می‌کند تا شرایط یک قاعده و دستور را به ذهن بسپارد که آن هم بعد از انجام مستمر این عمل کم‌کم دستور قاعده فراموش شده و دانش‌آموز بی‌محابا در هر عبارت جای یک تابع را با هم ارز آن عوض می‌کند. پس بهتر است که قاعده هم‌ارزی را فراموش کنیم و با یک ضرب و تقسیم ساده ضمن انجام عمل هم ارزی دچار اشتباه نیز نشویم و مثلاً برای محاسبه $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\tan x}{x+\sin x}$ به‌جای اینکه بررسی کنیم که آیا می‌توانیم به‌جای sinx مقدار x را قرار دهیم یا نه، با تقسیم کردن صورت و مخرج کسر فوق بر x خواهیم داشت،

$$\frac{\sin^2 x-\tan x}{x+\sin x}=\frac{\frac{\sin x}{x}\sin x-\frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{x}}$$

و با توجه به این که $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ مقدار حد بسهولت به‌دست می‌آید، یعنی $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\tan x}{x+\sin x}=-\frac{1}{2}$

زمانی که در محاسبهٔ حد با صورتهای مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ مواجه می‌شویم الزامی نداریم که بی‌درنگ قاعدهٔ هوپیتال را به کار بگیریم. گاهی در یک عبارت که در محاسبه حد آن به صورتهای مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ برخورد می‌کنیم می‌توان عواملی را جدا کرد که محاسبهٔ حد آنها به‌راحتی انجام می‌گیرد. در این صورت کافی است حد مابقی عبارت را به‌دست آوریم که طبیعتاً شکل ساده‌تری خواهد داشت و به کارگیری قاعده هوپیتال نیز سهل‌تر خواهد بود. این ترفند را در مثال بعدی به کار می‌گیریم.

مثال ۶- $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ را به‌دست آورید.

حل: حد فوق را می‌توان به‌صورت $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}\sqrt{\sin x}}$ نوشت که حالت مبهم $\frac{0}{0}$ را دارد و می‌توانیم از قاعده هوپیتال استفاده کنیم. ولی بعد از استفاده از قاعده هوپیتال باز هم وضعیت به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ خواهد بود و این عمل مرتب تکرار می‌شود بدون اینکه به‌نتیجه مطلوب دست بیابیم. برای جلوگیری از این پدیده ابتدا به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\frac{1}{\sqrt{\sin x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}\sqrt{\sin x}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}+\sqrt{\sin x}}$$

$$= \frac{x-\sin x}{x\sqrt{\sin x}+\sqrt{x}\,\sin x}\times\frac{1/x^{3/2}}{1/x^{3/2}} = \frac{\frac{x-\sin x}{x^{3/2}}}{\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sin x}{x}}$$

حال چون حد مخرج کسر اخیر وقتی از سمت راست به‌صفر نزدیک می‌شود برابر با ۲ می‌باشد، کافی است $\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^{3/2}}$ را محاسبه کنیم. با دو بار استفاده از قاعده هوپیتال خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^{3/2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\frac{3}{2}x^{1/2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\frac{3}{4}x^{-1/2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{4}{3}\sqrt{x}\sin x=0$$

بنابراین $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$

اگر به‌اثبات قاعدهٔ هوپیتال درکتابها مراجعه نمائید مشاهده می‌کنید که تنها وسیلهٔ اثبات برای قاعده هوپیتال قضیهٔ مقدار میانگین است. از آنجائی که قضیهٔ مقدار میانگین کارایی‌های دیگری نیز دارد طبیعی است که به‌کارگیری مستقیم قضیهٔ مقدار میانگین درمحاسبه حد ممکن است مؤثرتر باشد. به ترفند بعدی درمثال زیر توجه کنید.

مثال ۷ـ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{\log(x+1)}-\frac{x}{\log x}\right)$ را محاسبه کنید.

حل: می‌توان با گرفتن مخرج مشترک، حد فوق را به‌صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ درآورد. ولی هربار که قاعدهٔ هوپیتال را به‌کار می‌بریم باز هم به‌حالت $\frac{\infty}{\infty}$ می‌رسیم و علاوه‌براین عبارتهای به‌دست آمده بعد از هربار که قاعده هوپیتال را بکار می‌گیریم طولانی‌تر خواهند بود.

اگر فرض کنیم $f(x)=\frac{x}{\log x}$ ، $x>2$ ، آنگاه بنابه قضیه مقدار میانگین، عدد C_x مابین x و $x+1$ وجود دارد که

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f'(C_x)$$

یعنی

$$\frac{x+1}{\log(x+1)}-\frac{x}{\log x}=\frac{\log C_x-1}{\log^2 C_x}$$

ولی از آنجایی که $x<C_x<x+1$ ، بدیهی است که

$$\frac{\log x-1}{\log^2(x+1)}<\frac{\log C_x-1}{\log^2 C_x}<\frac{\log(x+1)-1}{\log^2 x}.$$

با استفاده از قاعده هوپیتال، به‌راحتی نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x-1}{\log^2(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)-1}{\log^2 x}=0$$

بنابراین با استفاده از قضیه فشردگی، $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{\log(x+1)}-\frac{x}{\log x}\right)=0$

با استفاده از مثال ۷، می‌توان نشان داد که

مثال ۸ـ $\lim_{x\to\infty}\log x\left(\frac{x+1}{\log(x+1)}-\frac{x}{\log x}\right)=1$

درخاتمه خاطرنشان می‌کنیم که از قضیه فشردگی درمحاسبه اینگونه حدها هیچگاه نباید غافل شد. بعضی مواقع مثلاً درمحاسبه $\lim\frac{\sin x}{x}$ فقط این قضیه است که مشکل را آسان می‌نماید. درحل مثال ۷، بعداز به‌کار گرفتن قضیهٔ مقدار میانگین نیز از این قضیه استفاده کرده‌ایم. درپایان راه‌حل دیگری برای مثال ۷ ارائه می‌دهیم که اهمیت قضیه افشردگی را بیان می‌نماید.

راه‌حل دوم مثال ۷: با استفاده از مشتق، به‌سادگی نتیجه می‌شود که تابع $f(x)=\frac{x}{\log x}$ صعودی است. پس

$$\frac{x+1}{\log(x+1)}-\frac{x}{\log x}\ge 0$$

از طرفی $\frac{x+1}{\log(x+1)}\le\frac{x+1}{\log x}$ و به‌این ترتیب

$$\frac{x+1}{\log(x+1)}-\frac{x}{\log x}\le\frac{x+1}{\log x}-\frac{x}{\log x}=\frac{1}{\log x}$$

بنابراین $0\le\frac{x+1}{\log(x+1)}-\frac{x}{\log x}\le\frac{1}{\log x}$.

از آنجائیکه $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\log x}=0$ ، بنابه قضیه فشردگی

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{\log(x+1)}-\frac{x}{\log x}\right)=0$$

تعمق در مسائل پیش پا افتاده

امسال نیز در تعطیلات همان تزئینات قدیمی، همان فیلمهای تکراری تلویزیون و همان گفتگوهای همیشگی با خویشاوندان خواهد بود. در تعطیلات امسال چه کار جدیدی می خواهید انجام دهید؟ آیا علاقمندید شاخه‌ای جدید از علوم را کشف نمائید؟

اگر فکر می کنید که برای این که به یک دستگاه شتاب‌دهندهٔ ذرات یا یک تلسکوپ نیازمندید، توصیه می شود که بیشتر تأمل نمائید چون بعضی از بزرگترین اکتشافات ناشی از تعمق در سؤالات بزرگ کیهانی نبوده‌اند بلکه ناشی از تفکر دربارهٔ یک مسئله پیش پا افتاده بوده است که اکثر مردم به آن توجهی نمی کنند.

بایستی سعی کنید با اینگونه مسائل کوچک مواجه شوید چون اگر در تعطیلات نمی توانید این کار را بکنید پس چه زمانی این کار را خواهید کرد.

در اینجا توجه شما را به این نکته جلب می نمائیم که بین شما و تحول غیرمنتظره در علم یک مانع بزرگ وجود دارد و آن این ایده و تفکر حیران‌کننده می باشد که فقط سؤالات بزرگ منجر به کشفیّات بزرگ می گردند. علیرغم درسهای تاریخ، سالیان سال است که افراد به این نتیجه رسیده‌اند که برای دانشمند شدن بایستی وقت خود را روی مسائل کوچک نیز صرف نمایند.

حتیٰ پیتر مداوار[1] که جایزه نوبل ایمونولوژی را دریافت نموده است در کتاب زیبای «توصیه به دانشمندان جوان» اظهار می دارد: با قاطعیت و اطمینان می توان گفت که هر دانشمندی (در هر سنی) که می خواهد کشفیات بزرگی انجام دهد باید هر مسئلهٔ مهمی را مورد مطالعه قرار دهد.

تقریباً همه دانشمندان می دانند که می توان شانس دریافت جایزه نوبل را با ورود به یک مؤسسهٔ بین‌المللی و کار بر روی مسائل کیهانی و یا درمان سرطان، افزایش داد ولی نباید این مطلب را از ذهن دور داشت که تعداد زیادی از جوایز نوبل به مطالعاتی که به صورت تفننی بر روی مسائل مبهم انجام شده اعطا گردیده است.

مشهورترین مورد از این مسائل همانا افتادن سیب از درخت است که باعث کشف قانون جاذبه نیوتن گردید. نیوتن خودش موضوع را با خوشحالی همانند تعریف یک دانش‌آموز برای مادرش بیان می دارد و می گوید: همان نیروئی که سیب را به سمت زمین می کشاند ممکن است ماه را نیز به سمت زمین بکشاند. بقیه قضیه شکفتن یک انقلاب علمی بود که تا آن زمان سابقه نداشت.

کسب شهرت از راه بازی

البته قابل ذکر است که مورخین با دید ناباورانه‌ای به قدرت مسائل کوچک و پیش پا افتاده نگاه می کنند. ریچارد وستفال[2] استاد دانشگاه ایندیانا که در زمینه تاریخ علم و بیوگرافی نیوتن تبحر دارد، می گوید: نیوتن در بیان این داستان سعی دارد با تفکری زیرکانه قانون جاذبه زمین را به صورت یک مطلب عامه فهم درآورد.

طبق نظر آقای وستفال یک ایدهٔ روشن و واضح نمی تواند باعث شکل‌دهی یک موضوع علمی شود. آیا واقعاً این طور است؟ نظر شما راجع به یک وقت گذرانی زشت چیست؟ در ۱۶۵۴ آقای دی می یر[3] که یکی از درباریان بود از دوست دانشمند خود پاسکال که یکی از فیلسوفان و ریاضیدانان فرانسه بود، درخواست راهنمائی کوچکی در مورد شرط‌بندی نمود. او روی ریختن تاس شرط‌بندی می نمود ولی در مورد حالاتی که احتمال

مرجع:
New scientist
December 1996

نویسنده:
Robert Matthews
نویسندهٔ علمی
نشریه ساندی تلگراف

مترجمین:
مهناز پاک‌خصال (دبیر ریاضی استان تهران)
و عبدا... مصطفائی

داشت بوجود آید، اطمینان نداشت. چند قاعدهٔ سرانگشتی وجود داشت ولی دی‌می‌یر اعتماد کاملی به آنها نداشت. آیا پاسکال هیچگونه ایدهٔ واضحی در این باره داشت؟ بله او داشت و شخصی را می‌شناخت که اطلاعات بیشتری در این باره داشته است و او کسی نبود جز قاضی و ریاضیدان مشهور پی‌یر فرما[4]. بدین صورت بود که پاسکال و فرما بنیان نظریهٔ احتمالات را پایه‌ریزی نمودند.

مانند برخورد همیشگی که با مسائل کوچک ریاضی می‌شد، به نظر می‌رسید که این سؤال ساده نیز چنین نباشد. ولی در همین‌جا نیز یکی از سخت‌ترین حالات، پایان یک بازی نیمه‌کارهٔ تاس‌ریزی بود. در این بازی دو رقیب تلاش می‌کنند تا به یک امتیاز خاص برسند ولی گاهی قبل از رسیدن به آن امتیاز مجبور می‌شوند که به بازی خاتمه دهند. حال آنان بایستی به چه صورت مبلغ جایزه را بین خود تقسیم می‌نمودند. برای حل این مشکل پاسکال و فرما باید دربارهٔ تمامی امتیازاتی که ممکن است بازی در روی آن امتیازها متوقف شود فکر کنند و برای این کار آنها باید بر روی تمامی روشهای سیستماتیکی که حالات مختلف را شمارش می‌کرد، کار کنند و نتیجه این کارها امروزه ترکیبیات[5] نامیده می‌شود.

با یک چنین منشاء ضعیفی، نظریهٔ احتمالات باعث تقویت حوزه‌های وسیعی از علوم گردید یعنی از نظریهٔ کوانتومی گرفته تا رسم نتایج آزمایشات کاربرد دارد. ترکیبیات بنیان و اساس مکانیک آماری و فیزیک حالت جامد را تشکیل داد. در حال حاضر بیوشیمیدانها نیز از این روش استفاده می‌کنند. در فرآیندی که شیمی ترکیبیاتی[6] خوانده می‌شود میلیونها ترکیب از مواد مختلف ساخته می‌شوند تا داروهای جدید کشف گردند.

در اینجا به دوران پاسکال باز می‌گردیم در آن زمان به نظر می‌رسید که بهترین مغزها نیز از مواجه شدن با مطالبی که احمقانه و ساده به نظر می‌رسیدند لذت می‌بردند. هیچ موردی احمقانه‌تر از موردی نیست که در ۱۶۹۶ برای یوهان برنولی[7] پیش آمد: یک سیم را باید به چه شکلی درآورد تا یک مهره در حداقل زمان ممکن از یک نقطه به نقطهٔ دیگر لیز بخورد.

یکی از جوابهای سریع می‌تواند این باشد که اصلاً نگران نباشید چون جواب یک خط راست است. شاید این جواب واضح باشد اما جواب غلط است مگر اینکه دو نقطه در یک راستای عمودی قرار گرفته باشند اما اگر این دو نقطه در راستاهای مختلفی قرار داشته باشند شما نمی‌توانید از حداکثر جاذبه زمین جهت به حداکثر رساندن سرعت مهره استفاده کنید و بنابراین زمان سرازیری از یک نقطه به نقطه دیگر کاهش خواهد یافت.

مسئله‌ای که توسط برنولی آغاز شد توسط دیگر ریاضیدانان مشهور اروپا از قبیل نیوتن و گاتفرید لایبنیتز[8] پیگیری شد و آن را از حالت یک مسئله کم‌اهمیت خارج ساخت. برای شروع کار بایستی از روش نوظهوری برای انتگرال‌گیری سرعت استفاده نمود و باید توجه داشت که این سرعت با پایین آمدن مهره در طول سیم همواره در حال تغییر است. سؤال برنولی یک موضوع جدیدی را نیز بوجود آورد و آن این بود که نتیجه این انتگرال‌گیری که همان زمان حرکت مهره بود نیز باید تاحدامکان کوتاه می‌شد.

از آنجائی که نیوتن یک نابغه بود پس از یک روز کار سخت در ضرابخانه سلطنتی انگلستان[9] توانست مسئله را حل

کند. این سیم باید به صورت یک منحنی سیکلوئید خم گردد. شکل گیری این منحنی را می توان با در نظر گرفتن یک نقطه روی محیط چرخ دوچرخه و حرکت چرخ تصور نمود. در حال حاضر کسی به این پاسخ توجهی ندارد ولی تمام کسانی که در زمینه فیزیک مدرن نظری کار می کنند باید روش حل اینگونه مسائل را بدانند. بدین صورت بود که سؤال احمقانه برنولی بذری را کاشت که ثمرهٔ آن شکوفائی و پیشرفت یکی از مهمترین روشها در فیزیک مدرن گشت: حساب تغییرات[10].

مسائل پیش پا افتاده

قوانین حرکت، مغناطیس، الکتریسیته و حتی معادله موج مشهور شرودینگر در مکانیک کوانتوم نیز از حل یک انتگرال شبیه انتگرال بازی مهرهٔ برنولی حاصل می شود. این معادلات اساسی که لازمهٔ تفحص و کشف رازهای هر یک از محدوده های وسیع فیزیک می باشد، تمامی از حساب تغییرات به دست آمده اند.

در قرن هجدهم این روشها توسط یک ریاضیدان سوئیسی بنام لئونارد اویلر[11] به صورت مدرن درآمد. او یک مبارزه تمام وقت را برای تبدیل مسائل بی ارزش به مسائل قابل فهم انجام داد. یکی از این موارد کلاسیک در ۱۷۳۶ اتفاق افتاد چون در آن زمان اویلر راه حل یک مسئلهٔ پیش پا افتاده ولی وقت گیر را منتشر نمود. صورت مسئله این بود که آیا امکان دارد که به دور شهر کونیگسبرگ[12] سفر نمود ولی از روی هر یک از پلهای هفت گانه شهر فقط و فقط یکبار عبور کرد؟ آنالیز ۱۲ صفحه ای اویلر برای اهالی شهر خبر بدی بود چون آنان نمی توانستند سفر خود را بدون دوبار عبور کردن از یک پل با تمام برسانند ولی این تحقیق خبر خوبی برای ما بوده است چون اویلر تحقیق خود را تعمیم داد تا بتواند برای هر تعداد پل بر روی هر تعداد رودخانه جواب را به دست آورد. این موضوع باعث کمک عمده ای به دو شاخه وسیع از ریاضیات کاربردی گردید: نظریهٔ گراف و توپولوژی.

نظریهٔ گراف همانا مطالعهٔ شبکه اتصال مجموعه ای از نقاط توسط خطوط می باشد. زمانی اهمیّت این موضوع مشخص می شود که بدانیم کاربرد این نظریه از طراحی مدارات میکروپروسسور گرفته تا ارسال نمایندگان یک شرکت برای فروش فرش را شامل می شود چون همه اینها نوع خاصی از شبکه می باشند. این موارد که مدارات اویلری نامیده می شوند دربارهٔ شبکه هائی است که از هر نقطه فقط یکبار عبور می کنند و البته در ادامه ارتباط تکنیکی آنان نیز مورد مطالعه قرار می گیرد. امروزه از همین مدارات برای حل مسائل بهینه سازی اقتصادی استفاده می شود مثل یافتن ارزانترین مسیر برای انجام مکالمات بین المللی.

مسئله پلهای کونیگسبرگ به خلق توپولوژی نیز کمک نمود. این علم نیز دربارهٔ مطالعهٔ اشکال از دید ریاضی صحبت می کند. هر چند که برای مدت مدیدی تصور می شد که این علم زیبا و بدون کاربرد است ولی امروزه توپولوژی افق روشنی برای مسائل مهم ارائه نموده است یعنی از نحوهٔ استخراج اطلاعات ژنتیکی از DNA گرفته تا پرسش فیزیکدانان در مورد یک نظریه واحد برای نیروها و ذرات کوچکتر از اتم را دربرمی گیرد. واضح است که این موارد با سفر بر روی چند پل، بسیار تفاوت دارند. در اینجا به یاد یک گفته مشهور می افتم که: مهندسین پیشرفت خود را مرهون فیزیکدانان می باشند و فیزیکدانان پیشرفت خود را مرهون ریاضیدانان هستند.

اویلر زنده نیست تا نتایج جالب کارهای خود را ببیند ولی ثمردهی مسائل پیش پا افتاده نیز همیشه چند قرن طول نمی کشد. در سال ۱۹۲۱ چاندراسکارا رامان (فیزیکدان هندی)[13] در حال بازگشت با کشتی از یک کنفرانس فیزیک بود که به فکر علت آبی بودن رنگ آب دریا افتاد. البته همه می دانستند که چرا دریا آبی است چون چندین سال قبل لُرد رایلی[14] توضیح داده بود که این موضوع ناشی از بازتاب رنگ آبی آسمان است. در اینجا بود که رامان از درون یک دستگاه پلاریزه کننده به دریا نگریست تا نورهای بازتاب شده از دریا را به صورت تفکیک شده ببیند. نتیجه آن بود که او دریافت که این رنگ احتمالاً رنگ واقعی دریا می باشد و این با توضیح سادهٔ رایلی تفاوت داشت.

او در پی یافتن دلایل دیگری بود که به این فکر افتاد که شاید مولکولهای آب باعث تفرق نور می شوند تا رنگ آبی بازتاب نماید و دیگر رنگها مستقیماً وارد آب می شوند و بازتابی ندارند. زمانی که او به هند بازگشت این ایدهٔ خود را مورد آزمایش قرار داد و جایزه نوبل ۱۹۳۰ را بخود اختصاص داد. حاصل تلاشهای او امروزه به طیف سنجی رامان شهرت دارد که کاربرد وسیعی در آنالیز شیمیائی مایعات و جامدات دارد.

توجه فیزیکدان امریکائی ریچارد فینمن[15] در یک کافه تریا در دانشگاه کرنل نسبت به بشقابی که در هوا چرخ می زد منجر به این شد که وی پا در راهی نهد تا جایزه نوبل را اخذ کند. او در حالی که فریفتهٔ لرزش های سریع بشقاب شده بود محاسبه کرد که لرزش های کوچک

بشقاب دو برابر سرعت چرخش آن می‌باشد.

ریچارد از این کشف خود مسرور گشت و به طرف همکار و دوست خود هانس بت[16] دوید تا این مطلب را بازگو نماید ولی او معتقد بود که این مطلب پیش پا افتاده و کم ارزش است. همین مطلب باعث شد که فینمن گردش الکترونها را بررسی نموده و روی الکترودینامیک کوانتومی مطالعه نماید تا بالاخره جایزه نوبل رشته فیزیک سال ۱۹۶۵ را بخود اختصاص دهد.

تا به امروز هیچ دلیلی بر ردّ توانائی سؤالات کوچک برای تحولات عظیم علمی ارائه نشده است. به عنوان مثالی دیگر می‌توان به این مورد اشاره کرد که روزی به ذهن لوئیس ریچاردسون[17] (فیزیکدان) رسید که «طول ساحل بریتانیا چقدر است» و اکنون با گذشت ۷۰ سال از آن زمان هنوز نیز بر روی این مطلب تحقیق می‌شود. ریچاردسون متوجه شده بود که کتب مختلف برای این سؤال واضح، اعداد مختلفی را بیان نموده‌اند. بررسیهای بیشتر او نشان داد که طول ساحل به مقیاس نقشه بستگی دارد یعنی اگر نقشه دقیقتر باشد، بالا و پایین رفتگیهای بیشتری را نشان داده و در نتیجه طول ساحل بیشتر می‌شود ولی این موضوعی بود که همه می‌دانستند. کار مهم ریچاردسون آن بود که فهمید بین مقیاس نقشه و طول ساحل رابطه‌ای وجود دارد بدین معنی که با یک عدد می‌توان مفهوم غیرقابل تشریح «ناهمواری»[18] نقشه را معین نمود.

فراکتالهای ناهمگون

امروزه کارهای ریچاردسون به عنوان اولین پایه‌های «فراکتالها»[19] به شمار می‌رود. در اشکال فراکتالی خاصیت «خود-متشابه بودن» وجود دارد یعنی بخشهائی از شکل با کل شکل متشابه است. از این رو فراکتالها یکی از موضوعات تحقیقی در ریاضیات می‌باشند و خواص ناهمگون آنها باعث شده است که از فشرده‌سازی اطلاعات گرفته تا تحلیل اسکن‌های مغزی و مطالعه سنگهای حاوی طلا به کار گرفته شود.

حال با توجه به مثالهای تهییج کننده فوق شما چگونه تحول علمی خود را رقم خواهید زد؟ تاریخ نشان داده است که شما فقط به تلویزیون نگاه خواهید کرد و تفریح خواهید نمود ولی در همین مورد باید گفت که یک بازی باعث شد که ژان نویمن[20] که یک ریاضیدان بود، نظریه بازی را ابداع نماید که عبارت بود از ریاضیات به کار رفته در استراتژیهای رقابتی. این نظریه امروزه به نحو وسیعی توسط اقتصاددانان و رفتارشناسان حیوانات[21] مورد استفاده قرار می‌گیرد.

حتیٰ ساختن کاردستی‌های ساده نیز شاید باعث ایجاد جرقه‌ای در ذهن شما شود. مثلاً زمانیکه اویلر در حال طراحی چشمه‌ای برای فردریک دوم پادشاه پروس[22] بود، برای زیباسازی آن بر روی اصول اولیه‌ای کار می‌کرد که نتیجه آن کشف دینامیک سیالات بود.

شما حتی می‌توانید در حالیکه تمام روز را در رختخواب می‌گذرانید، چیز جدیدی را متوجه شوید چون مثلاً رنه دکارت که در چندین علم تبحر داشت، در یک چنین وضعیتی بر روی نحوهٔ بیان موقعیت یک حشره (درفضا) توسط اعداد کار کرد و نتیجه آن نیز مختصات کارتزین بود که بالواقع یکی از بزرگترین ایده‌های تاریخ ریاضیات بشمار می‌رود.

این درسها ساده به نظر می‌رسند. برخلاف آنچه که مریدان مقلدان علمی می خواهند که ما معتقد باشیم، به نظر نمی‌رسد که طبیعت بداند که معنی پیش پا افتاده بودن مطالب چیست. چون از تولد جهان گرفته تا تکانهای یک بشقاب گردان، همگی تجلی دیگری از قوانین طبیعت می‌باشند. مشکل فقط آنجاست که ما قادر نیستیم که فرق بین قوانین کیهانی و پیش پا افتاده را بیان کنیم مگر آنکه طی یک سفر تاریخی به آن کافه تریا رفته یا با یک کشیش سفر نمائیم.

حال پس از اتمام شام روی مبل راحتی نشسته و به مسائل پیش پا افتاده فکر کنید شاید شما نیز دانشمند و مخترع گردید.

زیرنویس‌ها:

1- Peter Medawar
2- West fall
3- De Me′re′
4- Fermat
5- Combinatorics
6- Combinatorial chemistry
7- Johann Bernoli
8- Gottfried Leibniz
9- Royal Mint
10- Calculus of variation
11- L. Euler
12- Konigsberg
13- Chandraskhara Raman
14- Lord Rayleigh
15- Feynman
16- Hanse Bethe
17- L. Richardson
18- roughness
19- Fractals
20- Neumann
21- Animal Behaviorists
22- Great of Prussia

عکس قضیهٔ فیثاغورس

کتابی تحت عنوان «قضیه فیثاغورس» گرچه عنوانی غیرمعمولی است، ولی معروف می‌باشد که در آن ۲۵۷ راه‌حل مختلف به وسیلهٔ E.S.Loomis (سالهای ۱۹۶۸ و ۱۹۲۷) جمع‌آوری و تنظیم شده است. جالبتر از آن نوشتهٔ بازنگری شده‌ای از آن به وسیله Christoffer در سال ۱۹۲۸ می‌باشد. اما در این تحقیق کوتاه، ممکن نیست بتوان حق مطلب را در مورد جزئی از این تحقیق عالی که به خاطر عشق به ریاضی صورت گرفته است ادا نمود.

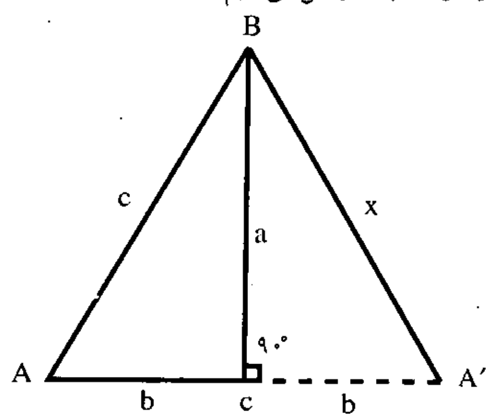
امّا عکس این قضیه همچون یک رابطهٔ کم‌اهمیت در ریاضی مهجور و مورد غفلت واقع شده است. در این مقاله ما سعی داریم که توجه شما را به این خلاء جلب کنیم. بیان عکس قضیه فیثاغورس به صورت زیر است.

عکس قضیه فیثاغورس- اگر a، b و c نمایش طول اضلاع یک مثلث باشند به طوری که داشته باشیم

$$a^{2}+b^{2}=c^{2} \qquad (۱)$$

آنگاه زاویهٔ C قائمه است.

راه حل اول: اثبات اقلیدس- مثلث ABC را در نظر گرفته از نقطهٔ C بر CB عمودی اخراج کرده آن را به اندازهٔ b ادامه می‌دهیم تا نقطهٔ A′ به دست آید از A′ به B وصل می‌کنیم.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCA′، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم

$$X^{2}=a^{2}+b^{2} \qquad (۲)$$

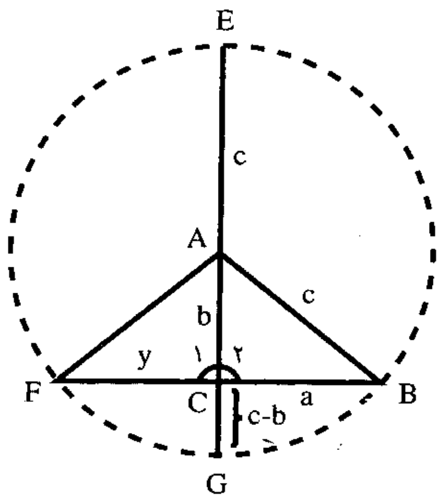
از مقایسهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $x^{2}=c^{2}$ و چون x و c مثبت هستند پس x=c، لذا دو مثلث ABC و BCA′ به حالت سه ضلع مساویند در نتیجه مثلث ABC در رأس C قائمه است.

راه حل دوم: مثلث ABC طوری مفروض است که داریم $c^{2}=b^{2}+a^{2}$. می‌خواهیم ثابت کنیم: $\hat{C}=90^\circ$

برهان- به مرکز A و شعاع c دایره‌ای رسم می‌کنیم (شکل زیر) ضلع BC را از طرف C ادامه می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ F قطع کند CF=y می‌گیریم. سپس AC را نیز از دو طرف ادامه می‌دهیم تا دایره را در نقاط E و G قطع کند. با توجه به شکل و مفروضات داریم:

$$CG = c-b \qquad (۱)$$

$$CE = c+b \qquad (۲)$$



چون از نقطهٔ C داخل دایره دو وتر FB و EG رسم شده است پس داریم:

$$CE\times CG=CB\times CF$$

که با جایگزینی مقادیر CG و CE از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$(c+b)(c-b)=ay$$

یا

$$c^{2}-b^{2}=ay$$

که با توجه به فرض داده شده در مثلث که داریم:

$$c^{2}-b^{2}=a^{2}$$

و مقایسه این دو تساوی نتیجه خواهد شد

$$ay=a^{2}$$

که چون a مثبت است:

$$y=a$$

یعنی دو مثلث ABC و AFC به حالت سه ضلع مساوی می‌شوند در نتیجه خواهیم داشت $\hat{C}_1=\hat{C}_2$ و چون این دو زاویه مکمل یکدیگرند لذا هر کدام برابر ۹۰° می‌شود یعنی مثلث ABC در رأس C قائمه

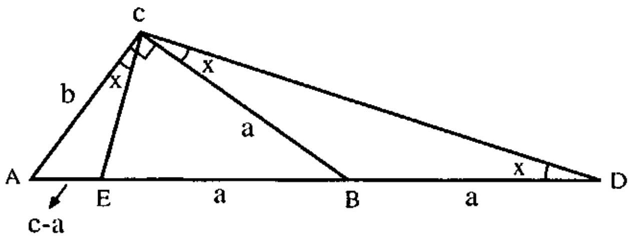
ترجمه و تنظیم : میرزا جلیلی

است .

راه حل سوم: اثبات مستقیم و بدون استفاده از خود قضیه

در مثلث ABC طبق فرض داریم $c^2 = a^2 + b^2$. می‌خواهیم ثابت کنیم $\hat{C} = 90^\circ$

برهان ـ مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و ضلع AB را به اندازه a از نقطهٔ B امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ D به دست آید از D به C وصل می‌کنیم . همچنین BE=a را روی BA جدا کرده و پاره‌خط CE را رسم می‌کنیم . دو مثلث ACD و ACE را در نظر می‌گیریم .



زاویه A در هر دو مثلث مشترک است و طبق فرض داریم $c^2 - a^2 = b^2$ یا $(c-a)(c+a) = b^2$ و اگر این تساوی را به صورت یک تناسب بنویسیم می‌شود: $\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$ و یا با توجه به شکل بالا $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AE}$ ، در نتیجه دو مثلث به حالت دو ضلع متناسب و زاویه بین مساوی متشابه می‌شوند در نتیجه $A\hat{C}E = A\hat{D}C = X$. از طرفی در مثلث ECD میانه وارد بر ضلع ED برابر نصف ED است لذا متوازی‌الاضلاعی که با رئوس C ، E و D ساخته می‌شود به علت تساوی دو قطر مستطیل خواهد بود ، پس داریم :

$$E\hat{C}D = E\hat{C}B + x = 90^\circ$$

یا

$$E\hat{C}B + E\hat{C}A = 90^\circ$$

یعنی مثلث ABC در رأس C قائمه است .

راه حل چهارم[2]: مثلث ABC به قسمی داده شده است که داریم :

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (1)$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که $\hat{C} = 90^\circ$

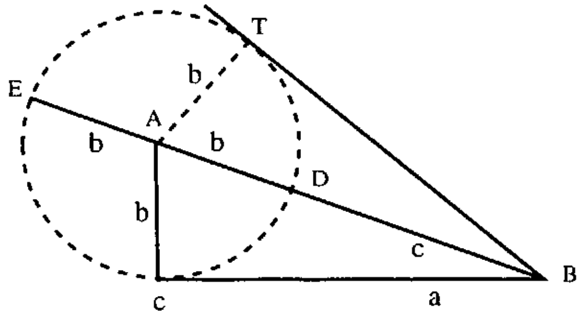
برهان ـ به مرکز A و شعاع b دایره‌ای رسم می‌کنیم . BA و امتداد آن دایره را در نقاط D و E قطع می‌کند . از B مماس BT را بر دایره رسم کرده از A به T وصل می‌کنیم . طبق قضیه مماس و قاطع داریم :

$$BD.BE = BT^2 \qquad (2)$$

با توجه به شکل : BD=BA-DA و BE=BA+AE

و با توجه به اینکه BA=c و DA=AE=AT=b و جایگزین کردن این مقادیر در (۲) خواهیم داشت :

$$(BA - DA)(BA + AE) = BT^2$$
$$(c-b)(c+b) = BT^2$$
$$c^2 - b^2 = BT^2$$



اگر به جای c^2 مقدارش را از (۱) جایگزین کنیم می‌شود :

$$a^2 + b^2 - b^2 = BT^2$$
$$BT^2 = a^2 \Rightarrow BT = a$$

لذا دو مثلث ATB و ACB به حالت سه ضلع مساوی می‌شوند و داریم :

$$\hat{C} = \hat{T} = 90^\circ$$

زیرنویس‌ها :

۱ـ در هندسه (۱) دبیرستان نظام‌جدید مثلث BCA' را جدا رسم کرده است یعنی روی ضلع یک زاویه قائمه b و c را جدا کرده و مثلث را ساخته است .

۲ـ حل از گروه ریاضی

منابع :

1-christofferson.H.C.THe Pythagorean proposition (Mathematics Teacher 21 October 1928.

2- Loomis, Elisha Scott. The Pythagorean Proposition 1927. Reprint Classics in Mathematics Education series, washington. D.C. of N. C. T. M.

سی و هشتمین المپیاد بین المللی ریاضی

یحیی تابش

دانشگاه صنعتی شریف

۱۹۹۷

ماردل پلاتا. آرژانتین

۱۸ تا ۳۱ جولای ۱۹۹۷

سی و هشتمین المپیاد بین المللی ریاضی از ۱۸ تا ۳۱ جولای ۱۹۹۷ در ماردل پلاتا (آرژانتین) برگزار شد. در این المپیاد ۸۲ کشور با تیمهای حداکثر ۶ نفره شرکت داشتند.

تیم اعزامی جمهوری اسلامی ایران موفق به کسب ۴ مدال طلا و ۲ مدال نقره به قرار زیر گردید:

۱ـ ایمان افتخاری،	۴۲ امتیاز	مدال طلا
۲ـ هادی سلماسیان،	۳۷ امتیاز	مدال طلا
۳ـ محسن بهرامگیری،	۳۶ امتیاز	مدال طلا
۴ـ محسن بیاتی،	۳۵ امتیاز	مدال طلا
۵ـ پوریا رضائیان،	۳۴ امتیاز	مدال نقره
۶ـ سید رضا مقدسی،	۳۳ امتیاز	مدال نقره

رده بندی

رده بندی غیر رسمی تیمهای برتر به قرار زیر است:

۱ـ چین	۲۲۳ امتیاز
۲ـ مجارستان	۲۱۹ امتیاز
۳ـ ایران	۲۱۷ امتیاز
۴ـ آمریکا و روسیه	۲۰۲ امتیاز
۵ـ اوکراین	۱۹۲ امتیاز
۶ـ بلغارستان و رومانی	۱۹۱ امتیاز
۷ـ استرالیا	۱۸۷ امتیاز
۸ـ ویتنام	۱۸۳ امتیاز

در حاشیهٔ سی و هشتمین المپیاد بین المللی ریاضی

۱. از لحاظ تعداد و نوع مدالها و رتبهٔ تیمی، نتایج سی و هشتمین المپیاد بهترین نتایجی بود که تاکنون تیم‌های اعزامی جمهوری اسلامی ایران کسب کرده‌اند.

۲. در المپیاد سی و هشتم فقط ۴ نفر امتیاز کامل کسب کرده‌اند: ایمان افتخاری از کشور ما و دانش‌آموزانی از

کشورهای رومانی، آمریکا و ویتنام. در مراسم اختتامیه المپیاد اولین مدال طلا به‌ایمان افتخاری اهدا شد.

۳. نمرات کسب شده توسط اعضای تیم از همبستگی خوبی برخوردار بود که نشانگر کار گروهی آنان در اردوی آمادگی بوده است.

۴. برای اولین بار ۴ مسأله پیشنهادی از طرف کمیته ملی المپیاد ریاضی برای سی و هشتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی ارسال شد. یکی از این مسائل به مجموعه ارائه شده به ژوری بین‌المللی راه پیدا کرد و همان مسأله به‌عنوان یکی از شش مسأله المپیاد توسط ژوری برگزیده شد. این مسأله مهمترین مسأله در مسائل ضمیمه است.

مار دل پلاتا ۷۶/۵/۲
(روز اول)
۴/۵ ساعت

۱) در صفحه مختصات نقاط با مختصات صحیح رئوس مربع‌های به‌مساحت واحد می‌باشند. این مربع‌ها به‌طور یک در میان سیاه و سفید شده‌اند (مانند صفحه شطرنج).

بازاء هر زوج از اعداد صحیح مثبت m و n مثلث قائم‌الزاویه‌ای درنظر می‌گیریم که رئوس آن دارای مختصات صحیح بوده و اضلاع زاویه قائمه آن به‌طول m و n در امتداد اضلاع مربع‌های صفحه قرار گرفته‌اند.

فرض کنیم S_1 مساحت کل قسمت‌های سیاه این مثلث و S_2 مساحت کل قسمت‌های سفید آن باشند. قرار می‌دهیم:

$$f(m, n) = |S_1 - S_2|$$

الف) $f(m,n)$ را برای وقتی که m و n باهم زوج یا باهم فرد باشند حساب کنید.

ب) ثابت کنید بازاء هر m و n،

$$f(m, n) \le \frac{1}{2}\max\{m, n\}$$

ج) ثابت کنید که هیچ عدد ثابتی مانند C وجود ندارد که بازاء هر m و n، $f(m, n) < C$.

۲) در مثلث ABC زاویه A کوچکترین زاویه مثلث است. نقاط B و C محیط دایره محیطی مثلث را به دو کمان تقسیم می‌کند. فرض کنیم U یک نقطه از محیط دایره درون آن کمان BC باشد که شامل A نیست. عمودمنصف‌های AB و AC خط AU را به ترتیب در V و W قطع می‌کنند. خطوط BV و CW یکدیگر را در T قطع می‌کنند. نشان دهید:

$$AU = TB + TC$$

۳) فرض کنیم $x_1, x_2, \dots, x_n$ اعداد حقیقی باشند که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$$

$$|x_i| \le \frac{n+1}{2} \qquad \text{،} \; i = 1, 2, \dots, n \; \text{بازاء هر}$$

نشان دهید یک جایگشت $y_1, y_2, \dots, y_n$ از $x_1, x_2, \dots, x_n$ وجود دارد که:

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \le \frac{n+1}{2}$$

مار دل پلاتا ۷۶/۵/۳
(روز دوم)
۴/۵ ساعت

۴) یک ماتریس $n \times n$ که درایه‌های آن از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ انتخاب شده‌اند را ماتریس نقره‌ای نامند اگر بازاء هر $i = 1, 2, \dots, n$، سطر iام و ستون iام روی هم اعضاء S را شامل شوند. نشان دهید:

الف) هیچ ماتریس نقره‌ای برای $n = 1997$ وجود ندارد.

ب) ماتریس‌های نقره‌ای بازاء تعداد نامتناهی از n وجود دارد.

۵) همه زوج‌های (a, b) از اعداد صحیح که $a \ge 1$ و $b \ge 1$ را پیدا کنید که درمعادله زیر صدق کند.

$$a^{b^2} = b^a$$

۶) بازاء هر عدد صحیح مثبت n فرض کنیم $f(n)$ تعداد نمایش‌های n به‌صورت حاصلجمع توانهای صحیح و نامنفی از عدد ۲ باشد.

نمایشهائی که فقط از نظر ترتیب نوشتن اعداد متفاوت هستند یکی به‌حساب می‌آیند. مثلاً $f(4) = 4$ زیرا که عدد ۴ را به‌چهار شکل به‌صورت مجموع توانهای ۲ می‌توان نوشت یعنی ۴، ۲+۲، ۱+۱+۲، ۱+۱+۱+۱.

ثابت کنید بازاء هر عدد صحیح $n \ge 3$

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$$

(هر سؤال ۷ نمره دارد)

حل یک مسئله

اتحاد $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ یکی از تساویهای مهم و تاریخی ریاضی است. با استفاده از معلومات ریاضی دبیرستانی و بکار بردن استقرای ریاضی حد یک دنباله محاسبه می‌شود، و به عنوان نتیجهٔ آن چند نابرابری مثلثاتی و تساوی مهم بالا ثابت می‌گردد.

ثابت کنید

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos a_1x\cos a_2x\cos a_3x\ldots\cos a_nx}{1-\cos x}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

که در آن $a_i\in \mathbb{R}$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

حل: داریم که

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos a_1x}{1-\cos x}=a_1^2 \qquad (1)$$

و

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos a_1x\cos a_2x}{1-\cos x}-\frac{1-\cos a_1x}{1-\cos x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos a_1x(1-\cos a_2x)}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos a_2x}{1-\cos x}=a_2^2 \qquad (2)$$

بنابراین از (۱) و (۲) نتیجه‌ٔمی شود که

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos a_1x\cos a_2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos a_1x}{1-\cos x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos a_2x}{1-\cos x}$$

$$=a_1^2+a_2^2 \qquad (3)$$

بهمین ترتیب داریم که

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos a_1x\cos a_2x\cos a_3x}{1-\cos x}-\frac{1-\cos a_1x\cos a_2x}{1-\cos x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos a_1x\cos a_2x(1-\cos a_3x)}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos a_3x}{1-\cos x}=a_3^2 \qquad (4)$$

درنتیجه از (۳) و (۴) نتیجه می شود که

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos a_1x\cos a_2x\cos a_3x}{1-\cos x}$$

$$=a_1^2+a_2^2+a_3^2=\sum_{i=1}^{3}a_i^2$$

به کمک استقراء روی n (همین عمل را n مرتبه انجام دهید) خواهیم داشت

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos a_1x\cos a_2x\ldots\cos a_nx}{1-\cos x}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \qquad (5)$$

قدیر مهاجری میناتی
دانشجوی کارشناسی ارشد مؤسسه ریاضیات

نتیجه ۱ :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos a_1x\cos a_2x\dots\cos a_nx}{1-\cos bx}=\frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

حل: تغییر متغیر $bx = U$ را انجام دهید و از (۵) حکم نتیجه می‌شود.

نتیجه ۲ : فرض کنید $a_i \in \mathbb{R}$ $(i=1,2,\dots,n)$ و $b\in \mathbb{R}$ دراینصورت

الف) اگر $\sum_{i=1}^{n}a_i^2 < b^2$ آن‌گاه دریک همسایگی محذوف صفر*

$$\cos bx < \cos a_1x\cos a_2x\dots\cos a_nx$$

ب) اگر $\sum_{i=1}^{n}a_i^2 > b^2$ آن‌گاه دریک همسایگی محذوف صفر

$$\cos bx > \cos a_1x\cos a_2x\dots\cos a_nx$$

نتیجه ۳ : اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد بقسمی که $\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2 < \infty$ آن‌گاه وجود دارد $m>0$ بقسمی که برای هر n وجود دارد $\delta_n > 0$ بقسمی که اگر $0<|x|<\delta_n$ آن‌گاه

$$\cos mx < \cos a_1x\cos a_2x\dots\cos a_nx$$

حل: فرض می‌کنیم که $\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2 = A$ درنتیجه برای هر n داریم که

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \le \sum_{i=1}^{\infty}a_i^2 < A+\alpha \qquad (\alpha>0)$$

درنتیجه وجود دارد $\delta_n > 0$ بقسمی که ((الف) نتیجه ۲)

$$\cos\sqrt{(A+\alpha)}\,x < \cos a_1x\cos a_2x\dots\cos a_nx$$

قرار می‌دهیم. $m=\sqrt{A+\alpha}$

حالت خاص: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\Pi^2}{6}$ پس برای هر n وجود دارد $\delta_n > 0$ که نامساوی $0<|x|<\delta_n$ ایجاب می‌کند

$$\cos\left(\frac{\Pi^2}{6}+\alpha\right) < \cos x\cos\frac{1}{2}x\dots\cos\frac{1}{n}x$$

برای هر $\alpha>0$. درنتیجه اگر $\alpha\to 0$ میل دهیم

$$\cos x\cos\frac{1}{2}x\dots\cos\frac{1}{n}x \ge \cos\frac{\Pi^2}{6}$$

* : به مجموعه‌های نظیر $\{x: 0<|x-\alpha|<\delta, \delta>0\}$ همسایگی محذوف α می‌گوییم.

چشم اندازی از بیست و یکمین کنفرانس بین المللی روانشناسی آموزش ریاضی

زهرا گویا- دانشگاه شهید بهشتی

گروه بین المللی برای روانشناسی آموزش ریاضی (PME) درسال ۱۹۷۶ تشکیل شده است و هرسال، یک کنفرانس بین المللی دریکی از کشورهای دنیا توسط این گروه برگزار می‌گردد. این گروه، هرچهارسال یکبار، به‌وسیلهٔ انتخابات آزاد درمجمع عمومی سالانه، هیأت رئیسهٔ خود را متشکل از رئیس، معاون، منشی و خزانه‌دار انتخاب می‌کند. به‌جز هیأت رئیسه، گروه دارای یک کمیتهٔ بین المللی است که درحال حاضر، این کمیته دارای ۱۳ عضو از کشورهای آفریقای جنوبی، انگلستان، ژاپن، ایتالیا، برزیل، فرانسه، استرالیا، سوئیس، فنلاند، اسپانیا و آمریکا است. «گروه بین المللی برای روانشناسی آموزش ریاضی» برای برگزاری کنفرانسهای سالانه دارای یک کمیتهٔ برنامه‌ریزی بین المللی و یک کمیتهٔ سازماندهی محلّی درکشور میزبان کنفرانس است. این گروه دارای جهت گیری پژوهشی بسیار جدی است و باجرأت می‌توان گفت که مقاله‌هائی که برای ارائه درکنفرانسهای آن فرستاده می‌شود از اعتبار مقاله‌های چاپ شده درمجله‌های معتبر پژوهشی برخوردار است زیرا این مقاله‌ها مانند مقاله‌های پژوهشی که برای چاپ درمجله‌های معتبر علمی ارسال می‌شود، توسط سه داور ناشناس داوری می‌شوند. حتّی از سال گذشته، PME فرصتی برای علاقمندان ایجاد کرده است تاقبل از موقع، مقاله‌های خود را ارسال نمایند و پس از دریافت پیشنهادها و نظرات بررسی کننده‌ها، مجدداً مقاله را دوباره‌نگری کرده و برای داوری نهائی بفرستند. باتوجّه به اهمیّت مقاله‌های پذیرفته شده و نیاز به‌اشاعهٔ یافته‌های پژوهشی، درمجمع عمومی سال ۱۹۹۷، پیشنهاد انتشار یک مجله از طرف PME داده شد که بااکثریت آرا به‌تصویب رسید. پس‌از حل مشکلات مالی، یکی از ناشران معتبر اقدام به‌چاپ این مجله خواهد کرد.

بیست ویکمین کنفرانس بین المللی روانشناسی آموزش ریاضی از تاریخ ۱۴ تا ۱۹ جولای (۲۳ تا ۲۸ تیر) ۱۹۹۷ باشرکت حدود ۴۰۰ پژوهشگر درشهر لاهتی واقع درفنلاند برگزار گردید. محل برگزاری کنفرانس «مرکزآموزش وپژوهش لاهتی» وابسته به‌دانشگاه هلسینکی بود. نحوهٔ داوری مقاله‌ها

PME

دراین کنفرانس به‌ترتیب زیر بود:

چهار پیشنهاد[1] برای میزگردهای پژوهشی موازی و عمومی ارائه شده بود که همهٔ آنها پس از داوری توسط سه تن از اعضای متخصص PME در زمینه‌های مربوط، پذیرفته شدند. همچنین، ۱۷۱ مقالهٔ پژوهشی درمورد موضوع و رویکردهای مختلف توسط کمیتهٔ برنامه‌ریزی دریافت شد که هریک توسط سه‌عضو متخصص PME در رابطه با موضوعهای پژوهشی دریافت شده، داوری شدند. طبق قانون PME، مقاله‌هائی که تأیید حداقل دو نفر داور را داشته‌باشند، پذیرفته می‌شوند. مقاله‌های ردشده دوباره توسط کمیتهٔ برنامه‌ریزی بررسی شدند تا از روائی عدم تأیید مقاله‌های ردشده اطمینان حاصل شود. از بین ۱۷۱ مقالهٔ دریافت شده، ۱۲۲ مقالهٔ پژوهشی پس از داوری پذیرفته شدند. همچنین، ۵۸ سخنرانی کوتاه و ۲۰ پوستر نیز پس از داوری، جهت ارائه پذیرفته شدند. تعداد داورهای بیست‌ویکمین کنفرانس روانشناسی آموزش ریاضی ۱۶۰ نفر بودند و مقاله‌ها درزمینه‌های زیر ارائه شدند:

تفکر پیشرفتهٔ ریاضی، عوامل عاطفی، تفکر جبری، ارزیابی و ارزشیابی، باورها، کامپیوتر، ماشین‌حساب و سایر ابزارهای فن‌آوری، عوامل فرهنگی، معرفت‌شناسی، تابع‌ها و نمودارها، مباحث مربوط به‌جنسیت، تفکر فضائی [سه‌بعدی] و هندسی، تجسم و تصور، زبان و ریاضی، مدل‌سازی ریاضی، اندازه‌گیری، فراشناخت، روشهای اثبات، استدلال عددی غیرابتدائی، احتمالات، آمار و ترکیبیات، حل مسأله، اعداد گویا، عوامل اجتماعی-فرهنگی، آموزش معلمان و توسعهٔ حرفه‌ای و نظریه‌های یادگیری.

سخنرانیهای عمومی

در روز افتتاحیه، پروفسور ساری لواتن[2] از دانشگاه تکنولوژی فنلاند در مورد سازمان عملکردی مغز انسان صحبت کرد و رابطه بین مغز و ذهن را مورد بررسی قرار داد.

برای روز اول، یک سخنرانی عمومی باعنوان «مجموعه‌های ابزار باز[3]: هدفهای جدید و معانی جدید در یادگیری ریاضی و علوم توسط کامپیوتر[4]» انتخاب شده بود. این سخنرانی توسط پروفسور دی‌سا از دانشکدهٔ تحصیلات تکمیلی در تعلیم و تربیت- دانشگاه برکلی در کالیفرنیا ارائه شد. استفان لرمن، رئیس PME در معرفی دی‌س‌سا گفت:

«پروفسور آندرا دی‌س‌سا دارای مدرکهای کارشناسی و کارشناسی ارشد در فیزیک از دانشگاه پرینستون و دکترای تخصصی (PH.D) از انستیتوی تکنولوژی ماساچوست (MIT) است. پژوهشهای او در فصل مشترک شناخت[5]، تکنولوژی و تعلیم‌وتربیت است. او مطالعات روانشناسانه و معرفت شناسانهٔ یادگیری ریاضیات و علوم را با تأکید بر توسعهٔ دانش شهودی انجام می‌دهد. دی‌س‌سا در کار اخیر پژوهشی خود، به‌آزمایش کردن با امکانهای آموزشی که به‌وسیلهٔ رسانه‌های جدید محاسباتی فراهم شده است پرداخته و ادبیات جدیدی دراین زمینه به‌وجود آورده است.»

پروفسور دی‌س‌سا درمقدمهٔ سخنرانی خود، به‌معرفی نوع خاصی از نرم‌افزارهای آموزشی پرداخت. «مجموعه‌های ابزارهای باز» دراولین نگاه، همان است که از اسم آن برمی‌آید. آنها مجموعه‌ای باز از واحدهای نرم‌افزاری ابزارشکلی هستند که هدفشان یادگیری در زیر دامنه‌های مشخصی مانند ترسیمات هندسی، سیستمهای دینامیکی و بخشهائی از نظریهٔ محیط زیست یا تکامل است. «باز» معناهای مختلفی می‌دهد. اول اینکه هر ابزاری درمجموعه، خاصیتهای معمول یک ابزار را دارد، یعنی به‌انجام و تکمیل تکلیفها کمک می‌کند. همچنین، یک ابزار پداگوژیک است زیرا تکلیفها از نظر آموزشی مربوط هستند. ابزارها به‌طور کلی، صراحت بازنمائی‌های هدفهای آموزشی را که ممکن است در سایر نرم‌افزارهای آموزشی مشهود باشد، در ازای نوعی اصالت و بکری از دست می‌دهند که این اصالت و بکری در جهت هدفهای استفاده‌کنندگان از این نرم‌افزار کاربُرد دارد. «مجموعه ابزارهای باز» تعداد بیشتری از واحدهای کوچک را که «کاربردهای» قراردادی آموزشی هستند درگیر می‌کند. واحدها طوری طراحی شده‌اند که بسیار قابل جرح و تعدیل، توسعه و ترکیب بایکدیگر باشند. درابتدا، با مثالهائی که درمحیط محاسباتی خلق شده‌اند، مجموعهٔ ابزارهائی مانند «بوکسور» نمایش داده می‌شوند.

دی‌س‌سا، سپس به‌ارائهٔ توصیه‌هائی دربارهٔ چگونگی ساختن ابزارها و ویژگیهای یادگیری آنها پرداخت. او همچنین، دربارهٔ احتمال ایجاد فرصت‌های مناسب برای توسعهٔ انجمنهای پژوهشی بامشارکت معلمها به‌منظور تهیه و استفاده و حمایت از «مجموعهٔ ابزارهای باز» درآموزش ریاضی و علوم بحث کرده و ارائهٔ طریق نمود.

دومین سخنران عمومی شلومو وینر[6] از دانشگاه هبروی فلسطین اشغالی و عنوان سخنرانی او «از شهود تا بازداری: ریاضی، آموزش و سایر موجودات درمعرض خطر[7]» بود. کرن کی‌یرن از کانادا درمعرفی وینر چنین گفت:

«وینر بیش از ده‌سال در دبیرستانهای مختلف (فنی - حرفه‌ای، شبانه، روزانه)

ریاضی تدریس کرد. او بعد از گرفتن درجهٔ دکترای تخصّصی (Ph.D) در ریاضیّات، به آموزش ریاضی به‌عنوان یک دامنهٔ پژوهشی جدید علاقمند شد. علاقهٔ اصلی او درآموزش ریاضی؛ راههای تفکّر دانش‌آموزان درمقایسه با فرآیندهای تفکّری که جامعهٔ ریاضی توقّع دارد بوده است.»

وینر درمقدمهٔ صحبتهایش گفت: «من درابتدا کارم را به‌عنوان یک ریاضیدان و معلّم ریاضی شروع کردم. من تشخیص دادم که نیازمند داشتن آگاهی بیشتر دربارهٔ دانش‌آموزانم/ دانشجویانم هستم. بخصوص می‌خواستم بدانم که آنها چگونه ریاضی وار فکر می‌کنند، چگونه مفهومها را کسب می‌کنند، چگونه استدلال می‌کنند و چگونه مسائل ریاضی را حل می‌کنند. درنتیجه برای یافتن پاسخ به‌این سؤالها، درگیر جنبه‌های شناختی یادگیری ریاضی شدم.» وینر سعی در پیوند بین چند جنبهٔ مشخّص از رفتار ریاضی با چند جنبهٔ عمومی از رفتار انسانی داشت و درضمن این تلاش، به‌معرّفی رفتار شبه ـ مفهومی[8] و شبه تحلیلی[9] درمناسبات انسانی و مناسبات ریاضی پرداخت، آنگاه به شباهتهای بین انتظاراتی که از یک رفتار ریاضی مطلوب و یک رفتار اخلاقی مطلوب وجود دارد اشاره کرد. از نظر وینر، وجه تشابه همان چیزی است که او «از شهود تا بازداری[10]» نامیده است. به‌گفتهٔ او، «شهود در تفکّر ریاضی یک عکس‌العمل آنی و عمومی به‌انگیزشهای ریاضی است و شهود در قالبهای اخلاقی همان پاسخ یا تمایل به عمل کردن از یک راه مشخّص است. اگر ما آنها را برای لحظه‌ای بازداریم، برآنها بازتاب داشته باشیم، آنها درصورت لزوم و بر طبق بعضی اصول اخلاقی باچیز دیگری جایگزین کنیم و سپس عمل نمائیم، آنگاه نتیجه، یک رفتار اخلاقی مطلوب است.» وینر درادامهٔ بحث راجع به شهود در ریاضی ابراز داشت: «تصور مفهومی[11] را می‌توان بخشی از شهود دانست. شهود به‌دلیل فوری، خودبه‌خودی و عمومیتِ آن، از فرآیندهای تحلیلی[12] استفاده نمی‌کند. تصوّر مفهومی در ذهن ما به طریق شهودی ایجاد می‌شود. آنها عکس‌العملهای فوری ذهن ما نسبت به اسم مفهومی است که می‌بینیم یا می‌شنویم. بسیاری اوقات، ما با همین تصوّر مفهومی سعی درحل کردن یک مسألهٔ ریاضی می‌کنیم. دربعضی قالبها، این وضع مطلوب نیست. حرکت درست آن است که با تعریف مفهومی[13] مشاوره کنیم، احساسهای عمومی را نادیده بگیریم و به‌جای آنها، تحلیل‌گرانه با مسأله برخورد کنیم. همچنین، این بدان معناست که حرکت خودبه‌خودی را کنترل کنیم و از عکس‌العملهای آنها پرهیز کنیم.... بعضی مردم معتقدند که عمل کردن خودبه‌خودی و شهودی یک تعالی است. من نمی‌خواهم دراین مورد مجادله کنم، امّا می‌خواهم توصیه کنم که حداقل دراین قالب، عمل برمبنای محصول یا نتیجهٔ عمل قضاوت می‌شود. اگر محصولها مطلوب نباشند، درنتیجه حالت تفکّری که آنها را تولید کرده‌اند مطلوب نمی‌باشد. پس باید از آن حالت تفکّر بازایستیم.» وینر درادامهٔ صحبتهایش چنین نتیجه‌گیری کرد: «نه‌تنها شروع فرآیندهای تفکّر ریاضی با شهود زیان‌آور نیست بلکه درخیلی موردها، بسیار هم سودآور و مفید است. بااین‌حال، پس از آن‌که فرآیند تفکّر به نقطهٔ مشخّصی رسید، ما باید شهود خود را کنترل کنیم، نتیجه‌ها را آزمایش نمائیم و از ابزار تحلیلی که ریاضیّات به ما عرضه کرده است استفاده کنیم.»

سومین سخنران عمومی اُلِه بُجور کویست[14] از دانشگاه آبوآکادمی[15] واقع در فنلاند و عنوان سخنرانی او «چند موضوع روانشناسی در مورد ارزیابی اجرای (عملکرد) ریاضی[16]» بود. اِرکی پِهکونِن[17]، دبیر کمیتهٔ علمی محلی کنفرانس، در معرّفی او گفت: «اُلِه بُجور کویست استادیار آموزش ریاضیات و علوم در گروه آموزش معلّمان دانشگاه آبوآکادمی فنلاند است. او از سال ۱۹۸۹ عضو گروه بین‌المللی روانشناسی آموزش ریاضی (PME) بوده است و علایق پژوهشی او شامل حلّ مسألهٔ ریاضی، ارزیابی یادگیری ریاضی و جنبه‌های اجتماعی آموزش ریاضی است.»

اُله در شروع سخنرانی خود، بااشاره به‌شتاب فزایندهٔ توسعهٔ رویّه‌های ارزیابی درآموزش ریاضی درچند سال اخیر، خاطرنشان کرد که بسیاری از رویّه‌هائی که اخیراً برای بررسی عملکرد یادگیرندگان ریاضی به‌وجود آمده‌اند و توسعه یافته‌اند، درچند سال پیش اصلاً جزئی از آموزش ریاضی به‌حساب نمی‌آمدند.» او درادامهٔ سخنانش، دلیل اهمیّت ارجای صریح به روانشناسی اجتماعی درآموزش ریاضی را ناشی از مسائل مربوط به معرّفی روشهای جدید ارزیابی دانست و بحثهای ارزیابی به‌عنوان عامل تغییر، ارزیابی پویا و روائی ارزیابی را از دیدگاه **ساخت و سازگرائی اجتماعی**[18] مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. او درپایان سخنرانی خود، چنین نتیجه‌گیری کرد:

من احساس کرده‌ام متمرکز شدن برروی موضوعهای اجتماعی که به دیدگاههای درحال تغییر ریاضیات مدرسه‌ای و هماهنگی حقیر و ناچیز بین اهداف و روشهای تدریس از یک طرف، و هدفها و حالتهای ارزیابی از طرف دیگر می‌پردازد، مناسبت‌تر باشد. من سعی کرده‌ام از جنبه‌های مختلف نشان دهم که چارچوب پژوهش می‌تواند از روانشناسی اجتماعی بیشتر تأثیر پذیرد. این امر به‌منزلهٔ آن نیست که تأکید کمتری برریاضی شود. درحقیقت، محتمل‌تر این است که مجادله برسر مذاکرهٔ اجتماعی هدفها و حالتهای ارزیابی درریاضی همچنان ریاضی‌وار ادامه پیدا کند. امّا تصوّری که، ریاضی قابل دوام مدرسه‌ای چیست تغییر خواهد کرد.

چهارمین سخنرانی عمومی توسط جودیت مازلی[19] از دانشگاه دیکن[20] استرالیا و پیترسولیوان[21] از دانشگاه کاتولیک استرالیا ارائه

شد. عنوان سخنرانی آنها «مسائل بغرنج درآموزش حرفه‌ای معلمان ریاضی[22]» بود. جودیت مازلی ازسال ۱۹۸۲ در دوره‌های کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری دانشگاه دیکن استرالیا تدریس کرده است. او قبل از ورود به دانشگاه، به مدت ۱۵ سال معلم ابتدائی و متوسطه بوده است. علایق او در حوزهٔ فلسفهٔ آموزش ریاضی، ادراک ریاضی، تغییرات برنامهٔ درسی ریاضی و بررسی امکانات بالقوه برای استفاده از تکنولوژی چند رسانه‌ای[23] در تدریس دانشگاهی و پژوهشهای برمبنای کلاس درس[24] است. مازلی رئیس «اتحادیهٔ مدرسان ریاضی استرالیا[25]» و یکی از اعضای فعّال اجرائی سایر سازمانهای حرفه‌ای معلّمان است.

پیترسولیوان نیز رئیس دانشکدهٔ تعلیم‌وتربیت دانشگاه کاتولیک استرالیا درایالت ویکتوریا است. او معاون پژوهشی «گروه‌تحقیقات آموزش ریاضی استرالیا[26]» است. سولیوان نقش فعّالی دربسیاری از اتحادیه‌های حرفه‌ای دارد و برای دامنهٔ وسیعی از مؤسسات آموزشی استرالیائی و بین‌المللی، کارهای مشاوره‌ای انجام می‌دهد.

موضوع سخنرانی مازلی‌وسولیوان، بیش‌از هرچیزی تغییرات آموزشی[27] و مسائل و مشکلات موجود دراین رابطه بود. آنها پس‌از اشاره به‌اهمیّت و ضرورت احساس مالکیت[28] معلمان نسبت به‌تغییرات انجام شده تأکید کردند که بدون ایجاد چالش درساختارهای فردی، بعید است که معلّمان نیازی به‌تغییر احساس کنند. مازلی‌وسولیوان چند رسانه‌ای‌ها را به‌عنوان ابزار مفید جهت ایجاد چالش یاد شده معرّفی کردند.

مازلی و سولیوان درخاتمهٔ سخنرانی خود چنین نتیجه‌گیری کردند: «ثابت‌شده است تکنولوژی الکترونیکی ابزار مفیدی است که ما را قادر می‌سازد تاخلاءهای پداگوژی را آگاهانه بشناسیم و آنها را به‌درستی نقادّی و تجزیه و تحلیل نمائیم. تابه‌حال، ابزاری مانند ضبط‌های دیداری و شنیداری دربررسی پداگوژی ریاضی باموفقیّت مورد استفاده قرار گرفته‌اند، امّا چند رسانه‌ای‌ها دارای یک قابلیت افزوده هستند. این قابلیت، استفاده‌کننده (کاربَر) را قادر می‌سازد تاارتباطات فعّال بین رسانه‌های مختلف برقرار کند و به‌ابعاد چندین گونهٔ تدریس و یادگیری، اجازهٔ معرفی و کشف شدن را می‌دهد. ... استفاده از منابع وسیع چندرسانه‌ای، بهٔ دانشجو ـ معلّمان ریاضی ما فرصتهائی داده است تابررسیهای نسبتاً مستقلی را انجام دهند. توسط این رسانه‌ها، نه‌تنها یک کلاس واقعی به طور کامل دریک مطالعهٔ مربوط بهٔ تدریس مورد استفاده قرار می‌گیرد، بلکه تجربیات یادگیرندگان نیز به‌طور کامل دردسترس قرار می‌گیرد. نمونه‌های عملی به‌عنوان داده‌های موردی می‌توانند تجربه‌های گروهی از استفاده‌کنندگان (کاربَردان) را به‌هم مرتبط کرده و حتّی تقویت کنند، امّا تعامل آنها فرصتهائی ارائه می‌کند تادیدگاههای بدیل[29] را راجع به درسِ مورد بحث، بررسی و کشف کنند.»

مازلی و سولیوان درجمعبندیِ خود تأکید کردند که «هدف استفادهٔ ما از چند رسانه‌ای‌ها، توسعهٔ درکهای معلمان نسبت به‌پیچیدگی کلاسهای درس ریاضی و نقشهای خودشان درکلاس درس ریاضی است.»

میزگردهای پژوهشی

همان‌طور که گفته شد، دردومین روز کنفرانس، سه‌میزگرد پژوهشی به‌طور موازی و به‌مدّت یک ساعت برگزار گردید که هرکدام از این سه‌میزگرد مجدداً در روز چهارم نیز تشکیل شدند و میزگرد دوم نیز درآخرین روز کنفرانس، برای بارسوم تشکیل گردید.

میزگرد اوّل راجع به«تفکّر عددی ابتدائی[30]» و هماهنگ‌کنندهٔ آن اِرنا یاکل[31] از دانشگاه پُردو در آمریکا بود. سخنران این میزگرد اِدی گِری[32] از دانشگاه واریک[33] انگلیس بود که مقالهٔ مشترک خود را با دیویدتال[34] تحت‌عنوان «ماهیّت شیئی به‌عنوان یک جزء جدا نشدنی درفرآیندهای عددی[35]» ارائه داد. بنا به‌رسم این میزگردها، معمولاً یک یادو نفر نسبت به‌مقالهٔ ارائه شده، عکس‌العمل نقادانه دارند. اولّین نقّاد[36] رابرت دیویس[37] از دانشگاه راجرز آمریکا بود که درمورد «به‌نظریه کشاندن فرآیندهای شناختی درریاضی[38]» صحبت کرد و دیگری داگمارنیومن[39] از دانشگاه گوته‌بورگ[40] سوئد بود که دربارهٔ «موفقیّت یاشکست در توسعهٔ ابتدائی عدد[41]» سخنرانی خود را ارائه نمود.

عنوان دومین میزگرد پژوهشی، «تحقیق دربارهٔ مفهوم‌تابع[42]» و هماهنگ‌کنندهٔ آن گاردبِرکی[43] بود. یک سخنرانی توسط ریناهرشکُویچ[44] و باروخ شوارتز[45] باعنوان «متحّد کردن جنبه‌های شناختی و فرهنگی ـ اجتماعی در پژوهشهای مربوط به‌یادگیری مفهوم‌تابع[46]» ارائه شد و سخنرانی دیگری نیز توسط میکال یِروشالمی[47] دربارهٔ «پیدایش طرحوارهٔ جدیدی برای حل مسائل کلامی درجبر: تأثیر تکنولوژی و رویکرد تابعی[48]» انجام شد. منتقدان این دوسخنرانی به‌ترتیب ژوال هیلِل[49] از فنلاند و خوآفلیپ ماتوس از پرتغال بودند.

موضوع سومین میزگرد «پژوهش دراثبات ریاضی[51]» و هماهنگ‌کنندهٔ آن کارولین‌مار[52] از دانشگاه راجرز نیوجرسی بود. مقالهٔ تهیّه شده توسط ماریا اَلِساندرا ماریوتی[53] از دانشگاه پیتزای ایتالیا و همکاران او از دانشگاههای مُدنای[54] ایتالیا و ژنوسوئیس تحت‌عنوان «نزدیک شدن به‌قضیه‌های هندسی درقالبها: از تاریخ و معرفت‌شناسی به‌شناخت[55]» توسط خود او ارائه شد. این مقاله به‌ارائهٔ یافته‌های پژوهشی یک طرح تحقیقاتی به‌همین نام پرداخت. منتقدان این سخنرانی، مایکل دِویلییرز[56] از دانشگاه دوربن ـ وست‌ویل[57] آفریقای جنوبی و گِرشون‌هارِل[58] بودند.

میزگرد عمومی

در روز سوم، یک میزگرد عمومی با عنوان «شناخت، تکنولوژی و تغییر[59]» به‌مدّت دو ساعت انجام شد که هماهنگ کنندهٔ آن، کاترین کرافورد[60] از دانشگاه سیدنی استرالیا بود. کرافورد ابتدا خود یک مقاله تحت عنوان «شناخت توزیع شده، تکنولوژی و تغییر: زمینه‌هائی برای میزگرد عمومی[61]» را به صورت سخنرانی ارائه کرد و سپس اعضای میزگرد یعنی ژانت اینسلی[62] از دانشگاه واریک، نیکولاس بالاچف[63] از لابراتوار لایب نیتز[64] فرانسه و جیمز کاپوت[65] و جرمی راشل[66] از دانشگاه ماساچوست به ارائهٔ سه سخنرانی که عنوانهای آنها به ترتیب «نقشهائی برای معلمان و کامپیوتر[67]» «چند سؤال در مورد محیط های یادگیری ریاضی[68]» و «عمق بخشیدن به تأثیر تکنولوژی ورای همکاری با صورتگرائیها سنّتی به‌منظور دستیابی دموکراتیک به ایده‌های زیربنائی حسابان[69]» بود، بحث را ادامه دادند.

کرافورد در شروع میزگرد، سؤالهای پژوهشی جالبی را مطرح کرد که به موارد زیر اشاره می‌شود:

- چگونه تنشهای بین تمرین عملهای آموزشی به شکلهای پایدار یا تاریخ ـ مدار و چالشها و فرصتهای شکلهای جدید فعالیتهای ریاضی و توسعهٔ آنها توسط تکنولوژی امکان حل شدن دارند؟

- ماهیت یادگیری ریاضی، انحرافها و توانائی‌هائی که از تجربه‌های شکلهای جدید فعالیتهای شناختی در حین فعالیتهای ریاضی در انجمنهائی که به‌وسیلهٔ محصولات جدید تکنولوژی تعاملی[70] بروز می‌کند چیست؟

- آیا شکلهای خاصّ تفکر و یادگیری توسط توسعه‌های جدید فن‌آوری ارتقا می‌یابند؟ در صورت مثبت بودن جواب، چگونه؟

- چه نوعی از سازمانهای اجتماعی مجازی در مجامع آموزشی، بهتر از همه می‌توانند ظرفیتهای انسانی در رابطه با شبکه‌ها و محیط تعالی ریاضی را تشخیص دهند؟

- در قرارگاههای جدید فن‌آوری (تکنولوژی)، نقش در حال پیدایش معلّم (یا تسهیل کنندهٔ یادگیری) چیست؟ این نقش در حال تغییر چه تأثیری بر ماهیت شناختی در طول یادگیری دارد؟ انواع بازده‌های یادگیری کدامها هستند؟

فعالیتهای گروهی

الف) گروههای کاری[71]

هدف از تشکیل گروههای کاری، دستیابی به مبادلهٔ اطلاعات در سطح وسیع‌تر و ادامهٔ تماس و همکاری بین اعضای گروه است. هر گروه کاری در دو نوبت ۱۲۰ دقیقه‌ای و یک نوبت ۹۰ دقیقه‌ای تشکیل شدند. گروههای کاری کنفرانس عبارت بودند از:

۱ـ تفکّر پیشرفتهٔ ریاضی[72]: هماهنگ کنندهٔ دیویدرید از دانشگاه مموریال نیوفوندلند کانادا بود.

۲ـ ساختار فرآیندهای جبری[73]: هماهنگ کننده ترزا روخانو[74] از مکزیک

۳ـ پژوهش کلاس درس[75]: هماهنگ کننده دراگاویداکوویک[76] از دانشگاه ایالتی کارولینای شمالی

۴ـ گروه کاری هندسه[77]: هماهنگ کننده آلساندرا ماریوتی از دانشگاه پیتزای ایتالیا

۵ـ یک پارادایم نوین پژوهشی برای جنبه‌های اجتماعی آموزش ریاضی: یک فرآیند تطوری در پژوهشهای براساس جنسیت[78]: هماهنگ کننده ویکتور پارسونز[79] از دانشگاه گرینویچ انگلستان

۶ـ پژوهش دربارهٔ روانشناسی توسعهٔ [حرفه ای] معلمان ریاضی[80]: هماهنگ کنندگان وانیا سانتوز[81] از برزیل و آندریا پیتر[82] از دانشگاه مونستر آلمان

۷ـ درک مفهومهای ضربی[83]: هماهنگ کنندگان تام کوپر[84] از دانشگاه کوئینزلند استرالیا و تَدواتانابی[85] از دانشگاه ایالتی تاوسون در آمریکا

۸ـ گروه کاری دربارهٔ تدریس و یادگیری [پدیده های] تصادفی[86]: هماهنگ کنندگان کارمن باتانیرو[87]، کَت تروتان[88] و جان تروتان از دانشگاه آدلایت استرالیا

ب) گروههای مباحثه[89]

هدف از تشکیل گروههای مباحثه ارائهٔ تشکیلاتی است که در آن، شرکت کنندگان علاقمند می‌توانند راجع به موضوعهای مشخّص در روانشناسی آموزش ریاضی بحث کنند و دیدگاههای خود را با هم در میان بگذارند. هر گروه مباحثه در دو نوبت ۹۰ دقیقه‌ای تشکیل شد. گروههای مباحثهٔ کنفرانس عبارت بودند از:

۱ـ تکلیفهای باز پاسخ و ارزیابی تفکّر ریاضی[90]: هماهنگ کننده پیتر سولیوان از استرالیا

۲ـ گروه مباحثهٔ نظریهٔ اعداد[91]: هماهنگ کننده استفن کمپبل[92] از دانشگاه سایمون فریزر کانادا

۳ـ نظریهٔ سمیوتیک و تمرین عمل در آموزش ریاضی[93]: هماهنگ کننده آدام وایل[94] از دانشگاه ساوت‌نبک انگلستان و لوئیس رادفورد[95] از کانادا

(لازم به ذکر است که معادل مناسبی برای سمیوتیک نه در زبان فارسی و نه در زبان انگلیسی وجود دارد. سمیوتیک به طور کلّی به معنای تمام فعالیّتهای معناسازی در آموزش ریاضی با تمرکز بر علامتها، نمادها و ارتباطات است.)

۴ـ کشورهای کم‌ـ معرّفی شده در PME؛ به سوی تجزیه و تحلیل انجمنهای پژوهشی آموزش ریاضی[96]: هماهنگ کننده پدرو گومز[97] و پااُلاوالرو[98] از کلمبیا و برنادت دنیس از پاریس[99]

۵ـ تفسیر ضبط های دیداری[100] (ویدئوئی): هماهنگ کننده دیویدرید[101] از دانشگاه نیوفوندلند کانادا، لورینداً براون[102] از دانشگاه بریستول انگلستان ویکی زک[103] از دانشگاه مک گیل کانادا.

همچنین چهار گروه مباحثه باچهار سخنران عمومی بعداز سخنرانیهای آنها تشکیل شد تاعلاقمندان بتوانند باجزئیات حرفهای آنها بیشتر آشنا شوند و سؤالهای ایجاد شده درطول سخنرانی را مطرح کنند.

بیست ودومین کنفرانس بین المللی روانشناسی آموزش ریاضی (PME22) در تابستان ۱۳۷۷ (۱۹۹۸) در آفریقای جنوبی برگزار می شود. متأسفانه تااین لحظه، آگهی حاوی اطلاعات لازم برای PME 22 هنوز توزیع نشده است. امید است که علاقمندان به آموزش ریاضی درایران، سال آینده بامشارکتهای جدّی خود دراین کنفرانس شرکت نمایند.

زیرنویس ها:

1 - Proposal
2 - Sari Levänen
3 - Open toolsets
4 - Open toolsets: New ends and new means in learning mathematics and science with computers
5 - Cognition
6 - Shlomo Vinner
7 - From intuition to inhibition- mathematics education and other endangered species
8 - Pseudo- conceptual
9 - Pseudo - analytical
10 - from intuition to inhibition
11 - Concept image
12 - Analytical Processes
13 - Concept definition
14 - Ole Björkqvist
15 - Åbo Akademi
16 - Some Psychological issues in the assessment of mathematical Performance
17 - Erkki Pehkonen
18 - Social Constructivism
19 - Judith Mousley
20 - Deakin
21 - Peter Sullivan
22 - Dilemmas in the Proffessional education of mathematics teachers
23 - Multi - media
24 - Class- based research
25 - Mathematics Lecturers Association of Australia
26 - Mathematics Education Research Group of Australia
27 - Educational change
28 - Ownership
29 - Alternative
30 - Elementary Numerical Thinking
31 - Erna Yackel
32 - Eddie Gray
33 - warwick
34 - David Tall
35 - The nature of the object as an integral component of numerical processes
36 - Reactor
37 - Robert Davis
38 - Postulated Cognitive Processes in mathematics
39 - Dogmar Neuman
40 - Göteborg
41 - Success or failure in elementary number development
42 - Research on the function concept
43 - Gard Brekke
44 - Rina Hershkowitz
45 - Baruch B. schwarz
46 - Unifying cognitive and sociocultural aspects in research on learning the function concept
47 - Michal Yerushalmy
48 - Emergence of new schemes for solving algebra word problems: The impact of technology and the function approach
49 - Joel Hillel
50 - Joao Fillipe Matos
51 - Research on Mathematical Proof
52 - Carolyn Maher
53 - Maria Alessandra Mariotti
54 - University di Modena
55 - Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to Cognition
56 - Michael de Villiers
57 - Durban - Westville
58 - Guershon Harel
59 - Cognition, Technology and Change
60 - Kathryn Crawford
61 - Distributed Cognition, Technology and Change: Themes for the plenary panel
62 - Janet Ainley
63 - Nicolas Balacheff
64 - Laboratoire Leibniz - IMAG
65 - James Kaput
66 - Jeremy Roschelle
67 - Roles for teachers, and Computers
68 - Some questions on mathematical learning environments
69 - Deepening the impact of technology Beyond Assistance with traditional Formalisms in order to democratize access to ideas underlying calculus.
70 - Interactive technology
71 - Working Groups
72 - Advanced mathematical thinking
73 - Algebraic Processes and structure
74 - Teresa Rojano
75 - Classroom research
76 - Draga Vidakovic
77 - Geometry working group
78 - A new research Paradigm for social aspects of mathematics education: the evolutionary process in gender based research
79 - Victor E. Parsons
80 - Research on the Psychology of mathematics teacher development
81 - Vania Santos
82 - Andrea Peter
83 - Understanding of multiplicative concepts
84 - Tom Cooper
85 - Tad Watanabe
86 - Working group on the teaching and learning of stochastics
87 - Carmen Batanero
88 - Kath Trutan
89 - Discussion Group
90 - Openended tasks and assessing mathematical thinking
91 - Number theory discussion gruop
92 - Stephen Campbell
93 - Semiotic theory and practice in mathematics education
94 - Adam Vile
95 - Luis Radford
96 - Under- represented Countries in PME: Towards the analysis of mathematics education research Communities
97 - Pedro Goméz
98 - Paola Valero
99 - Bernadette Denys

صحبت کردن راهی به سوی نوشتن

نویسندگان: د.هاینکر ـ ک .لافلین

ترجمهٔ: مرسده شیرازی

اندیشه و صحبت از گامهای مهم در به معنا رساندن نوشته‌های دانش‌آموزان است. این مقاله برای اصلاح برقراری ارتباط در نوشته‌های ریاضی، روش اندیشه، صحبت، نگارش را شرح می‌دهد. بزرگسالان به خوبی خردسالان می‌توانند از این روش استفاده کنند.

نقش صحبت در یادگیری ریاضی

فرصتهایی که در کلاس درس برای صحبت بوجود می‌آید، به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا بین زبانی که از طریق تجربه و سابقهٔ شخصی می‌دانند و زبان کلاسی و ریاضیات، ارتباط برقرار کنند (Gawned 1990). تجزیه و تحلیلهای شخصیِ ایده‌های ریاضی باعث می‌شود که شخص از وضعیتهایی که مهم جلوه‌گر شده، آنهایی را که مهم نیستند بشناسد.

در انتخاب زبان صحیح ـ کلماتی که بوسیلهٔ دیگران تشخیص داده و پذیرفته می‌شود ـ دانش‌آموزان، موجودیت دانسته‌ها و مفاهیم ساخته‌شده برای ایده‌های ریاضی را شرح می‌دهند. مکالمه با سایرین به اشخاص، اجازهٔ بررسی و درک معانی را می‌دهد. این دسترسی به اندیشهٔ دیگران، قابلیت پالایش، گسترش و اثبات وجود ایده‌ها را با همان وضوح و روشنیِ عقایدی که قسمت به قسمت درک شده‌اند، فراهم می‌کند (Labercane 1986).

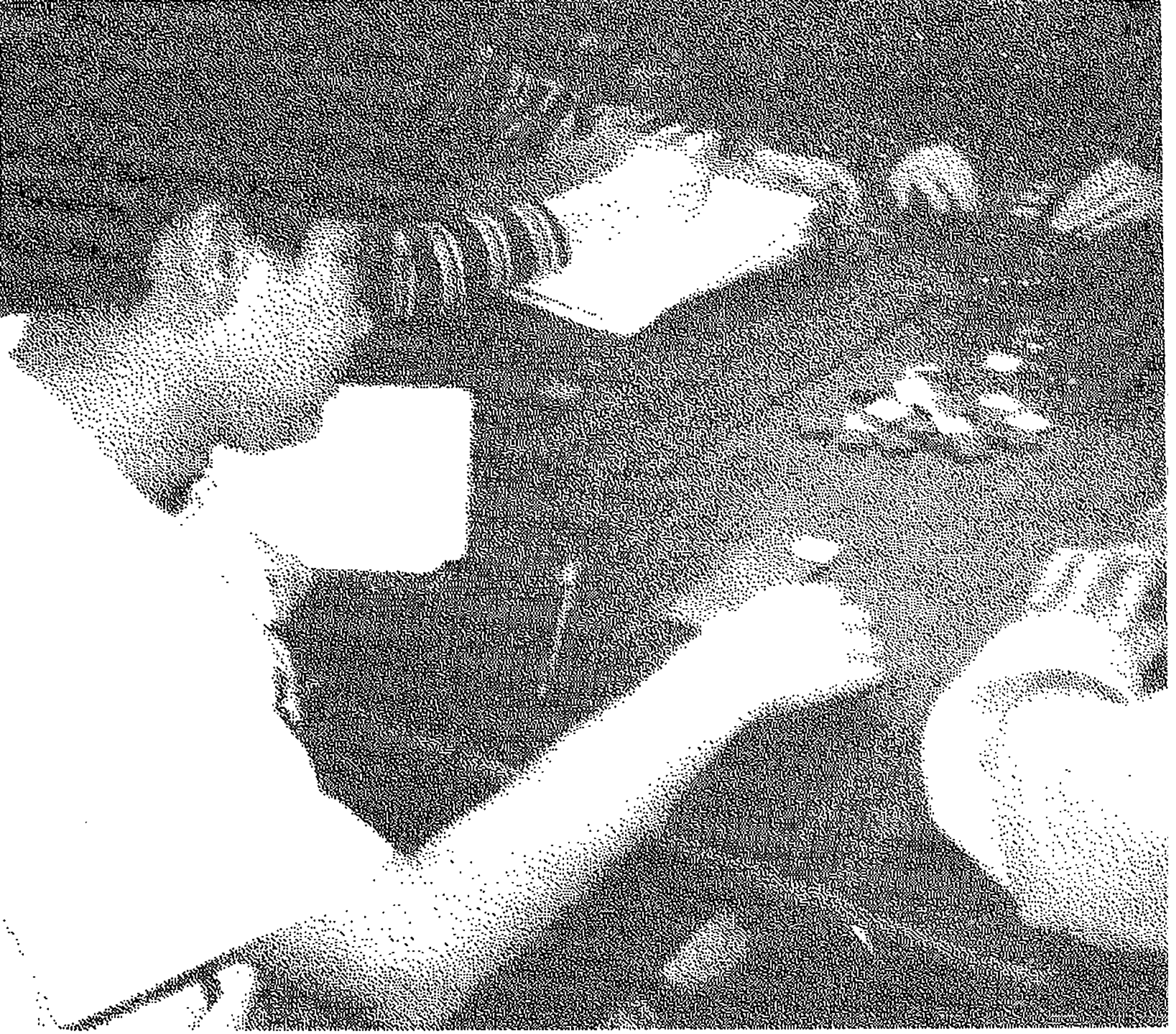
دانش‌آموزان هنگامیکه دربارهٔ تجربیاتشان صحبت می‌کنند و ایده‌های جدیدشان را با لغات، بیان می‌کنند، از آنچه که واقعاً میدانند و آنچه که نیاز دارند تا بدانند و فراگیرند، آگاه می‌شوند.

همچنین، صحبت کردن، همکاری را پرورش می‌دهد و به ساختن یک انجمن دانش یا اطلاعات در کلاس کمک می‌کند. وقتی بارها به دانش‌آموزان مجال صحبت کردن دربارهٔ ریاضی داده شود، می‌فهمند برای فکرشان ارزش قائل شده است. این حس تعاون به دانش‌آموزان کمک می‌کند که به راحتی ریسکهای زیادی کنند. از طریق گفتگو این عقاید آزمایش می‌شوند و واژه‌ها می‌توانند کشف گردند و با روشهای مختلف سازماندهی، هیچ فکر با ارزشی از دست نمی‌رود. (Reid 1983. P.4.) دانش‌آموزان با شرکت در صحبت درهدف مشترک یادگیری سهیم شده و هر کدام معلم دیگری می‌شوند.

اندیشه ـ صحبت ـ نگارش

برای بیشتر بچه‌ها صحبت کردن طبیعی است ولی نوشتن نه! مراحل

صحبت کردن مانند عمل متقابل شخصی با دیگران در سراسر زندگی به یک بچه یاد داده و تقویت می‌شود، ماهیت طبیعی و سهولت صحبت کردن، جوّ راحتی برای دانش‌آموزان در کلاس می‌سازد که می‌توان از آن بعنوان یک وسیله ارزشمند پیش از نوشتن استفاده کرد (Abbott 1991, Reid 1983). همانطور که دانش‌آموزان دربارهٔ ایده‌ها و افکار ریاضی بر اساس تجربیاتشان صحبت



می کنند، قادر به نوشتن دربارهٔ این ایده‌ها نیز می‌شوند.

روش -«اندیشه، صحبت، نگارش» - در زمان فکر کردن، تأمل کردن، سازماندهی افکار و امتحان ایده‌ها ساخته می‌شود، قبل از اینکه دانش‌آموزان بخواهند بنویسند.

دانش‌آموزان اغلب انتظار دارند وقتی یک تکلیف نوشتنی تعیین می‌شود، سریعاً شروع به نوشتن کنند.

در مرحلهٔ صحبت از روش-«اندیشه، صحبت، نگارش»-فکر، اجازهٔ مذاکرهٔ اکتشافی می‌دهد- یعنی مرحلهٔ یادگیری بدون جوابهای کاملاً بی‌عیب. (cazden (1988, p. 133

روند پیشرفت ارتباطات، دانش‌آموزان را از اندیشیدن و مکالمهٔ رودررو با خودشان، به صحبت کردن و مشارکت در عقاید با همدیگر و سرانجام نوشتن سوق می‌دهد.

بنظر می‌رسد که این روش عامل مؤثری باشد مخصوصاً وقتی که از دانش‌آموزانی که در گروههای ناهمگن ۲ الیٰ ۶ نفره کار می‌کنند، در مورد شرح دادن، خلاصه کردن، یا منعکس کردن، سئوال می‌شود. با کوچکترین گروهها شروع می‌شود و سپس تعداد دانش‌آموزان افزایش می‌یابد و پیشرفت تدریجی راحتتر می‌گردد.

مثال: کلاس سوّم.

در یک درس معارفه‌ای با مفهوم تقسیم، دانش‌آموزان برای کاوش پیرامون موقعیتهای تقسیم به گروههای کوچک دسته‌بندی شدند. سپس دربارهٔ یافته‌هایشان، مانند یک گروه کامل بحث کردند.

بااستفاده‌ازروش «اندیشه-صحبت-نگارش» دانش‌آموزان مفهوم تقسیم را شرح می‌دهند:

مرحلهٔ اندیشه:

معلم: تقسیم چیست؟ برای ۳۰ ثانیه، به اینکه تقسیم چه مفهومی دارد، فکر کنید. بدون صحبت فقط فکر کنید. من، وقتی زمان تمام شود به شما می‌گویم.

دانش آموزان مشغول فکر می‌شوند (یک گفتگوی فکری بین خودشان)

مرحلهٔ صحبت:

معلم: در گروههایتان، به نوبت، یکی پس از دیگری به شرح معنای تقسیم بپردازید. چه کسی می‌تواند در حدود ۳۰ ثانیه صحبت کند؟ وقتی یکی صحبت می‌کند بقیه گوش می‌دهند. من وقتی نوبت صحبت کردن نفر بعدی برسد به شما خواهم گفت.

دانش‌آموزان شروع به صحبت می‌کنند.

اینجا صحبت یکی از گروهها را داریم:

ژانت: تقسیم، قرار دادن اشیاء در گروههاست.

پُل: وقتی که تقسیم می‌کنید، گروهی از اشیاء را به گروههای جدید و کوچکتری تبدیل می‌کنید.

نیکُل: در تقسیم باید گروهها یکنواخت و برابر باشند.

جان: بله اما گاهی اوقات خوب درنمی‌آید و مقداری اضافه می‌آورد که همان باقیمانده است.

مرحلهٔ نگارش:

معلم: حالا دربارهٔ آنچه که هر نفر در گروههایتان گفته است فکر کنید و سپس از لغات و واژه‌ها استفاده کرده-و اگر می‌خواهید از شکلها نیز استفاده کنید-و توضیح دهید تقسیم چه مفهومی دارد؟

بفرمایید، بنویسید.

نوبت گرفتن در طی مرحلهٔ صحبت، به خصوص در ابتدا مهم است. چرا که به همهٔ دانش‌آموزان یک فرصت یکسان برای صحبت داده می‌شود.

نوبت گرفتن، هر دانش‌آموز را مطمئن می‌کند که افکارش را می‌تواند شفاهی بیان کند و هیچ دانش‌آموزی در صحبت کردن حکم‌فرمایی نکند. دانش‌آموزان دیگر می‌توانند سئوالهایی را برای وضوح و روشنی بپرسند، مثلاً: «منظور شما از آن چیست؟» امّا آنها نباید اظهار عقیده کنند تا اینکه نوبتشان برسد.

اغلب دانش‌آموزان به اینکه مجبور به صحبت کردن و گوش دادن باشند، عادت نکرده‌اند. بنابراین ممکن است بعضی مواقع روند پیشرفت به کندی صورت بگیرد. نهایتاً می‌توان محدودیت زمانی را برداشت تا دانش‌آموزان احترام گذاشتن به عقاید دیگران را یاد بگیرند و همهٔ افراد گروه صحبت کنند.

نوشتهٔ ژانت را که در شکل ۱ نشان داده شده با نوشتهٔ نیکل که در شکل ۲ آمده، مقایسه کنید. توجه کنید که هیچ یک از دو دختر چیزی دربارهٔ باقیمانده نگفتند، اما مفهوم در نوشته‌هایشان ظاهر شده است.

احتمالاً جملهٔ جان دربارهٔ باقیمانده‌ها در تقسیم، به دختران برای شرح کاملتری در نوشته‌هایشان دربارهٔ تقسیم کمک کرده است.

وقتیکه دانش‌آموزان به شخص دیگری گوش می‌دهند، آنها از سخنان دانش‌آموزان دیگر، برای توضیح و توسعهٔ فکر و نتیجه‌گیری شخصی خود استفاده می‌کنند.

مثال: کلاس هفتم

در کلاس هفتم از روش اندیشه، صحبت و نگارش، تا پایان آن دوره بر اساس کتاب موش و فیل از پروژهٔ ریاضیات مقطع متوسطه (نوشتهٔ Fitzgrald, shroyer در سال 1986) استفاده می‌شد.

بر اساس دروس این کتاب دانش‌آموزان، وقتی محیط ثابت نگه‌داشته می‌شد تغییراتی در مساحت پیدا کردند و بالعکس. از دانش‌آموزان نسبت به مطالعاتشان در مورد ارتباط بین مساحت و محیط خلاصه‌ای خواسته شد.

مرحلهٔ اندیشه

معلم: برای ۳۰ ثانیه دربارهٔ رابطهٔ بین محیط و مساحت که شما در چند هفتهٔ پیش دیدید، فکر کنید. هنوز صحبت نکنید. من وقتی زمان تمام شود به شما خواهم گفت، حاضرید؟ بفرمائید و فکر کردن را شروع کنید.

دانش آموزان به آرامی روی فعالیتها

و بحثهایی که تجربه کرده بودند اندیشیدند.

مرحلهٔ صحبت

معلم: حالا به نوبت هر کس در گروه خودش روابطی را که در بین محیط و مساحت مشاهده کرده شرح دهد. شما ۱ دقیقه صحبت کنید و بقیه گوش دهند. من وقتی زمان تمام شد به شما خواهم گفت که نفر بعدی صحبت کند.

دانش‌آموزان شروع به صحبت کردند.

در آغاز برای دانش‌آموزان صحبت کردن به مدت ۱ دقیقه مشکل است، معلمان باید از آنها بخواهند این کار را با ۳۰ ثانیه شروع کنند.

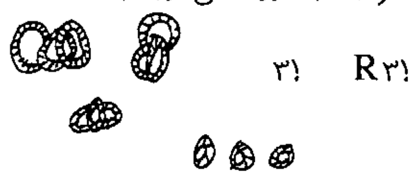
در زیر گفتگو یکی از گروهها آمده است:

جنیفر: رابطهٔ بین مساحت و محیط یک شکل، شبیه رابطه بین ناحیه داخلی یک شکل و مرز بیرونی آن است.

کیشا: آنچه که من دریافت کردم چنین است، اگر شما یک شکل درست کنید (بسازید)، می‌توانید مساحت و محیط آنرا با استفاده از شکل مشابه آن پیدا کنید شما می‌توانید کاشی‌های بیشتری اضافه کنید در حالیکه محیط به همان صورت باقی بماند ولی مساحت تغییر کند یا مساحت تغییر نکند (همانطور بماند) و محیط تغییر کند. برای مثال ما شکل به صورت U در کلاس ساختیم. بسیاری از افراد محیط را تغییر دادند امّا مساحت تغییر نکرد و بسیاری هم مساحت را تغییر دادند امّا محیط تغییری پیدا نکرد.

جُرج: بزرگترین محیط، یک مربع است. تمام ابعاد باید مساوی باشد.

تقسیم یک مفهوم در ریاضیات است که شما اعداد را در گروههایی قرار می‌دهید. بعضی اوقات اعدادی اضافه می‌آیند که آنها باقیمانده نامیده می‌شوند. اگر شما باقیمانده داشته باشید آنرا به اینصورت می‌نویسید.



شکل ۱ نوشتهٔ ژانت (کلاس سوم)

من فکر می‌کنم تقسیم خیلی آسان است وقتی که من تقسیم می‌کنم می‌فهمم که گروهها نسبت مساوی دارند اگر گروهها یکسان نباشند، باقیمانده آن در A، ریخته می‌شود، باقیمانده عددی است که باقی می‌ماند.

شکل ۲ نوشته نیکل (کلاس سوم)

فِرد: یک رابطه‌ای که آنها دارند چنین است: وقتی محیط چیزی ثابت است مساحت ممکن است تغییر کند. یک روش، ساختن جدولی با طول، عرض و مساحت است. شما برای بدست آوردن مساحت باید ضرب کنید.

مرحلهٔ نگارش:

معلّم: زمان نوشتن است. رابطه‌هایی را که بین مساحت و محیط دیدید شرح دهید.

نوشته‌های این دانش‌آموزان نشان داد که آنها به دقت به صحبتهای بقیه گوش داده‌اند در ابتدا به نوشتهٔ جُرج در شکل ۳ نگاه کنید. (جُرج) اظهار کرده که محیط می‌تواند ثابت بماند در حالیکه مساحت عوض می‌شود که البته او این مطلب را از کیشا شنیده بود سپس او این رابطه را در یک جدول که پیشنهادی از فِرد بود نشان داد. جُرج همچنین بیان این مطلب که مساحت همیشه برابر با طول ضربدر عرض است را مهم دانست، که این هم توسط فِرد ذکر شده بود.

نوشتهٔ جنیفر نشان می‌دهد که او هم بدقت به افراد گروهش گوش داده است. او اول از همه صحبت کرده و فقط مساحت و محیط را تعریف کرده بود در صورتیکه نوشتهٔ او شامل عقاید ذکر شده توسط بقیه افراد گروه بود.

او یک جمله از مشاهدات کیشا در مورد تغییر محیط و مساحت ثابت را اضافه کرد، کشف جُرج در رابطه با بزرگترین محیط را ذکر کرد و شرح فِرد را دربارهٔ استفاده از یک جدول را تکرار کرد و به دقت توضیح فِرد در مورد چگونگی محاسبه مساحت را شرح داد.

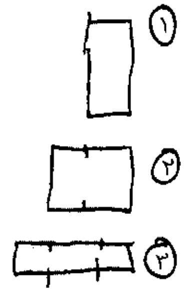
افکار و مفاهیم ناقص یا تصور غلط به عنوان یک قسمت طبیعی از مراحل یادگیری، در صحبتها و نوشته‌های هر دو دانش‌آموز اتفاق افتاد.

مرحلهٔ صحبت اغلب به روشن شدن

طبق مطالعهٔ ما و آنچه که یاد گرفته‌ایم، محیط می‌تواند ثابت بماند و مساحت تغییر کند. مساحت همیشه طول ضربدر عرض هست. آنها با یک روش ریاضی برای پیدا کردن بزرگترین مساحت بدست می‌آیند.

بطور مثال:

	طول	عرض	مساحت	محیط
۱	۳	۱	۶	۸
۲	۲	۲	۸	۸
۳	۱	۳	۶	۸



شکل ۳ نوشته جُرج (کلاس هفتم)

بعضی از این تصورهای غلط کمک می‌کنند. اگرچه غالباً تا وقتیکه دانش‌آموزان ننویسند مشهود نیست.

در شکل ۳ اگرچه جُرج توضیح داده که مساحت برابر با طول ضربدر عرض است امّا واقعاً اینکه او چگونه این مساحت را حساب کرده واضح نیست و یا او هیچ اشاره‌ای بر اینکه واحدها خطی یا مربع هستند نکرده است.

این از قلم افتادگی‌ها به احتیاج بیشتر برای کاهش دانسته‌های جُرج برای معلوم کردن اطلاعاتش از محیط و واحدهای اندازه‌گیری، اشاره می‌کند.

تأثیر در یادگیری و تدریس

معلمان واکنش مثبت نسبت به روش اندیشه-صحبت-نگارش نشان داده‌اند. آنها در نوشته‌های بچه‌ها پیشرفتهایی را مشاهده کرده و بحثهای جالبی را در میان بچه‌ها در گروههای کوچک شنیده‌اند مانند نقلهای زیر:

معلم کلاس سوم:

حالا دانش‌آموزان قبل از اینکه چیزی بنویسند می‌پرسند: «می‌توانیم ابتدا در مورد آن صحبت کنیم؟»

معلم کلاس هفتم:

این روش واقعاً تأثیر مثبتی روی شاگردان من گذاشته است. نوشته‌های آنها پیشرفت کرده است همانطور که تمایل آنها برای شرکت کردن در افکار و عقاید بطور جمعی افزایش یافته است. همچنین بر روی درس دادن من هم تأثیر گذارده است.

من در حال حاضر ساعتی را برای اینکه دانش‌آموزان با یکدیگر در گروههای کوچک صحبت کنند، در نظر می‌گیرم. من فکر می‌کنم که دادن یک شانس برای شرح عقاید خود به هر دانش‌آموز، خیلی مهم است. من شاگردانم را مجبور می‌کنم که در گروههای کوچک کار و فکر کنند و مشغول صحبت شوند.

بعضی‌ها معمولاً کناره‌گیری می‌کردند و برخی از دانش‌آموزان هیچ حرفی نمی‌زدند و یا نمی‌خواستند صحبت کنند. حالا آنها هم به صحبت کردن تمایل نشان می‌دهند و یکدیگر را به صحبت کردن تشویق می‌کنند.

دانش‌آموزان هم نسبت به روش اندیشه-صحبت-نگارش واکنش مثبت نشان دادند. از بعضی از دانش‌آموزان خواسته شد که افکارشان را در مورد مجبور شدن به اندیشه و صحبت قبل از نوشتن، بیان کنند:

دانش‌آموز کلاس سوّم:

من دوست دارم که صحبت کنیم. اینکار در یادگیری به من کمک می‌کند.

دانش‌آموز کلاس سوّم:

این روش بدین طریق به من کمک می‌کند که وقتی من با افراد گروهم می‌توانم صحبت کنم مطلب را بهتر متوجه می‌شوم.

دانش‌آموز کلاس هفتم:

خوب، بعضی اوقات من از اینکه مطلب را واقعاً فهمیده‌ام مطمئن نیستم امّا بعد از اینکه فرد دیگری در گروهم آن‌را شرح می‌دهد، به من کمک می‌کند که آن را بهتر بفهمم.

توصیه‌های پایانی

بحث کردن و نوشتن هر دو مهم هستند و جنبهٔ اساسی در ایجاد ارتباط در همهٔ کلاسهای ۱۲ گانه دارند (NCTM-1988) بحث‌های کلاسی باید شامل

بحثهای رودررو و یا گفتگوهای مستقیم در میان بچه‌ها و بدون دخالت معلم باشد
(cazden 1988)

روش اندیشه ـ صحبت ـ نگارش دانش‌آموزان را به حرکت در مسیر بدست آوردن مهارت برای گوش دادن به توضیحات بقیه افراد، کمک می‌کند.

در کلاس ما باید مراقب باشیم که از گفتگو غافل نشویم، امّا حق تقدم داده شود. روش اندیشه ـ صحبت ـ نگارش ارائه شده در اینجا به همهٔ دانش‌آموزان اجازه می‌دهد دربارهٔ عقایدشان پس از فکر کردن و قبل از نوشتن صحبت کنند. صحبت کردن شناسایی واژه‌ها و بررسی افکار را تقویت می‌کند.

صحبت کردن باعث بالا بردن درک می‌شود. وقتی که به دانش‌آموزان فرصتهای بسیار برای صحبت کردن داده شود مفهومی که ایجاد شده راهش را به سوی نوشتهٔ دانش‌آموزان پیدا می‌کند و این نوشته در بوجود آمدن معنا، بیشتر سهیم می‌شود.

مرجع اصلی:

communication in Mathematics
K-12 and Beyond
NCTM 1996 yearbook

مراجع:

Abbott,Susan."Talking It Out:A Prewriting Tool". English Journal 78 (April 1991): 49-50

Atkinson, Sue, ed. Mathematics With Reson. Portsmouth, N.H.: Heinemann Educational Books , 1992.

Cazden, Courtney B. Classroom Discourse: The language of Teaching and Learning Portsmouth, N.H. Heinemann Educational Books, 1988.

Gawned, Sue " The Emerging Model of the language of Mathematics". In Language in Mathematics, edited by Jennie Bickmave-Brand, PP. 27-42. Portsmouth. N.H.: Heinemann Educational Books, 1990

Labercane, George. Talking the Loneliness out of writing. paper presented at the annual meeting of the National council of teachers of English, Saint Louis , MO., November 1988 (ERIC Document Reproduction Service no ED 305 646).

Mumme, Judith, and Nancy shepherd. "Implementing the standards: communication in Mathematics".
Arithmatic Teacher 38 (september 1990): 18-22

National council of Teachrs of Mathematics. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, Va.: National council of Teachers of Mathe- matics, 1989.

Reid, Louann. Talking: The Neglected Part the Writing process. paper presented at the annual meeting of the National council of Teachers of English, seattle, Wash., April 1983. (ERIC Document Reproduction service no.ED 229 762)

Shroyer, Janet, and William Fitzgerald. Mouse and Elephant: Measuring Grouth. Middle Grades Mathematics Project. Menlo Park, calif.: Addision- Wesley Publishing Co. 1986.

بسم الله الرحمن الرحیم

In The Name of Allah

Roshd

Mathematics Education Journal

No. 49-1997

Editor in chief:
Gooya Z.

Editoreal Board:
Babolian E., Gholam Azad S., Haji Babai J., Jalili M., Medggalchi A., Pasha E. & Zanganeh B.

P.O.Bax 1587, Mathematic Department
Inanshahr Shomali,
Building Na. 4

CONTENtS

فرم اشتراک مجلات آموزشی رشد

■ مشخصات و نشانی خود را کامل و خوانا بنویسید.
■ ارسال اصل رسید بانکی ضروری است.

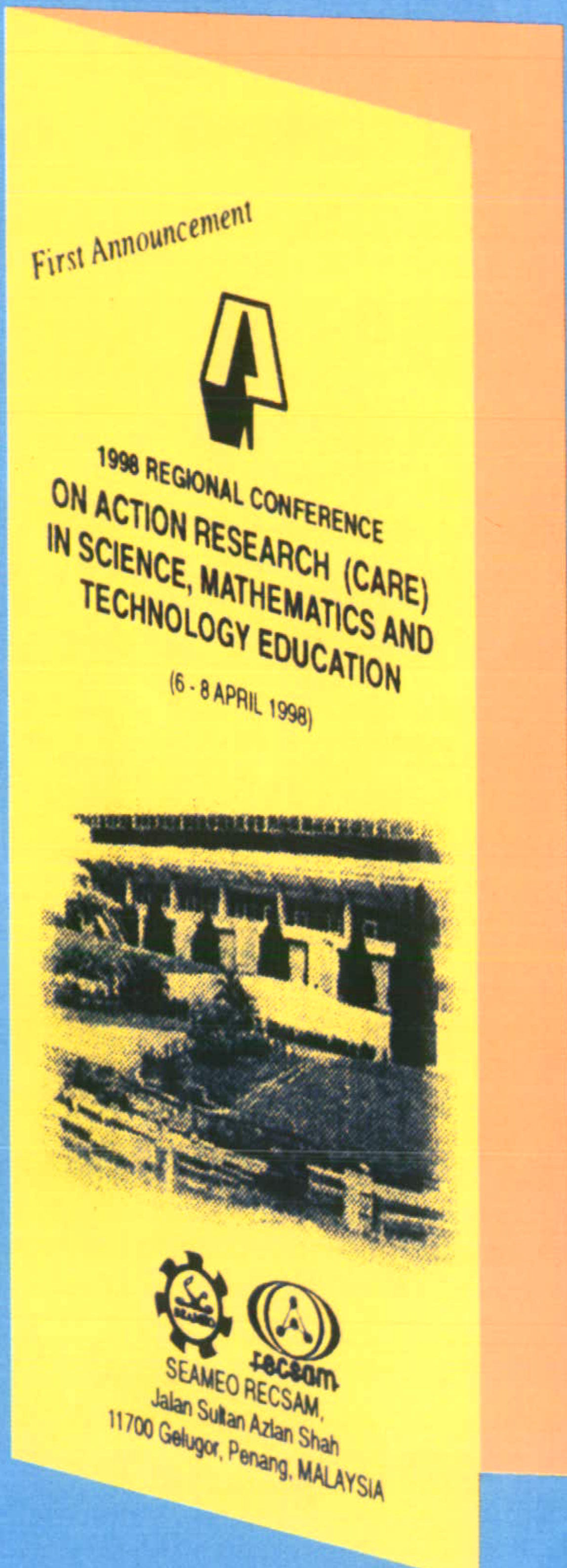
● نام و نام خانوادگی..........................
● تاریخ تولد..........................
● میزان تحصیلات.......... ● تلفن:..........
● نشانی کامل: استان:...... شهرستان:..........
خیابان:.......... کوچه:.......... پلاک:..........
کدپستی:.......... مبلغ واریز شده:..........
● شماره رسید بانکی:..........................
● تاریخ رسید بانکی:..........................
● مجلهٔ درخواستی:..........................

امضاء..........

شرایط اشتراک:

۱. واریز حداقل مبلغ ۱۰۰۰۰ ریال به عنوان علی الحساب به حساب شمارهٔ ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سرخه حصار کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست و ارسال اصل رسید بانکی همراه با فرم تکمیل شده اشتراک به نشانی دفتر انتشارات کمک آموزشی.

۲. شروع اشتراک از زمان وصول فرم درخواست است. بدیهی است یک ماه قبل از اتمام مبلغ علی الحساب، به مشترک جهت تجدید اشتراک اطلاع داده خواهد شد.



اولین آگهی کنفرانس منطقه‌ای
دربارهٔ تحقیق عمل (اقدام پژوهی)
در آموزش علوم، ریاضی و تکنولوژی

آخرین مهلت ارسال چکیده ها :
۱۵ ژانویه ۱۹۸۸

موضوع کنفرانس :
کنفرانس در یک نشست بین رشته ای ، فرصتی برای معلمان، آموزشگران و پژوهشگران ریاضی ایجاد می‌کند تا نتایج پژوهشهای تحقیق عمل (اقدام پژوهی) خود را ارائه کنند و به تبادل ایده‌ها و اطلاعات برای توسعهٔ مطالعات در تحقیق عمل آموزشی در حوزهٔ آموزش ریاضی و بهبود کیفیت تدریس و یادگیری ریاضی بپردازند.

۶ تا ۸ آوریل ۱۹۸۸
در مالزی

MINISTERIO DE CULTURA
Y EDUCACION

OLIMPIADA MATEMATICA
ARGENTINA

38th
International
Mathematical
Olympiad

38th

July 18-31

1997

18 al 31 de julio
Mar del Plata / Buenos Aires
Argentina.

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD

سی و هشتمین
المپیاد بین المللی ریاضی