رشد آموزش ریاضی

سال چهاردهم / شماره ۵۳ / پاییز ۱۳۷۷ / ۲۰۰ تومان

دکتر غلامحسین مصاحب

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی

شماره مسلسل ۵۳ / سال تحصیلی ۷۸ - ۱۳۷۷ / پاییز ۱۳۷۷

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۸ - ۱۵۸۷۵
تلفن امور مشترکین: ۹ - ۸۸۳۱۱۶۰ (داخلی ۴۳۲)

چاپ: شرکت افست (سهامی خاص)

- مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و حاصل تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، بویژه معلمان مقاطع مختلف را، در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد.
- مطالب باید یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدولها، نمودارها و تصاویر، پیوست باید در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله باید روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- اصل مقاله‌های ترجمه شده باید به پیوست، ارسال شود.
- در متنهای ارسالی باید تا حد امکان از معادلهای فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویسها و منابع باید کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد.
- مجله در رد، قبول، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مختار است.
- آرای مندرج در مقاله‌ها، ضرورتاً مبین نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسشهای خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله‌های دریافتی در هر صورت (رد یا قبول) بازگشت داده نمی‌شود.

یادداشت سردبیر

در شروع قرن بیستم، یکی از وظایف مهمّ مدرسه، انتقال دانش و حقایق علمی به دانش آموزان بود. در آن زمان و در غیاب رسانه های عمومی و ارتباطات کنونی، همچنین به دلیل محدودیت منابع و کم حجم بودن اطلاعات، مدرسه این مهمّ را به خوبی انجام می داد. تاریخ آموزش و پرورش نشان می دهد که در این دوران، تأکید بر «موضوعهای درسی» یکی از جهت گیری های اصلی «برنامهٔ درسی» بود. این جهت گیری، از دلایل عمدهٔ جذب افراد به مدرسه و ایجاد اعتماد در جامعه نسبت به مدرسه بود. افراد باید به گونه ای قانع می شدند که بین «مدرسه رفتن و نرفتن» تمایزی وجود دارد. به عنوان مثال، در دو سه دههٔ اول قرن بیستم، برنامهٔ درسی ریاضی با تأکید بر «سودمندی اجتماعی» به انتخاب محتوا پرداخت. افراد جامعه نیز با افزایش معلومات، توانستند از نظر شغلی و اجتماعی، امتیازهای ویژه به دست آورند و جزء طبقات «برگزیده» قرار بگیرند. در نتیجه، این خود یک عامل جذب به مدرسه و یادگیری رسمی شد. به تدریج که جوامع به نقش مدرسه به عنوان یکی از «نهادهای مهم اجتماعی» توجّه بیشتری کردند و مسألهٔ اجباری و عمومی کردن آموزش مطرح شد، توقّعات و انتظارات جدیدی نسبت به مدارس شکل گرفت. با گسترش و تنوّع دانش و ارتباطات، مدرسه دیگر نمی توانست فقط محلّی برای انتقال حقایق علمی باشد و این در حالی بود که مدرسه می توانست هم محلّی برای «فرهنگ پروری» و هم «فرهنگ زدائی» باشد. این توانائی بالقوهٔ مدارس، عالمان تربیتی را متوجّه حساسیت نقش مدرسه و محتوای آموزش داده شده در آن کرد. با توجه به نقشی که مدرسه در تربیت شهروندان می توانست ایفا کند، این نهاد اجتماعی به صورت یکی از ارکان اصلی توسعهٔ جامعهٔ مدنی درآمد. مدرسه علاوه بر آموزش موضوعهای گوناگون، می بایستی زندگی کردن و چگونه زیستن در جامعه را نیز به دانش آموزان آموزش می داد. جان دیوئی این توقع را به گونه ای دیگر مطرح کرد و گفت «مدرسه دربارهٔ زندگی نیست، مدرسه خود زندگی است!» این تعبیر لطیف و محکم از مدرسه مؤیّد تصوّری است که جامعه از مدرسه به عنوان مکانی پر شور و نشاط، پاک و صمیمی پیدا کرده بود. با افزایش ضرورت اشتغال زنان و مردان در بیرون از خانه، مسئولیت سنگین انسان سازی و اجتماعی کردن شهروندان بر دوش مدارس گذاشته شد. برنامهٔ درسی، انتخاب محتوا، شیوه های ارزشیابی و روشهای تدریس، همگی با زندگی مدرسه و انتظارات جامعه از آموزش عمومی ارتباط تنگاتنگ پیدا کرد. رشد بیسابقهٔ دانش؛ ضرورت چگونگی دستیابی به اطلاعات، پردازش آنها و یاد گرفتن یادگیری را برجسته کرد. پژوهش نشان می داد که مدارس باید به جای آموزش موضوعی و محدود، بیشتر بر آموزش روشی و فرآیندی تأکید کنند. در نتیجه برنامه های درسی نیز تحت تأثیر این تأکیدات قرار گرفتند. به نسبت سطح فراگیری آموزش عمومی، نیاز به بازسازی برنامه های درسی برای جوابگوئی به خواستهای اجتماعی، تضمین حقوق شهروندی و ایجاد انگیزه و علاقه در دانش آموزان بیشتر احساس شد. در واقع، دانش آموز به مدرسه می رفت تا به قول دیوئی «زندگی» کند و به این دلیل، به تدریج موضوعهای درسی از محوریت صِرف خارج شدند و همگی تلاش کردند تا در خدمت تربیت «شهروند خوب» با تعریفهای مشخّص درآیند. برای مثال، با توجه به نقش کلیدی ریاضی در تربیت شهروندان، پژوهشهای متعدد نیاز به تحول در زمینهٔ برنامهٔ درسی ریاضی، انتخاب محتوا و روشهای تدریس ریاضی را عنوان کردند. در آستانهٔ ورود به قرن بیست و یکم، جهت گیری برنامهٔ درسی از انتقال صرف اطلاعات به چگونگی پردازش و بازیافت اطلاعات تغییر کرد.

نهضت حل مسأله ریاضی که از اواخر نیمهٔ اول قرن بیستم مجدداً توسط جورج پولیا مطرح شد، دوباره از اواخر دههٔ هفتاد میلادی مورد عنایت ویژه قرار گرفت.

جامعهٔ پژوهشی آموزش ریاضی دورنمای برنامهٔ درسی ریاضی را با توجّه به تغییرات بیسابقهٔ اجتماعی، اقتصادی، فرهنگی و از همه مهمتر تکنولوژی، به گونه ای ترسیم می کرد که در آن، دانش آموز به جای فقط دریافت حقایق خشک، جدا از هم، بدون کاربرد و مهارت آموزی ریاضی، بیشتر به یادگیری استدلال،

مدلسازی، ایجاد ارتباط بین اجزای ریاضی، گسترش ارتباطات از طریق ریاضی و افزایش توانائی های حل مسأله بپردازد. چنین دورنمایی از ریاضی، در واقع همان چیزی است که دیوئی از آن تعبیر زندگی را دارد. دانش آموز در مدرسه می خواهد با ایجاد اعتماد به نفس و با افزایش علاقه و انگیزه، از طریق یادگیری ریاضی احساس قدرتمندی علمی بیشتری کند و توان حل مسائل واقعی امّا غیر کلیشه ای و فی البداهه را پیدا کند. چنین نگرشی به ریاضی مستلزم تغییر نگرش به انتخاب محتوا، روشهای تدریس و روشهای ارزشیابی و به طور کلی تغییر نگرش به مدرسه است. دانش آموز در مدرسه باید یاد بگیرد که برای مسائل حل نشدهٔ خود و جامعه ای که در آن زندگی می کند، راه حلهای اصولی پیدا کند. دانش آموز امروز برای فردای نزدیکی تربیت می شود که در آن، قدرت از دانائی حاصل می شود نه فقط از زور بازو! فردائی که وابسته به تکنولوژی و مدلسازی و برنامه ریزی است و چنین فردائی، بلامنازع نیاز روزافزون به توانمندی ریاضی افراد جامعه دارد. منتها این توانمندی از طریق تکرار و تمرینهای کلیشه ای، کسالت آور، خشک و خسته کننده و با محتوا و روش کهنه حاصل نمی شود. این توانمندی ها از طریق روشهای بدیع و جذاب و در کلاسهائی سرشار از روح زندگی ایجاد می شود. در آستانهٔ ورود به قرن بیست و یکم، دانش آموزان ما بیش از هر چیز، به یاد گرفتن یادگیری و یادگیرندهٔ مستقل شدن نیازمند هستند. با این حال، جریان آموزشی فعلی پاسخگوی چنین نیازهائی نیست. متأسفانه در چند سال اخیر، گاهی مدرسه های ما تبدیل به آموزشگاههائی شده اند که فقط در آنها، موضوع درسی دنبال می شود ـ غرض شد دنبال می شود زیرا در بسیاری مواقع، آموزش غیر رسمی در حاشیهٔ آموزش مدرسه ای، مدارس را از موضوعیّت انداخته اند و باز هم متأسفانه، بعضی تأکیدات موجود آموزشی، زندگی طبیعی مدرسه را مختل کرده است. تبلیغات بی رویه برای انواع آموزش های غیر رسمی شامل تدریس خصوصی، کلاس خصوصی و کتابهای اغلب غیر کارشناسی کمک درسی، اعتبار واقعی مدرسه را زیر سؤال برده است. به دلیل آنکه تصور غالب از مدرسه در حال حاضر، محلی برای دریافت اطلاعات محدود است، زیاد دیده شده است که زحمات معلمان گرامی در کلاسهای درس به هدر می رود. زیرا این بزرگواران به جای آنکه بتوانند با یادگیری نشاط علمی ایجاد کنند، گاهی موظف به ارائهٔ یک رشته حقایق علمی ـ آن هم در یک فضای بدون تعامل هستند زیرا شیوه ها و توقعات ارزشیابی، ابتکارات معلمان را محدود کرده است. از طرف دیگر، دانش آموزانی که از طریق آموزشهای غیر رسمی و واسطه ای تغذیه می شوند، در کلاس درس خسته و بی انگیزه شده و کلاً چنین فضائی، اجازه یک «زندگی» سالم را به آنها نمی دهد. بعضی خانواده ها نیز بدون توجّه به عقوبت دخالتهای دلسوزانه و غیر متخصصانهٔ خود و از شدّت ناچاری، ابتکار عمل را به دست می گیرند و ناخواسته به بی رمق کردن حیات مدرسه کمک می کنند.

بحث جدید «مدرسه محوری» اگر به معنای بازگرداندن حیات از دست رفته به مدارس تفسیر شود، بسیار امیدوار کننده است. با این حال، نظام آموزشی باید به این مسأله عنایت بیشتری داشته باشد که «مدرسه محوری» بدون واگذاری بخشی از اختیارات آموزشی به معلمان توانا، دلسوز، علاقه مند و مسئولیت پذیر امکان ندارد. ممکن است برای بعضی این سوال مطرح شود که آیا جامعهٔ معلمان ما آمادگی پذیرش چنین مسئولیتی را دارد؟ به نظر می رسد که در جواب باید گفت: تا در زمینهٔ آموزش معلمان و تغییر باور جامعه نسبت به این مسأله سرمایه گذاری علمی نشود طبیعی است که علاقه و حسّ دلسوزی به تنهائی کارآئی لازم را نخواهند داشت. اما با توجه به این که معلمان یکی از رکن های اصلی نظام آموزشی هستند و بدون خواست آنها، هیچ تحوّل آموزشی به موفقیّت واقعی نخواهد رسید، لازم است که برای تقویت، حمایت و جذب و نگهداری و اعتلای علمی ـ حرفه ای این ستونهای اصلی آموزش برنامه ریزی های تازه و بدیع انجام گیرد.

سردبیر

تأسیس دوره کارشناسی ارشد و دکترای آموزش ریاضی یک ضرورت

زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

در گذشته، میزان نیاز جوامع به آموزش رشته های مختلف به اندازهٔ زمان حاضر نبود. یک دلیل آن است که در آن دوران، موازنهٔ جامعه به نفع آموزش دهنده ها بود نه آموزش گیرنده ها. معنای این حرف آن است که تعداد محدودی افراد علاقه مند و شیفتهٔ یادگیری، خود انتخاب می کردند که تلاش کنند و یاد بگیرند. در نتیجه، به دلیل انتخابی که انجام داده بودند، تمام هیجانها، فراز و نشیبها و سختی های یادگیری را هم تحمل می کردند و چون خودشان مشتاق بودند، بالاخره به نتیجه ای می رسیدند. البته، تعدادی از آنها در میانهٔ راه حذف می شدند و افرادی که با توان و شیفتهٔ یادگیری بودند، راه را ادامه می دادند. در نتیجه، بحث راجع به چگونگی آموزش موضوعهای مختلف، بحث محوری نبود.

آموزش ریاضی، علوم، تکنولوژی و غیره زمانی مطرح می شود که موازنه تغییر یافته و جامعه نیازمند به آموزش افرادش باشد. در جریان توسعه، جوامع در موقعیتی قرار گرفتند که به اجبار می بایست به یادگیری شهروندان خود کمک کنند و برای آن سرمایه گذاری نمایند، زیرا در غیر این صورت، آن جوامع زیان می دیدند. در واقع، اگر مانند گذشته فقط افراد خاصّی چراغ به دست به دنبال علم و عالم می گشتند و با یادگیری بیشتر سیراب می شدند، جامعه توان حرکت به سوی توسعه را نداشت. با تغییر موازنه، جوامع مجبور بودند که به دنبال یادگیرنده ها بروند، کمکشان کنند؛ تشویقشان نمایند؛ در آنها انگیزه ایجاد کنند و مشکلات یادگیری آنها را حل کنند زیرا که حیات و بقای جامعه در گروی آموزش شهروندان بود. بنابراین ضرورت، رشته های آموزش و موضوعهای مختلف روبه رشد نهاد. طبیعی است به دلیل نقش محوری ای که ریاضی در توسعهٔ علوم دیگر دارد، توجّه به رشتهٔ تحصیلی «آموزش ریاضی» از اهمیت ویژه ای برخوردار شد.

همانطور که در مقالهٔ «آموزش ریاضیات چیست» گفته شد، «آموزش ریاضی» اگرچه از دو واژهٔ «آموزش» و «ریاضی» تشکیل شده، ولی جزئی از این و جزئی از آن نیست تا آن دو را به هم بچسبانیم و «آموزش ریاضی» را به وجود آوریم! «آموزش ریاضی» نه زیرمجموعه ای از ریاضی و نه زائده ای برآن است و نه فقط هرجا که پای ریاضی لنگ می شود به میدان می آید! «آموزش ریاضی» به طور جدّی و مشخص، درگیر تمام مسائل مربوط به جریان یاددهی ـ یادگیری ریاضی است. این جریان، به آنچه که شامل انتخاب محتوا، برنامهٔ درسی، روش تدریس، آموزش معلّم، شرایط یادگیری، ارزشیابی از آموخته ها و آنچه که مربوط به یادگیرندهٔ ریاضی است، اطلاق می شود.

آموزشگر ریاضی که محصول رشتهٔ تحصیلی «آموزش ریاضی» است باید با نظریه های مختلف یادگیری، چگونگی شکل گیری مفاهیم ریاضی در ذهن یادگیرنده، ساختار ذهنی یادگیرنده و روانشناسی یادگیری آشنائی کافی پیدا کند. تا این آشنائی حاصل نشود، جلوگیری از بدفهمی ها و کج فهمی های یادگیرنده تقریباً نا ممکن است. انسان بسیار پیچیده است و شناخت انسان مقولهٔ مهمی در یادگیری است. در نتیجه، مطالعهٔ شناخت در انسان، مراحل رشد آن، و واقف بودن به پیچیدگی و رمز و راز یادگیری انسان، جوامع پیشرفته را وادار کرد تا به مسألهٔ آموزش موضوع های مختلف و از جمله ریاضی، توجه بیشتری کنند. نکتهٔ بسیار مهم این است که اگر جامعه ای فکر کند با دانستن موضوع و ارائهٔ درست آن ـ با توجه به ماهیت موضوع ـ یادگیری حتماً اتفاقّ می افتد، آن جامعه خدای ناکرده دچار یک خوش بینی ساده لوحانه شده است، اگر چنین بود، این همه سرمایه های عظیم انسانی و مالی به هدر نمی رفت. این اتلافها به دلیل مشکلاتی است که بر سر راه یادگیری قرار دارد. آموزش ریاضی به دلیل ماهیت ریاضی و

متأسفانه میزان افت در موفقیت تحصیلی دارای رسالت سنگینی است. بهمین جهت چگونگی تشکیل ساختارهای مفهومی ریاضی، موضوع مطالعه و پژوهش چند دههٔ اخیر بوده است. ماهیت دوگانهٔ ریاضی که از یک طرف بسیار مجرّد و از طرف دیگر بسیار تجربی است، یادگیری آن را ویژه کرده است. متأسفانه از اوائل قرن بیستم و با اوج گیری صورتگرائی، جنبهٔ تجربی ـ عملی ریاضی نادیده گرفته شد و صورت مجرد شدهٔ آن به دانش آموزان کم سن و سال ارائه گشت. در نتیجه آنها نسبت به ریاضی نوعی وازدگی پیدا کردند و از درک آن اظهار عجز نمودند و این وضعیت، زنگهای خطر را به صدا درآورد. برای ارزیابی مشکل و رفع آن، مسئولیت سنگینی متوجه آموزش ریاضی شد زیرا ریاضیدانان جامعه کم کم احساس کردند که بدون آموزش خوب، رشد و توسعهٔ همه جانبه در ریاضی امکان ندارد. ریاضیدان ریاضی را می فهمید، درک می کرد و از آن لذّت می برد امّا الزاماً نمی توانست در عموم یادگیرندگان ـ نه نخبگان ـ این فهم و درک و لذت را ایجاد کند و همین دغدغه، ضرورت همکاری صمیمانه بین این دو حوزهٔ معرفتی را ایجاب می کرد. دیدگاههای فلسفی و معرفت شناسی ریاضی نقش اساسی در تبیین روشهای آموزشی دارند. به عنوان مثال، نتیجهٔ بحث بر سر این که آیا اشیای ریاضی ساختهٔ ذهن هستند یا آن که وجود دارند و به وسیلهٔ بشر کشف می شوند تبعات آموزشی متفاوتی دارد. حال آنکه در علوم تجربی، با توجه به ماهیت پدیده های علمی، رویکردهای آموزشی متفاوتی وجود دارد. ساخت و ساز گراها معتقدند که انسان سازندهٔ دانش خویش است. اما این ساختن در ریاضی ـ با توجه به اشیای آن ـ و در علوم تجربی ـ با توجه به پدیده های آن ـ متفاوت هستند و آموزشگران ریاضی دربارهٔ این تفاوت و تبعات آموزشی آن به پژوهش می پردازند. آن شهودی که در اکثر موضوعهای درسی وجود دارد، گاهی ناآگاهانه از ریاضی گرفته شده، در نتیجه، دانش آموز در اولین برخورد با ریاضی احساس می کند با موجودی غیر طبیعی روبه رو شده است و این پدیدهٔ جدائی از زندگی طبیعی و مجرد بودن، به یادگیری ریاضی ضربه زده است. لایب نیتس می گوید: هیچ چیز مهمتر از دیدن سرچشمه های اختراع نیست که به اعتقاد من، از خود اختراعات جالب توجه تر هستند. و به اعتقاد پولیا، مطالعهٔ فرآیند حل مسأله می تواند کمک زیادی به کشف و خلق روشهای متنوع برای حل مسألهٔ ریاضی باشد، یعنی همانطور که لایب نیتس معتقد است، دیدن سرچشمه های اختراع و چگونگی شکل گیری یک فکر، اگر آموزنده تر و جذاب تر از نتیجهٔ نهائی یعنی اختراع انجام شده و مسألهٔ حل شده نباشد، کمتر از آن هم نیست. محتوای ریاضیات مدرسه ای در دهه های گذشته، به گونه ای انتخاب و تدریس شده بودند که کمتر فرصت دیدن سرچشمه ها و فرآیند شکل گیری تفکر ریاضی و حل مسأله را به یادگیرنده می دادند. تأکید بیش از حد بر یادگیری محصول تفکرات ریاضیدانها بدون آشنائی با شهود و جریان شکل گیری آن تفکرات ریاضیات را از دسترس همگان خارج می کرد و تنها ابزاری برای تربیت نخبگان می شد. در حال حاضر با افزایش نیازمندی به ریاضی در سایر رشته ها و ضرورت یادگیری آن توسط تمام یادگیرنده ها، «آموزش ریاضی» مسؤلیت پیدا کردن راهکارهای مناسب جهت تسهیل یادگیری ریاضی را به دوش می کشد.

از جمله وظیفه های اصلی آموزش ریاضی، تحقیق و بررسی و سپس توسعهٔ چگونگی تدریس و یادگیری ریاضی با در نظر گرفتن شرایط اجتماعی، ماهیت موضوعی ریاضی، هدفهای یادگیری از دید روانشناسی، نقش ریاضی در توسعهٔ جوامع و بسیاری عوامل دیگر است. آموزش ریاضی با تجزیه و تحلیل فعالیتهای ریاضی، به ارائهٔ راههائی برای ریاضی وار فکر کردن و گسترش ریاضی پیدا می کند. همچنین، به توسعهٔ حل مسأله، اثبات، مهارتهای عملی، زمینه سازی برای تفکر تجریدی و بالاخره ارتقای جریان یاددهی ـ یادگیری می پردازد. آموزش ریاضی نه تنها باید بین جامعه و ریاضی آشتی ایجاد کند، بلکه باید راه را برای پرورش خلاقیتها و شکوفائی توانائیها و تربیت ریاضیدانها نیز هموار نماید.

آموزش ریاضی برای ایجاد تعادل بین محتوا و روش، با نقّادی هدفهای عمومی تدریس ریاضی، و با درنظر گرفتن پیش نیازهای یادگیری ریاضی، محتوا را به گونه ای انتخاب می کند که هم تغییرات عظیم در درون علم ریاضی در نظر گرفته شود و هم نیازهای اجتماعی و فردی به ریاضی برآورده گردد. به خصوص در پایان دورهٔ صنعتی و ورود به عصر ارتباطات و خدمات و اطلاعات، جامعه نیازمندی بیشتری به ریاضی خواهد داشت و این نیاز باید از مسیر آموزش عمومی و دانشگاهی تأمین شود.

در چنین دوران تاریخ سازی که جامعهٔ ما می خواهد و می باید به سمت خودکفائی و استقلال حرکت کند و از مصرف کردن دانش به تولید آن بپردازد، نیاز به آموزش ریاضی به عنوان یک حوزهٔ معرفتی؛ بیش از همیشه

احساس می شود. بررسی تاریخ برنامهٔ درسی ریاضی در دنیا نشان می دهد که **در خلاء تحقیقات اصیل در زمینهٔ آموزش ریاضی**، گاهی زبان و محتوایی برای ریاضی مدرسه ای انتخاب شد که خارج از دنیای ریاضی تجریدی تخصصی، چندان معنا و مفهومی نداشت که بهترین نمونهٔ آن، برنامهٔ درسی دوران ریاضیات جدید و شکست تأثرآور آن در دههٔ ۱۹۶۰ میلادی بود.

آموزش ریاضی وظیفهٔ آموزش و بازآموزی معلمان ریاضی را عهده دار است که در واقع، ستونهای اصلی نظام آموزشی هستند. بدون برنامه ریزی های متکی به یافته های اصیل، آموزش معلمان در چند درس روش تدریس خلاصه خواهد شد درحالی که پیچیدگیهای یادگیری انسان و ماهیت علم ریاضی، تحول عمیق و همه جانبه ای را در آموزش معلمان طلب می کند.

آموزش ریاضی به عنوان یک شاخهٔ تحصیلی بین رشته ای نیازمند عبور از مزرهای بین رشته ها است و بستگی به نتیجه ها و روشهای حوزه های متفاوت معرفتی از جمله ریاضی، تعلیم و تربیت، روش ها و الگوهای تدریس، جامعه شناسی، روانشناسی، تاریخ علوم و موارد دیگر دارد. با این حال، دانش علمی دربارهٔ تدریس ریاضی نمی توان فقط با ترکیب نتیجه ها از حوزه های ذکر شده به دست آید، بلکه آموزش ریاضی به عنوان پیش فرض، رویکرد آموزشی ویژه ای دارد که در آن، جنبه های مختلف را به صورت تصویر منسجم و جامعی از تدریس و یادگیری ریاضی تلفیق می کند و سپس آنها را برای استفادهٔ علمی به صورتی سازنده جابه جا می نماید.»

به سفارش اتحادیهٔ بین المللی ریاضیات، مطالعه ای با عنوان «پژوهش در حوزهٔ آموزش ریاضی چیست و نتیجه های آن کدام است؟» توسط «کنگرهٔ بین المللی تدریس ریاضی» انجام شد و در هشتمین کنگره بین المللی آموزش ریاضی ارائه گشت[1]. آشنائی با این مطالعه برای جامعهٔ ریاضی، به ویژه در زمانی که بحث بر سر تأسیس دورهٔ «کارشناسی ارشد آموزش ریاضی» وارد مراحل جدّی شده است ضروری است. در این مطالعه ریاضیدانها و آموزشگران ریاضی دیدگاههای خود را نسبت به آموزش ریاضی، تحقیقات آموزش ریاضی و ضرورت و اهمیت آن اعلام کردند. ویتمن، ریاضیدان آلمانی در پایان مقالهٔ خود که به همین مناسبت تهیه کرده بود گفت: «من نمی خواهم به متخصصان ریاضی نصیحتی کنم، اما از نظر من، برای آنها مهم است که خود را شریک و سهیم جریان وسیعی که شامل ریاضی و آموزش ریاضی می شود بدانند. بدون تغییراتی در میزان آگاهی ریاضیدانها از آموزش ریاضی و تحقیقات آن، تمام تلاشها برای تغییر تصور جامعه از ریاضی [به عنوان یک علم سودمند، ضروری و جزء جدا ناپذیر رشد و تعالی انسان]، تنها در سطح آرایشی است و محکوم به شکست خواهد بود. امید است که از تقابل و تضارب دیدگاهها، مبنای نظری حوزهٔ معرفتی آموزش ریاضی در ایران محکمتر و واقعی تر تبیین شود و هر چه زودتر، شاهد تأسیس این رشته در ایران باشیم.

البته لازم به ذکر است که به دلیل محدودیت نیروی انسانی متخصص در این حوزه، پیدایش این رشته تلاشهای مضاعفی را می طلبد. بسیاری از ریاضیدانهای حرفه ای که علایق و دغدغهٔ آموزشی دارند، می توانند نقش مؤثری در شکل گیری و ادامهٔ حیات این رشته در ایران داشته باشند. همچنین، استادان توانای علوم تربیتی در رشته های مختلف هم به تناسب موضوع می توانند با این رشته مشارکت نمایند. این رشته به دلیل ماهیت بین رشته ای آن، باید در دانشگاههائی تأسیس شود که دارای دوره های کارشناسی ارشد و ترجیحاً دکترای ریاضی و برنامه ریزی درسی و روانشناسی باشند و حداقل یک نفر متخصص در رشتهٔ آموزش ریاضی نیز در آن دانشگاه حضور داشته باشد. همچنین، در سالهای اول تأسیس این رشته، می توان همزمان هم از متخصصان زبده و شاخص بین المللی برای برپائی دوره های کوتاه مدت و میان مدّت و کلاسهای مختلف بهره گرفت و هم برای تربیت نیروی متخصص، افراد علاقمند و توانا را به خارج اعزام کرد. از همه مهم تر، باید از حداکثر ظرفیت تکنولوژی ارتباطی برای بالا بردن ظرفیتهای علمی ـ تخصصی ـ پژوهشی بهره جست، امید است در شمارهٔ آیندهٔ مجله، خبر تأسیس این دوره به خوانندگان گرامی داده شود. انشاءالله.

زیرنویس:

۱ـ این کتاب توسط انتشارات kluwer در سال ۱۹۹۸ چاپ شده است.

قضیهٔ مک لورن در حسابان دبیرستانی

نویسنده: ایسبران دوبرن، مترجم: روح الله جهانی پور

در درس حسابانی که در دبیرستان تدریس می کنم، معمولاً قضیهٔ مک لورن را به عنوان یک موضوع درسی بسیار غنی مورد بررسی قرار می دهم. هر چند ممکن است سری مک لورن در درس حسابان دبیرستانی معمول نباشد، ولی تقریب زدن توابعی چون سینوس، کسینوس و نمایی اینقدر برای دانش آموزان مهم و زیبا هست که چیزهایی دربارهٔ آن بیاموزند و به همین دلیل می ارزد که به این موضوع به عنوان یک مبحث اضافی توجه شود.

غیر از توابعی که اشاره کردیم، توابعی هستند که می توان آنها را بدون استفاده از قضیهٔ مک لورن با چند جمله ای ها تقریب زد. تابع

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

نمونه ای از این دست است. دانش آموزان قبل از آنکه شروع به مطالعهٔ درس حسابان کنند، سری هندسی را خوانده اند. اگر سری هندسه را در نظر بگیریم که جملهٔ اول آن ۱ و قدر نسبت آن x است، آنگاه با به کار بردن فرمول مجموع یک سری هندسی داریم:

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

این فرمول را به صورت دیگری هم می توان نوشت. با شکستن عبارت طرف راست به تفاضل دو عبارت کسری، داریم.

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

با بازآرایی فرمول اخیر می توانیم تابع $\frac{1}{1-x}$ را به صورت مجموع یک چند جمله ای و یک جملهٔ باقیمانده بنویسیم:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

وقتی $|x|<1$، با افزایش درجهٔ چند جمله ای، جملهٔ باقیمانده حذف می شود و لذا می توان تابع $1/(1-x)$ را با هر اندازه دقت که موردنظر باشد، با یک چند جمله ای تقریب زد. همچنین در این حالت اگر n را به بی نهایت میل دهیم، $1/(1-x)$ مجموع یک سری هندسی نامتناهی خواهد شد. تقریب این تابع با چند جمله ایها به واسطهٔ ارتباطش با سری هندسی، منشأ جبری داشت.

حال تابع $f(x)=(1+x)^n$ را در نظر می گیریم. وقتی n عدد صحیح مثبت است، f(x) یک چند جمله ای است، و قضیهٔ دو جمله ای نشان می دهد که چگونه می توان آن را بر حسب توانهای صعودی x مرتب کرد. در واقع این تابع بهترین تقریب چند جمله ای خودش است و به کمک قضیه مک لورن نیز می توان از این موضوع اطمینان یافت. اما وقتی n مقدار کسری یا منفی می گیرد، وضعیت پیچیده تر می شود. در این حالت که مثلاً در مورد توابعی چون مثلثاتی، نمایی و لگاریتمی با آن برخورد می کنیم، به کمک ابزارهای حسابان می توان به بهترین تقریب چند جمله ای دست یافت. قضیهٔ مک لورن ابزاری است برای یافتن تقریب چند جمله ای برای بسیاری از توابع.

در حسابان دبیرستانی، اغلب دانش آموزان فقط اطلاعات خامی درباره انتگرال گیری، یعنی یافتن انتگرال نامعین توابع ساده و یافتن مساحت زیر نمودار توابع ساده، دارند. برای این قبیل دانش آموزان به دست آوردن فرمود مک لورن با یکی از روش های معمول مثل استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء مناسب نیست. با این حال می توان سری مک لورن را با روشی کاملاً طبیعی به کمک مفهوم دم دستی چون مساحت زیر نمودار که برای هر دانش آموز دبیرستانی در درس حسابان قابل درک است، به دست آورد.

قضیه: اگر تابع f(x) همراه با نخستین $n+1$ مشتق خود روی بازهٔ بستهٔ [a,b] شامل صفر تعریف شده باشد، طوری که مشتق $(n+1)$ـ م F روی [a,b] کراندار به ترتیب با کرانهای بالا و پایین M و m باشد، آنگاه اگر $n+1$ زوج باشد، برای هر $x\in[a,b]$

$$\frac{mx^{n+1}}{(n+1)!}\le f(x)-p(x)\le\frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (1)$$

که در آن

$$p(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (2)$$

اگر $n+1$ فرد باشد، نامساوی (۱) برای $x<0$ برعکس می شود.

چند جمله ای p(x) که در (۲) تعریف می شود را می توان چند جمله ای مک لورن تابع f(x) نامید. اثبات این قضیه بر مبنای گزارهٔ زیر است:

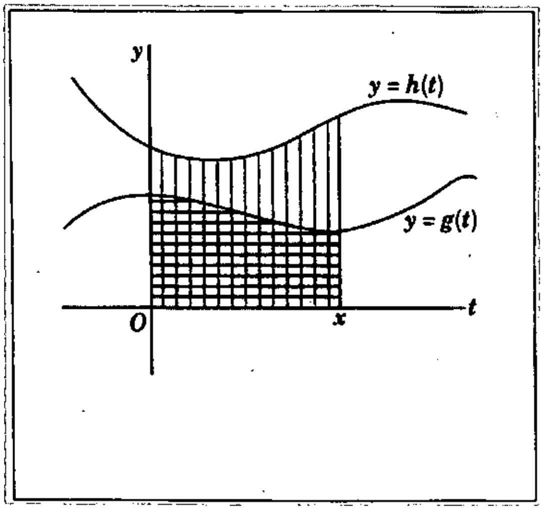
گزاره: اگر روی بازه ای شامل صفر، مقادیر دو تابع g و h طوری مرتب شده باشند که برای هر t در آن بازه، $g(t)\le h(t)$، آنگاه برای هر $x>0$ در آن بازه،

$$\int_0^x g(t)dt \le \int_0^x h(t)dt.$$

برای $x < 0$ جهت نامساوی عوض می شود.

اگر g و h توابع نامنفی باشند، نامساوی انتگرالی فوق به کمک تعبیر مساحتی انتگرال، واضح است. شکل ۱ نشان می دهد که بین $t = 0$ و $t = x$ ، مساحت بین $y = g(t)$ و محور tها کوچکتر یا مساوی است با مساحت بین $y = h(t)$ و محور tها و این به مکان x در آن بازه بستگی ندارد.

شکل ۱



ناحیه سایه زده شده نشان می دهد که اگر روی یک بازه $g(t) \le h(t)$ ، آنگاه $\int_0^x g(t)dt \le \int_0^x h(t)dt$

اثبات قضیه: چون حالت $x < 0$ مشابه است با حالت $x > 0$ ، برای سادگی می توانیم فرض کنیم که $x > 0$. همانطور که نمودارهای شکل ۲ نشان می دهند، نامساوی

$$m \le f^{(n+1)}(t) \le M$$

نتیجه می دهد که برای همهٔ مقادیر x، $0 < x \le b$

$$\int_0^x mdt \le \int_0^x f^{(n+1)}(t)dt \le \int_0^x Mdt.$$

با انجام انتگرال گیری ها به دست می آوریم

$$mx \le f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0) \le Mx.$$

چون این نامساوی ها برای همهٔ مقادیر x در بازهٔ $0 < x \le b$ درست هستند، در این بازه، نمودار $y = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)$ بین نمودارهای $y = mt$ و $y = Mt$ واقع می شود. (شکل ۳ را ملاحظه کنید) اگر مجدداً انتگرال بگیریم به دست می آوریم

$$\int_0^x mtdt \le \int_0^x [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)]dt \le \int_0^x Mtdt.$$

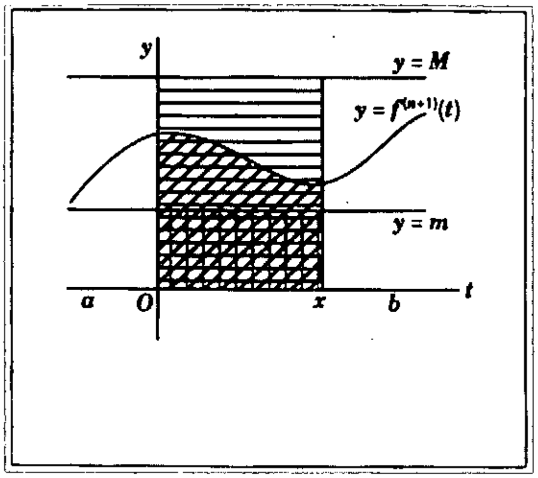
که با انجام دادن انتگرال گیری، برای هر $x \in [a,b]$ خواهیم داشت

$$\frac{m}{2}x^2 \le f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0)x \le \frac{M}{2}x^2.$$

اگر این فرآیند را $n - 1$ بار تکرار کنیم، به نابرابری زیر می رسیم

$$\frac{mx^{n+1}}{(n+1)!} \le f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2!}x^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \le \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$$

شکل ۲



نامساوی های $m \le f^{(n+1)}(t) \le M$ نتیجه می دهند که برای همهٔ مقادیر x،

$$\int_0^x mdt \le \int_0^x f^{(n+1)}(t)dt \le \int_0^x Mdt.$$

اگر فرض کنیم که $p(x)$ نشان دهندهٔ چند جمله ای

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

باشد، می توانیم آخرین مجموعه از نامساوی های فوق را به این صورت بازنویسی کنیم

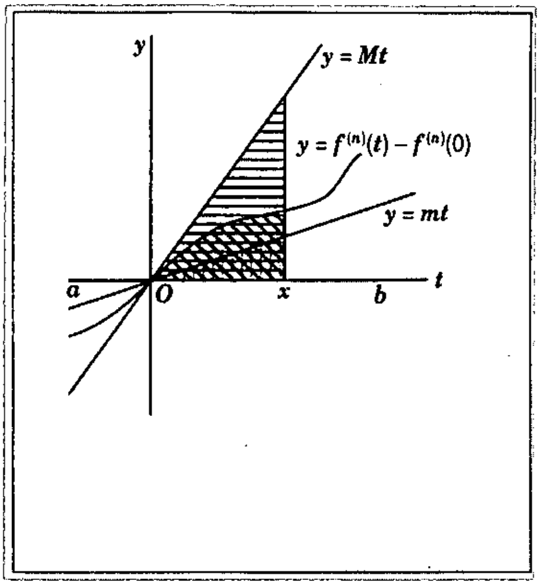
$$\frac{mx^{n+1}}{(n+1)!} \le f(x) - p(x) \le \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$$

و بنابراین قضیه به اثبات می رسد.

برای اثبات تقریب چند جمله ای یک تابع مفید باشد، باید

اندازه‌ای از دقت تقریب بین چند جمله‌ای و آن تابع موجود باشد. قضیهٔ فوق این اندازه را نیز به طور ضمنی فراهم می‌آورد.

شکل ۳



نامساوی‌های $mt \le f^n(t)-f^n(0) \le Mt$ نتیجه می‌دهند که برای همه مقادیر X،

$$\int_0^x mt\,dt \le \int_0^x [f^n(t)-f^n(0)]\,dt \le \int_0^x Mt\,dt$$

نتیجهٔ ۱: اگر $c=\max\{|a|,|b|\}$ و $K_{n+1}=\max\{|m|,|M|\}$، آنگاه برای هر $x\in[a,b]$ داریم

$$|f(x)-p(x)| \le \frac{k_{n+1}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{k_{n+1}c^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (۳)$$

اثبات نتیجه: فرمول (۳) مستقیماً از خود قضیه، به دست می‌آید، زیرا در حالتی که $n+1$ زوج است، برای هر $x\in[a,b]$

$$\frac{-k_{n+1}c^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{-k_{n+1}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{mx^{n+1}}{(n+1)!} \le f(x)-p(x) \le \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$\le \frac{k_{n+1}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{k_{n+1}c^{n+1}}{(n+1)!}$$

اگر $n+1$ فرد باشد، باید برای $x<0$ جای m و M را در نامساوی فوق عوض کرد. به هر صورت فرمول(۳) نتیجه می‌شود.

این نتیجه نشان می‌دهد که در هر کاربرد خاص قضیه بهترین تقریب زمانی رخ می‌دهد که بازهٔ $[a,b]$ تا حد ممکن کوچک باشد و

m و M به ترتیب مقادیر می‌نیمم و ماکزیمم f^{n+1} (مشتق $(n+1)$ام f روی بازه) هستند.

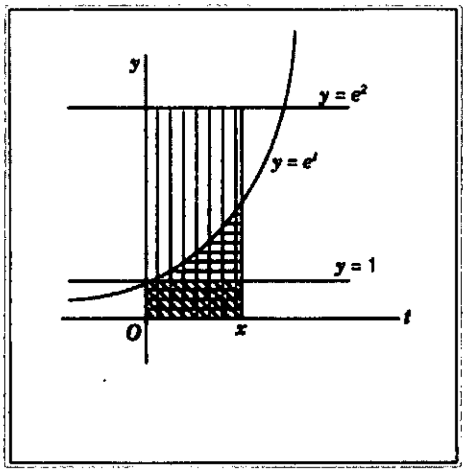
هنگام تدریس این قضیه به دانش‌آموزان دبیرستان، اگر پیش از پرداختن به حالت کلی، با یک مثال ملموس آغاز کنیم، آموزنده‌تر خواهد بود.

مثال ۱: یک تابع ساده اما مهم که من معمولاً برای معرفی این مبحث مورد استفاده قرار می‌دهم، تابع نمایی طبیعی است. چون همهٔ مشتقات تابع نمایی با خودش مساوی هستند، خیلی ساده می‌توانیم با $f^{n+1}(x)=e^x$ که به بازه‌ای چون $0\le x\le 2$ محدود شده است، آغاز کنیم. چون تابع نمایی طبیعی روی بازهٔ $0\le x\le 2$ به ۱ و e^2 کراندار است داریم

$$1\le e^x\le e^2$$

پیش از آنکه همانند اثبات قضیه، به روش انتگرال گیری بپردازیم و e^x را تقریب بزنیم، دانش‌آموزان باید درک کنند که نامساوی‌های فوق را می‌توان تعبیر نموداری کرد به این معنی که نمودار $y=e^x$ بین خطوط $y=1$ و $y=e^2$ قرار می‌گیرد. (شکل ۴ را ببینید)

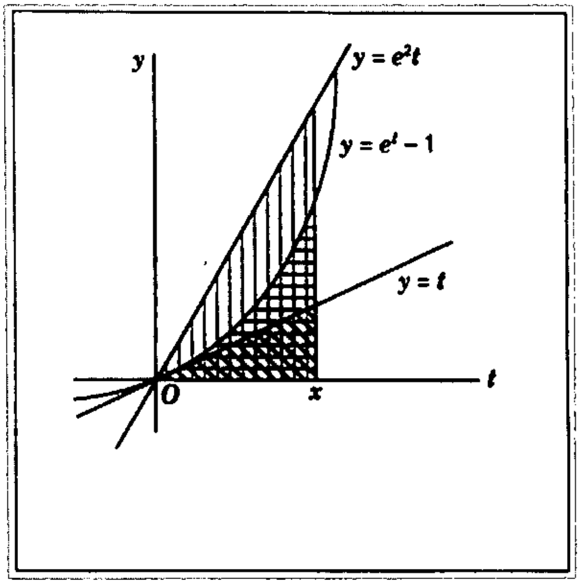
شکل ۴



ناحیه‌های سایه‌زده شده نشان می‌دهد که

$$\int_0^x 1\,dt \le \int_0^x e^t\,dt \le \int_0^x e^2\,dt$$

شکل ۵



نواحی سایه زده شده نشان می دهند که

$$\int_0^x tdt \le \int_0^x (e^t - 1)dt \le \int_0^x e^2 tdt$$

بدین ترتیب دانش آموزان می توانند ببینند که مساحت زیر نمودار $y = e^x$ کوچکتر است از یا مساوی است با مساحت زیر نمودار $y = e^2$. حال نواحی سایه زده شده در شکل ۴ را با نمادگذاری انتگرالی نشان داد:

$$\int_0^x 1dt \le \int_0^x e^t dt \le \int_0^x e^2 dt. \qquad (4)$$

دانش آموزان شما می توانند انتگرال گیری های (۴) را انجام دهند و نتیجه بگیرند که برای هر x در بازهٔ $0 \le x \le 2$

$$x \le e^x - 1 \le e^2 x$$

حال فرآیند تکرار می شود. همانند قبل این نامساویها نتیجه می دهند که نمودار $y = e^x - 1$ بین نمودارهای $y=x$ و $y = e^2 x$ قرار می گیرند. (شکل ۵ را ببینید.) اکنون می توان از کلاس خود خواست که نواحی سایه زده شده در شکل ۵ را با نمادگذاری انتگرالی نشان دهند:

$$\int_0^x tdt \le \int_0^x (e^t - 1)dt \le \int_0^x e^2 tdt.$$

پس از آنکه دانش آموزان، خودشان انتگرال گیری را انجام دادند باید به دست آورند

$$\frac{1}{2}x^2 \le e^x - x - 1 \le \frac{e^2}{2}x^2.$$

کلاس می تواند این فرآیند را هر تعداد دفعه که بخواهید تکرار کند و به یک چند جمله ای که e^x را تقریب می زند برسد.

برای مثال بعد از هفت بار دیگر تکرار عمل انتگرال گیری به نامساوی

$$\frac{1}{9!}x^9 \le e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^8}{8!} \le \frac{e^2}{9!}x^9 \qquad (5)$$

می رسیم. با فرض $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^8}{8!}$ ، نامساوی (۵) را می توان به صورت

$$\frac{1}{9!}x^9 \le e^x - p(x) \le \frac{e^2}{9!}x^9$$

بازنویسی کرد.

$p(x)$ یک چند جمله ای است که تابع نمایی را تقریب می زند و می توان از آن برای تخمین توانهای عدد e استفاده کرد. برای مثال اگر از دانش آموزان خود بخواهید $p(x)$ را به ازای $x = 1$ حساب کنند، آنگاه با به کار بردن نامساوی اخیر به دست خواهند آورد

$$\frac{۱}{۹!} \le e - ۲/۷۱۸۲۷۸۷۷ \le \frac{e^{۲}}{۹!}$$

و چون $e < ۳$ نتیجه می گیریم که

$$۰ < e - ۲/۷۱۸۲۷۸۷۷ < \frac{۱}{۸!} < ۰/۰۰۰۰۲۵.$$

برای مقادیر دیگرِ x در بازهٔ $[۰ و ۲]$ ممکن است تقریب $p(x)$ با e^x به این دقت نباشد.

اکنون [پس از این مثال عددی] می توانیم اثبات قضیهٔ کلی را با رویکرد نموداری، به همان صورت که در مثال ۱ عمل کردیم، ارائه دهیم. مادام که نمودارهایی نظیرِ شکل های ۲ و ۳ در دسترس باشند، دانش آموزان می توانند انتگرالهای مناسب را یافته و محاسبه کنند و فرمول مک لورن را به دست آورند. البته برای سادگی کار، می توان اثبات را فقط به حالت $x > ۰$ محدود کرد.

کاربرد قضیه: دانش آموزان می توانند قضیه را برای تعدادی از توابع ساده اما مهم به کار برند. مثلاً علاوه بر تابع نمایی که قبلاً توضیح داده شد، می توانند چند جمله ای مک لورن را برای توابع سینوسی، کسینوسی و لگاریتمی جستجو کنند.

مثال ۲: دانش آموزان می توانند چند تا از نخستین چند جمله ایهای مک لورن توابع سینوس و کسینوس را به دست آورند؛ این فعالیت آنها را به تحقیق در موضوعاتی از قبیل همگرایی سری مک لورن برای این دو تابع و دقت تقریب آنها با چندجمله ایهای مک لورن، وا می دارد.

چون حالت مربوط به تابع کسینوس شبیه تابع سینوس است، در اینجا فقط یکی از آنها را مورد بررسی قرار می دهیم. مشتقات تابع $f(x) = \sin x$ به ترتیب عبارتند از $\cos x$، $-\sin x$، $-\cos x$، $\sin x$، .... با محاسبهٔ این مشتقات در $x = ۰$ و جایگذاری آنها در (۲) چند جمله ای مک لورن کلی را به دست می آوریم:

$$p(x) = x - \frac{x^{۳}}{۳!} + \frac{x^{۵}}{۵!} - \dots + \frac{(-۱)^{n+۱}x^{۲n-۱}}{(۲n-۱)!}$$

دانش آموزان می توانند با وارد کردن تابع سینوس و مثلاً نخستین سه جمله ای مک لورن آن در یک ماشین حساب که توانایی رسم نمودار را داشته باشد مثل TI - 82، مشاهده کنند که این چند جمله ایها به تابع سینوس همگرا هستند. شکل ۶ نشان می دهد که برای xهای کوچک نخستین سه جمله ای مک لورن، تابع $y = \sin x$ را خیلی خوب تقریب می زنند، ولی برای $x > \frac{\pi}{۲}$، اختلاف زیادی با خود تابع پیدا می کنند. در این نقطه می توان پرسید برای اینکه تابع $y = \sin x$ را برای xهای کوچکتر از π با دقت چهار رقم اعشار تقریب بزنیم به چند جمله از سری مک لورن این تابع نیاز خواهیم داشت.

قضیه ای که ثابت کردیم، به این سؤال پاسخ می دهد. چون توابع سینوس و کسینوس از بالا و پایین به ترتیب به ۱ و ۱- کراندار هستند، قضیهٔ ما نتیجه می دهد که اختلاف بین $\sin x$ و $p(x)$ بین

$$(۶) \qquad \begin{cases} \dfrac{-x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} \\ \text{و} \\ \dfrac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} \end{cases}$$

قرار می گیرد. بعد از مقداری کار با ماشین حساب معلوم می شود که به ازای $۲n + ۱ = ۱۵$

$$\frac{\pi^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} \le ۰/۰۰۰۰۲۲,$$

لذا برای تقریب زدن $y = \sin x$ روی بازهٔ $[-\pi, \pi]$ بیش تر از هفت جمله مورد نیاز نیست.

جالب است که یکی از جملات در (۶) آخرین جملهٔ مک لورن بعدی برای $y = \sin x$ است. از این رو هنگام استفاده از یکی از چند جمله ایهای مک لورن برای محاسبهٔ مقدار $\sin x$، بزرگترین خطای ممکن از قدر مطلق نخستین جملهٔ حذف شده کوچکتر خواهد بود. بنابراین دقت محاسبهٔ هر مقدار تابع سینوس را می توان فوراً بررسی کرد. این دقت برای برنامه هایی که وارد ماشین حساب های علمی می شوند، اهمیت دارد.

مثال ۳: تابع لگاریتم طبیعی مثال جالب دیگری است که دانش آموزان دربارهٔ آن تحقیق کنند. گرچه تابع $y = \ln x$ در $x = ۰$ تعریف نشده است، با انتقال آن به تابع $y = \ln(۱ + x)$، تابعی به دست می آوریم که می توان چند جمله ایهای مک لورن آن را با قدری زحمت پیدا کرد:

$$P_n(x) = x - \frac{x^{۲}}{۲} + \frac{x^{۳}}{۳} - \frac{x^{۴}}{۴} + \dots + (-۱)^{n+۱}\frac{x^n}{n} \qquad (۷)$$

اما سری نامتناهی متناظر با این چند جمله ایها، فقط روی بازهٔ $-۱ \le x \le ۱$ همگرا است و به همین دلیل فقط می توان لگاریتم های اعداد حقیقی بین ۰ و ۲ را با این روش محاسبه کرد. حتی به ازای این مقادیر هم، سری خیلی کُند همگرا می شود و این باعث می شود که استفاده از سری مک لورن برای تابع لگاریتم طبیعی چندان مفید نباشد.

روش مشهوری برای اصلاح همگرایی وجود دارد که در ضمن آگاهی دانش آموزان را از توابع وسعت می بخشد. از نمودار تابع

$$y = \frac{۱ + x}{۱ - x}$$

دانش آموزان می توانند مشاهده کنند که بازهٔ $-۱ \le x \le ۱$ به طور یک به یک به مجموعه اعداد حقیقی مثبت نگاشته می شود. از این رو به ازای هر عدد حقیقی مثبت y، یک $x \in (-۱,۱)$ یکتا وجود دارد که برای آن

$$\ln y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

با بکار بردن قاعدهٔ تقسیم برای لگاریتم‌ها به دست می‌آوریم

$$\ln y = \ln(1+x) - \ln(1-x).$$

با کم کردن چند جمله‌ای مک‌لورن برای $\ln(1-x)$ از چند جمله‌ای مک‌لورن مربوط به $\ln(1+x)$، چند جمله‌ای مک‌لورن برای تابع $[\ln(1+x)/(1-x)]$ را به دست می‌آوریم:

$$P_n(x) = 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \cdots + 2\frac{x^n}{n} \qquad (۸)$$

برای n عدد صحیح و مثبتِ فرد.

اکنون دانش‌آموزان می‌توانند کارایی تقریب مقادیر تابع لگاریتم طبیعی را با چندجمله‌ایهای (۷) و (۸) با یکدیگر مقایسه کنند. مثلاً می‌توانند مقدار $\ln 2$ را تا سه رقم اعشار با استفاده از هر دو چند جمله‌ای تخمین بزنند. به این ترتیب آنها مشاهده خواهند کرد که در استفاده از چند جمله‌ای (۸) که در $x = \frac{1}{3}$ محاسبه می‌شود فقط به سه جمله نیاز است در حالی که اگر بخواهیم چند جمله‌ای (۷) را که در $x = 1$ محاسبه می‌شود، به کار ببریم، به بیش از ۱۵ جمله نیاز داریم.

در نهایت، قضیهٔ مک‌لورن با شکل لاگرانژی باقیمانده نتیجه جالبی از قضیهٔ قبل است، هر چند به مطالبی بالاتر از سطح اغلب دروس حسابان دبیرستانی نیاز دارد.

نتیجهٔ ۲ (قضیهٔ مک‌لورن با شکل لاگرانژی باقیمانده) اگر $n+1$ - امین مشتق $f(x)$ روی بازهٔ بسته‌ای شامل صفر پیوسته باشد، آنگاه به ازای هر مقدار h در این بازه، مقدار t_h بین ۰ و h وجود دارد طوری که

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{n}(0)}{n!}h^n + \frac{f^{n+1}(t_h)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

اثبات نتیجه: چون حالت $h < 0$ مشابه است، می‌توانیم فرض کنیم که $h > 0$، بنابر پیوستگی $f^{n+1}(x)$ روی بازهٔ بستهٔ $[0,h]$ می‌توانیم مقادیر m و M در قضیه را به ترتیب مقادیر می‌نیمم و ماکزیمم تابع $f^{n+1}(x)$ روی $[0,h]$ بگیریم. فرض کنید

$$C = \frac{[f(h) - p(h)](n+1)!}{h^{n+1}}$$

که در آن

$$p(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{n}(0)}{n!}h^n.$$

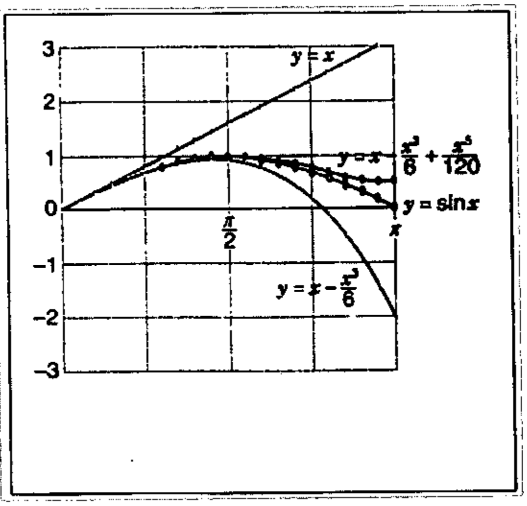
با یک بازآرایی به دست می‌آوریم

$$f(h) - p(h) = \frac{Ch^{n+1}}{(n+1)!}$$

در این صورت نامساوی (۱) در قضیهٔ ما نتیجه می‌دهد که $m \le C \le M$. بالاخره، باز چون f^{n+1} روی بازهٔ $[0,h]$ پیوسته است، بنابر قضیهٔ مقدار میانی، $t_h \in [0,h]$ وجود دارد که برای آن $f^{n+1}(t_h) = C$ به این ترتیب

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{n}(0)}{n!}h^n + \frac{f^{n+1}(t_h)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

شکل ۷



نمودارهای تابع سینوس و نخستین سه چند جمله‌ای مک‌لورن تقریب‌زنندهٔ آن.

مرجع اصلی:

Ysbrand de Bruyn, ***Maclaurin's Theorem for High School Calculus Students,*** *Mathematics Teacher, March 1998, Vol. 91*

مراجع:

Purcell, Edwin J. *Calculus with Analytic Geometry.* 2nd ed. New York: Appleton - Century- Crofts, 1972.

گزارش یک تحقیق

نقش فراشناخت در یادگیری حل مسأله ریاضی

زهرا گویا ، دانشگاه شهید بهشتی

اکثریت قریب به اتّفاق ریاضی دانها و آموزشگران ریاضی بر این باورند که مهمترین و اساسی ترین عامل در یادگیری ریاضی ، توانایی حل مسائل ریاضی است . اما از سوئی در مورد نقشی که حل مسائل و کاربرد آنها در کلاس درس واقعی می تواند ایفا نماید ، تعبیرهای یکسانی وجود ندارد؛ و از سوی دیگر ، یکی از اصلی ترین سؤالها در رابطه با تدریس حل مسأله این بوده است که انسانها در موقع حل مسأله دقیقاً چه می کنند؟ تحقیقات دربارهٔ فرایند حل مسأله به پیدایش کانون جدیدی در ادبیات این رشته منجر شده است که اولین بار توسط فلاول (۱۹۷۳) فراشناخت[1] نامیده شد . مطالعات متعدد نشان داده اند که ایجاد توانائیهای فراشناختی و حل مسأله برای یادگیری ریاضی لازم و ملزم یکدیگرند .

محقق در مطالعه ای که در کانادا انجام گرفته بود ، به طرّاحی روش تدریسی پرداخت که در آن ، تدریس ریاضی از راه حل مسأله بود و استراتژیهای فراشناختی نقش تعیین کننده ای در آن بازی می کردند . هدف از مطالعهٔ فوق ، بررسی تأثیر این نوع روش تدریس ریاضی بر باورهای دانشجویان علوم انسانی نسبت به ریاضی ، حل مسأله ریاضی و از همه مهمتر ، نسبت به خودشان به عنوان انجام دهندگان ریاضی بود . نتایج حاصل از تحقیق تا بدانجا ، امیدوار کننده بود که محقّق را بر آن داشت تا تأثیر روش فوق را در کلاسهای درس ریاضی دانشگاهی برای رشته های علوم انسانی در ایران بررسی کند . نتایج حاصل از تحقیق اخیر که هنوز به مرحلهٔ نهایی نرسیده است ، حتّی امیدوارکننده تر از نتایج قبلی بود و به تأئید اکثریت قاطع دانشجویان و مدیریت دانشکدهٔ مورد تحقیق می توان خوش بین بود که به تحوّلاتی در زمینهٔ وضعیّت ریاضی رشته های علوم انسانی بیانجامد . این مقاله پس از بررسی اجمالی دیدگاههای مختلف تدریس ریاضی ، تعریف فراشناخت و استراتژیهای فراشناختی ، خلاصه ای از تحقیق در حال انجام را ارایه داده و در نهایت به دادن توصیه هایی برای بهبود وضعیّت آموزش ریاضی رشته های علوم انسانی می پردازد .

دیدگاههای مختلف تدریس ریاضی

در دیدگاه سنتی تدریس ریاضی ، هدف از آموزش مفاهیم ، الگوریتمها و مهارتها ، ایجاد توانائی حل مسأله در یادگیرندگان است . البته در این دیدگاه ، حل مسأله تعبیر خاصی دارد و آن رسیدن به جواب صحیح است . یعنی جواب آخر بیش از فرایند حل مسأله اهمیّت دارد . در واقع تکیه و مکانیسم رسیدن به جواب است و روشهایی که در حل مسایل از آن ها استفاده می شود کمتر مورد توجه قرار می گیرد . تقریباً تمامی برنامه ریزی درسی ریاضی - چه در ایران و چه در سایر نقاط دنیا - تحت تأثیر این دیدگاه بوده است و کاربرد مهمّی برای تمرین در کلاس درس دارد . شرودر[2] و لستر[3] (۱۹۸۹) این دیدگاه را «تدریس ریاضی برای حل مسأله»[4] می نامند . در این نوع روش تدریس ، معمولاً معلم ، محتوا و مفاهیم و الگوریتمهای اولیه ریاضی را قبل از آن که یادگیرندگان نیاز به آنها را در حین حل مسأله احساس کنند ، به آنها ارایه می دهد . سپس آنها با دانستن آن مفاهیم و فرمولها و روشها به حلّ مسأله می پردازند . تمرینهای پایان هر فصل کتابهای درسی ریاضی ، نمونه های بارزی از این نوع نگرش هستند . به نحوی که یادگیرندگان ریاضی تعداد زیادی مسایل - تمرین یکنواخت را با به کارگیری یک یا چند روش ، فرمول و الگوریتم مشخّص انجام می دهند . البتّه اغلب تمرینهای آخر بخش مربوط به مفهوم و روشی است که در همان فصل گفته شده است . به این معنی که یادگیرندهٔ منظّم و پر کار به طور طبیعی نباید در حل آن مسایل دچار مشکلی شود و یا وادار به ساختن و خلاقیّت گردد .

نگرش دوم ، چگونگی حل مسأله را بدون در نظر گرفتن محتوا ، یک مهارت می داند ، معلّمی که چنین نگرشی دارد ، ابتدا انواع الگوریتمها و رهیافتها[5] و مراحل حل مسأله را برای دانش آموزان توضیح می دهد و سپس با حل چند مسأله نمونه ، آنها را با چگونگی حل مسایل آشنا می کند . طرفداران این نگرش در تدریس ریاضی ، معمولاً به کتاب «چگونه مسأله را حل کنیم»[6] نوشته جرج پولیا استناد می کنند به گفتهٔ استانیک[7] و کیل پاتریک[8] ، کسانی که هدف از تدریس ریاضی را یادگیری حل مسأله می دانند ، به حل مسأله به دیدهٔ یک مهارت می نگرند که مستلزم توجه ویژه است یعنی به حل مسأله به عنوان وسیله ای برای دستیابی به سایر اهداف آموزش ریاضی و محصول غیر قابل اجتناب یادگیری ریاضی توجه نمی کنند . این همان نگرشی است که شرودر و لستر (۱۹۸۹) آن را «تدریس دربارهٔ حل مسأله»[9] می نامند . این دیدگاه در انتهای دیگر طیفِ گستردهٔ حل مسأله ریاضی قرار دارد . در حالی که دیدگاه اول یک انتهای طیف است . اختلاف اساسی این دو روش ، بر میزان توجّه و تأکید هر یک بر روش حل مسأله در خلاء محتوا و بر عکس است .

دیدگاه سوم، حل مسأله را به صورت یک فرایند پویا و مستمر می بیند که در آن محصول نهایی یعنی جواب مسأله به اندازهٔ روشها، مراحل، استراتژیها و رهیافتهای استفاده شده توسط فراگیرندگان اهمیت ندارد. فعّالیتهای آموزشی پولیا به این نگرش در تدریس ریاضی و جایگاه حل مسأله در آن، اعتبار خاصی بخشید. از نظر پولیا، حل مسأله موفقیّت ویژهٔ فکر است و هدیه ای است که فقط به انسان اعطا شده است. به عقیدهٔ او، دانستن ریاضی به معنی توانایی کار کردن با ریاضی و **انجام دادن ریاضی** است. پولیا بر این باور است که معلّمان باید از طریق بحث و بررسی حل مسایل متنوع و جالب، تکنیکها و استراتژیهای حل مسأله را به فراگیرندگان یاد بدهند. این دیدگاه تقریباً با «تدریس ریاضی از راه حل مسأله»[10] که در آن مفاهیم ریاضی از طریق بحث و گفتگو و تعمیم دادن مسایل خاص معرفی می شوند معادل است. (شرورد و لستر ۱۹۸۹).

به طور کلی، «تدریس ریاضی از راه حل مسأله» می تواند موقعیتی را به وجود بیاورد تا در آن، یادگیرندگان ریاضی به طور خلاّق و فعّال به **انجام دادن** ریاضی بپردازند. چنین دیدگاهی فرصت فراگیری و استفاده از استدلال محتمل[11] را با تدریس چگونگی آن به یادگیرندگان می دهد. دانستن این که یادگیرندگان چگونه با انجام دادن ریاضی و توسعهٔ قدرت خلاقیّت و نوآوری، استدلال محتمل را فرا می گیرند و قدرت تعمیم دادن مسایل را پیدا می کنند، مستلزم این نکته است که بدانیم آنها چگونه حل مسایل را یاد می گیرند و یکی از بهترین راه هایی که می توان نقبی به درون ذهن و اندیشهٔ حل کنندهٔ مسأله زد، آشنایی با فراشناخت است.

فراشناخت چیست؟

برای اولین بار فلاول[12] در سال ۱۹۷۳ فراشناخت را بدین صورت معرفی کرد: «فراشناخت به شناخت فرد دربارهٔ فرایند شناختی خویش و چیزهای دیگر مربوط به آن اطلاق می شود ... فراشناخت از جمله به طرح ریزی و برنامه ریزی و به تعاقب آن، نظارت در مورد اجرای آنها گفته می شود.» غالب محققان با اندکی جرح و تعدیل در پذیرش این تعریف اتّفاق نظر دارند. شونفیلد[13] (۱۹۸۷) با توّجه به تعریف فوق، تحقیقات دربارهٔ فراشناخت را در حیطهٔ آموزش ریاضی در سه مقولهٔ جدا از هم امّا مرتبط با هم خلاصه کرد:

۱ـ دانش شما در مورد شناخت خودتان به این معنا که تا چه اندازه قادر به توضیح فرایند فکری خویش هستید؟ (خودـآگاهی)[14]

۲ـ کنترل و خودـنظمی[15]، یعنی آیا می توانید آنچه را که انجام می دهید ردّیابی کنید؟

۳ـ نظام باوری[16]ـ تصورات و جهان بینی شما در مورد خودتان، ریاضی و حل مسأله ریاضی چیست؟

هر کدام از این مقوله ها، باب های تحقیقاتی جدیدی را در آموزش ریاضی گشوده است. به عنوان مثال، بررسی دانش فرد در مورد فرایند فکری خویش به مطالعات فراحافظه[17] و مطالعاتِ در مورد کنترل خودـنظمی به تحقیق در مورد چگونگی طرّاحی و برنامه ریزی، نظارت، فرضیه سازی و آزمایش آن و وارسی انجامیده است. نکتهٔ مهّم در حل مسأله آن است که دربارهٔ چگونگی و زمان استفاده از آنچه که می دانیم تصمیم گیری کنیم. توانایی استفاده نکردن از یک استراتژی حل مسأله پس از آزمایش آن و انتخاب یک استراتژی مناسب تر دیگر، ارزشیابی موقعیّت و تجزیه و تحلیل فرایند انجام شده جهت شروع بعدی، لازمهٔ حل مسأله هستند که همگی از نوع فراشناخت می باشند. نظام باوری و یا به قول شونفیلد، «معرفت شناسی معناسازی»[18] تأثیر عمده ای بر توانایی و اجرای حل مسأله می گذارد. به عنوان مثال، اگر یادگیرندگان باور داشته باشند که «انجام دادن ریاضی تنها کار ریاضیدان ها است» و یا «هر مسأله ای باید در مدّت محدودی به فرض ۱۰ دقیقه حل شود» یا «اثبات قضیه ها ارتباطی به کشف و جستجو ندارد» طبیعی است که انگیزهٔ آنها نسبت به یادگیری ریاضی کم می شود و تلاش و کوشش آنها محدود می گردد.

برای هدایت مسأله حل کن به سمت آگاهی بیشتر، بالا بردن توانائی های خودـنظمی و بالاخره تأثیر مثبت بر باورهای او، می توان از استراتژیهای فراشناختی کمک گرفت.

مقالهٔ حاضر به طور مشخص از سه استراتژی: **کار در گروههای کوچک همکاری**[19]، **بحث همگانی در کلاس**[20] و **نوشتن بازتابی**[21] سود برده است (گویا، ۱۹۹۲) که دربارهٔ هر یک از این استراتژیها توضیح مختصری داده خواهد شد. امّا قبل از پرداختن به این موضوع ذکر مطالب زیر ضروری به نظر می رسد:

«در زمانی که مطالعهٔ مذکور انجام شد، با توجه به تفاوتهای فرهنگی ـ اجتماعی ـ آموزشی محیط تحقیق با ایران، برای دست اندرکاران آن مطالعه، دانستن این که آیا تأثیر به کارگیری روش تدریس مبتنی بر این استراتژی ها محدود به موقعیّت خاص[22] هستند یا خیر؟ بسیار جالب بود. به همین دلیل، محقق پس از بررسی شرایط آموزشی در ایران، دست به کار پیاده کردن روش تدریس مشابه با مطالعهٔ قبلی زد. مهمترین عامل تشابه بین دو موقعیّت، باور دانشجویان علوم انسانی ـ چه در ایران و چه در کانادا ـ نسبت به ریاضی بود که اکثریت قریب به اتفاق آنها در ابتدای ترم اظهار ترس، وازدگی و حتی نفرت از ریاضی کردند. در ضمن همهٔ آنها درس ریاضی را از روی اجبار گرفته بودند و اختیاری در کار نبود.

مطالعهٔ خارج از ایران، حاصل دو سال آزمایش تجربی و ساختن و پرداختن آن قبل از شروع تحقیق اصلی بود. با این حال، با توجه به مشکلاتی که دانشکدهٔ علوم تربیتی و دانشجویان علوم انسانی با درسهای ریاضیات پیش دانشگاهی و ریاضیات پایه داشتند. محقق در تدریس این دو درس پیشقدم شد و تدریس ریاضی از راه حل

مسأله و بر اساس استراتژیهای فراشناختی را پیاده کرد. جالب توجه این بود که دانشجویان ایرانی خیلی کمتر از دانشجویان کانادایی در مقابل این روش مقاومت نشان دادند. در واقع، این مطالعه نشان می دهد که شاید این سرزمین برای نوآوری و سنّت شکنی بسیار مستعدتر و بارورتر از سرزمینهای دیگر است.» حال پس از بیان این مطالب به بررسی اجمالی استراتژیهای ذکر شده می پردازم:

گروههای کوچک

تحقیقات متعددی در زمینهٔ نقش گروههای کوچک در یادگیری ریاضی وجود دارد این تحقیقات، همگی به نوعی از گروههای کوچک در کارهایشان استفاده کرده اند. امّا نوع و ماهیت گروهها دارای تنوع زیادی است. با این حال، ایده های ویگوتسکی (۱۹۷۶) توجیهی قوی برای نقش گروههای کوچک در توسعهٔ (ذهنی) دانش آموزان است. ویگوتسکی معتقد بود که مشارکت با دیگران به فراگیرندگان کمک می کند تا به «دامنه توسعهٔ تقریبی»[۲۳] برسند. او توضیح داد که یک یادگیرنده ممکن است تا سطح مشخصی کارکرد داشته باشد. امّا همکاری مشارکتی با دیگرانی که ازاو تواناتر هستند، ممکن است به او کمک کند تا در سطح بالاتری کارکرد پیدا کند. در واقع، توانایی بالقوّه ای که یک کودک (یا یک فرد در سنّی) دارد می تواند با کمک و همکاری دیگران ـ امّا نه در خلاء ـ بارور شود که این همان «دامنهٔ توسعهٔ تقریبی» است. کار در گروههای کوچک اگر با مداخلهٔ برنامه ریزی شدهٔ معلم و راهنمایی و نظارت او انجام گیرد؛ توانائیهای فراشناختی یادگیرندگان را بالا می برد.

بحث همگانی در کلاس

بحث همگانی به معنای جمع آوری نظرات گروههای کوچک و ارائه آنها به تمام کلاس است. این عمل به فراگیرندگان کمک می کند تا با تنوّع روشهای حل مسأله و با انواع فهمیدن ها و بدفهمی های دیگر دانشجویان آشنا شوند، آنها را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهند و با مقایسهٔ نقاط قوت و ضعفِ هر یک از راههای پیشنهاد شده، بهترین راه را انتخاب کنند. توانایی تصمیم گیری یکی از واجبات حلّ مسأله است که مستلزم توانائیهای فراشناختی می باشد. بحث همگانی و کار در گروههای کوچک لازم و ملزوم یکدیگرند و کارآیی یکی در خلاء دیگری کاهش می یابد. کار در گروههای کوچک و بحث همگانی تأثیر عمیقی بر باورهای فراگیرندگان دارد. آنها با دیدن راههای مختلف برای حل یک مسأله متوجه می شوند که ریاضی تنها «حساب دو دو تا چهار تا» نیست و جزمیّت افراطی که آموزش نسبی نسبت به حل مسأله در ذهنهایشان به وجود آورده است را زیر سؤال می برد. آنها زمانی که با تنوع راه حل های مختلف مواجه می گردند و با وجود تفاوت آنها، متوجه می شوند که هر کدام در نوع خود صحیح و بر مبنای اصول محکمی است. وقتی که با فرایندهای استقرایی و استدلالهای محتمل برای حل مسایل ریاضی آشنا می شوند، نسبت به باورهای سنّتی خود با دیدهٔ شک می نگرند. آنها یاد می گیرند که نظرات مخالف و موافق را بشنوند، با اعتماد به نفس از راه حل پیشنهادی خود دفاع کنند و بالاخره فرصت تصمیم گیری را به جمع بدهند و برای تصمیم اخذ شده احترام قایل باشند. بحث همگانی همچنان که بر باورهای فراگیرندگان تأثیر می گذارد، خود ـ آگاهی و خود ـ نظمی آنها را نیز افزایش می دهد.

نوشتن بازتابی

نوشتن به عنوان ابزار یادگیری ریاضی توجه مجامع تحقیقاتی آموزش ریاضی را به خود جلب کرده است. با این حال، برداشتهای مختلفی از نوشتن و به کارگیری آن به عنوان یک استراتژی یادگیری وجود دارد. نوشتن بازتابی به معنای اینست که از فراگیرندگان خواسته می شود با بازتاب بر جریان حل مسأله در گروههای کوچک و در کلاس، به بررسی چگونگی فهمیدن خویش، احساسشان و خوب فهمیدن ها و بد فهمی های خود بپردازند. چنین فعالیتی به معلّم و فراگیرندهٔ در ابعاد مختلف کمک می کند. نوشتن بازتابی کانال ارتباطی بین معلّم و فراگیرنده است و به معلم فرصت می دهد تا تفاوتهای فردی فراگیرندگان را بشناسد و از طریق پاسخ دادن به بازتابها، به نوعی آموزش فردی را که مکمّل آموزش کلاسی می باشد توسعه دهد.

نوشتن بازتابی با توجه به شرایط تدریس، می تواند ساختاری و یا بدون ساختار باشد. نکتهٔ مهم آن است که به اندازهٔ کافی اعتماد فراگیرندگان به معلّم جلب شده باشد تا آنها بدون ترس از دست دادن موقعیّت خویش به بیان احساس و مشکلات خود بپردازند. نوشتن بازتابی به فراگیرندگان کمک می کند تا بازتابی تر عمل کنند و نسبت به فرایند تدریس مسؤولیت بیشتری احساس نمایند. نوشتن بازتابی به معلم کمک می کند تا با مشکلات و احساسات یادگیرندگان بهتر آشنا شود (گویا، ۱۹۹۰) و در نهایت روش تدریس خود را متناسب با نیازهای آنها جرح و تعدیل کند. با این حال، باید بر این نکته واقف بود که نوشتن بازتابی به شرطی توانائیهای فراگیرندگان، را بالا می برد که دو طرفه باشد. به این معنا که معلم باید در اسرع وقت با مطالعهٔ دقیق آنها و ارائه پیشنهاد به فراگیرندگان، راه گفت و شنود را باز کند و یادگیرندگان را وادار به تأمّل در نوشته های خود و دادن پاسخ به معلم نماید.

طبیعی است که چنین کاری نیاز به از خود گذشتگی و ایثار معلم دارد. اما به قول توماس ریشل (۱۹۹۰) «اگر زحمت چنین کاری تابع درجه دوم باشد، سواد آموزشی حاصل از آن و رضایت معلم از یادگیری یادگیرندگان به صورت تابع نمایی است.»

جایگاه تحقیق

این تحقیق، در کلاسهای ریاضیات پیش دانشگاهی و ریاضیّات پایه رشته های روانشناسی، علوم تربیتی و مشاوره و راهنمایی انجام گرفت. هر کلاس، بین ۴۵ تا ۵۰ دانشجو داشت که سن آنها از ۱۸ سال تا ۴۸ سال در نوسان بود. تعداد دخترها و سن متوسط آنها کمتر از پسرها بود و تعدادی از پسران شاغل بودند. روش تدریس بر مبنای استراتژیهای فراشناختی و از راه حل مسأله بود و یکی از هدفهای آن، ایجاد یک **هنجار اجتماعی** برای کلاس به گونه ای بود تا دانشجویان قادر به انجام دادن و لذت بردن از ریاضی بشوند. یکی از هدفهای محقّق، تغییر این باور سنتی بود که «معلّم قدرت مطلقه در کلاس است و همیشه «درست» می گوید.» در مقابل، او از معلم نقشی به عنوان تعدیل کننده، تسهیل کننده، ناظر، دوست و الگو ارائه می داد که در ضمن جایز الخطا است. این روش تدریس به دانشجویان نوید می داد که هر کسی می تواند تا حد متعارفی ریاضی را بفهمد و انجام دهد و بهترین راه یادگیری، درگیر شدن با موضوع و پذیرفتن مسؤولیت یادگیری خود است. در ابتدای تدریس، توقّع مسؤولیّت پذیری از جانب دانشجویان برای یادگیری خودشان امر مشکلی می نمود زیرا اغلب آنها ترجیح می دادند که قوانین و فرمولها و الگوریتمها بوسیلهٔ معلم گفته شود و سپس دانشجویان با به کارگیری آنها به حل مسائل یکنواخت بپردازند. به تدریج، کار در گروههای کوچک و بحث همگانی در کلاس فرصت دیدن جنبهٔ دیگر ریاضی یعنی طبیعت دیالکتیک آن را به دانشجویان داد. همچنین این دو استراتژی فراشناختی به آنها کمک کرد که ریاضی را به عنوان یک فعالیت اجتماعی که بر اثر تعامل اجتماعی یاد گرفته می شود، تجربه کنند. دانشجویان دریافته بودند که فقط ارائه جواب آخر یعنی «محصول نهایی» کافی نیست و آنها بایستی جواب می دادند که در فرایند حل مسأله چه کاری را انجام داده اند؟ چرا آن کار را انجام داده اند و چگونه آن کار به آنها کمک کرده بود تا مسأله را حل کنند؟ این سه سؤال که ماهیّت فراشناختی داشتند دانشجویان را وادار به ***بازتاب بر فرایند تفکّرشان*** می کرد، به آنها ***خودنظمی*** می آموخت و در نهایت ***اعتماد به نفس*** آنها را افزایش می داد که اینها همه تأثیر مستقیمی بر نظام باوری آنها داشت. در این تحقیق، پژوهشگر با تلاش فراوان دانشجویان را قانع می کرد که مشارکت آنها در بحثهای کلاسی و گروههای کوچک هم برای خودشان و هم برای دیگر افراد کمک مفید و سودآور خواهد بود. با این حال، به قول شونفیلد «عادات کهنه سخت می میرند» یعنی در ابتدای نیمسال، فقط چند نفر شهامت درگیر شدن با بحثهای کلاسی را داشتند و بقیه اغلب سکوت اختیار می کردند. باقی دانشجویان اغلب با دیدن توانایی این عده میدان را خالی می کردند زیرا احساس می کردند که ناتوانی آنها بیشتر بارز می شود حتی بعضی از آنها فکر می کردند که دخالت آنها در بحث باعث تلف شدن وقت کلاس و در واقع وقت آن چند نفر می شود. این باورهای نادرست و عدم اعتماد و احترام به خود، آنها را منزوی کرده و به ویژه در رابطه با فهمیدن ریاضی، دانشجویان را دچار نوعی خودکم بینی کرده بود. در چنین فضایی، بیشترین تلاش محقق تأثیر بر این باورها و کمک به افزایش اعتماد به نفس آنها بود. آنها باید باور می کردند که هر کسی از ایده ها و روشهای دیگران و حتی از اشتباهات آنها می تواند یاد بگیرد و هر کسی در کلاس مسؤول است تا به فرایند یادگیری کمک کند.

نتایج به دست آمده:

یکی از هدفهای این مطالعه، تغییر باور یادگیرندگان نسبت به ریاضی بود. تجزیه و تحلیل داده ها نشان داد که استفاده از استراتژیهای فراشناختی در تدریس ریاضی، در تغییر باور یادگیرندگان نسبت به ریاضی تأثیر مثبت داشت و بازتابهای آنها نشانگر این تأثیر بود. لازم به تذکر است که نقل قول هایی که در این بخش می آیند، همگی نوعی بوده و هر یک، بازگو کنندهٔ نظرات جمعی در کلاس هستند. برای مثال، یکی از دانشجویان تغییر باور خود را در نوشته های بازتابی خود چنین بیان کرد:

«اولین روز تشکیل کلاس شما، نقطه های امید را در دل همهٔ افراد بالاخص بنده روشن کرد چرا که تاکنون هر کسی به کلاس ریاضی جهت تدریس می آمد، ***ریاضی را درسی سخت*** و معمولاً ***ترس از رَد شدن و افتادن*** در این درس را به ما یادآوری می کرد و به این طریق، ***بر بی علاقگی ما می افزود و یادگیری را برای ما مشکل*** می کرد. امّا روحیهٔ شاد و پر از امیّد و دلداری شما که توأم با آسان جلوه دادن درس بود، قدری علاقه به فراگیری این درس را در ما زیاد کرد.»

دانشجوی ریاضی پیش دانشگاهی

یکی از استراتژیهای فراشناختی که در این تدریس به کار گرفته شد، کار در گروههای کوچک بود. در ابتدا، حتّی مطرح کردن کار در گروههای کوچک برای اکثر دانشجویان غیر طبیعی و غیر معمول بود. امّا با پافشاری بر این کار، اندک اندک دانشجویان حاضر به امتحان کردن این روش شدند و بعد از گذشت مدّتی، این روش را به عنوان یک هنجار اجتماعی در کلاس درس ریاضی پذیرفتند.

یکی از دانشجویان نظر خود را در مورد کار گروهی چنین ابراز کرد:

«برای اوّلین بار است که به صورت گروهی، آن هم در سر کلاس ریاضی به صورت آزادانه و دور از هرگونه ترس و وحشت به حل مسائل و پی بردن به قانونهای ریاضی می پردازیم.»

همچنین، کار گروهی باعث شد تا آنها به توانائی های خود بیشتر پی ببرند و این آگاهی همچنان که یکی از دانشجویان توضیح داده بود، باعث شعف در آنها می شد: «در طول مدت کار و تحصیل،

هیچ وقت آنقدر خوشحال نبودم که الآن در رابطه با حل یکی از مسائلی که با راهنمائی شما به جواب رسیدیم احساس خوشحالی می کنم زیرا که ما در گروه، با تلاش و زحمت خودمان و راهنمائی شما، توانستیم به نتیجه برسیم و لذّت آن را همان موقع مشاهده کرده و لمس نمودیم.»

دانشجوی ریاضی پیش دانشگاهی

استراتژیهای به کار گرفته شده در این تدرس، باورهای سنتی دانشجویان را نسبت به ریاضی، یادگیری ریاضی و چگونگی حل مسائل ریاضی به چالش وامی داشت به عنوان مثال، برای بسیاری از دانشجویان، پذیرش این که در یک جلسهٔ ۲ ساعتی تنها یک یا دو مسأله حل شود مشکل می نمود زیرا تجربهٔ سالهای تحصیل آنها چیز دیگری بود. امّا به تدریج که با روش جدید آشنا شدند و شروع به فهمیدن مفاهیم ریاضی کردند و توانستند که این روش را با روش سنتی مقایسه کنند و به ویژگی های آن پی ببرند. یکی از دانشجویان نتیجهٔ این مقایسه را چنین بیان کرد:

«در دورهٔ راهنمائی و دبیرستان، معلّمان ما ریاضی را که درس می دادند، ابتدا بدون هیچ مقدمه ای فرمول یا مُدل مربوطه را روی تخته نوشته و اعداد را در فرمول می ریختند بدون آن که دانش آموز بفهمد فرمول به دست آمده **چطور** و **چگونه** به وجود آمده است. ولی با روشی که شما در کلاس به کار می برید، ما ابتدا طرز ایجاد فرمول را می فهمیم و سپس با استفاده از فرمول، مسأله را به راحتی می توانیم حل کنیم و این روش بسیار خوبی است. از این روش بسیار راضی هستم.»

دانشجوی ریاضی پیش دانشگاهی

البتّه طبیعی است که تعدادی از دانشجویان راه میان بُر سنتی را ترجیح می دادند، از جمله یکی از دانشجویان در یکی از نوشته هایش توصیه کرد که «بهتر است فرمولها در حدّ امکان ***ساده*** و ***کوتاه*** باشد تا بتوان آنها را به ***حافظه سپرد.***»

دانشجوی ریاضی پیش دانشگاهی

روشهای کار گروهی و بحث همگانی در کاهش اضطراب یادگیرندگان تأثیر زیادی دارد. به گفتهٔ یکی از دانشجویان، «با این روشها، اضطراب و ترسی که در دوران قبل در هنگام رو به رو شدن با درس ریاضی داشتم از بین رفته و درس ریاضی را که درسی مشکل می پنداشتم درسی شیرین و راحت احساس می کنم.»

دانشجوی ریاضی پیش دانشگاهی

همچنین، این روشها، جرأت حل کردن مسائل مطرح شده در کلاس را در یادگیرندگان ایجاد می کرد و به آنها انگیزه می داد تا در اوقات بعد از کلاس، با علاقه مندی بیشتری به یادگیری ریاضی و حل مسائل ریاضی بپردازند. نقل قول نوعی زیر، این علاقه را نشان می دهد:

«اگر بخواهم مسأله ای را حل کنم، تا وقتی به جواب نرسیده ام به آن فکر می کنم- به طور مداوم! تا راه حل را بیابم. به عنوان مثال، برای حل مسأله ای که از ما خواسته شده بود بررسی کنیم که ***آیا هر عدد شش رقمی که از تکرار یک عدد سه رقمی به وجود آمده است بر ۱۳ بخش پذیر است یا نه***، این گونه عمل کردم:

ابتدا چندین عدد را با تقسیم ساده امتحان کردم. بعد اعداد دیگری را با ماشین حساب امتحان کردم و بعد از انجام دادن این اعمال، چون همهٔ اعداد بر ۱۳ بخش پذیر بودند، این مسأله را به تمام اعداد شش رقمی که از تکرار یک عدد سه رقمی به وجود آمده بودند تعمیم دادم.»

این دانشجو در ادامه نوشته بود: «آنگاه تا هفتهٔ بعد به راز و رمز این مسأله فکر کردم که قبلاً در رابطه با آن، در ذهنم به مسائل گنگی برخورد کرده بودم و نتوانسته بودم آنها را برای خودم توجیه کنم. مسائل مُبهم و تاریکی که با حل این مسأله روشن شدند.»

دانشجوی ریاضی پیش دانشگاهی

دانشجویان به مرور متوجه شدند که هدف تدریس ریاضی از راه حل مسأله، توسعهٔ مفاهیم و ایده های ریاضی و تعمیم دادن یافته ها به صورت قضیه ها و فرمولها و روشها توسط خودشان بود. آنها در حین حل مسائلی که برایشان درگیر کنند و جذاب بود به این مهمّ دست یافتند.

نتیجهٔ چنین تدریسی موفقیت بیش از ۹۰ درصد کسانی بود که یا با سواد ریاضی بسیار کم وارد دانشگاه شده بودند و یا حداقل دو الی سه بار این درس را در دانشگاه گرفته بودند؛ مهمتر از موفقیت تحصیلی، تغییری بود که در باورهای آنها نسبت به «هیولای ریاضی» ایجاد گردید این روش تدریس به آنها فرصت فکر کردن و آموختن ریاضی را داد و این حقی است که در نظام آموزشی ما سالهاست از فراگیرندگان علوم انسانی دریغ شده است. در واقع به جز موارد استثنایی، افراد علاقمند به علوم انسانی باور نادرستی نسبت به ریاضی و نسبت به خودشان به عنوان انجام دهندگان ریاضی دارند و این باور به دفعات در نوشته های دانشجویان بازتاب داشت. در مواردی از این قبیل، معلم- محقق با تأکید بر توانایی عمومی یادگیری دانشجویان علوم انسانی، سعی می کرد که نیروهای بالقوهٔ آنها را فعال کند.

نتیجه گیری- توصیه های آموزشی

اگر برای این تحقیق نیمه تمام سرمایه گذاری شود و تمام ابعاد آن مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و منتشر شود، می تواند روزنه ای باشد برای بهبود بخشیدن به وضعیت تدریس ریاضی در آموزش عمومی و دانشگاهها؛ بخصوص برای کسانی که ریاضی را به عنوان رشتهٔ تحصیلی انتخاب نکرده اند. با این حال، باید توجه داشت که موفقیت روش تدریس ریاضی از راه حل مسأله و بر مبنای روشهای فراشناختی مستلزم تلاش مستمر معلم است و آگاهی و بینش او و

از همه مهمتر باورهای آموزشی و اجتماعی اش نقش اساسی در بازدهی آن دارد. در چنین روش تدریسی، مسائل باید با دقت زیادی انتخاب شوند که علاوه بر کشش و جذابیّت، به فراگیرندگان فرصت پیدا کردن ارتباط بین ایده ها و مفاهیم ریاضی را بدهد تا آنها بتوانند از یک مفهوم به مفاهیم دیگری برسند. معلّم باید با صبر و استقامت، از دادن فرمولها و ارائه رهیافتهای حل مسأله تا زمانی که فراگیرندگان خود آنها را نیافته اند یا آمادگی پذیرش آنها را پیدا نکرده اند، احتراز کند. در چنین فضایی، معلّم نقش ویژه ای ایفا می کند. کار در گروههای کوچک و بحث همگانی باید به وسیلهٔ معلم هدایت و هماهنگ شود. معلم باید با بازتاب بر آن چه که در کلاس درس می گذرد، از آن فرایند یاددهی ـ یادگیری تجربه اندوخته و از آن تجارب برای غنا بخشیدن به نحوهٔ تدریس خود بهره بگیرد.

انعطاف پذیری و قابلیت تغییر معلّم، لازمهٔ افزایش تأثیر این روش تدریس است. از همه مهمتر، تعامل بین معلم و فراگیرندگان ـ چه در گروههای کوچک و بحثهای همگانی و چه به صورت مبادلهٔ نوشتاری ـ از مؤلفه های اساسی است. فراگیرنده تا معلّم را مشتاق یادگیریِ خویش نبیند، به انجام کار دل نمی بندد. زمانی که یادگیرنده نوشته های بازتابی خود را همراه با سؤالها و توصیه ها و پیشنهادهای نوشته شده بر آن توسط معلّم پس می گیرد، شور یادگیری و احساس مسولیتش چند برابر می شود. او می بیند که معلم دغدغهٔ یادگیری او را دارد و از صمیم قلب برای او دل می سوزاند. یکی از دانشجویان اظهار می کرد که «بیشترین اثر را زمانی روی من گذاشتید که اولین تکلیف خود را پس گرفتم و دیدم که بیش از آنی که من نوشته بودم شما نوشته اید! و نقد کرده اید و راهنمایی کرده اید. این توجّه و علاقهٔ شما مسؤولیت مرا برای یادگیری افزایش داد و انگیزه مرا چند برابر کرد.» چنین اظهاراتی در طول ترم به دفعات چه شفاهی و چه کتبی ـ از دانشجویان شنیده شد. اگرچه آنها در ابتدای کار با تمسخر به ایدهٔ نوشتن در کلاس درس ریاضی نگاه می کردند، امّا رفته رفته برای بعضی از آنها، نوشتن بازتابی محمل خوبی برای دیدن نقاط ضعف و قوّت خودشان گردید و همچنین دریچه ای شد برای بیان احساسات و ارائه پیشنهاد به معلم. آنها وقتی می دیدند که پیشنهادهای کتبی آنها در صورت امکان در کلاس اجرا می شود، اعتماد به نفس پیدا می کردند و با علاقمندی بیشتری به یادگیری می پرداختند. شواهد زیادی وجود دارند که نشان می دهد دانشجویان با اعتماد به نفس بیشتری نسبت به درک ریاضی خود کلاس را ترک کردند و از این که تا حدودی قادر به انجام ریاضی بودند احساس شعف می نمودند. بسیاری از آنها با وجود مخالفت ابتدایی، در نهایت اذعان داشتند زمانی که تمام راه حلهای مختلف روی تابلو نوشته می شد یا شنیده می شد و سپس با بحث و بررسی آنها راه حل های درست به کمک خودشان برگزیده می شد، آنها با عمق بیشتری نارسائیهای روشهای نادرست را می فهمیدند و اگر راه حلی را انتخاب می کردند، قابلیت دفاع از آن را نیز به دست آورده بودند.

البته گاهی اوقات، اگر احساس می شد که کلاس به بن بست رسیده است و هیچ ایده ای از جانب دانشجویان برای رهایی از آن و شروع حرکت وجود ندارد، معلّم ـ محقق کنترل بحثهای کلاسی را با جمع بندی آنچه که انجام گرفته بود در دست می گرفت، زیرا اگر امید به شروع و ادامهٔ آن نباشد ممکن است که یادگیرندگان دچار سردرگمی و ناامیدی گردند. در چنین مواقعی، پژوهشگر تلاش می کرد تا دانشجویان تشخیص بدهند که چرا به بن بست رسیده اند؟ چه قدمهای اشتباهی برداشته بودند؟ و چه کاری می توان کرد تا به حل مسأله منجر شود؟ این تاکتیک به دانشجویان کمک می کرد تا هم روشنائیها و هم تاریکیها را در فرایند حل مسأله ببینند و لازمهٔ این کار آگاهی و دانشی بود که آنها با آزمایش رویکردهای مختلف به حل یک مسأله کسب کرده بودند. در چنین موقعیّتی، تصمیم گیری بهتر انجام می شد و اینها همه باعث ارتقای توانایی خودنظمی شده و در نهایت راه را برای یادگیری بهتر هموار می نمود.

زیرنویس ها:

1. Metacognition
2. Schroeder
3. Lester
4. Teaching Mathematics For problem Solving
5. Heuristic
6. T. Rishel

۶ـ چنین برداشتی از تفکّر پولیا، مانند پوستین وارونه پوشیدن است.

7. Stanic
8. Kilpatrick
9. Teaching Mathematics ABOUT Problem Solving
10. Teaching Mathematics VIA Problem Solving
11. Plausible
12. Flavell
13. Schoenfeld
14. Self- Awareness
15. Control and Self- regulation
16. Belief- System
17. Metamemory
18. Epistemology of Sence making
19. Cooperative small group work
20. Whole-Class discussion
21. Reflective writing
22. Situated
23. Zone of Proximal Development (Z P D)

فرکتالها
ویژگیها و تولید

اسماعیل بابلیان
دانشگاه تربیت‌معلم

چکیده

در این مقاله ابتدا هندسه اقلیدسی و هندسه فرکتالی را مقایسه می‌کنیم. سپس ویژگیهای فرکتالها را برشمرده و با مثالهای متعدد آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرکتالهایی که مورد بررسی قرار می‌دهیم عبارت‌اند از:

مجموعه کانتور ـ مثلث، فرش و چهار وجهی سیرپنسکی ـ منحنی و برفدانهٔ کخ ـ مجموعه ژولیا ـ درختهای فیثاغورس.

طراحی و ایجاد فرکتالها از مهمترین و مشکلترین قسمتهای هندسه فرکتالی است. با معرفی ماشین کپی چند تبدیلی (Multiple Reduction Copy Machine) که در آن از انتقال، دوران، مقیاس کردن و ترکیبهای آنها استفاده می‌شود، الگوریتمهای طراحی فرکتالهای مختلف را ارائه می‌کنیم.

با استفاده از ماشین کپی چند تبدیلی MRCM فرکتالهای جالبی تولید می‌کنیم که ازآن جمله‌اند: مثلث تغییریافتهٔ سیرپنسکی ـ درخت کریسمس ـ منحنی اژدها ـ پلکان مارپیچی کانتور ـ کریستال یخ ـ درخت ـ سرخس.

ویژگیهای فرکتالها

شکلهایی نظیر ساحل دریا، کوهها و ابرها را در نظر بگیرید. این اشکال را نمی‌توان به سادگی با هندسهٔ اقلیدسی توصیف کرد. امروزه شاخه جدیدی از ریاضیات به وجود آمده که برای توصیف چنین اشکال نامنظم، بی قاعده و پیچیدهٔ دنیای واقعی مناسب است. این شاخه را هندسهٔ فرکتالی می‌نامند.

واژهٔ فرکتال از کلمه لاتین فرکتوس Fractus به معنی شکسته گرفته شده است و اولین بار در سال ۱۹۷۰ توسط مندلبرات به کار رفته است.

در زیر تفاوتهای اساسی بین اشکالی که با هندسه اقلیدوسی به راحتی رسم می‌شوند و اشکالی که در هندسهٔ فرکتالی مورد بحث قرار می‌گیرند آورده شده است.

اشکالی مانند کره یا مکعب به ترتیب دارای شعاع و وجه هستند. شکل ساحل یک دریا دارای هیچکدام از این مشخصه‌ها نیست.

مندلبرات معتقد است که جهت تعریف فرکتالها باید همانند بیولوژیستها عمل کنیم. بیولوژیستها تعریف دقیقی از یک موجود زنده ندارند اما برای موجود زنده ویژگیهایی را عنوان می‌کنند که تا حدودی اعضای متعلق به آن دسته از موجودات زنده را مشخص می‌کند. مثلاً حرکت، رشد، تنفس و ... از این رو اگر F یک مجموعهٔ فرکتالی باشد F نموداری است دارای این ویژگیها:

الف) F دارای ساختاری است خود متشابه، یعنی F شامل

هندسه اقلیدسی	هندسه فرکتالی
مبتنی بر اندازهٔ مشخصه یا مقیاس است.	فاقد اندازه یا مقیاس‌بندی است.
مناسب برای اشیاء دست‌ساز بشر است.	مناسب برای اشکال طبیعی است.
توصیف با فرمول میسر است.	توصیف با الگوریتمهای تکراری امکان‌پذیر است.
قدمت بیش از ۲۰۰۰ سال است.	قدمت کمتر از ۳۰ سال است.

کپی هایی از خودش در مقیاسهای متفاوت است . به عبارت دیگر هر زیرقسمت از F که بزرگ شود مجدداً بیانگر تمام F است .

ب) ساختمان F ظریف است . یعنی تمام جزئیات F را روی زیرقسمتهای F با مقیاسهای کوچک و دلخواه آن داریم .

ج) F بی قاعده تر از آن است که بتوان آن را با زبان هندسهٔ اقلیدسی بیان کرد .

د) اگر چه ساختار F پیچیده است ولی تعریف واقعی F به سادگی با روابط بازگشتی میسر است .

هـ) هر تعریفی برای بعد یک فرکتال ارائه شود ، **بعد فرکتالی F بزرگتر از بعد توپولوژیکی آن است .**

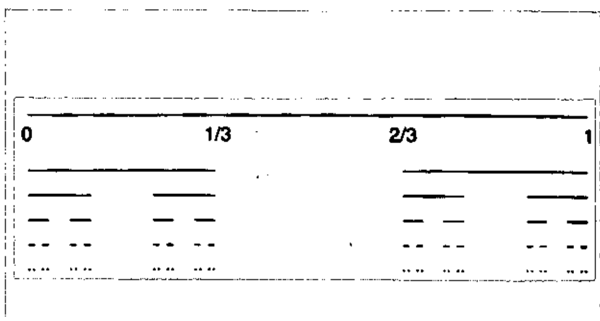
مندلبرات فرکتال را به عنوان مجموعه ای از نقاط تعریف می کند که **بُعد هاسدورف** آن از **بعد توپولوژیکی** آن بزرگتر باشد .

اشیائی که امروزه به عنوان فرکتالهای کلاسیک در نظر گرفته می شوند قبلاً هم وجود داشته اند و توسط هنرمندان و ریاضیدانها توصیف شده اند ولی مجدداً توسط تکنیکهای جدید گرافیک کامپیوتری بررسی شده اند و بینش تازه ای نسبت به ساختار آنها حاصل شده است . لازم به ذکر است که گرافیک کامپیوتری نقش مهمی در توسعه سریع هندسه فرکتالی به عنوان یک نظم جدید معتبر ایفا کرده است .

فرکتالهای کلاسیک

کانتور ریاضیدان آلمانی (۱۸۴۵ـ۱۹۱۸) پایه گذار نظریهٔ مجموعه هاست . او در سال ۱۸۸۳ مجموعهٔ معروف خود با نام **مجموعهٔ کانتور** را معرفی کرد که ویژگیهای جالبی دارد . این مجموعه نقش مهمی در بسیاری از شاخه های ریاضی مخصوصاً سیستمهای دینامیکی نامنظم و تصادفی و فرکتالها دارد . این مجموعه چنین ساخته می شود :

از بازهٔ $[0,1]$ بازهٔ $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ را حذف می کنیم . به عبارت دیگر $[0,1]$ را به سه زیربازه با طولهای مساوی تقسیم و زیربازهٔ باز وسطی را برمی داریم . این کار را به همین منوال با دو زیربازهٔ باقیمانده نیز انجام می دهیم . چند مرحله از این فرایند در شکل زیر آمده است .



در مرحلهٔ سوم ۸ زیربازه می ماند که طول هر یک $\frac{1}{27}$ است .

اگر این کار را ادامه دهیم مجموعه ای از اعداد باقی می ماند که مجموعه کانتور نامیده می شود . این اعداد را می توان به سادگی در مبنای ۳ نشان داد .

درمبنای ۳ سه رقم ۰ ، ۱ و ۲ را داریم . به سادگی ملاحظه می شود که **بسط اعضای مجموعه کانتور در مبنای ۳ شامل رقم یک نیست .**

$$\tfrac{1}{3} = (0/0222\ldots)_3 = (0/0\overline{2})_3 \quad ,$$

$$\tfrac{2}{3} = (0/2)_3 \quad , \quad \tfrac{1}{9} = (0/0022\ldots)_3 = (0/00\overline{2})_3$$

$$\tfrac{2}{9} = (0/02)_3 \quad \tfrac{1}{27} = (0/000\overline{2})_3 \quad , \quad \ldots$$

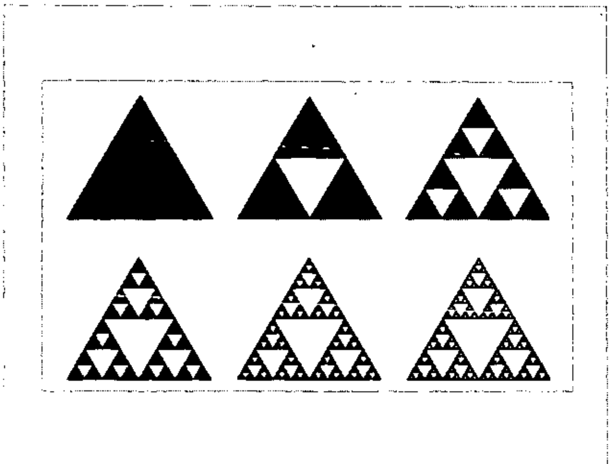
قضیهٔ زیر به سادگی قابل اثبات است (راهنمایی : بسط هر عضو $[0,1]$ را در مبنای ۲ بنویسید و در آن به جای یکها رقم دو بنویسید) .

قضیه : مجموعه کانتور با بازهٔ $[0,1]$ همعدد است . به عبارت دیگر مجموعه کانتور ناشمار است .

مثلث و فرش سیرپنسکی

فرکتال کلاسیک بعدی مثلث سیرپنسکی است که در سال ۱۹۱۶ توسط ریاضیدان لهستانی سیرپنسکی معرفی شده است .

یک مثلث متساوی الاضلاع اختیار کنید ، وسط اضلاع آن را به هم وصل کنید . چهار مثلث ایجاد می شود . مثلث وسطی (آنکه رأسش به طرف پایین است) را حذف کنید . سپس همین کار را با سه مثلث باقی مانده انجام دهید . و این کار را همین طور ادامه دهید . شکل زیر پنج مرحله از این فرایند را نشان می دهد .



مثلث سیرپنسکی نقاطی از مثلث اولیه است که پس از بینهایت مرحله! باقی می مانند .

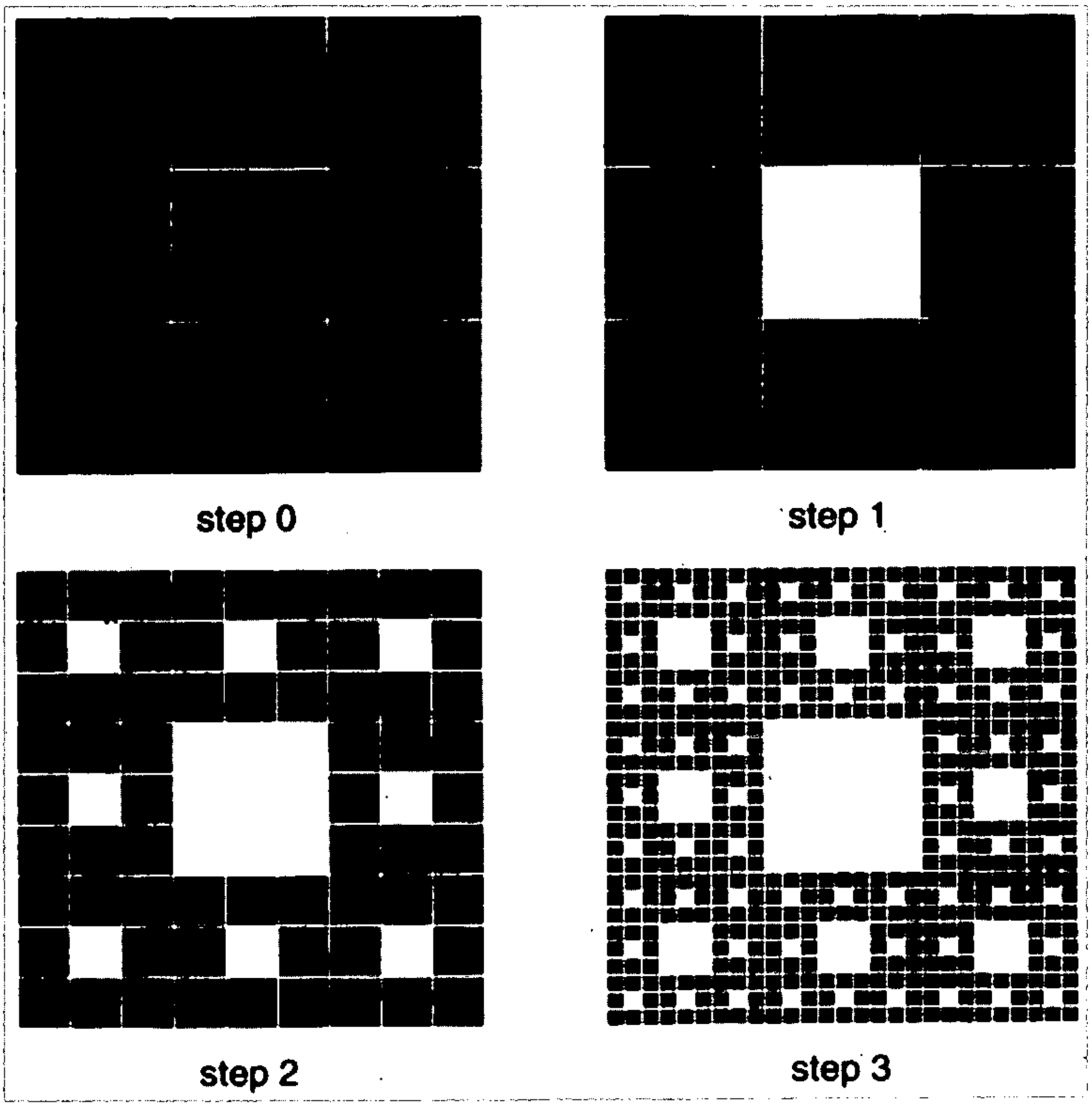
اگر به مثلثهای باقی مانده در هر مرحله توجه کنید ملاحظه می کنید که هر مثلث ، با مقیاسی کوچکتر ، متشابه با مثلث اولیه است .

فرش سیرپنسکی

یک مربع به ضلع دلخواه در نظر بگیرید. سپس هر ضلع را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید و مانند شکل زیر مربع وسط را حذف کنید. با ادامهٔ این کار مجموعه‌ای از نقاط مربع اولیه باقی می‌ماند که آن را فرش سیرپنسکی نامند.

چهاروجهی سیرپنسکی

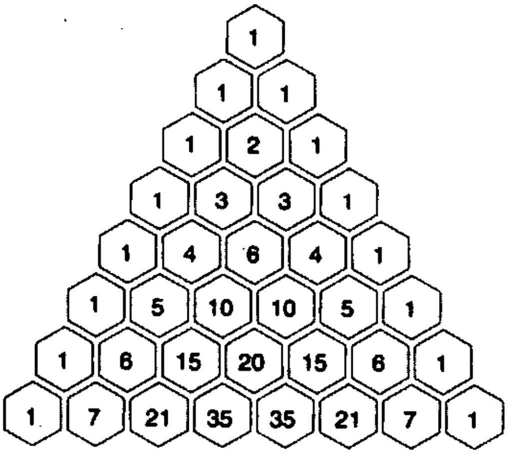
اگر عملیات بالا را روی یک مکعب انجام دهید (هر وجه یک مربع است آن را به ۹ مربع تقسیم کنید) مکعب به ۲۷ مکعب کوچکتر تقسیم می‌شود ۶ تا از این مکعب‌ها، که یک وجه هر یک مربع وسط هر یک از ۶ وجه مکعب اصلی است، حذف کنید. سپس این

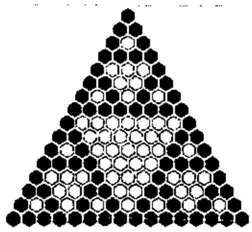


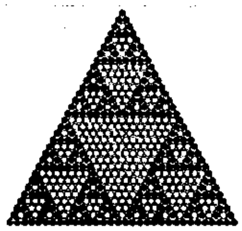
کار را بینهایت بار ادامه دهید. مجموعه نقاط باقی مانده چهار وجهی سیرپنسکی را تشکیل می دهند.

مثلث پاسکال

همه مثلث پاسکال را می شناسید. ضرایب بسط دو جمله ای $(x+y)^n$ به ازای $n = 0, 1, \ldots$ تشکیل مثلث زیر را می دهند که منسوب به پاسکال است ولی قبل از پاسکال یک نفر چینی در سال ۱۳۰۳ و بعد در اروپا در ۱۵۲۷ منتشر شد و در کارهای خیام نیز دیده شده است.







رسم مثلث سیرپنسکی با استفاده از مثلث خیام

اگر مثلثی بنا کنیم که در سطر اول یک سلول (۶ ضلعی یا دایره یا ...) در سطر دوم دو سلول و ... و هر سطر را متناظر با ضرایب $(x+y)^n$ بگیریم (البته شماره سطر جدول متناظر با $(n+1)$ است). خانه های مربوط به ضرایب فرد را سیاه و خانه های متناظر با ضرایب زوج را سفید در نظر بگیرید. به این ترتیب شکلهایی حاصل می شود که مشابهت زیادی با مثلث سیرپنسکی دارد.

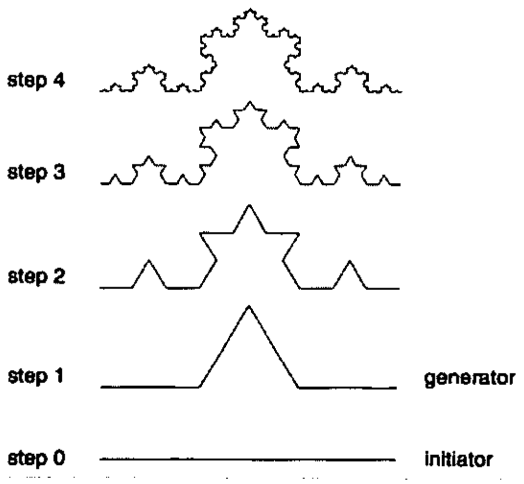
در واقع سیاه یا سفید بودن سلولهای مثلث پاسکال بر حسب زوج یا فرد بودن عدد مربوط به آن سلول در نظر گرفته شده است.

برفدانه فون کخ

برفدانه کخ در سال ۱۹۰۴ توسط ریاضیدان سوئدی فون کخ معرفی شد. منحنی کخ یکی از فرکتالهای کلاسیک است که سهم بسزایی در الهام بخشیدن به مندلبرات در معرفی فرکتالها داشته است.

این منحنی چنین ساخته می شود:

یک پاره خط به طول دلخواه انتخاب کنید. آن را به سه قسمت متساوی تقسیم کنید بعد قسمت وسط را برداشته به جای آن دو پاره خط، به اندازهٔ پاره خطی که برداشته اید، به صورت مثلث اضافه کنید و بعد روی هر یک از چهار پاره خط موجود همین کار را انجام دهید و ...



ویژگیهای منحنی کخ

الف) این منحنی از ساختارش به راحتی شناخته نمی شود.

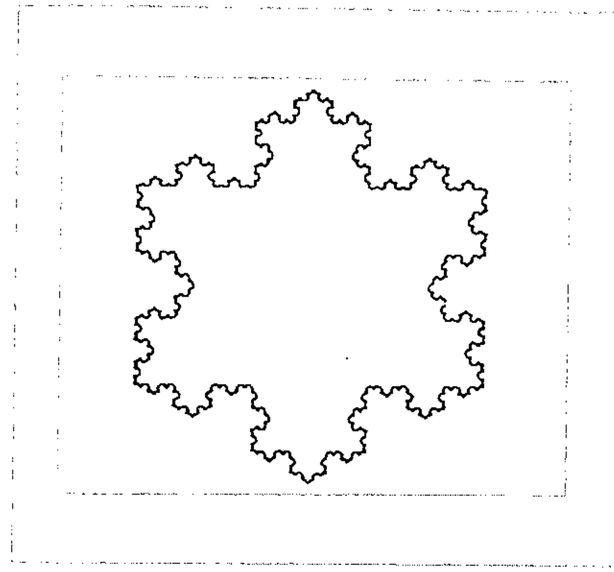
ب) این منحنی شامل خط مستقیم نیست! بلکه در حد یک منحنی خمیده و پیوسته است.

ج) این منحنی شباهت زیادی به ساحل دریا دارد!

د) طول منحنی کخ متناهی نیست! (اگر پاره خط اولیه (مرحله صفر) ۱ متر باشد اولی $\frac{4}{3}$ متر دومی $\frac{16}{9}$ متر و در مرحله nام $\left(\frac{16}{9}\right)^n$ متر است که با افزایش n سریعاً به ∞ میل می کند.)

هـ) منحنی کخ نموداری پیوسته است که در هیچ یک از نقاط آن مشتق وجود ندارد!

اگر کاری که با یک پاره خط کردید با اضلاع یک مثلث متساوی الاضلاع انجام دهید شکل زیر، موسوم به برفدانه کخ، حاصل می شود.



بررسی فرکتالهای غیرکلاسیک به ریاضیات بیشتری نیاز دارد ولی تولید این فرکتالها به کمک روابط بازگشتی و با استفاده از گرافیک کامپیوتری مشکل نیست.

مجموعه ژولیا

گالستون ژولیا در ۲۵ سالگی اثر بی‌نظیرش را در سال ۱۹۱۸ در ۱۹۹ صفحه ارائه کرد و شهرت جهانی یافت. او یکی از پایه گذاران نظریه سیستمهای دینامیکی نوین است. با وجود این که ژولیا در ۱۹۲۰ یک ریاضیدان مشهور بود ولی کارهایش به کلی فراموش شد تا اینکه مندلبرات در سال ۱۹۴۵ با آثار ژولیا آشنا شد ولی به هیچ طریقی نتوانست از سبک و نوع ریاضیاتی که ژولیا به کار برده بود سر در بیاورد. مندلبرات با آزمایشهای متفاوتی خودش نتایج ژولیا را به دست آورد و به کمک گرافیک کامپیوتری نشان داد که آثار ژولیا منشاء دسته ای از فرکتالهای بسیار زیبا است که امروزه همه آنها را می شناسند. در حقیقت اثر بی نظیر ژولیا مملو از فرکتالهایی بود که توسط کامپیوتر احیاء شدند.

سیستم بازگشتی ژولیا

فرض کنید C عدد مختلط ثابتی باشد و با استفادهٔ مکرر از چند جمله ایهایی مانند $Z^2 + C , Z^3 + C$ و ... می توان مجموعه ای از نقاط در صفحهٔ مختلط به دست آورد. مثلاً برای Z عدد مختلط دلخواهی در نظر بگیرید و بعد $Z^2 + C$ را به دست آورید بعد به جای Z مقدار جدید را قرار دهید و ...

$$Z^2 + C \to (Z^2 + C)^2 + C \to \left[(Z^2 + C)^2 + C\right]^2 + C \to \dots$$

دنباله ای از اعداد مختلط به دست می آید که یکی از دو حالت زیر برای آن رخ می دهد:

الف) دنباله بی کران است؛ یعنی فاصله اعضای مجموعه از مبداء مرتباً زیاد می شود و قرصی به مرکز مبداء وجود ندارد که شامل تمام اعضای دنباله باشد.

ب) دنباله محدود است، یعنی تمام جملات دنباله در قرصی به مرکز مبداء قرار دارند.

مجموعه نقاطی که در (الف) صدق می کند **مجموعهٔ گریز** از C و مجموعهٔ نقاط به دست آمده از (ب) **مجموعهٔ زندانی به وسیلهٔ C** (یا مجموعهٔ توپر ژولیا) نامیده می شوند.

به سادگی می توان نشان داد که هر دو مجموعه غیرخالی هستند. اگر برای Z یک مقدار اولیه بزرگتر از ۲ در نظر بگیرید جملات دنباله به سرعت بزرگ شده و دنباله ای بی کران خواهید داشت. از طرف دیگر، اگر $Z = Z^2 + C$ یعنی Z یک ریشهٔ معادله $Z^2 - Z + C = 0$ باشد دنباله حاصل دنبالهٔ ثابت $\{Z\}_{n=1}^{\infty}$ خواهد شد. پس مجموعهٔ زندانی به وسیلهٔ C غیرخالی است. مجموعهٔ گریز از C و مجموعهٔ زندانی به وسیلهٔ C صفحهٔ مختلط را می پوشانند و متمم یکدیگرند، بنابراین مرز دو مجموعه یکی است و بنابر تعریف مجموعهٔ ژولیا برای C تعریف می شود.

گرافیک کامپیوتری و تولید مجموعه ژولیا

در گرافیک کامپیوتری می توان متناظر با هر $C = a + ib$ یک نقطهٔ نورانی (Pixel) در صفحهٔ نمایش ظاهر کرد. فرض کنید $Z_0 = x_0 + iy_0$ نقطهٔ شروع باشد و

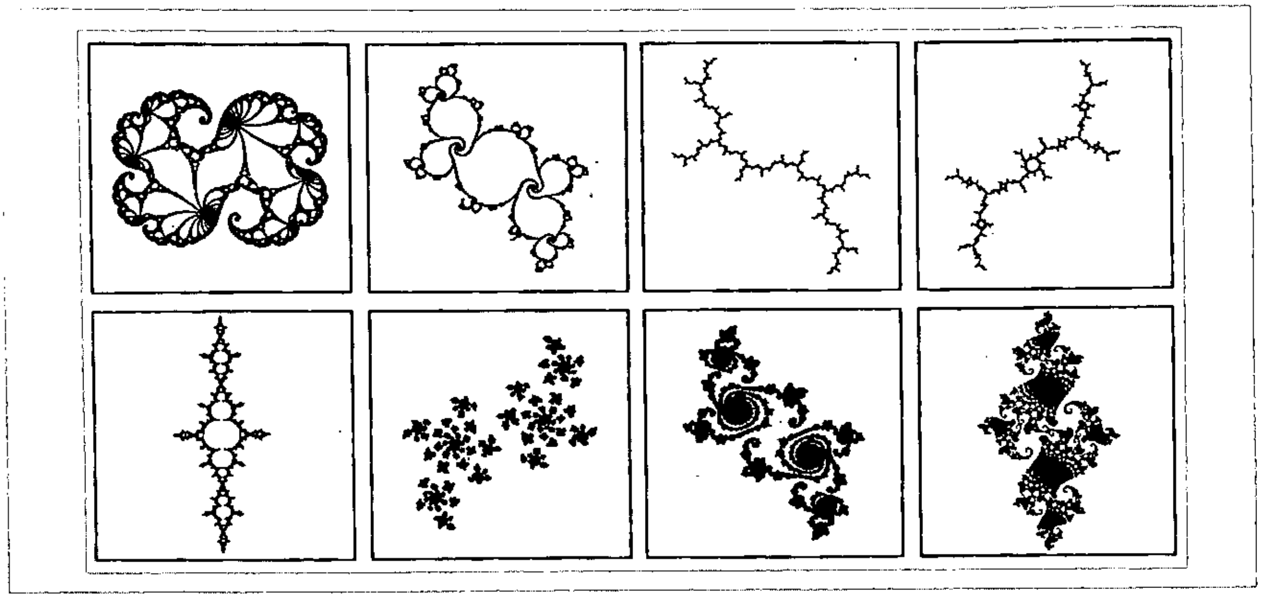
$$Z_1 = f(Z_0) = Z_0^2 + C = (x_0^2 - y_0^2 + a) + i(2x_0 y_0 + b)$$

اگر فاصله Z_1 از مبداء بزرگتر از یک مقدار بزرگ از قبل تعیین شده باشد (مثلاً، ۱۰) آنگاه Z_0 را از مجموعه ژولیا کنار می گذاریم در غیراین صورت قرار می دهیم

$$Z_n = f(Z_{n-1})$$

اگر تا مثلاً $n = 200$ فاصله Z_n تا مبداء بزرگ نباشد Z_0 به مجموعه ژولیا تعلق دارد. به این نقطه یک رنگ نیز نسبت داده آن را در صفحه نمایش مشخص می کنیم. به این ترتیب صفحهٔ نمایش به مجموعه هایی از نقاط تقسیم می شود که تعدادی از آنها پس از ۱۰۰۰ بار هنوز فاصله ای کم تا مبداء دارند و بقیه بسته به اینکه پس از چند تکرار فاصله شان تا مبداء بزرگ باشد با رنگ خاصی نمایش داده می شوند. اشکال زیر بعضی از مجموعه های ژولیا هستند که با کامپیوتر به دست آمده اند.

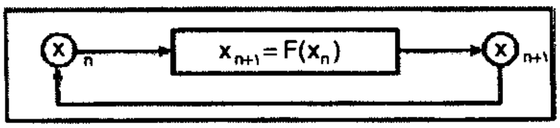
از شکلهای به دست آمده به نظر می رسد که ساختارهائی موجودند که در مقیاسهای متفاوت تکرار شده اند در واقع هر مجموعهٔ ژولیا متشکل از کپی هایی از خودش است ولی کپی هائیکه به وسیلهٔ انتقالات غیرخطی به دست آمده اند. از این رو خود تشابهی مجموعهٔ ژولیا دارای طبیعت متفاوتی در مقایسه با مثلث سیرپنسکی است که



ترکیبی از تبدیلات خطی از کپی های مشابه خودش است. آنچه گفته شد حالت خاصی از IFS است که مخفف عبارت زیر است.

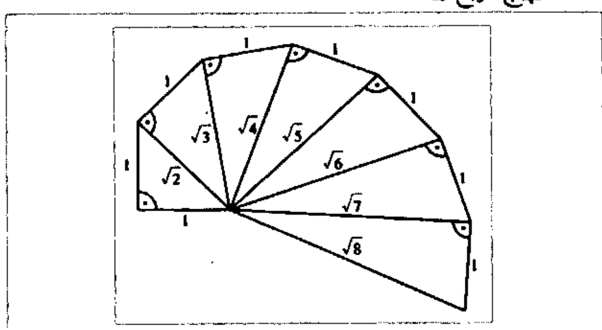
Iterated Function System

که نمودار عملیاتی آن چنین است:



درختهای فیثاغورس

شکل روبه رو معروف به مارپیچ مربع ریشه است.



با الهام از این ساختار می توان درختهای جالبی با پیروی از گامهای زیر ساخت:

الف) مربعی رسم کنید.

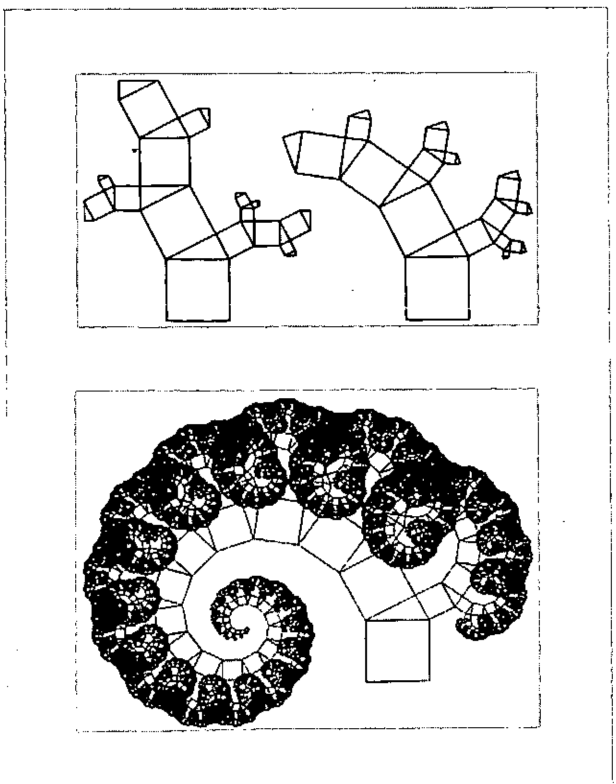
ب) یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین را از طرف وترش روی یک ضلع مربع قرار دهید.

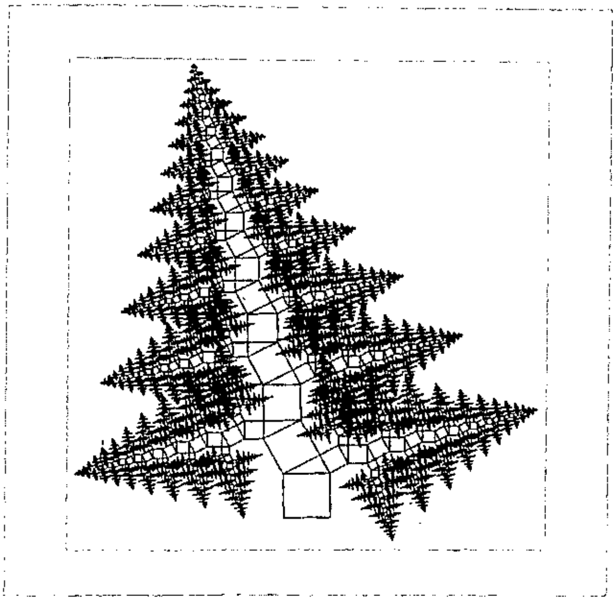
ج) روی دو ضلع آزاد مثلث مربع بسازید (دو مربع).

د) روی مربعهای اخیر مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین قرار دهید.

هـ) روی هر ضلع آزاد این مثلثها مربعی بسازید (۴ مربع).

تکرار (د) و (هـ) به دفعات زیاد شکلهای جالبی تولید می کند.





هندسهٔ فرکتالی

در این قسمت برآنیم که یک تئوری برای کدگذاری تصاویر ایجاد کنیم. هندسه فرکتالی را به عنوان یک زبان جدید در ریاضیات مورد توجه قرار می‌دهیم. همان طور که زبان از حروف، کلمات و جملات تشکیل می‌شود در هندسه فرکتالی هم برآنیم تا واسطه‌ای برای تفکیک نمونه‌ها و فرمهای طبیعت به اجزاء ابتدایی فراهم کنیم. این نمونه‌ها و فرمها، همانند کلمات و جملات، قادرند فرمهای پیچیدهٔ طبیعی را به شایستگی توصیف کنند. در این زبان جدید لهجه‌های متفاوتی وجود دارد که یکی از آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این لهجه حروف تبدیلات ابتدایی و لغات الگوریتمهای ابتدایی هستند. برای معرفی نوعی از تبدیلات و الگوریتمهای ماشینهای MRCM را ارائه می‌دهیم.

MRCM یا ماشین کپی چند تبدیلی

Multiple Reduction Copy Machine

یک ماشین کپی را در نظر بگیرید که می‌تواند تصاویر کوچک شده از یک شکل تولید کند: این کار در یک ماشین توسط عدسی انجام می‌شود. حال فرض کنید که ماشینی در اختیار داریم که دارای چندین عدسی مستقل است که هر کدام تصویر ورودی را با مقیاس ویژه‌ای تغییر می‌دهد و در محل خاصی از خروجی قرار می‌دهد. شکل ورودی پس از این مجموعه از تغییرات تشکیل تصویر خروجی را می‌دهد. اگر این تصویر خروجی را به عنوان شکل ورودی به دستگاه وارد کنیم تصویر خروجی دیگری حاصل می‌شود با تکرار این کار شکلی ایجاد می‌شود که یک فرکتال است.

هر ماشین MRCM این فرایند بازگشتی را با شاخصهایی که دارد انجام می‌دهد. شاخصهای یک ماشین MRCM عبارتند از:

الف) تعداد عدسیهای تبدیل کننده

ب) مجموعه مقیاسهای تبدیل برای عدسیها

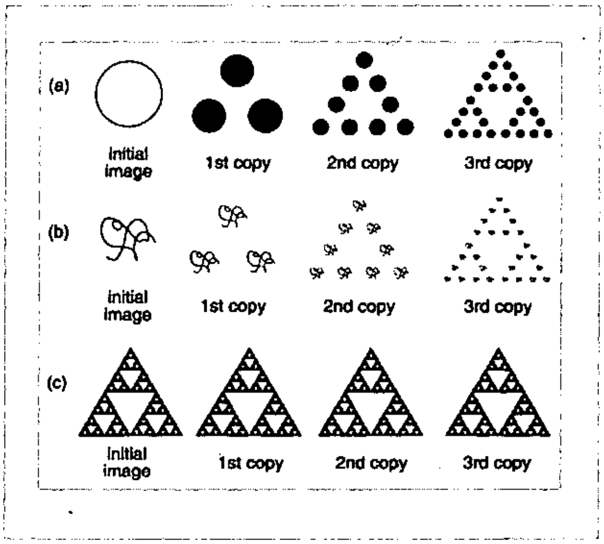
ج) موقعیت مکانی تصویر توسط هر عدسی

در هر ماشین MRCM تبدیلات از نوع تبدیلات **تشابهی و آفینی** هستند. هر دو تبدیل خطی هستند یعنی خط را به خط تبدیل می‌کنند در تبدیلات تشابهی زوایا تغییر نمی‌کنند ولی در تبدیلات آفینی زاویه هم ممکن است تغییر کند. همان طور که می‌دانید در تبدیلات تشابهی شکل به **مقیاس ثابتی** کوچک (یا بزرگ) می‌شود. یعنی، اگر فاصله دو نقطه دلخواه از شکل اصلی را در نظر بگیرید در تصویر خروجی فاصله این دو نقطه به اندازهٔ مقیاس ثابت کوچک (یا بزرگ) شده است.

تبدیلی را در نظر بگیرید که شکلها را در جهت افقی با مقیاس $\frac{1}{2}$ و در جهت عمودی با مقیاس $\frac{1}{3}$ کوچک می‌کند. این تبدیل مربع را به مستطیل و مثلث قائم الزاویه را به مثلث مختلف الزاویه تبدیل می‌کند. این تبدیل نمونه‌ای از یک تبدیل آفینی است.

یک ماشین MRCM با سه عدسی در نظر بگیرید. هر کدام از این عدسیها طوری تنظیم شده‌اند که شکل ورودی را با مقیاس $\frac{1}{2}$ کوچک می‌کند و در جای مناسب قرار می‌دهد. شکل زیر اثر این ماشین را روی سه شکل اولیه و پس از سه بار تکرار نشان می‌دهد. در قسمت آخر، شکل بدون تغییر می‌ماند. این شکل در واقع جذبهٔ (attractor) این وسیله است.

با به کار بردن بعضی اصول ریاضیات و نتایجی که به وسیلهٔ هاسدورف حاصل شده است، ثابت می‌شود که هر MRCM،



به شرط آنکه هر عدسی اش اشکال را منقبض کند، دارای یک جذبه (attractor) است. و اگر جذبه به عنوان شکل اولیه به کار رود تصاویر بعدی با آن یکسان خواهد بود (هاچینسن Huchinson).

تعریف تابع انقباض: اگر S یک فضای متری با متر d باشد F را یک نگاشت انقباضی از S نامیم در صورتی که

$$\forall x,y\in S \quad d(F(x),F(y))\le C\,d(x,y),\quad (0<C<1)$$

در اینجا $S=R^2$ و متر $\|\cdot\|_2$ است. در زیر انواعی از تبدیلات آفینی، مقیاس کردن، کج کردن، دوران و انعکاس تصویر ملاحظه می‌شود.

می‌دانید که هر تبدیل خطی در صفحه، مانند F، با یک ماتریس 2×2 قابل بیان است. اگر $p=(x,y)$ و $F(p)=(u,v)$ در این صورت d,c,b,a ای هست که

$$\begin{cases}u=ax+by\\ v=cx+dy\end{cases}\iff \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

برای راحتتر بررسی کردن نگاشتهای انقباضی ماتریس فوق الذکر را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{pmatrix}r\cos\varphi & -s\sin\psi\\ r\sin\varphi & s\cos\psi\end{pmatrix},\quad r=\sqrt{a^2+c^2},\quad \varphi=\arccos\tfrac{a}{r}$$

به همین ترتیب s، ψ نیز قابل تعریفند. حالتهای زیر را می‌توان مورد توجه قرار داد:

الف) $s=2$ و $0\le r<1$ و $\varphi=\psi$. تابعی داریم انقباضی با مقیاس r و به طور همزمان دوران در جهت عقربه‌های ساعت به اندازهٔ φ.

ب) $S=r,\ 0\le r<1,\ \varphi=\psi$ و $\psi=0$. تابعی مشخص می‌شود که با مقیاس r کوچک می‌کند و همزمان تصویر شکل را نسبت به محور yها به دست می‌دهد.

ج) $r=a$ و $s=b,\ 0\le a,b<1$ و $\varphi=\psi=0$. تابعی مشخص می‌شود که شکل ورودی را با مقیاس a در جهت xها و با مقیاس b در جهت yها کوچک می‌کند.

د) $s=r>0$ و $\varphi=\psi$. یک تبدیل تشابهی داریم که به وسیله یک دوران به اندازهٔ زاویه φ و یک کوچک نمایی با مقایس r مشخص می‌شود.

تبدیلات آفینی به سادگی از ترکیب یک تبدیل خطی و یک انتقال به دست می‌آیند. $W(p)=F(p)+Q$ که در آن Q یک نقطه و F یک تبدیل خطی و نتیجه تبدیل آفینی W است. صورت ماتریس این تبدیل را چنین نمایش می‌دهند:

$$W=\begin{pmatrix}a&b&e\\ c&d&f\end{pmatrix}\quad \left(Q=\begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}\right)$$

برای پیدا کردن جذبهٔ W باید داشته باشیم: $W(p)=p$ و یا

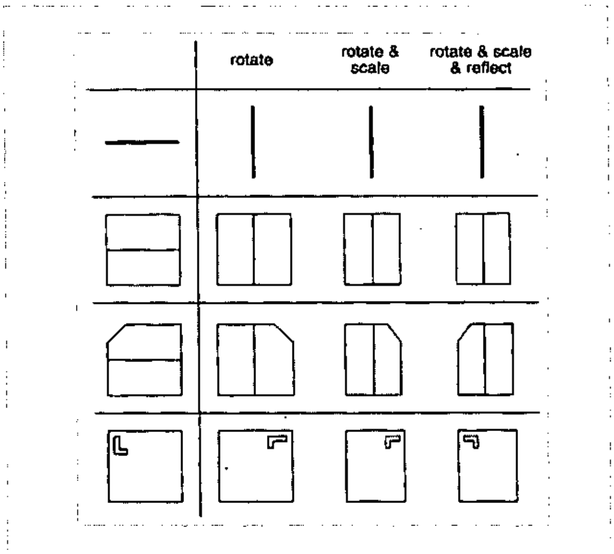
$$\begin{cases}x=ax+by+e\\ y=cx+dy+f\end{cases}\iff\begin{cases}(1-a)x-by=e\\ -cx+(1-d)y=f\end{cases}$$

اگر $\Delta=\begin{vmatrix}1-a & -b\\ -c & 1-d\end{vmatrix}=(1-a)(1-d)-bc\neq 0$ به دست می‌آوریم:

$$x=\frac{e(1-d)+fb}{\Delta},\quad y=\frac{f(1-a)+ec}{\Delta}$$

طراحی الگوریتم MRCM

برای مشخص کردن الگوریتم MRCM باید تبدیلات خطی آفینی انقباضی تشکیل دهندهٔ آن را تعیین کرد. ضمناً انتخاب یک شکل ورودی مناسب برای واضح نشان دادن اثر تبدیلات لازم است. شکل زیر این مطلب را به خوبی توضیح می‌دهد.



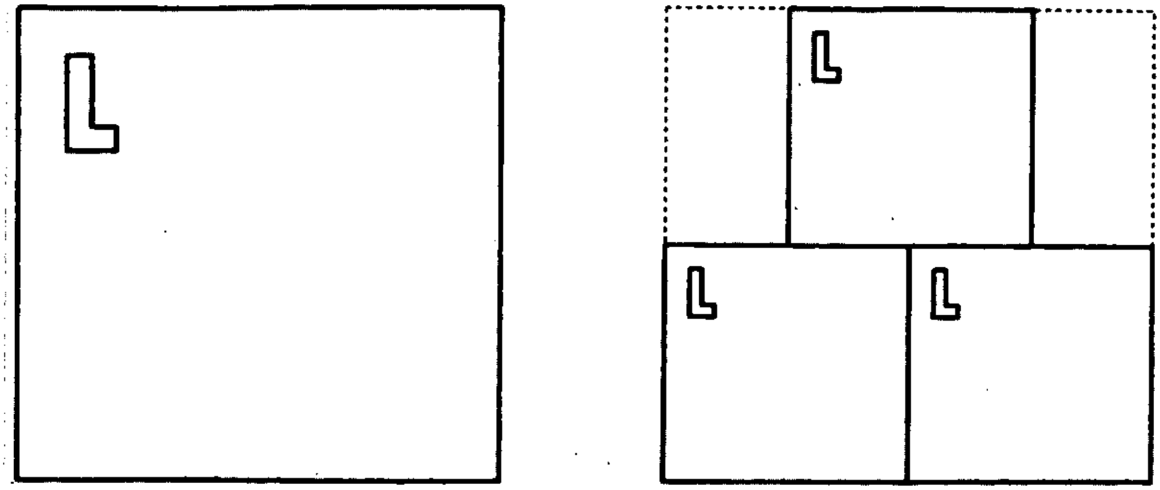
در یک ماشین MRCM عدسیهای ماشین در واقع گروه تبدیلات آفینی انقباضی $W_1,\dots,W_n$ را روی یک شکل ورودی اثر می‌دهند و اگر W اثر نهائی این تبدیلات روی شکل ورودی A_0 باشد داریم:

$$A_1=W(A_0)=W_1(A_0)\cup W_2(A_0)\cup\dots\cup W_N(A_0)$$

امّا تکرارهای بعدی ماشین عبارت اند از $A_2=W(A_1)$، $A_3=W(A_2)$ و ...

اثبات Huchinson تضمین می‌کند که یک جذبه attractor وجود دارد یعنی یک تصویر A_∞ وجود دارد به طوری که $w(A_\infty)=A_\infty$. ذیلاً چند الگوریتم، شکل ورودی و جذبهٔ مربوط به آن را ملاحظه می‌کنید.

شکل ذیل این روند را نشان می‌دهد که در آن MRCM به عنوان یک سیستم بازگشتی و الگوریتم ماشین جهت تولید مثلث سیرپنسکی



initial image　　　　stage 1

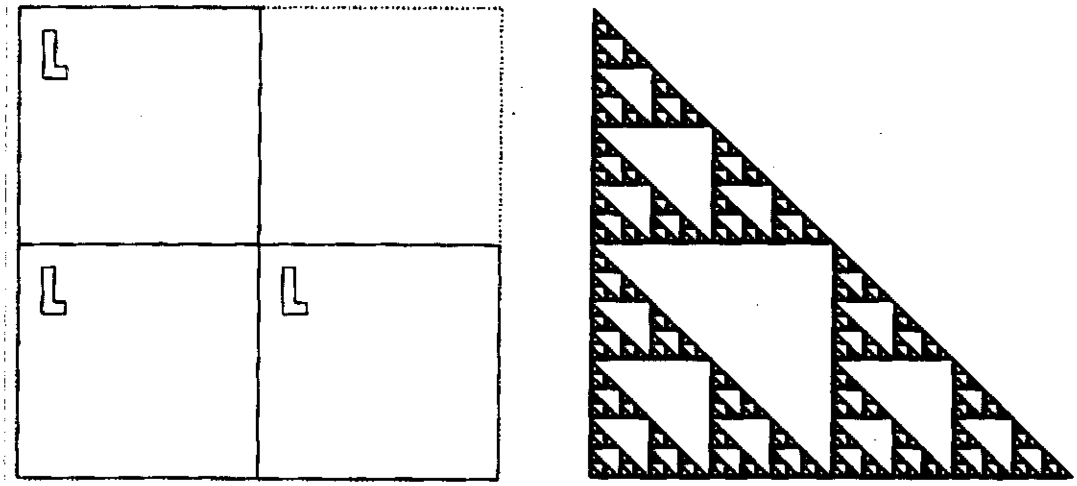
شامل سه تبدیل است .

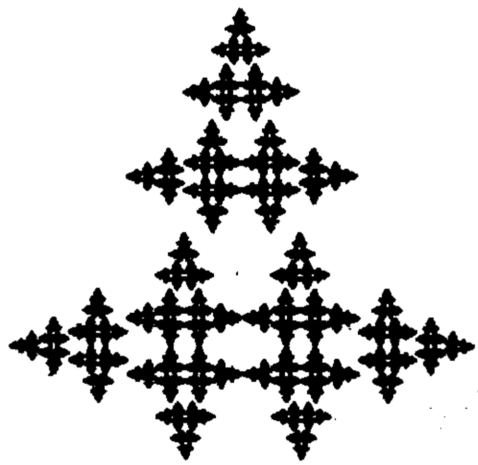
با توجه به آنچه گفته شد برای تولید فرکتالهای خاص مثل درخت کریسمس و کریستال یخ و ... توسط MRCM کافی است تبدیلات آفینی انقباضی مناسبی را با مشخص کردن ضرائب ۶ گانه (a, b, c, d, e, f) ارائه دهیم .

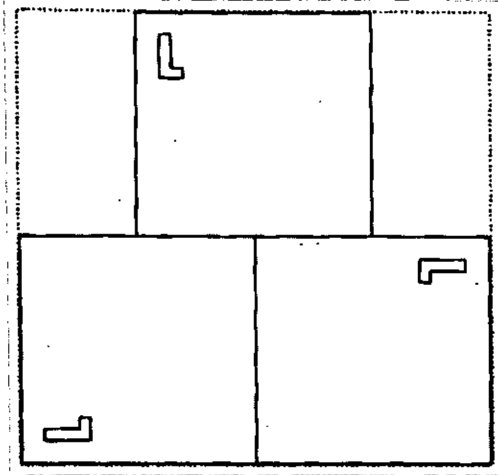
در نمونه های که ذکر خواهد شد الگوریتم ماشین با مربع نقطه چین که تصویر اولیه است و چهار ضلعی های توپر که تبدیلات انقباضی را نشان می دهند، مشخص شده است .

نمونه ۱: مثلث تغییر یافته سیرپنسکی .

MRCM ای را با سه تبدیل که هر کدام از آنها با مقیاس $\frac{1}{2}$ تغییر می دهند را در نظر بگیرید . این سه تبدیل در الگوریتم ماشین به صورت نشان داده شده در شکل تغییر ایجاد می کنند و attractor آن مثلث تغییر یافتهٔ سیرپنسکی است .







نمونه ۲: درخت کریسمس

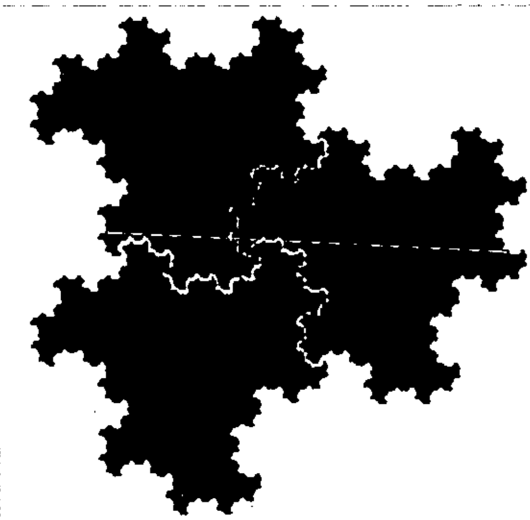
در اینجا نیز سه تبدیل داریم که برخلاف نمونهٔ اول این سه تبدیل شامل دوران هم می شوند. تبدیل سمت راست پایین $90°$ در جهت عقربه های ساعت و تبدیل سمت چپ پایین $90°$ در خلاف جهت عقربه های ساعت دوران می دهند شکل حاصل (attractor) درخت کریسمس نامیده می شود. (شکل زیر)

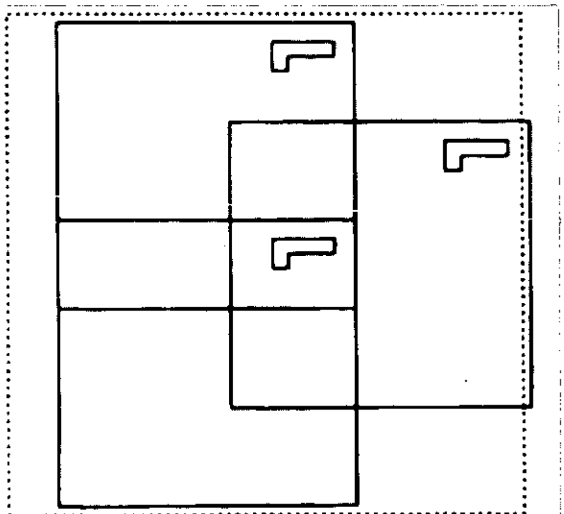
نمونه ۳: منحنی اژدها

در این ماشین، سه تبدیل هر کدام با فاکتور $\frac{1}{\sqrt{3}}$ به کار برده می شود علاوه بر این دورانی در جهت عقربه های ساعت به اندازهٔ $90°$ در هر تبدیل دارد نتیجه شیئی است که مرز فرکتالی دارد و تحت دوران ۱۲۰ درجه تغییر نمی کند. این شیء از آنجایی که به اژدهای سنتی چین شباهت دارد منحنی اژدها نامیده می شود. خط سفید در شکل فقط برای نشان دادن این است که شکل می تواند از سه قسمت مشابه کل ساخته شود.

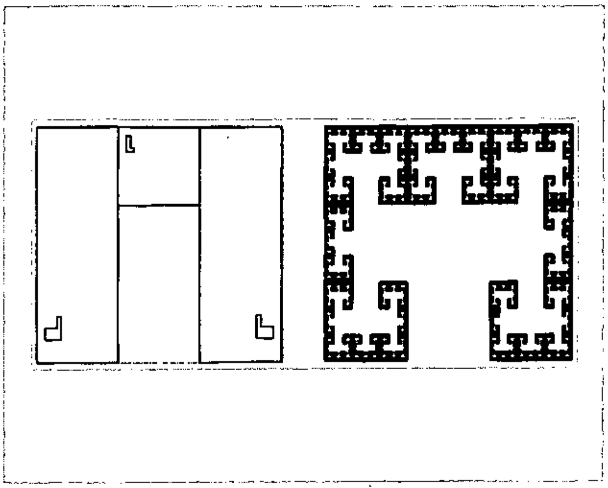
نمونه ۴ : پلکان مارپیچی کانتور

در این ماشین نیز سه تبدیل داریم تبدیل وسطی تبدیل تشابهی با مقیاس $\frac{1}{3}$ است، ۲ تبدیل دیگر با مقیاس $\frac{1}{3}$ تنها در جهت محور xها (افقی) هستند که یکی از این دو عمل تصویر کردن نسبت به محور





۷ ها را نیز انجام می دهد (تبدیل سمت چپ) به الگوریتم ماشین که در شکل نشان داده شده است توجه کنید اجزاء این ساختار مجموعهٔ کانتور است که این ساختار از بافته شدن این اجزاء به دست آمده است از این رو شکل حاصل **پلکان مارپیچی کانتور** نام گرفته است.

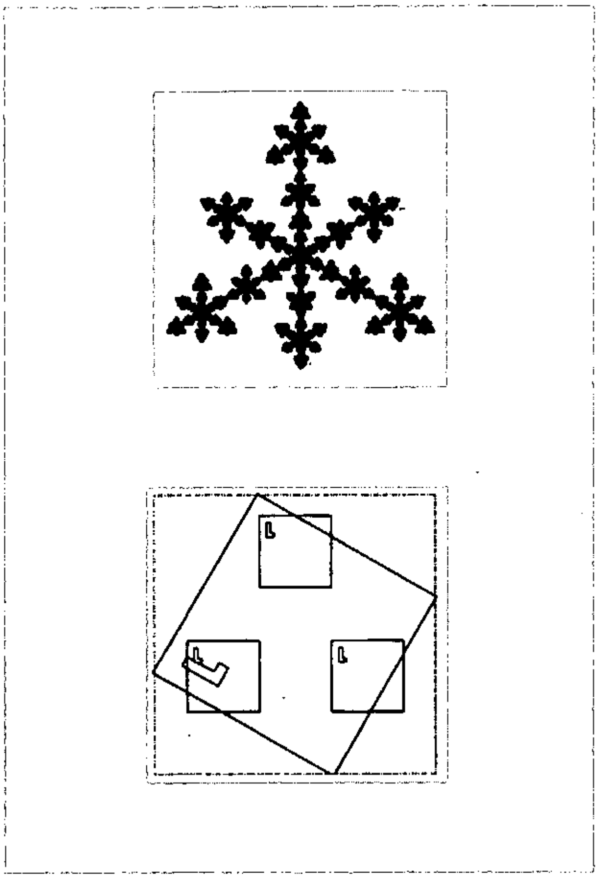


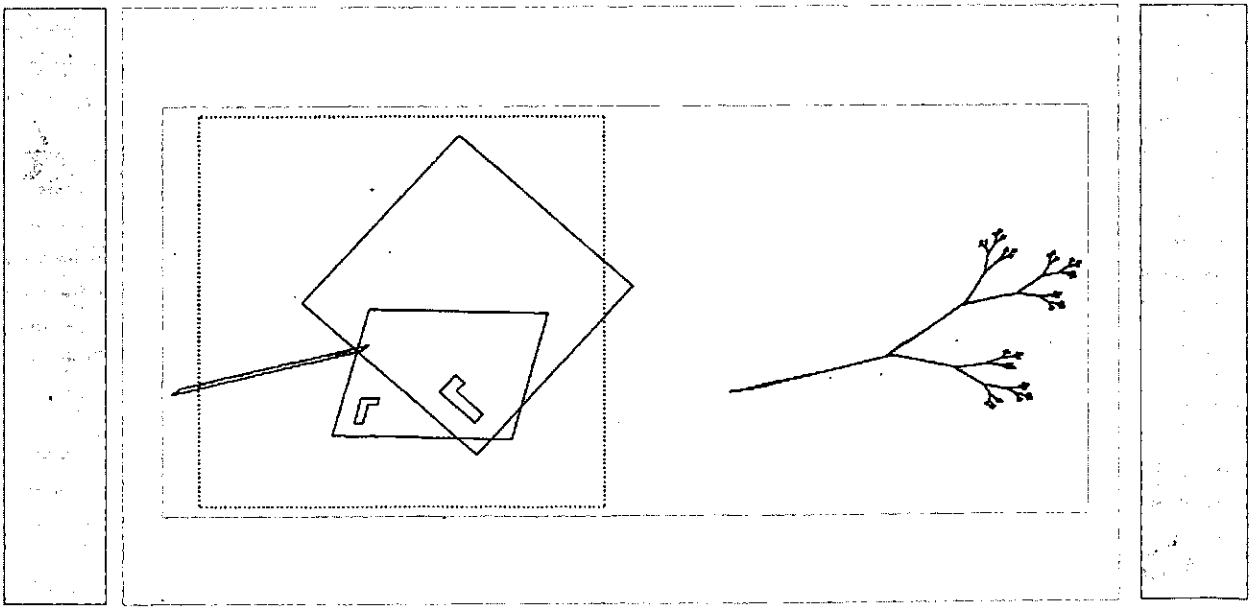
نمونه ۵: شاخهٔ گل

این نمونه آخرین مثال از یک MRCM سه تبدیلی است. نمونه های بعدی را با تبدیلات بیشتر ارائه می دهیم. تبدیلات نمونهٔ حاضر تبدیلات آفینی با مقیاسهای عمودی و افقی متفاوتی به همراه دوران هستند با اجرای الگوریتم ماشین که در شکل نشان داده شده شکلی پیدا می کنیم که خیلی شبیه به شاخهٔ کوچک یک گل است.

نمونه ۶: کریستال یخ

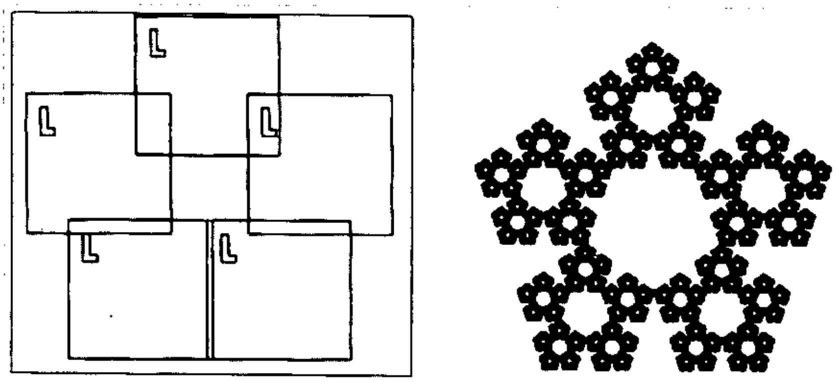
دارای ۴ تبدیل تشابهی است که یکی از تبدیلات دورانی در خلاف جهت عقربه های ساعت دارد.





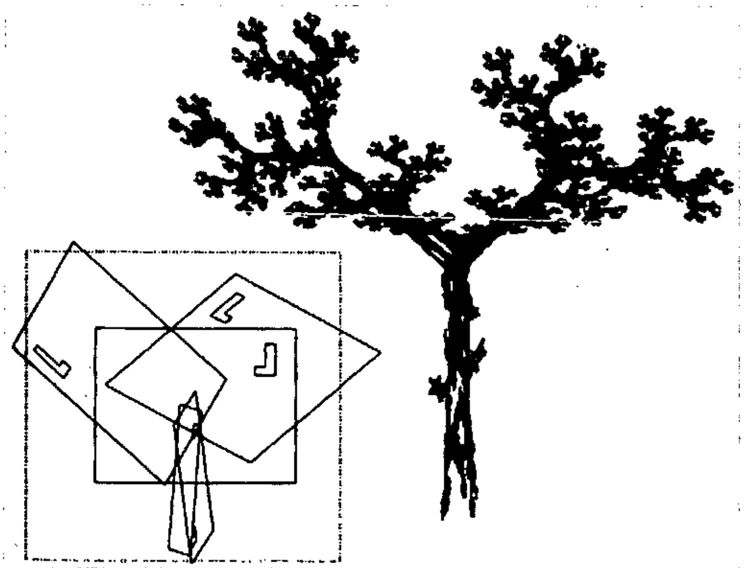
نمونه ۷: کریستال یخ

با ۵ تبدیل تشابهی که به صورت الگوریتم نشان داده شدهٔ ماشین در تصاویر تغییر ایجاد می کنند سعی کنید منحنی کخ را در attractor ببینید. ساختارهای ذکر شده در نمونه های ۶ و ۷ ساختمانهای پیچیده و زیبایی را مانند کریستالهای یخ آشکار می کنند.



نمونهٔ ۸: درخت

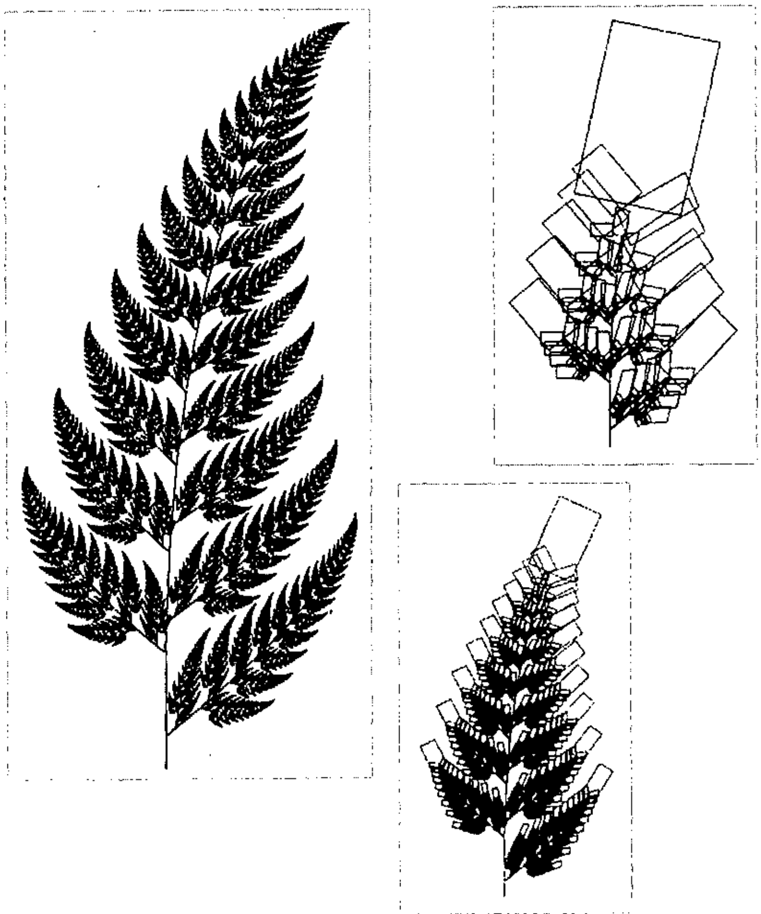
ماشینی با ۵ تبدیل آفینی که attractor آن شبیه به یک درخت می باشد. این مثال توانایی یک MRCM را در کشیدن تصاویر فرکتالی نشان می دهد.



نمونه ۹: سرخس

شکل زیر الگوریتم MRCMای را که دارای ۴ تبدیل است نشان می دهد که سه تبدیل آن آفینی و یک تبدیل آن مستطیل را به یک پاره خط تبدیل می کند ضرایب ۶ گانهٔ هریک از تبدیلات توسط بانزلی Barnsly در جدول زیر آمده است :

a	b	c	d	e	f
۰٫۸۴۹	۰٫۰۳۷	-۰٫۰۳۷	۰٫۸۴۹	۰٫۰۷۵	۰٫۱۸۳۰
۰٫۱۹۷	-۰٫۲۲۶	۰٫۲۲۶	۰٫۱۹۷	۰٫۴	۰٫۰۴۹۰
-۰٫۱۵۰	۰٫۲۸۳	۰٫۲۶۰	۰٫۲۳۷	۰٫۵۷۵	-۰٫۰۸۴۰
۰	۰	۰	۰٫۱۶۰	۰٫۵	۰



مراجع: -

1. **The Beauty of Fractals**, Images If Complex Dynamical systems. Springer_Verlag Berlin Heidelberg 1986.
2. **Fractal Geometry**, Mathematical Foundations and Applications. Kenneth Falconer. John Wiley & Sons Ltd. 1990.
3. **Fractal Functions, Fractal surfaces, and wavelets**. Peter R. Massopust. Academic Press, 1994.
4. **Chaos, Fractals, and Noise**, Stochastic Aspects of Dynamics. Andrzej Lasota & Michael C. Mackey. Springer-Verlag New York 1994.
5. **Fractals For the Classroom**; Part One: Introduction to Fractals **and Chaos**. Peitgen, Jürgens & Saupe. Springer-Verlag.1991

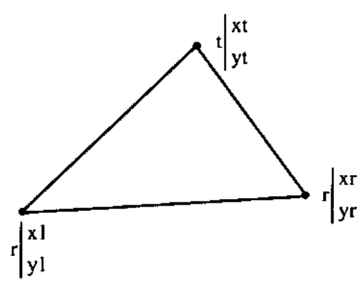
تولید فرکتالها توسط کامپیوتر

نگارش ـ طلا عباسی، دانشگاه تربیت معلم

در مقاله تولید و ویژگی های فرکتالها، نحوهٔ تولید آنها شرح داده شد.

در برنامه ای که ذیلاً می آید فرکتالهای بحث شده در آن مقاله تولید و نمایش داده می شوند.

در روش MRCM، بدون آنکه atractor حاصل تغییر کند، شکل اولیه می تواند مثلث، مربع یا ... باشد. در برنامه زیر شکل اولیه مثلث انتخاب شده است زیرا برای داشتن مثلث تبدیل یافته تحت تبدیلات هر MRCM کافی است که تبدیل یافتهٔ سه رأس مثلث را به دست آوریم. اگر شکل اولیه مربع باشد باید تبدیل یافتهٔ چهار رأس مربع تعیین شود. لذا، برای تقلیل محاسبات شکل اولیه را مثلث در نظر گرفته ایم. هر شکل در ده مرحله قابل تولید است، هر چه شمارهٔ مرحله به عدد ۱۰ نزدیکتر باشد شکل به atractor نزدیکتر است. مختصات سه رأس مثلث (xl, yl)، (xr, yr) و (xt, yt) هستند



که در این برنامه آرایه های ۱۰ مؤلفه ای هستند، اندیس آرایه شمارهٔ مرحلهٔ تبدیل است که مختصات رأس مورد نظر در آن مرحله را در خود ذخیره کرده است. به عنوان مثال متغیرهای xr (۵) و yr (۵) حاوی طول و عرض رأس r از مثلث در مرحلهٔ پنجم تبدیل است.

آرایه ای ۵ تایی a, b, c, d, e و f ضرایب مشخص کنندهٔ تبدیل هستند (در متن مقالهٔ «تولید فراکتالها» توضیح داده شده که هر تبدیل خطی انقباضی را می توان با ماتریس $\begin{pmatrix} a & b & : & e \\ c & d & : & f \end{pmatrix}$ مشخص نمود).

در ابتدای برنامه این آرایه ها برای هر MRCM مقداردهی شده اند. مثلاً، برای اولین MRCM که atractor آن «مثلث سیرپنسکی توسعه یافته» است در متن برنامه چنین داریم:

a (۱) = ۰/۵	a(۲) = ۰/۵	a (۳) = ۰/۵
b (۱) = ۰	b (۲) = ۰	b (۳) = ۰
c (۱) = ۰	c (۲) = ۰	c (۳) = ۰
d (۱) = ۰/۵	d (۲) = ۰/۵	d(۳) = ۰/۵
e (۱) = ۰	e (۲) = ۰/۵	e (۳) = ۰/۲۵
f (۱) = ۰	f (۲) = ۰	f (۳) = ۰/۵

به عبارت دیگر، ماتریسهای تبدیل اول، دوم و سوم، به ترتیب از چپ به راست، عبارت اند از:

$$\begin{pmatrix} ۰/۵ & ۰ & : & ۰ \\ ۰ & ۰/۵ & : & ۰ \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} ۰/۵ & ۰ & : & ۰/۵ \\ ۰ & ۰/۵ & : & ۰ \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} ۰/۵ & ۰ & : & ۰/۲۵ \\ ۰ & ۰/۵ & : & ۰/۵ \end{pmatrix}$$

در زیربرنامهٔ شماره ۵۰ مختصات رأسهای مثلثهای تبدیل یافته در مرحلهٔ k ام (که مقدار k قبل از فراخوانی این زیربرنامه مشخص شده است) با توجه به توضیحات مقاله مربوط به تولید و ویژگیهای فرکتالها به دست می آید. در زیربرنامه شماره ۱۰۰ خطهای واصل بین این رأسها، که همان اضلاع مثلث هستند، رسم می شوند رنگ این خطها با دستور

COLOR INT (RND*10+5) و 15

مشخص می شود. حتماً می دانید که RND در زبان QBASIC عددی تصادفی بین ۰ و ۱ است که وقتی در ۱۰ ضرب و با ۵ جمع می شود جزء صحیح آن عددی طبیعی بین ۵ و ۱۴ می شود. توجه کنید که رنگ زمینه به طور ثابت ۱۵ انتخاب شده تا هیچگاه رنگ زمینه با رنگ خطها یکسان نشود؛ چه در غیراین صورت رنگ خطها در زمینه محو می شود.

برنامه ارائه شده شکلهای زیر را تولید می کند، البته بر حسب شماره ای که انتخاب می شود و تعداد مراحلی که مایلیم هر شکل اجرا شود.

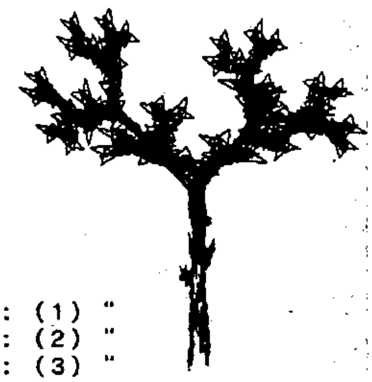
۱ـ مثلث سیرپنسکی توسعه یافته

۲ـ درخت کریسمس ــ ۳ـ منحنی اژدها

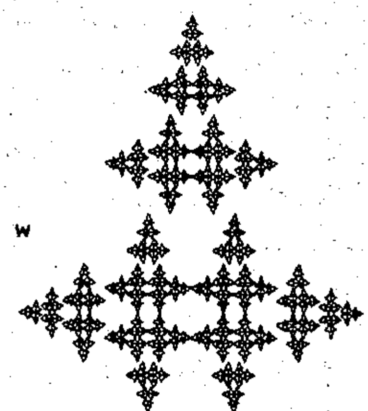
۴ـ مارپیچ کانتور ــ ۵ـ شاخهٔ گل

۶ـ کریستال ۴ تایی ــ ۷ـ کریستال ۵ تایی

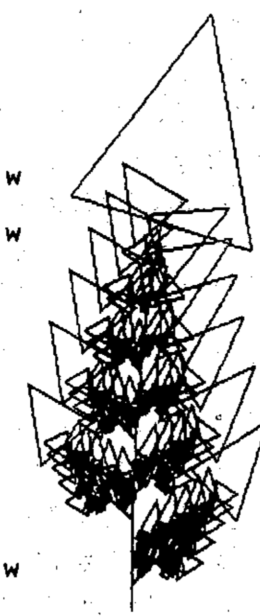
۸ـ درخت ــ ۹ـ سرخس



```
DIM xl(10), xr(10), xt(10), yl(10), yr(10), yt(10)
DIM a(5), b(5), c(5), d(5), e(5), f(5)
SCREEN 9
left = 30
w = 300
t% = 1
DO WHILE t% <> 0
CLS 0
RANDOMIZE TIMER
COLOR 11, 0
PRINT
PRINT
PRINT "                                Sierpinski gasket : (1) "
PRINT "                                Twin Christmas    : (2) "
PRINT "                                Dragon            : (3) "
PRINT "                                Cantor Maze       : (4) "
PRINT "                                Twig              : (5) "
PRINT "                                Crystal-4         : (6) "
PRINT "                                Crystal-5         : (7) "
PRINT "                                Tree              : (8) "
PRINT "                                Fern              : (9) "
PRINT
COLOR 9
PRINT "                                EXIT              : enter "
COLOR 11, 0
PRINT
INPUT "                                enter number      :  ", n
CLS 0
SELECT CASE n
CASE 1
REM sierpinski
  a(1) = .5:        a(2) = .5:        a(3) = .5
  b(1) = 0:         b(2) = 0:         b(3) = 0
  c(1) = 0:         c(2) = 0:         c(3) = 0
  d(1) = .5:        d(2) = .5:        d(3) = .5
  e(1) = 0:         e(2) = .5 * w:    e(3) = .25
  f(1) = 0:         f(2) = 0:         f(3) = .5 * w
CASE 2
REM  christmas
  a(1) = 0:         a(2) = 0:         a(3) = .5
  b(1) = -.5:       b(2) = .5:        b(3) = 0
  c(1) = .5:        c(2) = -.5:       c(3) = 0
  d(1) = 0:         d(2) = 0:         d(3) = .5
  e(1) = .5 * w:    e(2) = .5 * w:    e(3) = .25 * w
  f(1) = 0 * w:     f(2) = .5 * w:    f(3) = .5 * w
CASE 3
REM  dragon
  a(1) = 0:         a(2) = 0:         a(3) = 0
  b(1) = .577:      b(2) = .577:      b(3) = .577
  c(1) = -.577:     c(2) = -.577:     c(3) = -.577
  d(1) = 0:         d(2) = 0:         d(3) = 0
  e(1) = .0951 * w: e(2) = .4413 * w: e(3) = .0952 * w
  f(1) = .5893 * w: f(2) = .7893 * w: f(3) = .9893 * w
CASE 4
REM   cantor maze
  a(1) = .333:      a(2) = 0:         a(3) = 0
  b(1) = 0:         b(2) = .333:      b(3) = -.333
  c(1) = 0:         c(2) = 1!:        c(3) = 1!
  d(1) = .333:      d(2) = 0:         d(3) = 0
  e(1) = .333 * w:  e(2) = .666 * w:  e(3) = .333 * w
  f(1) = .6666 * w: f(2) = 0 * w:     f(3) = 0 * w
```



```
CASE 5
REM  twig
  a(1) = .387:      a(2) = .441:      a(3) = -.468
  b(1) = .43:       b(2) = -.091:     b(3) = .02
  c(1) = .43:       c(2) = -.009:     c(3) = -.113
  d(1) = -.387:     d(2) = -.322:     d(3) = .015
  e(1) = .256 * w:  e(2) = .4219 * w: e(3) = .4 * w
  f(1) = .522 * w:  f(2) = .5059 * w: f(3) = .4 * w
CASE 6
REM  crystal-4
  a(1) = .255:      a(2) = .255:      a(3) = .255:      a(4) = .37
  b(1) = 0:         b(2) = 0:         b(3) = 0:         b(4) = -.642
  c(1) = 0:         c(2) = 0:         c(3) = 0:         c(4) = .642
  d(1) = .255:      d(2) = .255:      d(3) = .255:      d(4) = .37
  e(1) = .3726 * w: e(2) = .1146 * w: e(3) = .6306 * w
  e(4) = .6356 * w
  f(1) = .6714 * w: f(2) = .2232 * w: f(3) = .2232 * w
  f(4) = -.0061 * w
CASE 7
REM  crystal-5
  a(1) = .382:      a(2) = .382:      a(3) = .382
  a(4) = .382:      a(5) = .382
  b(1) = 0:         b(2) = 0:         b(3) = 0
  b(4) = 0:         b(5) = 0
  c(1) = 0:         c(2) = 0:         c(3) = 0
  c(4) = 0:         c(5) = 0
  d(1) = .382:      d(2) = .382:      d(3) = .382
  d(4) = .382:      d(5) = .382
  e(1) = .3072 * w: e(2) = .6033 * w: e(3) = .0139 * w
  e(4) = .1253 * w: e(5) = .492 * w
  f(1) = .619 * w:  f(2) = .4044 * w: f(3) = .4044 * w
  f(4) = .0595 * w: f(5) = .0595 * w
CASE 8
REM  tree
  a(1) = .195:      a(2) = .462:      a(3) = -.058
  a(4) = -.035:     a(5) = -.637
  b(1) = -.488:     b(2) = .414:      b(3) = -.07
  b(4) = .07:       b(5) = 0
  c(1) = .344:      c(2) = -.252:     c(3) = .453
  c(4) = -.469:     c(5) = 0
  d(1) = .443:      d(2) = .361:      d(3) = -.111
  d(4) = -.022:     d(5) = .501
  e(1) = .4431 * w: e(2) = .2511 * w: e(3) = .5976 * w
  e(4) = .4884 * w: e(5) = .8562 * w
  f(1) = .2452 * w: f(2) = .5692 * w: f(3) = .0969 * w
  f(4) = .5069 * w: f(5) = .2513 * w
CASE 9
REM  fern
  a(1) = .849:      a(2) = .197:      a(3) = -.15:       a(4) = 0
  b(1) = .037:      b(2) = -.226:     b(3) = .283:       b(4) = 0
  c(1) = -.037:     c(2) = .226:      c(3) = .26:        c(4) = 0
  d(1) = .849:      d(2) = .197:      d(3) = .237:       d(4) = .16
  e(1) = .075 * w:  e(2) = .4 * w:    e(3) = .575 * w:   e(4) = .5 * w
  f(1) = .183 * w:  f(2) = .049 * w:  f(3) = -.084 * w:  f(4) = 0 * w
CASE 0
EXIT DO
CASE ELSE
GOTO 33
END SELECT
```



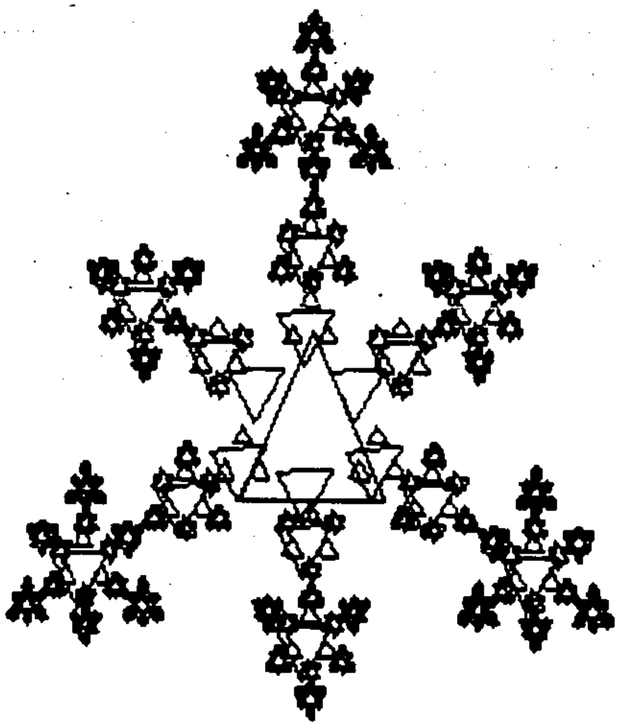
```
22 CLS 0:  COLOR 9, 15
INPUT "enter number of level: 1,2, ... ,10 ==> ", l
IF l = 0 GOTO 33
wl = w + left
xl(l) = 0:          yl(l) = 0
xr(l) = w:          yr(l) = 0
xt(l) = .5 * w:     yt(l) = w
GOSUB 100
COLOR 9, 15:     INPUT "press any key", ll
GOTO 22
33 LOOP
END

50
xl(l) = a(m) * xl(l + 1) + b(m) * yl(l + 1) + e(m)
yl(l) = c(m) * xl(l + 1) + d(m) * yl(l + 1) + f(m)
xr(l) = a(m) * xr(l + 1) + b(m) * yr(l + 1) + e(m)
yr(l) = c(m) * xr(l + 1) + d(m) * yr(l + 1) + f(m)
xt(l) = a(m) * xt(l + 1) + b(m) * yt(l + 1) + e(m)
yt(l) = c(m) * xt(l + 1) + d(m) * yt(l + 1) + f(m)

100 IF l > 1 GOTO 200
COLOR INT(RND * 10 + 5), 15
LINE (left + xl(1), wl - yl(1))-(left + xr(1), wl - yr(1))
COLOR INT(RND * 10 + 5), 15
LINE -(left + xt(1), wl - yt(1))
COLOR INT(RND * 10 + 5), 15
LINE -(left + xl(1), wl - yl(1))
GOTO 300

200 l = l - 1
m = 1: GOSUB 50
m = 2: GOSUB 50
m = 3: GOSUB 50

SELECT CASE n
CASE 6: m = 4: GOSUB 50
CASE 7: m = 4: GOSUB 50
        m = 5: GOSUB 50
CASE 8: m = 4: GOSUB 50
        m = 5: GOSUB 50
CASE 9: m = 4: GOSUB 50
CASE ELSE:     GOTO 250
END SELECT
250 l = l + 1
300 RETURN
```



ریاضیات و بند کفش

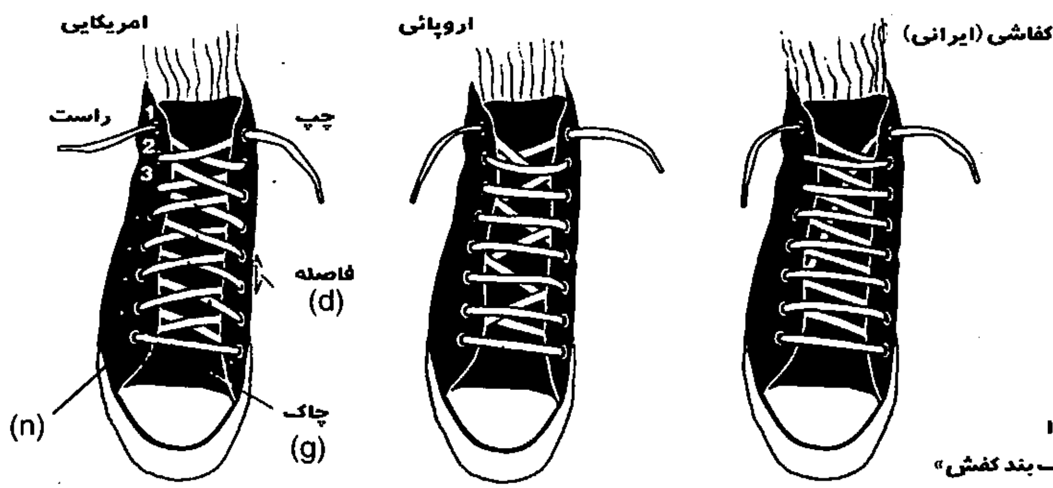
نویسنده: یان استوارت
مترجم: مهناز پاک‌خصال
(دبیر ریاضی استان تهران)

آیا هیچ گاه از خود پرسیده اید که چه کسی یک ریاضیدان است؟ چندین سال پیش جرقه ای برای این پرسش در ذهن من ایجاد شد و به نظرم رسید که ریاضیدان شخصی است که قدرت تشخیص فرصتهای موجود برای به کارگیری ریاضیات را دارد و این در حالی است که بقیهٔ افراد متوجه این فرصتها نیستند. در این مورد می توان بند کفش را درنظر گرفت.

مطمئناً پتانسیل استفاده از ریاضیات برای یک چنین موضوعی بوضوح روشن نیست. این موضوع زمانی جالب می شود که بدانید آقای جان هالتون استاد علوم کامپیوتر دانشگاه کارولینای شمالی مقاله ای با عنوان «معمای بند کفش» به رشته تحریر درآورده است.

طبق شکل ۱ حداقل سه نوع آرایش کلی برای بستن بند کفش وجود دارد که عبارتست از نوع امریکائی(زیگزاگ)، نوع اروپائی و نوع کفاشی(ایرانی). هر چند از نظر خریدار شکل ظاهری و زمان لازم برای گره زدن دارای اهمیت است ولی برای تولید کنندگان کفش، موضوع مهمتر آن است که کدام یک از آرایشها دارای کوتاهترین طول بوده و در نتیجه کمترین هزینه را دربر خواهد داشت؟ در این مقاله هدف آن است که به این سؤال تولید کنندگان کفش پاسخ مناسب داده شود.

در این مقاله به منظور یافتن طول بند فقط اندازهٔ خطوط مستقیم مورد توجه قرار گرفته است. فرض شده است که طول مورد نیاز برای گره زدن در تمامی آرایشها یکسان است و از این رو درنظر گرفته نشده است.



شکل ۱
«آرایشهای مختلف بند کفش»

توصیه می شود از چشم های کسی که کفش را پوشیده است بـه کفش بنگرید و در این راستا منظور از ردیف بالائـی سـوراخـهـا، سوراخهائی است که نزدیک پا باشد. نکته دیگر اینکـه در ایـنـجـا ضخامت بند (ضخامت خط) معادل صفر و سوراخها نیز به عنـوان نقطه فرض شده اند. حال اگر به دقت به مسئله بنگریم، خواهیم دید که طول بند به سه پارامتر بستگی دارد که در روی شکل نیز مشخص شده اند:

- تعداد ردیف سوراخها (n)
- فاصله بین سوراخهای متوالی (d)
- فاصله بین سوراخهای چپ و راست در هر ردیف (g)

با استفاده از قضیه فیثاغورس می توان طول بندها را یافت (البته شاید تعجب کنید که قضیهٔ یک چنین مرد بزرگی دارای این کاربـرد باشد):

الف) امریکائی: $g+2(n-1)\sqrt{d^2+g^2}$

ب) اروپائی: $(n-1)g+2\sqrt{d^2+g^2}+(n-2)\sqrt{4d^2+g^2}$

ج) کفاشی:

$$(n-1)g+(n-1)\sqrt{d^2+g^2}+\sqrt{(n-1)^2d^2+g^2}$$

حال باید دید که کدام یک از آرایشها کوتاهتر است و برای این کار $n=8$، $d=1$ و $g=2$ درنظر گرفته می شوند.

الف) امریکائی: $2+14\sqrt{5} = 33/305$

ب) اروپائی: $14+2\sqrt{5}+6\sqrt{8} = 35/443$

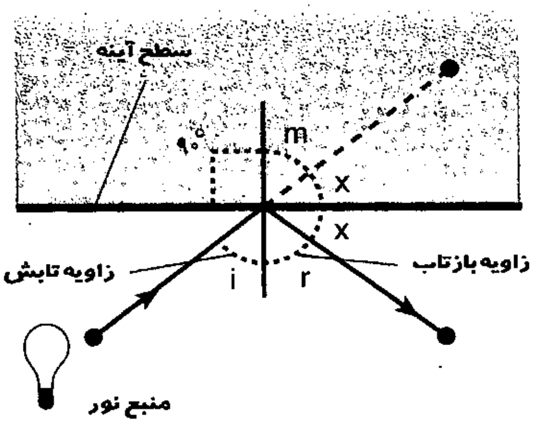
ج) کفاشی: $14+7\sqrt{5}+\sqrt{53} = 36/933$

در اینجا این سؤال مطرح است که آیا نوع امریکائـی هـمـیـشـه کوتاهترین طول را دارد. با استفاده از قوانین جبری می توان دید که اگر d و g غیر صفر بوده و n نیز حداقل ۴ باشد، دارندگان کوتاهترین طول به ترتیب عبارت خواهند بود از نوع امریـکـائـی، اروپـائـی و کفاشی. اگر $n=3$ باشد مجدداً آرایش امریکائی کوتاهترین طول را دارد ولی طول بند دو نوع دیگر مساوی می شود. نهایتـاً اگر $n=2$ شود طول انواع آرایشها یکسان خواهد شـد ولـی احـتـمـالاً فـقـط ریاضیدانها به این حالت علاقه مند می باشند.

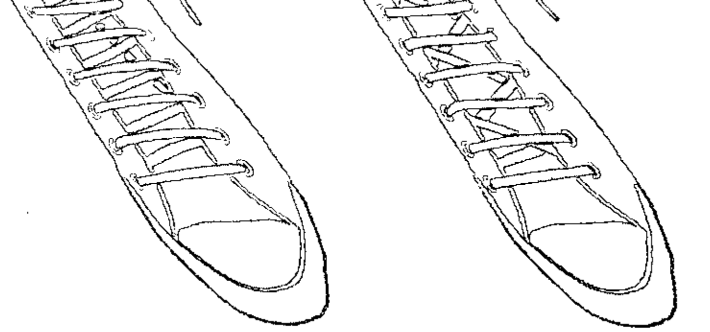
با وجود مطالب فوق هنوز دیدگاه جبری پیچیده به نظر می رسد و بینش مناسبی را درباره علت این اختلافات ارائه نمی دهد. آقـای هالتون با استفاده از یک دانش هندسی به وضوح نشان داد که چرا نوع امریکائی دارای کوتاهترین طول است. ایـشـان بـرای ایـن ایـده از اپتیک (نور) الهام گرفته و از مطالعه مسیر حاصل از شعاعهای نوری استفاده نموده اند و نتیجه آن شد که برای این مسئله یک راه حل هندسی نیز ارائه نمودند که موضوع را شفاف تر از حالت جبری ارائه می کند.

ریاضیدانان سالها قبل کشف کرده بودند که با استفاده از انتخاب بازتابهای دقیق می توان یک مسیر نوری خمیده را مستقیـم نـمـود و بدینوسیله هندسه پرتوهای نوری را راحت تر تشریح نمود. برای مثال جهت اثبات قانون انعکاس (تساوی زاویه تابش و بازتابش) را درنظر بگیرید که یک پرتو نوری به آینه برخورد کرده و برمـی گـردد. اگـر بازتاب (تقارن محوری) پرتو تابش نسبت به صفحه آینه رسم شود، خواهید دید که مسیر پرتو از آینه عبور کرده و وارد محیط پشت آینـه خواهد شد.

طبق اصل «حداقل زمان» که توسط فرما (در مورد پرتوهای نوری) کشف شد، پرتو در کوتاهترین زمان به مقصد خواهد رسیـد و ایـن بیانگر آن است که مسیر به صورت یک خط راست می باشد. در این قسمت جهت اثبات قانون انعکاس، یک عمود بر صفحه آینه و نقطه تابش رسم می شود. با توجه به شکل ۲ می توان دریافت که زاویه m برابر زاویه i است و $m+x=90^\circ$. اگر r زاویه انعکاس باشد خواهیم دید کـه $r+x=90^\circ$ پس با توجه به این مطالب درمـی یـابـیـم کـه $m=r=i$.



شکل ۲-۱ «اصل فرما در فیزیک نور»

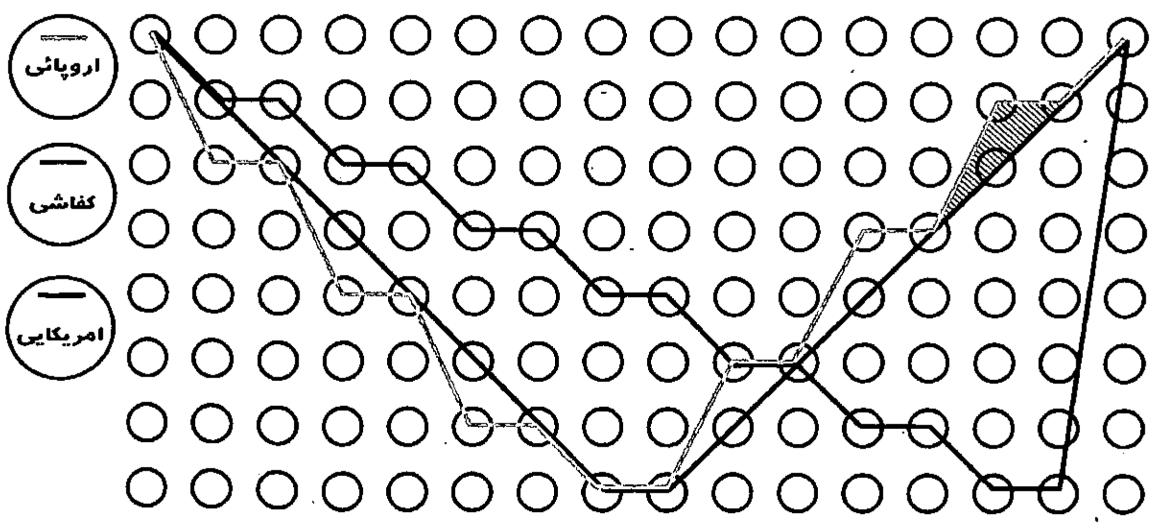


آقای هالتون از موضوعات فوق استفاده کرده و با استفاده از روش بازتاب، نمایش هندسی سه نوع آرایش بند کفش را رسم نموده است. او دیاگرامی را تهیه کرده است که دارای 2n ستون (از سوراخها) است که فاصله آنها از یکدیگر در جهت عمودی d است و بعلاوه ردیفهای افقی نیز دارای فاصله g می باشند (البته جهت کوچک شدن شکل مقادیر d و g کوچکتر گردیده اند.) با دقت در این دیاگرام می توان دید که تمامی پارامترهای مربوطه بر روی دیاگرام لحاظ شده اند. در این دیاگرام ستونهای فرد نماینده سوراخهای سمت چپ و ستونهای زوج نماینده سوراخهای سمت راست می باشد.

مسیرهای چندضلعی (گون) که در این دیاگرام دیده می شود در ارتباط با نحوه بستن بند کفش می باشد که در همین راستا یک تغییر جهت کلی نیز در آن دیده می شود. برای رسم این دیاگرام از بالاترین سوراخ سمت چپ شروع کرده و با توجه به نحوهٔ آرایش، اولین قسمت بند رسم می شود یعنی از سمت چپ به سمت راست آمده و خط بین ستونهای ۱ و ۲ را رسم می کنیم.

در کفش به این صورت است که ما برای ادامه کار از قسمت ۲ به قسمت قبلی بازمی گردیم ولی در روی دیاگرام، ما از ستون ۲ به جای سمت راست به ستون ۳ می رویم. در اصل مانند آن است که با قرار دادن آینه سوراخها را منتقل کرده باشیم. حال باید به کار ادامه داد. نتیجهٔ حاصل آن می شود که به جای حالتی زیگزاگی به وضعیتی خواهیم رسید که مسیرها به سمت چپ دیاگرام متمایل شده و حرکت می کنند.

چون در بازتاب یک پاره خط طول آن تغییری نمی کند، طول خطوط این دیاگرام دقیقاً مساوی طول آرایش مربوطه در روی کفش خواهد بود. مزیت این دیاگرام آن است که به راحتی می توان آرایشهای اروپائی و امریکائی را با یکدیگر مقایسه نمود. هرچند که در چند نقطه خطوط بر هم منطبق می شوند ولی با دقت در شکل ۳ می توان دید که در مثلثهای تشکیل شده، دو ضلع متعلق به نوع اروپائی و یک ضلع متعلق به نوع امریکائی است. به دلیل آنکه مجموع دو ضلع مثلث همواره از ضلع سوم بزرگتر است (و خط مستقیم کوتاهترین فاصله بین دو نقطه است)، نوع امریکائی کوتاهتر می باشد.

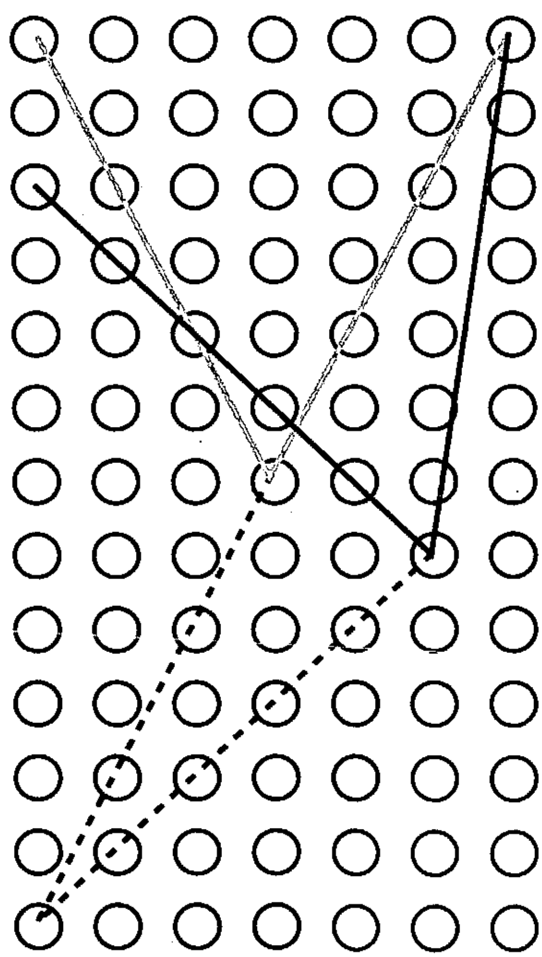


شکل ۳ - «دیاگرام نمایش هندسی آرایشهای مختلف»

مزیت این روش هندسی نسبت به روش جبری آن است که می توان با دقت در دیاگرام به راحتی به علت کوتاهتر بودن یک آرایش نیز پی برد.

در این دیاگرام بلندتر بودن طول در آرایش کفاشی نسبت به آرایش اروپائی کاملاً واضح نمی باشد. ساده ترین راه حل برای این مشکل آن است که خطوط دارای اندازه های مساوی کنار گذاشته شوند و برای این کار لازم است تعداد $(n-1)$ پاره خط افقی مربوط به هر کدام از آرایشها بهمراه دو پاره خط مورب (یکسان) کنار گذاشته شوند. پس از این عمل فقط دو مسیر V شکل باقی می ماند. در اینجاست که مسیر بریده شده اروپائی را باید بنحوی انتقال داد که روی اولین سوراخ باقیماندهٔ آرایش کفاشی قرار گیرد. حال اگر مجدداً توسط تصویر آینه ای مسیر V شکل، با استفاده از قانون بازتاب مستقیم گشته و با خط چین رسم شود (شکل ۴)، براحتی می توان دریافت که طول آرایش کفاشی بلندتر از نوع اروپائی است چون باقیمانده مسیر اروپائی در یک امتداد قرار می گیرند ولی باقیمانده مسیر کفاشی در یک امتداد نبوده و دو ضلع دیگر مثلث را تشکیل می دهند که مجموع آنها از مجموع یک ضلع بیشتر است.

دانش آموزان و دانشجویان همواره از خود می پرسند که بازتاب (تقارن محوری) چه کاربردی دارد؟ حال می توان دید که مطلب فوق یکی از دهها کاربرد این موضوع را نشان داده است. از حقهٔ زیرکانه بازتاب برای مطالبی بجز طول بند کفش نیز می توان استفاده نمود. آقای هالتون برای آنکه نشان دهد که آرایش امریکائی دارای کوتاهترین طول است، از آن استفاده نمود ولی باید دانست که چه طول بند کفش و چه قضیه فرما در اپتیک، نتیجهٔ نظریه ریاضی ژئودزیک (کوتاهترین مسیر در هندسه های مختلف) است که باید با توجه به نوع نیاز از این تئوری استفاده نمود.



شکل ۴

«مقایسه پاره خطهای باقیمانده از آرایشهای اروپائی و کفاشی»

مرجع:

Ian stewart, scientific American, July 1996

تقریب

عین اله پاشا
دانشگاه تربیت معلم

مقدمه

در حل مسائل کاربردی ناچار خواهیم بود تا ریاضیات محض و فن آوری را با هم تلفیق کنیم. در برخی موارد فن آوری توانایی پاسخگویی به سؤالهای ریاضیات محض را ندارد. در این قبیل موارد لازم است تا سؤالهای ریاضیات محض را تا حدی که برای فن آوری قابل درک و استفاده باشد ساده کنیم.

یکی از این راه ها تقریب است. در این مقاله سعی می کنیم برخی روشهای مقدماتی تقریب را بیان کنیم. مثالهای قابل لمس را می توانیم از رایانه ها ارائه کنیم. در رایانه ها همه چیز به کمک ۰ و ۱ تولید می شوند. با این مصالح ساده ایجاد مقادیر پیچیده ای مانند $\sqrt{2}$ و یا حتی مشکل تر مانند e و π امکان پذیر نیست. برای آنکه بتوانیم از این اعداد مهم ریاضی در رایانه ها استفاده کنیم ناگزیر هستیم از مقادیری که امکان تولیدشان به وسیله کامپیوتر هست و به اندازهٔ کافی به این اعداد نزدیک هستند استفاده کنیم. مثلاً تولید $\sqrt{2}$ در رایانه میسر نیست، ولی رایانه ها می توانند اعداد گویا را تولید کنند. بنابراین باید به روشهای مناسبی بتوانیم عدد گویایی که به اندازهٔ کافی به $\sqrt{2}$ نزدیک باشد به دست آوریم. یکی از راه هایی که می تواند ما را به این هدف نزدیک کند استفاده از بسط مک لورن تابع مناسب است.

یادآوری

اگر f تابعی باشد که مشتقات تا مرتبهٔ nام آن موجود باشد، آن گاه f را می توانیم به وسیلهٔ یک چند جمله ای تقریب بزنیم (به مقالهٔ قضیهٔ مک لورن در حسابان دبیرستانی مراجعه شود). صورت این تقریب عبارت است از

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+R_n$$

که در این عبارت R_n برای تابعهای مناسب f می تواند محدود و یا حتی قابل صرفنظر کردن باشد، که در این صورت چند جمله ای درجهٔ $n-1$ ام سمت راست برابری بالا، یک تقریب مناسب برای f(x) خواهد بود. حال با استفاده از این موضوع به محاسبهٔ تقریبی برخی مقادیر می پردازیم.

مثال

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,\quad |x|<1$$

بنابراین با انتخاب مناسب n می توان یک چند جمله ای به صورت

$$1+x+x^2+\cdots+x^n$$

را به عنوان تقریب مناسبی از $\frac{1}{1-x}$ به کار بریم. در برابری بالا اگر به جای x ، x^2 قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}+\cdots \qquad |x|<1$$

همچنین با تبدیل x به -x

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$$

و در نتیجه

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots$$

بعضی از قوانین ریاضی این اجازه را به ما می‌دهند که بتوانیم از طرفین این برابریها مشتق و یا انتگرال بگیریم. در این صورت با محاسبه انتگرال تابع $\frac{1}{1-x}$ بسط زیر به دست می‌آید.

$$-\mathrm{Ln}(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots$$

و یا به طریق مشابه

$$\mathrm{Ln}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

همچنین با انتگرال گیری از $\frac{1}{1+x^2}$ خواهیم داشت:

$$\mathrm{Arctg}x=\mathrm{tg}^{-1}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9-\cdots$$

حال به محاسبه مقدار تقریبی برای بعضی از اعداد اصم و اعداد متعالی و برخی از انتگرالها می‌پردازیم.

۱- $\sqrt{2}$

برای محاسبهٔ مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ از بسط مک لورن تابع $f(x)=\sqrt{1+x}$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5}{128}x^4+\cdots$$

حال قرار می‌دهیم $x=1$ ، بنابراین

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{5}{128}+\cdots$$

که با توقف در هر یک از جملات بسط بالا یک تقریب برای $\sqrt{2}$ به دست می‌آید، هر چقدر جمله‌ها بیشتر شود تقریب بهتری برای $\sqrt{2}$ خواهیم داشت

$\sqrt{2}\approx 1$ (با توقف در جملهٔ اول)

$=\frac{3}{2}$ (با توقف در جملهٔ دوم)

$=\frac{11}{8}$ (با توقف در جملهٔ سوم)

$=\frac{23}{16}$ (با توقف در جملهٔ چهارم)

۲- $\mathrm{Sin}32^\circ$

برای محاسبهٔ مقدار تقریبی $\mathrm{Sin}32^\circ$ از بسط تابع

$$f(x)=\mathrm{Sin}(30+x)$$

و بسط مک لورن آن استفاده می‌کنیم:

$$\mathrm{Sin}(30+x)=\mathrm{Sin}30+x\mathrm{Cos}30-\frac{x^2}{2}\mathrm{Sin}(30)-\frac{x^3}{6}\mathrm{Cos}30+\frac{x^4}{24}\mathrm{Sin}(30)+\cdots$$

حال در عبارت بالا به جای x مقدار ۲° درجه را قرار می‌دهیم ولی باید در سمت راست برابری این مقدار را بر حسب رادیان که برابر ۰٫۰۳۵ است قرار دهیم، بنابراین

$$\mathrm{Sin}(32^\circ)=\frac{1}{2}+0/035\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{(0/035)^2}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{(0/035)^3}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\cdots$$

ملاحظه می‌شود که هر چقدر جلوتر برویم ۰/۰۳۵ به توانهای بالاتر می‌رسد و بر اعداد بزرگتر نیز تقسیم می‌شود. پس به سرعت

جمله های این بسط به ۰ نزدیک می شود، از این رو تقریب های °Sin۳۲ عبارت خواهند بود از

$$\begin{aligned}\text{Sin}۳۲^\circ &= ۰/۵\\ &\approx ۰/۵۳\end{aligned}$$

البته برای انجام این محاسبات لازم است قبلاً مقادیر تقریبی $\sqrt{۳}$ و π (برای تبدیل درجه به رادیان) محاسبه می شد.

۳- e

برای محاسبه یک مقدار تقریبی برای e از تابع $f(x) = e^x$ و بسط مک لورن آن استفاده می کنیم:

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots$$

حال قرار می دهیم $x = ۱$، در نتیجه:

$$e = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۲۴} + \frac{۱}{۱۲۰}$$

ملاحظه می شود که از جمله پنجم به بعد مقداری که به مقدار قبلی اضافه می شود از ۰/۱ هم کمتر است بنابراین جمله های بیشتر در این بسط تغییر زیادی در مقادیر نمی دهد: پس

$$\begin{aligned}e &= ۲/۵\\ &\approx ۲/۶۶۶۶\\ &\approx ۲/۷۰۸۲۶\\ &\approx ۲/۷۱۶۵\end{aligned}$$

۴- π

قبلاً ملاحظه می کنیم که $\pi = ۶\text{Sin}^{-۱}(\frac{۱}{۲})$، حال از بسط تابع $f(x) = ۶\text{Sin}^{-۱}(x)$ استفاده می کنیم

$$۶\text{Sin}^{-۱}(x) = ۶x + x^۳ + \frac{۹}{۲۰}x^۵ + \frac{۱۵}{۵۶}x^۷ + \cdots$$

بنابراین با قرار دادن $x = \frac{۱}{۲}$، خواهیم داشت:

$$\pi \approx ۳ + \frac{۱}{۸} + \frac{۹}{۲۰ \times ۳۲} = ۳/۱۳۹۰۶۲۵$$

بحث تقریبها به این مطالب ختم نمی شود. مثلاً در احتمال توزیع مهم نرمال استاندارد دارای تابع چگالی زیر است:

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{x^۲}{۲}} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

گر متغیر z دارای توزیع نرمال استاندارد باشد برای محاسبه $P(a \le z \le b)$ بایستی از تابع بالا در بازهٔ (a,b) انتگرال بگیریم:

$$P(a \le z \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

اما چگالی این توزیع مهم و مفید به گونه ای است که هیچ تابع شناخته شده ای را نمی توان یافت که مشتق آن برابر f(x) شود، بنابراین از روشهای معمول انتگرال گیری (محاسبهٔ تابع اولیه) نمی توان انتگرال بالا را حساب کرد. تنها راهی که می ماند آن است که یک مقدار تقریبی برای این انتگرال به دست می آوریم. برای این منظور از تقریب چند جمله ای برای تابع f(x) استفاده می کنیم. چون قبلاً با تصاویر تقریبی π و ریشه دوم اعداد آشنا شده ایم، در این جا فقط به تقریب حالت خاص زیر می پردازیم.

۵- $\int_۰^۱ e^{-x^۲}dx$

برای محاسبه تقریبی این انتگرال از بسط مک لورن تابع $f(x) = e^{-x^۲}$ استفاده می کنیم

$$f(x) = e^{-x^۲} = ۱ - x^۲ + \frac{x^۴}{۲} - \frac{x^۶}{۶} + \frac{x^۸}{۲۴} - \cdots$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\int_۰^۱ e^{-x^۲}dx &\approx \int_۰^۱ (۱ - x^۲ + \frac{x^۴}{۲} - \frac{x^۶}{۶} + \frac{x^۸}{۲۴})dx\\ &\approx ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۱۰} - \frac{۱}{۴۲} + \frac{۱}{۲۱۶}\\ &\approx ۰/۷۴۲\end{aligned}$$

مریم گویا
آموزش و پرورش منطقه ۲ تهران

روایت معلمان

به دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه‌ها به عمل دَر می‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایتهای خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیّت تجربه‌ای خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آنها بپردازند.

به نام خداوند نور و نوید
خداوند لبخند و مهر و امید

مطمئنم هر معلمی در مدت تدریس خود با فراز و نشیبهای زیادی مواجه بوده است گاه بر خود بالیده و از اینکه چنین راهی را انتخاب کرده است احساس شادمانی و شعف کرده و زمانی نیز به قدری ناامید و دلزده شده است که جز ملامت خود و تأسف بر بیحاصلی راهی که در پیش گرفته، چـارهٔ دیگری نداشته است. بهرحال همـهٔ ما هـم لحظات شادی آفرین داشته ایم و هم لحظه های مـأیـوس کـنـنـده. لحظه هائی که فکر می کنی دیگر به ته خط رسیده ای امّا درست زمانی که احساس می کنی به گِل نشسته ای و دیگر توان بلند شدن و ایستادن نداری چیزی شبیه یک معجزه نجاتت می دهد! توان از دست رفته ات را باز می گرداند و خستگی ناشی از تلاش مستمر و پیگیـر را زایـل می کند. همین امسال بود (اردیبهشت ۷۷) که ... ... بهتر است ماجرا را از ابتدا شرح دهم:

در ترم دوم سال تحصیلی ۷۷ـ۷۶ ریاضی ۴ را در دو کلاس علوم انسانی به عهده داشتم با هفته ای ۴ ساعت تدریس. متأسفانه چنـد تعطیلی در طول ترم کاملاً اوضاع را به هم ریخت و علی رغم علاقه ای که دانش آموزان به یادگیری نشان می دادند و با روش کار آشنا شـده بودند کلاس به کندی پیش می رفت. نمی خواستم سرسری از مطالب بگذرم، دوست داشتم دانش آموزان درس را خوب بفهمند و بهمین جهت احساس می کردم به وقت بیشتری نیاز دارم. در درونم کلافه بودم امّا سعی داشتم دانش آموزان متوجه نگرانی و آشفـتـگـی مـن نشوند. هر بار که کمبود وقت را مطرح می کردند دلداریشان می دادم و می گفتم نگران نباشید با چند جلسه فوق العاده جبران می کنیم! امّا خودم زیاد مطمئن نبودم. روزها و هفته ها به سرعت می گذشتنـد و به پایان ترم نزدیک و نزدیکتر می شدیم فقط دو هفته دیگر فـرصـت داشتیم با دو مبحث ترکیبات و احتمال گرچه از نظر تعداد صفحه در نهایت درس دو جلسه بود ولی می دانستم که تفهیم این بـخـش بـه حوصله و وقت کافی نیاز دارد. روزی که می خواستم درس جدید را شروع کنم، با طرح یک سؤال از دانش آموزان آنها را بی آنکـه خـود بدانند درگیر درس جدید کردم.[1]

درس پس از سه جلسه تمام شد، دانش آموزان اظهار می کردند که ای کاش همهٔ مباحث کتاب به شیرینی بخش آخر بود. مسائل را به خوبی حل می کردند ولی من دلم می خواست که قبل از شروع امتحان

چند ساعتی برای مرور کتاب و رفع اشکال فرصت داشتم موضوع را با مسؤولین دبیرستان در میان گذاشتم و از آنها کمک خواستم به پیشنهاد یکی از معاونین قرار گذاشتیم از بعدازظهر پنجشنبه تا عصر جمعه دانش آموزان را به اردوی تفریحی آموزشی ببریم و یا در خود دبیرستان اردو را برگزار کنیم تا فرصت کافی برای رسیدگی به دانش آموزان و رفع اشکال آنها داشته باشم، این پیشنهاد با استقبال بسیار دانش آموزان مواجه شد. از بعدازظهر پنجشنبه که مدرسه تعطیل شد پس از استراحت کوتاهی آنها در گروههای کوچک به مرور مطالب درسی با یکدیگر پرداختند، در تمام مدت به آنها سر می زدم. و اشکالاتشان را برطرف می کردم. فضای دوستانه و صمیمی بیلن بچه ها و اینکه کلاس جنبهٔ رسمی نداشت و آنها آزاد بودند در هر کجا که می خواهند (کتابخانه، سالن غذاخوری، نمازخانه، در حیاط و ...) دور هم جمع شوند و به حل مسأله و مرور درس بپردازند، بازدهی را افزایش داده بود آنها با اشتیاق کار می کردند و بعضی از گروه ها حتی تا پاسی از شب گذشته به حل تمرین پرداختند. روز جمعه از ساعت ۹ صبح مجدداً فعالیت آغاز شد. اظهار رضایت آنها از یادگیری مرا به وجد آورده بود. بعضی از ساعات روز همه در سالن جمع می شدند و اشکالات همگانی را برطرف می کردم. دو روز کار مداوم واقعاً خسته ام کرده بود. توان ایستادن نداشتم، امّا نگاههای دلگرم کننده و قدرشناس بچه ها، لبخندهای زیبا و کلمات مسرت بخششان خستگی را برایم قابل تحمل می کرد. آنچنان که احساس سبکی می کردم و خوشحال بودم که بچه ها با وجود کار زیاد راضی و شاد مدرسه را ترک می گویند. یک جلسهٔ دیگر به اتمام کلاس مانده بود.

جلسه آخر که به کلاس رفتم بیشتر صحبت پنج شنبه و جمعه گذشته بود و مفید بودن اردو. دقایقی بیش از شروع کلاس نگذشته بود که مرا به دفتر خواستند از کلاس بیرون آمدم و به دفتر رفتم علت را پرسیدم جواب درستی ندادند. نگران شدم، فکر کردم اتفاق بدی افتاده که مرا از کلاس بیرون کشیده اند، پس از چند دقیقه گفتند می خواستیم از اردو بپرسیم کار مهمی نداشته ایم! دلخور شدم و با خود گفتم می توانستند این حرفها را زنگ تفریح بزنند! راهی کلاس شدم، در را که باز کردم صدای کف زدنهای دانش آموزان و تغییر چهرهٔ کلاس مرا بهت زده کرد. صندلیها را دور کلاس چیده بودند، روی میز گل و شیرینی و کاغذهای لوله شدهٔ قشنگی بود که با گل و روبان تزئین شده بود. روی تابلو با خط زیبائی شعری در وصف معلم نوشته بودند. یکی از دانش آموزان شروع به خواندن مقاله ای کرد که خود نوشته بود بسیار زیبا و پر احساس و به تمام مطالب ریاضی (۳و۴) اشاره داشت، یکی دیگر عکس می گرفت. نگاههای سرشار از محبّت بچّه ها و کلاس سحرآمیزشان مرا بیخود کرده بود بی اختیار می گریستم، نامه ها را باز می کردم و با ولع هر یک را می خواندم، انتظار اینهمه لطف و سپاس را نداشتم. به آنها خندیدم و گفتم درست در لحظه ای که می رفت ناامیدی بر من غلبه کند شما مرا نجات دادید. من همیشه از شما درس می گیرم و بر تجربه هایم افزوده می شود. می دانید بچه ها من معلم چه سرمایهٔ عظیمی دارم؟ وجود عزیز شماها که هر سال بیشتر می شوید با هیچ ثروتی قابل مقایسه نیست! و برنامهٔ غیر منتظره شما که خستگی تمام سالها را از من زدود و مرا به ادامهٔ راهم امیدوارتر کرد.

سال تحصیلی به پایان رسید. دانش آموزان همگی قبول شدند و دبیرستان تعطیل شد. امّا خاطرهٔ آنروزها و نوشته های زیبای آنها همیشه با من خواهد بود در گنجینه ای پر بها که هر سال پربار می شود و برای من عزیزتر و ماندنی تر.

زیرنویس:

۱ــ سؤالی که در ابتدا مطرح کردم این بود که «آیا دوست دارید تابستان به اردو بروید؟ همه جواب مثبت دادند. پرسیدم دلتان می خواهد به کدام یک از چهار شهر مشهد، تبریز، اصفهان، رشت بروید؟ جوابها مختلف بود. باز پرسیدم می خواهید با چه وسیله ای مسافرت کنید انتخاب با شماست. هر کس وسیله ای را پیشنهاد می داد و انگار همین فردا است که راهی سفر می شوند. به آنها گفتم در سفر چه غذائی را ترجیح می دهید، ۵ نوع غذای مختلف پیشنهاد شد، راجع به نوشابه و دسر و ... پرسیدم جوابهای متنوع آنها و شوق و ذوقی که بروز می دادند زمینه را برای تدریس آماده می کرد. به تدریج با مطلب آشنا می شدند همینطور که پیش می رفتیم بدون آن که اسمی از اصل اساسی شمارش یا تبدیل یا ترکیب بیاورم جوابهای صحیح را از آنها می گرفتم البته با راهنمایی من و همفکری که با هم داشتند. پس از آنکه احساس کردم شروع خوبی داشته و آنها با مبحث آشنا شده اند از آنها خواستم یکی را از بین خود به عنوان هماهنگ کننده کارهای اردو مسؤول و یکی را به عنوان معاون، یکنفر مسؤول تدارکات، یکنفر مسؤول امور مالی و ... انتخاب کنند، افراد مختلفی پیشنهاد شدند، من قصد داشتم آنها را هدایت کنم به سمتی که بتوانند تشخیص دهند که به چند طریق می توانند این افراد را از بین خود برگزینند.

کنگره بین المللی ریاضیدانان ۹۸ (ICM 98)

علیرضا مدقالچی ، دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر دانشگاه تربیت معلم

هر چهار سال یک بار یکی از دانشگاههای جهان میعادگاه هزاران نفر از ریاضیدانان و ریاضی کاران از اطراف و اکناف جهان است . اولین کنگرهٔ بین المللی ریاضی در آغاز این قرن ، با پیشنهاد چند نفر از ریاضیدانان برجسته و بزرگ برگزار گردید که از آن میان می توان از دو ریاضیدان نامی آلمانی ـ جورج کانتور و فیلکس کلاین ـ نام برد . از آن زمان تاکنون کنگره های بین المللی هر چهار سال یک بار تشکیل می شود . هدف اصلی از برگزاری این کنفرانس ها ارائهٔ آخرین پژوهشها در کلیهٔ زمینه های ریاضی از محض ترین بخش گرفته تا کاربردی ترین قسمت و جهت دهی به پژوهشهای آتیه و ایجاد تسهیلات لازم برای تحقیقات جدید است . در این کنگره ها و کنفرانسها ریاضیدانان و ریاضی کاران از کلیهٔ نقاط جهان در یک مکان جمع می شوند تا وضعیت همدیگر را دریابند و با تحقیقات یکدیگر آشنا شوند . در کنگره های بین المللی مسایل بسیار بنیادی و اصلی توسط ریاضیدانان برجسته و بزرگ مطرح می شود . همهٔ ما می دانیم که هیلبرت در دومین کنگره بین المللی ریاضیدانان در سال ۱۹۰۰ میلادی در پاریس ، به هنگام سخنرانی خود بعد از یک مقدمه ، قصد داشت بیست و سه مسأله را طرح کند (البته در این کنگره هیلبرت فقط ده مسأله را مطرح کرد) ولی نسخه ای کامل از این سخنرانی و مسایل در ۱۹۰۲ میلادی در بولتن انجمن ریاضی آمریکا به چاپ رسید . این مسایل زیر بنای تحقیقات ریاضی در سالهای بعد گردید و کتابهای مختلف و متنوعی در این زمینه ها تدوین گردید و فرهنگ و ادبیات جدیدی در باب دانش ریاضی به وجود آمد و بابهای مختلف تحقیقات گشوده شد و مسلماً کاربردهای فراوانی در علوم دیگر پدیدار گشت . این مسایل موجب پدیدار شدن ایده های جدید پژوهش در زمینه های مختلف دانش ریاضی گردید . اگر چه بسیاری از این مسایل تاکنون حل شده است ، ولی متأسفانه در منابع فارسی اطلاعات زیادی منتشر نشده است . حتی به دلیل کاملاً تخصصی بودن این مسایل ، در مقالات تخصصی هم به این مسایل پرداخته نشده است . به هر حال ، کنگره های ریاضی این چنین میعادگاهی است برای ریاضیدانان و ریاضی کاران . گزارش گونه ای تحلیلی از کنگره ۹۸ را به صورت زیر ارائه می دهیم .

۱) به دلایل گوناگون کنگرهٔ امسال از ویژگی ممتازی برخوردار بود یکی از ویژگیها این است که در آستانهٔ سال جهانی ریاضیات یعنی سال دو هزار هستیم . شهر تاریخی برلین میزبان سه هزار و پانصد نفر از افراد ریاضی بود . این شهر زمانی به دلایل جنگ سرد و دو نیمه شدن جهان به دو شهر تقسیم شده بود و با دو سیستم اداره می شد ولی اکنون یک پارچه است . محل کنفرانس دانشگاه صنعتی برلین بود . گفته می شد که برلین دارای سه دانشگاه بزرگ است . بناهای عظیم و تاریخی و مدرن این دانشگاه گویای واقعیتهای آشکار و نهان از کوشش و تقلای ملتی است که در ادوار مختلف با همت وافر برای ساختن زیربنایی ترین نهاد کشور تقلا کرده اند : گرچه کنگره های گنبدی شکل ساختمان حکایت از دورانی بس طولانی دارند اما برجها و بلندمرتبه های جنبی نیز روایت دیگری است و در یک کلام یک ملت زنده در تمام شرایط و احوال باید برای فردایی

آباد و بهتر و سازندگی بکوشد و این کوشش و همت توأم با برنامه ریزی است که آیندهٔ جامعه ای را رقم می زند. بیائید این گونه باشیم.

امکانات دانشگاهی و صنعتی و فن آوری آلمان فوق العاده شگفت آور است که هم مایهٔ عبرت است و هم مایهٔ تأسف. از این بعد مایهٔ عبرت است که ایمان و اعتقاد پیدا کنیم که سبب عمدهٔ پیشرفت عظیم علمی در غرب به ویژه در قرن بیستم توسعه و گسترش دانشگاهها و مراکز آموزش عالی و تحقیقاتی است. توجه دولتها به مراکز دانشگاهی و تحقیقاتی و اختصاص بودجه های هنگفت به این مراکز نتایجی ثمربخش برای این جوامع به ارمغان آورده است. حمایت از محققان و پژوهشگران سبب رشد سریع و شگفت آور علوم بنیادی شده است. امروز بخوبی روشن شده است که ریشهٔ پیشرفت علوم و فن آوری در تمام زمینه ها در دانشگاهها و گروههای آموزشی و پژوهشی و آزمایشگاهها و کارگاههای تحقیقاتی است. این دگرگونی معجزه آسا مدیون کوشش و ایثار دانشمندان و پژوهشگرانی است که در این مراکز بدون دغدغه خاطر و با خیالی آسوده و آرامش کامل بر ناشناخته های جهان هستی حمله ور می شوند و هر روز هزاران اختراع و اکتشاف به ارمغان می آورند. بدون شک این تنها راه پیشرفت علمی است که جامعهٔ علمی ما نیز در گذشته آن را تجربه کرده و دانشمندانی بزرگ به جامعه بشری ارائه کرده است. اگر خواستار پیشرفت در دانش و فن آوری هستیم باید با ایمان و استقامت و امید بیش از پیش به مراکز دانشگاهی توجه کنیم و شعارها به عمل تبدیل شود. دانشگاهها نیاز به تحول عظیم دارند و باید مورد توجه ویژه از نظر نیروی انسانی و تجهیز آزمایشگاهها و کارگاهها قرار گیرند. عبدالسلام فیزیکدان برجسته مسلمان به رهبران کشورهای جهان سوم توصیه کرده است که دو درصد از درآمد ناخالص ملّی خود را صرف تحقیقات علمی و تکنولوژی کنند تا مردم بتوانند به مرحلهٔ آفرینندگی در صحنهٔ علم و صنعت برسند. او می گوید: «رکود و درماندگی جهان سوم سه علت اصلی دارد:

الف) فقدان تعهد جدی در مقابل علم، اعم از علم محض یا کاربردی؛

ب) راه و روشی که جهان سومی ها در ادارهٔ کار و بار علمیشان دارند؛

ج) فقدان تعهد نسبت به تحصیل خودکفایی و اتکای به نفس در زمینهٔ تکنولوژی در اکثر کشورهای جهان سوم»

«پروفسور عبدالسلام در بخشی از سخنان خود در فرهنگستان علوم جهان سوم در سال ۱۹۹۱ در تریست ایتالیا می گوید:

کرهٔ ما را دو گونه انسان متمایز از هم اشغال کرده اند. بنا به آمار سال ۱۹۸۷ برنامهٔ توسعه سازمان ملل، یک چهارم انسانها، در حدود ۱/۲ میلیارد نفر توسعه یافته اند. اینان در دو پنجم خشکیهای زمین ساکن هستند و بیش از چهار پنجم (۸۲٪) تولید ناخالص دنیا در اختیار دارند. ۳/۸ میلیارد نفر دیگر در حال توسعه اند. اینان بینوایان و مستضعفان و محرومان هستند که سه پنجم کرهٔ زمین را اشغال کرده اند و کمتر از یک پنجم از تولید ناخالص دنیا را در اختیار دارند. آنچه گروه اول را از گروه دوم متمایز می کند خواست و کنجکاوی و توان آنها در تسلط بر دانش و تکنولوژی روز و به کارگیری آنها است. آنها که سرنوشت انسانهای در حال توسعه را در دست دارند، باید تصمیم سیاسی بگیرند که می خواهند به این بینوایان اجازه بدهند در دانش و تکنولوژی جدید به درجهٔ تبحر و تسلط و آفرینندگی برسند و نتایج آن را به خدمت بگیرند.»

(دو متن اخیر عیناً از مقالهٔ بسیار زیبای آقای علیرضا درودی از فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی برداشته شده است.) به هر حال، شکوه و عظمت یک جامعه و یک کشور بر اساس پیشرفت علمی و تکنولوژیکی آن جامعه رقم زده می شود و به طوری که اشاره کردیم پیشرفت علمی بر اساس تحقیقات محققان و دانشمندان و در دانشگاه انجام می گیرد. دانشگاه نهادی دارای چنین اهمیتی برای رشد و تعالی یک جامعه است و تجربه ممتد تاریخی در کشورهای پیشرفته نقش ارزندهٔ این نهاد را نشان داده است. چگونه می توان به این نهاد بی توجه و یا کم توجه شد؟ مسلماً باید انتخاب مدیر، استاد، محقق، دانشجو و حتی کارمند دانشگاه بر اساس ضوابط خاص و شایستگیهای لازم انجام بگیرد. و اما تأسف، تأسف از اینکه تا کی باید شاهد شکاف و فاصلهٔ عمیق بین پیشرفت این دانشگاهها و دانشگاههای خود باشیم؟ اختصاص درصد خوبی از درآمد ملی، برنامه ریزی مدون و پویا، کوشش و تقلای وافر، امید به آینده، از خودگذشتگی و ایثار، پرهیز از خودخواهی ها و خودمحوریها، و اعتقاد به نتایج معجزه گونه فعالیتهای علمی راز و رمز این موفقیت ها است. اگر چنین کنیم چنان خواهد بود، چنان خواهد بود که دیگر نسل آیندهٔ ما نه افسون و شیدای پیشرفتهای چشم افسای مغرب زمین خواهد شد و نه از شدت ناراحتی و بدبینی تنفر پیدا خواهد کرد و در این صورت:

رسید مژده که ایام غم نخواهد ماند
چنان نماند و چنین نیز نخواهد ماند
من ار چه در نظر یار خاکسار شدم
رقیب نیز چنین محترم نخواهد ماند

۲) آرم کنگره به صورت هنرمندانه و با الهام از مفاهیم ریاضی تهیه شده بود طراحی آرم به صورت زیر است:

M	C	M
V	C	X
I	I	I
M	C	I

سه خط اول افقی بر حسب اعداد رومی نمایانگر ۱۹۹۸ و خط آخر ICM یعنی (International congress of mathematics) کنگره بین المللی ریاضیدانان بود. قطرهای مربع اول هم ICM است. ICC هم که در خط وسط مستطیل دیده می شود به معنی International congress center است که مرکز همایشهای شهر برلین است که با شکوه و جبروتی خاص ساخته شده است. این سالن عظیم مجهز به کلیهٔ تجهیزات صوتی و تصویری نزدیک به سه هزار و پانصد نفر را در خود جای داده بود و در قسمت مقابل سالن بسیار باشکوه دیگری که با پرده از این سالن جدا شده بود محل پذیرایی میهمانان بود.

۳) مراسم افتتاحیه ساعت ۱۰ صبح ۱۸ اوت ۹۸ مطابق با ۲۷ مرداد ماه ۷۷ در مرکز همایشها که وصف آن در بند ۲ گذشت آغاز گردید. این کنگره توسط دیوید مامفورد (David Mumford) رئیس (قبلی) اتحادیهٔ بین المللی ریاضیدانان افتتاح گردید و سپس به ترتیب نوبت به رئیس کمیتهٔ برگزار کننده، رئیس انجمن ریاضی آلمان و رئیس افتخاری کمیتهٔ برگزار کننده گردید. در واقع، بخش اول افتتاحیه اختصاص به ریاضیدانان داشت که هر یک در پیام خود ضمن خیرمقدم و خوشامدگویی دربارهٔ تاریخ کنگره های بین المللی و پیامدهای علمی آنها سخن گفتند. سپس نوبت به سیاستمداران و مسئولین و شهردار برلین رسید که هر یک به مراتب احوال و حمایت های مالی خود سخن راندند و خیر مقدم و خوشامد گفتند. رئیس دانشگاه نیز یکی از سخنرانان بود. اگرچه دانشگاه از امکانات فوق العاده به ویژه از نظر فضاهای کالبدی و تجهیزات برخوردار بود، ولی رئیس دانشگاه به هنگام سخنرانی از کمبودها و عدم امکانات سخن گفت و سیاستمداران را متهم کرد که مقارن با انتخابات وعده و وعید فراوان می دهند ولی بعد از انتخابات به وعده های خود عمل نمی کنند و به شدت انتقاد کرد. با خود گفتم وجود چنین دانشگاههایی با این امکانات و تأسیسات مدیون چنین مدیران عالم، برجسته و شجاعی است که ایثارگرانه برای ارتقای دانشگاه فعالیت می کنند و تلاش آنها نتیجهٔ منطقی رشد و شکوفایی و پیشرفت علمی جامعه است.

۴) یکی از برنامه های مراسم افتتاحیه اعطای جوایز فیلدز بود. فیلدز یکی از اعضای کمیتهٔ برگزار کنندهٔ کنگره سال ۱۹۲۴ میلادی در داشنگاه تورنتوی کانادا بود. پس از برگزاری کنگره، فیلدز تصمیم گرفت که از مازاد بودجه جایزه ای برای ریاضیات ایجاد کند. بر این اساس، او تصمیم گرفت که پیشنهاد خود را به کنگره ۱۹۳۲ ارائه نماید ولی قبل از این تاریخ اجل مهلتش نداد و او درگذشت. کنگره ۱۹۳۲ بنا به وصیت فیلدز اعطای این جایزه را به تصویب رساند. مدال فیلدز امسال به چهار نفر از ریاضیدانان جوان (زیر چهل سال) به شرح زیر اعطا گردید:

(I) ریچارد ای. بورچرد (Richard E. Borcherds) (دانشگاه کمبریج) به خاطر کارهایش در زمینهٔ جبرهای کک مودی، صورتهای خودریخت (Kac- Moddy algebras, automorphic forms)

(II) دبلیو. تی تیموتی گاورز (W. Timothy Gowers) (دانشگاه کمبریج) به علت تحقیقاتش در زمینهٔ نظریهٔ فضای باناخ، ترکیبیات (Banach space theory, combinatorics)

(III) ماکسیم کانتسویچ (Maxim Kontsevich) به علت تحقیقاتش در زمینهٔ فیزیک ریاضی، هندسهٔ جبری و توپولوژی (mathematical physics, algebraic geometry and topology)

(IV) کرتیس تی. مک مولن (Curtis T. McMullen) (دانشگاه هاروارد) دینامیک مختلط، هندسهٔ هذلولوی (Complex dynamics, hyperbolic geometry)

جایزهٔ کوانلینا در کنگره به یک ریاضیدان در زمینهٔ علوم کامپیوتر اعطا می شود. امسال به پیتر دبلیو. شور (Petter W. Shor) به علت تحقیقاتش در زمینهٔ محاسبهٔ کوانتومی و هندسهٔ محاسباتی اعطا گردید.

در این کنگره جایزه ای به نام (پلاک نقره ای اتحادیه بین المللی ریاضیات) به آندرو وایلز (Andrew-Wiles) (دانشگاه پرینستون) به علت حل حدسیهٔ تاریخی فرما اعطا گردید. می دانیم که حدسیهٔ فرما این است که معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ به ازای $n>2$ در

دستگاه اعداد طبیعی جواب ندارد. فرما در حدود ۳۵۰ سال پیش این حدسیه را ارائه کرده و گفته بود که حاشیه این کتاب بسیار کوچکتر از آن است که بتواند اثبات این حدسیه را دربرگیرد. در سالیان متمادی بعد از فرما کوشش و تقلا در جهت حل حدسیهٔ فرما سبب ابداع دیسیپلین ها و دستگاههای جدید گردید، و حتی نظریهٔ جبری اعداد محصول کوشش و تقلا در این راستا است. کتاب «آخرین قضیهٔ فرما» نتیجهٔ این تحقیقات است. بالاخره، چند سال پیش آندرو وایلز با به کار بردن چندین شاخهٔ ریاضی و نهایتاً با استفاده از هندسه جبری حسابی این حدسیه را به اثبات رساند. اثبات او چندین بار مورد شک و تردید قرار گرفت ولی بالاخره مورد تأیید قرار گرفت. به هنگام اعطای این پلاک به صراحت اعلام شد که این جایزه شایسته کارهای وایلز نیست. ذکر این نکته ضروری است که چون سن وایلز در حدود ۴۵ سال است لهذا، اعطای نشان فیلدز میسر نبود. یکی از اهداف جایز فیلدز تشویق برای ادامه تحقیقات است که به این معنی تعبیر شده است که مدال باید به ریاضیدانان جوان (یعنی زیر چهل سال) اعطا شود. نگارنده چند سال پیش در مورد گزارش کار وایلز در سرمقالهٔ یکی از شماره های رشد آموزش ریاضی توضیحاتی داده است که خوانندگان علاقمند می توانند به آن مقاله مراجعه کنند. هر یک از برندگان مدال فیلدز کارهای خود را به صورت سخنرانیهای عمومی عرضه کردند. یکی از سخنرانی ها، سخنرانی آندرو وایلز تحت عنوان بیست سال با نظریهٔ اعداد بود که به صورت عمومی ارائه گردید. در خبرنامهٔ ۱۹ اوت ۹۸ چنین آمده است «البته فضای حاشیه خبرنامهٔ روزانه بسیار باریکتر از آن است که برهان او (وایلز) را دربر گیرد».

با توجه به موفقیت چشمگیر دانش آموزان ایرانی در المپیادهای ریاضی امیدواریم که روزی شاهد باشیم که برندگان جوایز فیلدز از بین ریاضیدانان ایران هم انتخاب می شوند.

۵) مدعوین اصلی کنگره از بین ریاضیدانانی انتخاب می شوند که تحقیقاتشان باعث تأثیر شگرفی در گسترش و پیشرفت دانش ریاضی شود. بعلاوه، سخنرانی هایی به صورت ۴۵ دقیقه ای، ۱۵ دقیقه ای و یا به صورت پوستر ارائه شد. در این کنگره تقسیم بندی موضوعی مقالات در نوزده بخش به صورت زیر بود:

منطق، جبر، نظریهٔ اعداد و هندسهٔ جبری حسابی، هندسه جبری، هندسهٔ دیفرانسیل و آنالیز عمومی، توپولوژی، گروههای لی و جبرهای لی، آنالیز، معادلات دیفرانسیل معمولی و سیستمهای دینامیکی، معادلات با مشتقات جزئی، فیزیک ریاضی، آمار و احتمال، ترکیبیات، جنبه های ریاضی علوم کامپیوتری، آنالیز عددی و محاسبات علمی، نظریهٔ کنترل و بهینه سازی، یادگیری و عمومی کردن ریاضیات و تاریخ ریاضیات. تعداد ۲۱ سخنران مدعو، ۲۱۵ سخنران چهل و پنج دقیقه ای، ۱۲۰۰ مقاله به صورت سخنرانیهای پانزده دقیقه ای و یا به صورت پوستر ارائه گردید. به غیر از سخنرانی های مدعو که به صورت یک ساعته ارائه می گردید، بقیه مقالات در بخشهای مختلف موازی ارائه می شد. برای اولین بار یک ریاضیدان ایرانی به نام کامران وفا از سخنرانان مدعو بود. گرچه او از هاروارد آمده بود ولی به هر حال ایرانی است.

۶) به طور منظم هر روز هشت صفحه خبرنامه به زبان انگلیسی و در مجموع نه نسخه خبرنامه در طول کنگره منتشر گردید. این خبرنامه ها حاوی کلیهٔ رویدادها بود. تغییر و یا اعلان برنامه ها و سخنرانیهای جدید به اطلاع همگان می رسید. سخنرانیها و چکیده های چاپ نشده در گزارشها توسط این خبرنامه ها منتشر می گردید.

۷) برپایی نمایشگاههای متنوع کتاب توسط شرکتهای مختلف، معرفی نرم افزارهای ریاضی از برنامه های جنبی این کنگره بود. بعلاوه، نمایش فیلمها به ویژه فلیمهای ویدیویی مرتبط با ریاضی از دیگر برنامه های جنبی بود.

۸) نسخه هایی از کتابهای خوارزمی در یکی از نمایشگاهها هر ایرانی مسلمان را مفتخر می ساخت.

۹) نمایش فیلمی در مورد کاشی کاری و هندسه در رابطه با کارهای غیاث الدّین جمشید کاشانی از دیگر فعالیت های جنبی بود که گواه گویایی بر غنای فرهنگ ایرانی اسلامی است و مایه دلگرمی و ایجاد تعهد برای ادامه کار جهت شکوفایی این فرهنگ.

۱۰) در این کنگره پروفسور پلس از برزیل به عنوان رئیس اتحادیهٔ بین المللی ریاضی انتخاب گردید.

مراجع:

در تدوین این گزارش علاوه بر کتابچهٔ برنامه ها و خبرنامه های روزانه، منابع زیر مورد استفاده قرار گرفته است.

1. Harold M. Edwards, Fermat's last theorem, Springer-Verlag 1977.

۲ ـ علیرضا مدقالچی، پیشگفتار، رشد آموزش ریاضی، شماره ۴۱، بهار ۷۳.

۳ ـ علیرضا درودی، یادی از عبدالسلام، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ ۱۸ (بهار ۷۶) صص ۵۷ تا ۶۵.

شگفتی های عدد هفت

تحقیق از: علی‌اکبر بناگر

شرح حال علی بناگر

- خرداد ۱۳۲۳ از رشتهٔ ریاضی دانشسرای عالی فارغ التحصیل شد.
- مهر ۱۳۲۳ تا خرداد ۱۳۲۹ دبیر دبیرستانهای قزوین ـ دبیر و رئیس دبیرستان آمل ـ دبیر دبیرستانهای تهران.
- خرداد ۱۳۲۹ تا مهر ۱۳۳۳ کارمند دفتر ـ معاون دفتر دانشکده ادبیات و دانشسرای عالی و دبیر روش تدریس ریاضی و ورزش دبیری.
- مهر ۱۳۳۳ تا خرداد ۱۳۳۹ دبیر ورزش دبیری و رئیس دفتر دانشسرای عالی.
- خرداد ۱۳۳۹ تا مهر ۱۳۵۱ مدیر و بازرس بیمارستان رازی و دانشکده پزشکی دانشگاه تهران.
- بعد از بازنشستگی از مهر ۵۱ تا مهر ۱۳۷۴ معلم ریاضی مدارس صنعتی تهران.

چون در خصوص عدد هفت بارها شنیده می شود ـ هفت رنگ ـ هفت آسمان ـ هفت گنبد ـ هفت تپه ـ هفت خوان ـ هفت سین ـ هفته ـ عجایب هفت گانه ـ هفت سنگ ریزه ـ شب هفت فوتی که این اسامی از فرهنگ و معارف پیشنیان بدست ما می رسد و اهمیت عدد هفت را مشخص میکند لذا وقتی که قدری بیشتر در باب این عدد غور و بررسی کنیم و مثلاً در تقسیم اعداد کوچکتر از عدد ۷ بر عدد هفت تحقیق نمائیم معلوم میشود اولاً

$$\frac{1}{7}=0/142857142857\ldots=0/\overline{142857}$$

و

$$\frac{2}{7}=2\times\frac{1}{7}=0/\overline{285714}$$

و

$$\frac{3}{7}=3\times\frac{1}{7}=0/\overline{428571}$$

و

$$\frac{4}{7}=0/\overline{571428}$$

و

$$\frac{5}{7}=0/\overline{714285}$$

و

$$\frac{6}{7}=0/\overline{857142}$$

ثانیاً

$$\frac{1000000}{7}=142857+\frac{1}{7}$$

$$\frac{2000000}{7}=285714+\frac{2}{7}$$

$$\frac{3000000}{7}=428571+\frac{3}{7}$$

$$\frac{4000000}{7}=571428+\frac{4}{7}$$

$$\frac{5000000}{7}=714285+\frac{5}{7}$$

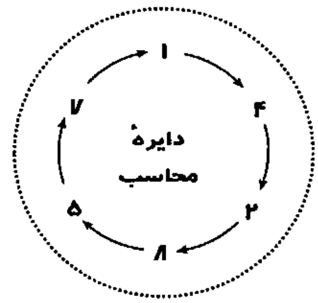
$$\frac{6000000}{7}=857142+\frac{6}{7}$$

چنانچه بخواهیم حاصل کسرهای قسمت ثانیاً را تا یک واحد تقریب حساب کنیم باید از مقادیر کسرهای ضمیمه هر یک از جواب های تقسیم صرف نظر نمائیم در نتیجه ۶ عدد شش رقمی ۱۴۲۸۵۷ و ۲۸۵۷۱۴ و ۴۲۸۵۷۱ و ۵۷۱۴۲۸ و ۷۱۴۲۸۵ و ۸۵۷۱۴۲ بدست می آید که در آنها خصوصیت های بیشماری وجود دارد؛ با دست یابی باین خصوصیات یک سلسله بازیهایی با اعداد پیدا می شود که اولاً

انسان را سرگرم می نماید ثانیاً بازگویی خصوصیات آنها موجب حیرت و تعجب می شود.

خصوصیت‌های اعداد ۶ رقمی بالا:

اولاً در این ۶، رقم رقمی تکرار نمیشود ثانیاً اعداد صفر و سه و شش و نه در آنها وجود ندارد ثالثاً در هر یک از ۶ عدد شش رقم اعداد یک، چهار، دو، هشت، پنج و هفت به ترتیب دیده می شود به نحوی که در عدد ۱۴۲۸۵۷ خوانده می شود و این شش رقم در آن ۶ عدد در حال گردش و دوران می باشند. چنانچه دایره ای رسم نموده و این ۶ رقم را در حاشیه محیط آن مطابق شکل بنویسیم به کمک این دایره که



آن را دایره محاسب می نامیم می توان هر یک از ۶ عدد ۶ رقمی را به نحوی که خوانده می شود در جهت حرکت عقربه های ساعت روی آن دایره خواند رابعاً چنانچه بخواهیم خارج قسمت تقسیم $5000000 \div 7$ را بیابیم می توان بدون انجام عمل تقسیم به کمک دایره محاسب جواب را بدست آوریم کافی است دو رقم سمت چپ را که ۵۰ می باشد بر ۷ تقسیم نمائیم $\frac{50}{7} = 7$ آنگاه این عدد خارج قسمت را روی دایره پیدا نموده و پنج رقم بعد از آنرا در جهت حرکت عقربه های ساعت در سمت راست جواب تقسیم که ۷ می باشد بنویسیم $\frac{5000000}{7} = 714285$ خامساً ترتیب و توالی ارقام هر یک از اعداد ۶ رقمی به نحوی است که هر یک از آن اعداد را در درون دایره می خوانیم و بین هر سه رقم متوالی در هر یک از آن اعداد ۶ رقمی یک پیوند و اتصال نامرئی وجود دارد سادساً هر یک از ۶ عدد بر عدد ۲۷ بخش پذیر است و مجموع ارقام هر یک از آن اعداد ۶ رقمی نیز برابر ۲۷ می باشد.

تذکر ۱: عدد ۱۴۲۸۵۷ از تقسیم ۹۹۹۹۹۹ بر عدد ۷ به دست می آید یا از تقسیم یک میلیون بر عدد ۷ که در تقسیم اول باقیمانده صفر و در تقسیم دوم باقیمانده یک می باشد.

تذکر ۲: تجزیه عدد ۹۹۹۹۹۹ و تجزیه عدد ۱۴۲۸۵۷:

$$999999 = 7 \times 11 \times 13 \times 27 \times 37$$

$$142857 = 11 \times 13 \times 27 \times 37$$

$$999999 = 11 \times 90909 = 7 \times 142857$$

$$142857 = 143 \times 999$$

تذکر ۳: اگر ارقام هر یک از ۶ عدد شش رقمی را از سمت چپ دو رقم دو رقم جدا نموده و هر دو رقم هر یک از آن ۶ عدد را در خانه های سطرهای جدولهای ۱ و ۲ بنویسیم

در جدول شماره ۱ ارقام هر سطر از ضرب ۱۴۲۸۵۷ در اعداد ۱ـ۲ـ۴ و در جدول شماره ۲ ارقام هر سطر از ضرب ۱۴۲۸۵۷ در اعداد ۳ـ۶ـ۵ نوشته شد که در جدول های ۱ و ۲ ارقام خانه های سطر اول از بالا با ارقام ستون اول از سمت چپ و ارقام ستون آخر از سمت راست با ارقام سطر آخر از پائین برابر است. ل

۱۴	۲۸	۵۷
۲۸	۵۷	۱۴
۵۷	۱۴	۲۸

۴۲	۸۵	۷۱
۸۵	۷۱	۴۲
۷۱	۴۲	۸۵

با ملاحظه دو رقمی های خانه های جدول های ۱ و ۲ معلوم می شود دو رقمی ها یا بر ۱۴ بخش پذیر است و اگر بخش پذیر نباشد عدد یک باقیمانده تقسیم هر یک خواهد بود.

$$142857 = 14 \times 10204 + 1 = 56 \times 2551 + 1 = 56 \times 2550 + 56 + 1 = 142800 + 57$$

چون ۵ عدد ۶ رقمی دیگر از ضرب ۲ـ۳ـ۴ـ۵ـ۶ در عدد ۱۴۲۸۵۷ حاصل می شود بنابراین مسبب دوران یافتن و یا گردش ارقام در این ۶ عدد شش رقمی آن است که در تساوی $142857 = 142800 + 57$ دو جمله ۱۴۲۸۰۰ و ۵۷ وجود دارد و این دو جمله موجب می شود که ارقام حاصل ضرب های ۱۴۲۸۵۷ در اعداد ۲ ـ ۳ ـ ۴ ـ ۵ ـ ۶ دوران حاصل نماید برای مثال پس از ضرب ۴ در عدد ۱۴۲۸۵۷ داریم

$$142857 \times 4 = (142800 + 57)4 = 571200 + 228 = 571428$$

ضرب عدد ۱۴۲۸۵۷ در اعداد بزرگتر از ۷:

الف: عامل ضرب ۱۴۲۸۵۷ بر ۷ بخش پذیر نباشد مثل 142857×3471 که ۳۴۷۱ بر ۷ بخش پذیر نیست.

قانون اول: چنانچه از سمت راست حاصلضرب ۶ رقم جدا

نموده و بر آن، مابقی ارقام حاصلضرب را بیافزائیم عدد ۱۴۲۸۵۷ یا دوران یافته آن بدست می آید ۱۴۲۸۵۷ × ۳۴۷۱ = ۴۹۵۸۵۶۶۴۷

که حاصل جمع بدست آمده دوران یافته ۱۴۲۸۵۷ می باشد

۸۵۶۶۴۷ + ۴۹۵ = ۸۵۷۱۴۲

ب: عامل ضرب ۱۴۲۸۵۷ بر ۷ بخش پذیر باشد مثل ۳۴۷۲ × ۱۴۲۸۵۷ که ۳۴۷۲ بر ۷ بخش پذیر است ۷ × ۴۹۶ = ۳۴۷۲

قانون دوم: چنانچه از سمت راست حاصلضرب ۶ رقم جدا نمائیم و مانده ارقام حاصلضرب را بر ۶ رقم اول اضافه کنیم ۶ رقم ۹ حاصل می شود.

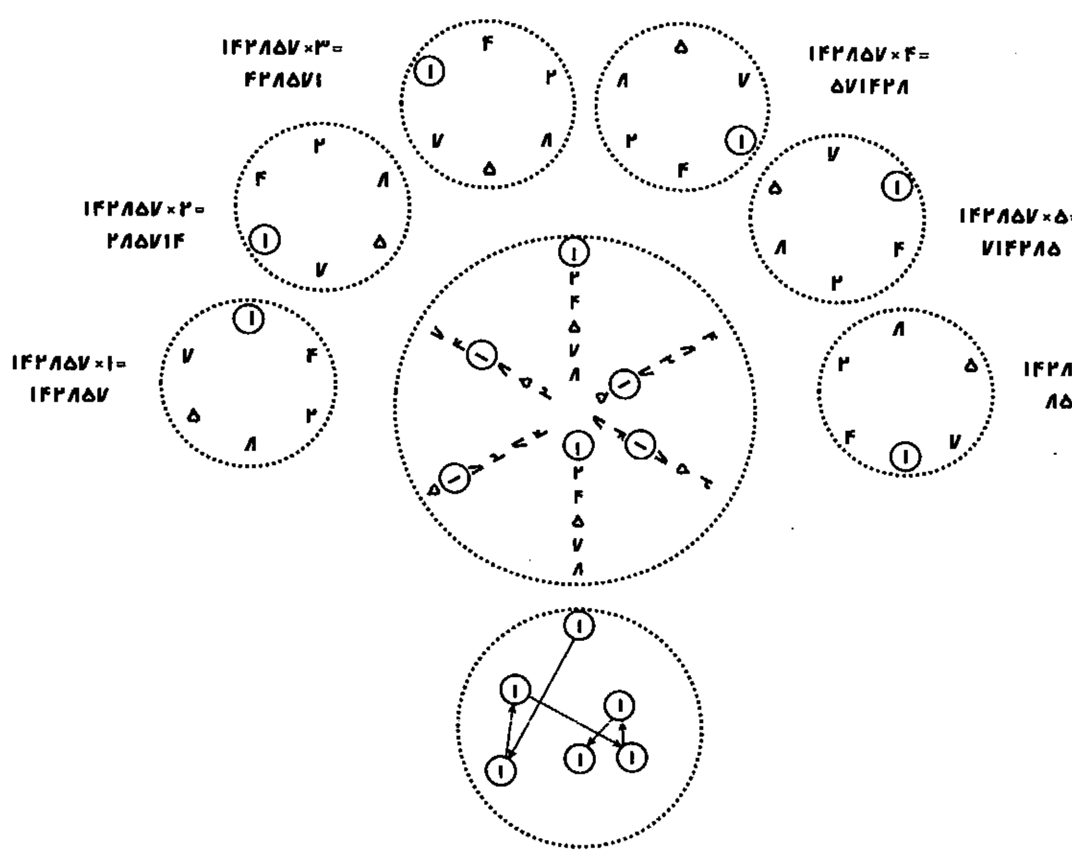
۱۴۲۸۵۷ × ۳۴۷۲ = ۴۹۵۹۹۹۵۰۴

۹۹۹۵۰۴ + ۴۹۵ = ۹۹۹۹۹۹

تذکر ۱ـ در صورتیکه حاصلضرب بدست آمده در (الف) و (ب) بیش از ۱۲ رقم باشد عمل جمع را دو بار باید انجام داد.

تذکر ۲ـ اگر عددی را در ۱۴۲۸۵۷ ضرب نمودیم پس از انجام دستور شمارهٔ (ب) حاصل ۶ رقم ۹ داشت عامل ضرب بر ۷ بخش پذیر است.

حاصل ضرب های اعداد ۱-۲-۳-۴-۵-۶ در عدد ۱۴۲۸۷۵ (اعداد طلایی)



مسیر انتقال عدد ۱۴۲۸۷۵ با ضرایب ششگانه

تذکر:

پس از ضرب عدد ۱۴۲۸۷۵ در اعداد ۱-۲-۳-۴-۵-۶ هر یک از حاصلضرب ها را طوری در درون دایره ها جای می دهیم به نحوی که از چپ به راست ارقام اوّل و چهارم هر حاصلضرب به ترتیب روی قطر قائم دایره مربوط قرار بگیرند آنگاه ارقام دیگر حاصلضرب ها به ترتیبی که خوانده می شود در جهت حرکت عقربه های ساعت جای مناسب خود را روی دو قطر دیگر آن دایره پیدا خواهند کرد. قطر قائم دایره بزرگ وسطی را در نظر گرفته ارقام عدد ۱۴۲۸۵۷ را به ترتیب صعودی ۱-۲-۴-۵-۷-۸ روی دو شعاع آن نوشته به کمک ارقام این قطر قائم سایر ارقام عدد ۱۴۲۸۵۷ را در جهت حرکت عقربه های ساعت روی شعاع های دو قطر دیگر می نویسیم.

گزارشی از :

بیست و دومین کنفرانس بین المللی روانشناسی آموزش ریاضی PME 22

گزارشگران: سهیلا غلام آزاد، مریم گویا، زهرا گویا

بیست و دومین کنفرانس گروه بین المللی روانشناسی آموزش ریاضی (PME22)[1] از ۱۲ تا ۱۷ جولای ۱۹۹۸ در شهر استلن بوش[2] واقع در آفریقای جنوبی برگزار گردید. به دلیل ویژگی آفریقای جنوبی، قبل از گزارش بخش علمی کنفرانس، اجازه می خواهیم مختصری راجع به آفریقای جنوبی و فضای موجود آن بنویسیم.

ساعت حدود ۱۰ صبح بود که به کیپ تاون پایتخت آفریقای جنوبی وارد شدیم هوای سرد آنجا اولین چیزی بود که خط بطلان بر تصوراتمان کشید! مسؤلان سفید پوست فرودگاه و کارگرهای سیاه پوست که با شتاب و تندی انجام وظیفه می کردند، توجّه ما را به خود جلب کرد! یک نفر از طرف کنفرانس به استقبال شرکت کنندگان آمده بود. پس از مدّتی معطلی و دادن مبلغی پول، به اتفاق راهنما راهی استِلِن بوش ـ محلّ برگزاری کنفرانس ـ شدیم. شهر و جاده بسیار زیبا و رویائی بود.

برنامهٔ افتتاحیه با سخنرانی مایکل اَپل شروع شد. او در شروع صحبتهایش ضمن اظهار خرسندی از نابودی حکومت آپارتاید در آفریقای جنوبی و تبریک به مردم، تأکید کرد که با خود عهد کرده بود قدم به آفریقای جنوبی نگذارد مگر آنکه آپارتاید در آفریقای جنوبی نابود شود (در بخش بعدی، بیشتر راجع به سخنرانی مایکل اَپل صحبت خواهیم کرد.) پس از این سخنرانی، برنامهٔ افتتاحیه کنفرانس به شکل بسیار زیبا و دیدنی و همراه با موسیقی محلّی توسط سیاه پوستان و رنگین پوستان ادامه پیدا کرد.

استلن بوش شهر دانشگاهی آفریقای جنوبی است و شهرتش به خصوص در این است که اکثریت قریب به اتفاق نمایندگان مجلس آپارتاید فارغ التحصیل دانشگاه استلن بوش بوده اند. با وجود مؤسسات متعدد دولتی و دانشگاهی، شهر آرامی به نظر می رسید. آرامش بیش از حد، عدم ترافیک در شهر و نبودن وسایل نقلیهٔ عمومی نظیر تاکسی معمولی، مترو و اتوبوس بیش از هر چیز جلب توجّه می کرد. مردم اکثراً یا با دوچرخه یا پیاده طی طریق می کردند. ساختمانهای شهر در آن حدودی که ما بودیم واقعاً زیبا و خیال انگیز بودند. امّا در کنار این

همه زیبائی و تنعّم، وجود سیاهان فقیر و محتاج دل انسان را به درد می‌آورد. مایکل اپل در سخنرانی خود به این تضاد اشاره کرد که چگونه در مسیر فرودگاه تا دانشگاه، خانه های مقوائی سیاهان در کنار این زیبائی ها، دردآور و گزنده بود.

هر جا که می رفتی احساس می کردی همه جا صدای ضجّه سیاهان در دل این همه زیبائی ضبط شده و هنوز به گوش می رسد. صدای سالها درد و تبعیض سیاهانی که تازه از بند رها شده بودند امّا، به واسطهٔ سالها عقب نگداشته شدن و بی بهره بودن از کمترین حقوق انسانی، توان رقابت با سفیدها را نداشتند.

با دوستان رنگین پوست و به درخواست ما، به محله های سیاهان رفتیم. درست شبیه حلبی آبادها بود!؟ خانه های بسیار کوچک و کنار هم که اغلب با چوب و حلبی ساخته شده بودند و در هر یک، چندین نفر زندگی می کردند. به گفتهٔ جیل آدلر ـ رئیس جدید PME از آفریقای جنوبی ـ هنوز مدارس با تعداد دانش آموزان بیش از ۱۰۰ نفر در این کشور فراوان هستند و در ۲۳٪ از مدارس آفریقای جنوبی، آب خوردنی وجود ندارد و در این مدارس و حتی در حوالی آنها نیز توالت وجود ندارد و این در حالی است که در بعضی مدارس سفیدها، تک تک دانش آموزان از طریق کامپیوتر اختصاصی به شبکهٔ اینترنت وصل و دارای امکاناتی هستند که در هیچ جای دیگر نظیرش دیده نمی شود.

اگرچه بعد از فروپاشی آپارتاید و روی کار آمدن نلسون ماندلا، سیاهان و رنگین پوستان جان تازه ای گرفتند، اما جبران آن همه عقب نگهداشته شدگی به سرعت ممکن نیست. سیاهان و رنگین ها ۹۵٪ جمعیّت آفریقای جنوبی را تشکیل می دهند و با این حال، توسط ۵٪ سفید، تمام مقررّاتشان رقم خورده است. دانشگاه استلن بوش و دانشگاه کیپ تاون که تا سال ۱۹۹۴ سیاهان اجازهٔ ورود به آنها را نداشتند، دارای امکانات بی نظیر و زیبائی خیره کننده بودند. برای مثال، کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه استلن بوش دارای ۶۰۰۰۰۰ عنوان کتاب و کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه کیپ تاون دارای ۸۰۰۰ عنوان مجلهٔ علمی فعال بود. ما از دو تکنیکوم در کیپ تاون بازید کردیم که یکی متعلّق به سیاهان و رنگین ها و دیگری تا ۱۹۹۴ در انحصار سفید پوستها بوده است. یک نگاه سطحی نشان می داد که امکانات این دو مؤسسه از هیچ نظر قابل مقایسه نبودند و با وجود از بین رفتن محدودیتهای قانونی، سالها زمان می طلبد تا اکثریت مطلق جامعه بتوانند توانائی استفاده از امکانات به دست آمده را پیدا کنند.

تا قبل از ۱۹۹۴، در آفریقای جنوبی حتی پیاده روهای سفیدها و سیاهها با هم فرق داشتند! طبقهٔ بالای اتوبوسها متعلق به سیاهها و طبقهٔ پایین متعلق به سفیدها بود. ساحل دریا، فروشگاه، دانشگاه، مدرسه، بیمارستان و همه چیز و هم چیز جدا بود و جای تعجّب دارد که انسانیت چگونه توانست این همه شرمساری و درد را تا آخرین دههٔ قرن بیستم تحمّل کند؟؟

با وجود این همه تضاد، دیدن یکرنگی ها و وفاق بسیار هیجان انگیز بود. وقتی دو نوجوان یا دو کودک سفید و سیاه را می دیدی که دست در دست هم دارند و فارغ از دنیای بزرگترها با صمیمیت و آرامش به گفتگوی با هم مشغولند، هم احساس لذت می کردی و هم از این که چرا نژاد پرستان این چنین انسانها را از هم دور نگهداشته بودند، افسوس می خوردی! سیاهان و رنگین پوستهای آفریقا در طی این چند سال که آزادی را تجربه کرده اند، توانائی های خود را بروز داده اند و انتظار می رود که با برداشتن اهرم فشار و رفع تبعیض، بتوانند حقوق از دست رفتهٔ خود را بازپس گیرند و این فرآیند، بدون درد و هزینهٔ انسانی نخواهد بود. در روز تولّد ماندلا به جزیرهٔ رابین ـ محل اسارت ماندلا به مدت ۱۸ سال ـ رفتیم. زندان این جزیره مخصوص زندانیان سیاسی بوده است و راهنمای ما، یکی از هم بندان ماندلا بود. از او پرسیدند که بعد از آزاد شدن از زندان، نسبت به سفیدها چه احساسی داشتی؟ آیا می خواستی انتقام بگیری؟ او گفت «من همیشه در آرزوی بیرون رفتن و انتقام گرفتن بودم، اما بعد از رهائی با خودم فکر کردم که من به خاطر باورهایم ۱۸ سال زندان وحشتناک را تحمّل کردم و زندانبان من هم به خاطر باورهایش مرا شکنجهٔ روحی داد (او تأکید کرد که شکنجهٔ جسمی نداشتند) پس می توانیم در بیرون از زندان، هر دو با هم دوست باشیم چون هر دو به خاطر باورهایمان کردیم آنچه که باید می کردیم!؟؟» و ادامه داد: «به قول ماندلا ما می بخشیم، امّا هیچوقت فراموش نمی کنیم!» دیدن انسانهائی با چنین وسعت روحی برای همه تحیرآور بود!

یکی دیگر از موارد بارز در کیپ تاون بزرگ (که استلن بوش از توابع آن محسوب می شود) حضور معنی دار مسلمانها بود. اکثریت مسلمانها رنگین پوست بودند ـ رنگین اصطلاحی است که به مسلمانان با ریشه های شرقی ـ از جمله مالزی، اندونزی، جاوه و هندی ـ پاکستان اطلاق می شود ـ و اقلیت آن ها سیاه پوست بودند. در طی مبارزات طولانی بر علیه آپارتاید، تاکتیک مسلمانها ایجاد کمربند مساجد در

پیرامون کیپ تاون و به وجود آوردن زیارتگاههائی (که به آنها «کرامت» می گفتند)، در چندین بلندی شهر بوده است. مسلمانها می گفتند که اغلب خانه های مسکونی آنها را حکومت آپارتاید به سفید پوستان پیش فروش می کرد و ناگهان آنها با صحنه هائی مواجه می شدند که در آن، تمام وسائل آنها توسط خریدار سفید پوست مجازی ناگهان تخلیه می شد و آنها را بیرون می کردند در حالی که سند مالکیت خانه ها را داشتند. با این حال، آپارتاید نتوانست به هیچیک از مساجد نزدیک شود و آنها چون سپری مسلمانها را در دل خود حفاظت کردند.

مسلمانها با وجود این که حدود ۸٪ جمعیت آفریقا را تشکیل می دادند، امّا اقلیت مشهودی بودند. به عنوان مثال، آنها دارای فروشگاههای مخصوص، رستورانهای مخصوص و برنامهٔ رادیوئی مخصوص بودند. شنیدن ندای روح بخش اذان پنج وعده در روز و دیدن انسانهای آزاده ای که با افتخار و سربلندی به مسلمانی خود مباهات می کردند، انسان را غرق در شادمانی و شعف می کرد. جالب اینجا بود که در مساجد بسته نبود و بالاخره در وعده های پنجگانه، افرادی برای ادای نماز به آنجا می رفتند!

به هر حال، با هدف آشنائی با تازه ترین یافته های علمی در زمینهٔ روانشناسی آموزش ریاضی به آفریقای جنوبی رفتیم و علاوه بر آن، با دنیای دیگری نیز آشنا شدیم که بسیار ارزشمند بود. با توجه به اینکه مردم آفریقای جنوبی نیز همانند مردم ایران جهت تلاش در به دست آوردن آزادی و مشارکت در تعیین سرنوشت خویش و حرکت به سوی عدالت اجتماعی جانانه مبارزه کردند و به نتایج بی نظیری رسیدند؛ این جنبه از سفر ما نیز بسیار آموزنده بود و امید است تا در فرصتهای بعدی، بتوانیم به تجزیه و تحلیل آنها بپردازیم.

برنامهٔ علمی کنفرانس

۱۸۰ مقالهٔ تحقیقی، ۸۳ مقالهٔ کوتاه و ۳۴ پوستر به دبیرخانهٔ کنفرانس رسیده بود هر یک از این کارها توسط سه داور بین المللی داوری شدند و در نهایت، کارهائی که حداقل دو داور از سه داور آنها را تأئید کرده بودند، برای ارائه و چاپ در گزارش کنفرانس پذیرفته شدند. مقاله هائی که تنها یک تأئید داشتند، از طرف کمیتهٔ علمی رد شدند. تعداد داورها ۱۹۲ نفر بود. حاصل داوری ها ۱۱۹ مقالهٔ تحقیقی، ۶۵ مقالهٔ کوتاه و ۳۲ پوستر بود. شعار کنفرانس PME22 گوناگونی[۳]، برابری[۴] و تغییر[۵] در آموزش ریاضی بود. کنفرانس همچنین دارای سه محور اصلی بود که برای هر یک، سه نشست پژوهش با سه هماهنگ کننده برگزار شد. محور اول «ریاضی در داخل و خارج مدرسه» بود که هماهنگ کنندهٔ آن «آلن بیشاپ» از استرالیا بود.

محور دوم «یادگیری از راه حل مسأله» بود که آن تیو هماهنگی آن را بر عهده داشت و محور سوم «یادگیری و تدریس داده ها» بود و هماهنگ کنندهٔ آن پال لاریدون بود. کنفرانس یک میزگرد پژوهشی نیز درباره «گوناگونی و تغییر در آموزش معلمان ریاضی» داشت.

علاوه براینها، ۱۰ گروه کاری در طول کنفرانس به طور فعال هر یک در سه نشست ۸ ساعتی به ارائهٔ سخنرانی ها و بحث راجع به آنها پرداختند. تمام سخنرانی ها، گزارش کارهای پژوهشی انجام شده توسط بعضی اعضای این گروه ها بود. در ضمن، ۴ گروه بحث نیز هر یک دو جلسهٔ ۴ ساعتی با هم به تبادل تجربیات و ارائهٔ مقاله های خود پرداختند. این کنفرانس دارای پنج سخنرانی عمومی بود که به اختصار، به هر یک اشاره ای می شود:

سخنران افتتاحیه مایکل آپل از دانشگاه وسیکانسین آمریکا بود. عنوان سخنرانی ایشان «بازارها و استانداردها: سیاستهای آموزشی در عصر محافظه کاری» بود. اپل در سخنرانی خود اشاره کرد که ما وارد دورهٔ عکس العمل در تعلیم و تربیت شده ایم. در بسیاری ملّتها، مؤسسات آموزشی از نظر جامعه شکست خورده هستند و بالا بودن نرخ ترک تحصیل، سقوط «سوادآموزی کارکردی[۶]» از دست رفتن استانداردها شکست در رابطه با تدریس «دانش واقعی» و مهارتهای قابل استفاده از نظر اقتصادی، نتایج ضعیف در آزمونهای استاندارد و بسیاری چیزهای دیگر، نشانه های بارز این شکست خوردگی هستند. به گفتهٔ اپل، اینها «همگی اتهاماتی است که به مدارس نسبت داده می شود و گفته ایم که تمام این مشکلات، به کاهش موکّد بودن اقتصادی، افزایش بیکاری و فقر، از دست رفتن رقابت پذیری بین المللی و نظایر آن می انجامد. بازگشت به یک «فرهنگ مشترک» مدارس را کارآمدتر در قبال بخش خصوصی مسؤلیت پذیرتر می کند. اما آیا با این [فرهنگ مشترک] مسائل ما حل خواهد شد؟» آپل در ادامهٔ سخنرانی راجع به «مشروعیت دانش» و تعیین آن در نظام مدرسه ای سخن گفت و برنامه ریزان درسی را مورد خطاب قرار داد که «آیا دانشی که به دانش آموز ارائه می دهیم مشروعیت دارد؟ و اگر دارد، مشروعیت آن را چه کسانی تعیین

کرده اند؟ آپل تصریح کرد که آموزش و پرورش به عنوان یک مدعی العموم موظف است که نوع عملکرد مؤسسات آموزشی، مخاطبان آنها و تصمیم گیرنده ها را مورد بررسی قرار دهد زیرا آموزش و پرورش در تمامیت خود، یکی از اصلی ترین مکانهائی است که در آن، منابع، قدرت، ایدئولوژی مخصوص سیاست، امور مالی، برنامهٔ درسی، پداگوژی و ارزشیابی آموزشی با هم درآمیخته اند. آپل با نظریه پردازی در مورد نیروهای دخیل در تعیین سرنوشت آموزشی، تأکید کرد که «بسیاری از معلمها، چهره های شاخص اجتماعی و دیگران برنامه های آموزشی ای را خلق کرده اند که هم از نظر پداگوژی و هم سیاسی رهائی بخش هستند و از آنها دفاع می کنند.» آپل با توضیح این که «تعلیم و تربیت هم بستر مبارزه و هم بستر سازش است» یادآور شد که سیاست گذاری ها و اعمال آموزش و پرورش هیچوقت تک بعدی و تک جهتی نمی تواند باشد و با مثالهای بسیار نشان داد که موفقیت سیاستهای محافظه کاری نیز هیچوقت تضمین شده نیستند. او تقاضای جدی برای دوباره نگری در سیاستهای آموزش و پرورش را کرد «چه چیزی برای آموزش و پرورش آنچنان که زیبندهٔ نام آن است، ضرورت دارد؟» اپل در خاتمه متذکر شد «وظیفهٔ ما کمک به این است که در جستجو برای بهره وری و کنترل، اطمینان پیدا کنیم که این ضرورت را فراموش نمی کنیم.»

دومین سخنران عمومی جیل آدلر از آفریقای جنوبی بود. ایشان راجع به منابع و آموزش ریاضی صحبت کرد. او منابع را به مواد، منابع انسانی، منابع فرهنگی، منابع ریاضی و منابع اجتماعی تقسیم کرد. آدلر برای هریک مثالهائی آورد تا تفاوت آنها را برجسته کند. از نظر او مواد شامل آب، برق، میز، صندلی، کاغذ، قلم، ساختمان و منابع انسانی شامل نسبت معلم به دانش آموز، تعداد دانش آموزان در کلاس، قابلیتهای معلم و دانشهای معلمان که براساس آنها ریاضی را تدریس می کنند، می باشد. منابع ریاضی در قالب دیسیپلین و آکادمی خود را نشان می دهند. آنها به طور واضح وسیع هستند و به عنوان مثال، در طیفی از پیچیده ترین قضایا یا یک محور اعداد ساده و رویّه های قراردادی خود را نشان می دهند. آدلر زبان و حتّی زمان را یک منبع فرهنگی معرّفی کرد. به گفتهٔ او، مثلاً نوع صرف کردن زمان در روستاها و شهرها متفاوت است اگرچه در تمام قالبها، تابع زمان به طور رسمی در مدارس و از طریق جدولهای زمانی، طول دوره ها، زمان مناسب برای انجام تکلیفهای منزل اعلام می شود. همچنین، زبان مدت، ساختار و زمانبندی برای انجام تمرینهای ریاضی مدرسه ای را به منظور تولید، سرعت، توالی و تکلیفهای محدود به زمان را تعیّین می کند، و بدون توجّه به تجارب معلمان در رابطه با «فقدان وقت» در رابطه با تغییر در روند انجام تمرینهای مدرسه، زمان و ساختار کار معلم را مشخّص می کند و به زمان [درخواست شده از جانب آنها] هم اعتنائی نمی کند.

آدلر در ادامه متذکر شد که در رابطه با یادگیری ریاضی، «اغلب افزایش منابع را فریاد می کنند، امّا این افزایش یک راه حل نیست. او با تأکید بر چگونگی استفادهٔ مؤثر از سه منبع قابل دسترس برای عموم یعنی زبان، زمان و تخته گچی، خاطرنشان ساخت که چنین استفاده هائی از منابع، شاید توضیحی برای موفقیت عملکرد بعضی مدارس که از نظر منابع و تجهیزات فقیر هستند باشد. جیل آدلر ضمن اشاره به این که «فعالیتهای آموزشی تابعی از منابع در دسترس هستند» یادآوری کرد که «امّا خوب می دانیم که منابع بیشتر، الزاماً مترادف با عمل بهتر آموزشی نیست.» او سپس با تشریح ماهیت پیوندی ریاضی مدرسه ای که مخلوطی از ریاضی روزانه و آکادمیک است، به ارائه مدل نظری پیشنهادی خود ـ مفهوم شفافیّت[7] منابع و کارکردهای مرئی[8] و نامرئی[9] آن، به ضرورت منابع و چگونگی استفاده از آنها در تدریس ریاضی مدرسه ای توسط معلمان پرداخت. آدلر با استفاده از مدل نظری خود، به بررسی نقش منابع در تغییر ریاضی مدرسه ای پرداخت. او با شاهد گرفتن نمونهٔ آفریقای جنوبی، اظهار داشت که «در اینجا، مسألهٔ برابری [فرصتهای آموزشی]، امکان دستیابی [به منابع] و تغییرات [آموزشی] مرتّب در مقابل چشمان شما هستند و نباید تمام آنها را با مطرح کردن کمبود مواد و منابع انسانی در کشور غیرقابل حصول دانست.» او یادآور شد «در توسعهٔ منابع انسانی به خصوص در ریاضی، علوم و تکنولوژی، بحران وجود دارد، بخشی از نیاز به توانائی ها و وسیع کردن امکان دستیابی به کلاس درس برای تغییر ساختارها و فرهنگها در استثمار شونده ها و استثمار کننده های پیشین است که همهٔ آنها عمیقاً از ایدئولوژی و عمل آپارتاید نشأت می گرفت.» او در خاتمه به برنامهٔ وسیعی که تحت عنوان «برنامهٔ درسی محصول ـ مدار ۲۰۰۵[10]» از چند سال قبل و بعد از فروپاشی حکومت آپارتاید در آفریقای جنوبی تهیّه شده و هم اکنون مراحل اعتبار بخشی و آزمایشی و تأمین منابع خود را می گذارند اشاره کرد و گفت «برنامهٔ درسی ۲۰۰۵، نشاندهندهٔ نیاز برای چیزی نو

و متفاوت با آموزش و پرورش آپارتاید است.»

سومین سخنران عمومی پُل کاب از آمریکا بود. او با اشاره به مطالعه‌ای که در رابطه با یک کلاس درس ریاضی متوسطه که بر تدریس آمار متمرکز بوده است، و توسط او و همکارانش انجام شده است، بر موضوع تغییر و گوناگونی که محور کنفرانس بود تکیه کرد و متذکر شد که این تغییر و گوناگونی به طراحی های آموزشی در سطح کلاس درس مربوط می شود. او با عنایت به تأکیدهای فزایندهٔ اخیر جامعهٔ آموزش ریاضی ماهیت اجتماعی ـ مدار و فرهنگ ـ مدار فعالیتهای ریاضی، در مورد مشارکت در اعمال اجتماعی به عنوان ایده ای که نقش محوری در این جهت گیری عمومی دارد اشاره کرد. او گفت «برای توسعهٔ این ایده، [در این مطالعه] هدف این بود تا روشن کنیم که چگونه ما استدلال کردن ریاضی دانش آموزان را به عنوان اعمال مشارکتی که در فعالیتهای ریاضی توسط اجتماع کلاسی انجام می شود، تجزیه و تحلیل کنیم.» به اعتقاد او، «این مهم است که بپذیریم تجارب تدریس در خلاء اجتماعی اتفّاق نمی افتند ... آموزش مدرسه ای درگیر چندین سیاست وعمل مختلف است که همگی به نوعی، نابرابری را با توجه به نژاد، جنسیت، کلاس اجتماعی و موقعیت اجتماعی تقویت می کنند.» کاپ سپس در پاسخ به سؤال خود که «چرا باید آمار در مدرسه تدریس شود؟» گفت: «جواب ما به این سؤال بر دلالتهائی متمرکز است که استفادهٔ فزاینده از کامپیوترها در جامعه برای بحث سیاست عمومی و در نتیجه، برای مشارکت دموکراتیک و قدرت دارد.» او در ادامه اشاره کرد که «سوادآموزی ریاضی[11]» درگیر استدلال کردن با داده ها از راههای نسبتاً نافذی است که مستقیماً به برابری و دموکراسی مشارکتی منتهی می شود. در نتیجه، تصوری که برای طراحی تدریس ظاهر می شود. مشارکت فزایندهٔ دانش آموزان در بحثهای سیاست عمومی است و شایستگی های مهمّ برای این مشارکت، توسعه و نقادی استدلالها بر مبنای داده هاست. از طریق آمار، دانش آموزان با فرهنگ قدرت آشنا می شوند.» او سپس در جمعبندی سخنانش گفت: «پداگوژی برابری هدفش کمک به دانش آموزان با پیشینه های گوناگون فرهنگی است تا راههای دانستنی که نیازمند مشارکت مؤثر و بقای آن در یک جامعهٔ عادل و دموکراتیک باشد را [یاد بگیرند]»، کاب در پایان چنین نتیجه گیری کرد: «با وجود این که ما به انگیزه ها و اشتیاقهای طلبه هائی که کار آنها روی ویژگیهای ساختاری و جهانی آموزش مدرسه ای و جامعه متمرکز است توجّه می کنیم، همچنین مدّعی هستیم که وقتی مباحثی را که به طور سنتّی و توسط آموزشگران ریاضی مطرح می شود درنظر بگیریم، دغدغه برای برابری بسیار حیاتی است. به طور مشخّص، این مهم است که ما هدفهای کلی ای را که برای آموزش ریاضی دانش آموزان داریم، مورد موشکافی قرار دهیم و ببینیم که آیا آن هدفها بر حسب مشارکت در یک جامعهٔ دموکراتیک قابل توجیه هستند یا خیر.» سخنران بعدی جولی کِریل از آفریقای جنوبی بود که راجع به نقش مصنوعات ریاضی در آموزش ریاضی مدرسه ای صحبت کرد.

آخرین سخنران عمومی استفان لرمن از انگلستان بود که راجع به تحولات روانشناسی در دههٔ اخیر به طور عمومی و در زمینهٔ پژوهشهای آموزش ریاضی به طور خاص صحبت کرد. او در ادامهٔ سخنرانی به بررسی جدال فکری خود برای حرکت از کانستراکتیویسم (ساخت و سازگرائی) به سوی روانشناسی تعاملی ـ فرهنگی با بهره گیری از نظرات ویگوتسکی پرداخت.

در طول کنفرانس، همچنین یک میزگرد نیز راجع به «گوناگونی و تغییر در آموزش معلّمان ریاضی» برگزار گردید که حاوی نقطه نظرهای ارزشمندی در رابطه با موضوع آموزش معلمان ریاضی بود.

زیرنویس ها:

1. Psychology of Mathematies Education
2. Stellenbosch
3. Diversity
4. Access
5. Change
6. Functional literacy
7. Transparency
8. Visible
9. Invisible
10. Outcome - based curriculum 2005
11. Mathematiecs Literacy

سریهای نامتناهی مثبت

ازیکه عباس زاده، دانشگاه شهید بهشتی
امین حسن زاده، دانشگاه شهید بهشتی

بحث این مقاله در مورد همگرایی یا واگرایی سری های نامتناهی مثبت است. آزمونهای متعددی در این زمینه وجود دارد هدف ما در این مقاله مقایسه هر سری مثبت نامتناهی با سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ (آزمون ۵*) و سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(Ln(n))^p}$ (آزمون ۶) می باشد در صورتی که این مقایسه منطقی باشد.

قابل ذکر است که تمامی مطالب این مقاله در مورد سری های نامتناهی مثبت می باشد.

به ازای دنباله $\{a_n\}$ از اعداد حقیقی عبارت

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \qquad (1)$$

یک سری نامتناهی و اعداد $a_1, a_2 \cdots a_n, \cdots$ جملات سری نامیده می شوند. در این مرحله، (۱) یک عدد نیست بلکه صرفاً یک عبارت صوری است زیرا هنوز معنی (در صورت وجود داشتن) مجموع بی نهایت جمله مشخص نشده است. به عبارت دیگر تا کنون به علامت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ در طرف چپ(۱) یا علامت $\cdots +$ در طرف راست آن معنی اطلاق نشده است. به این مسأله (به طور غیر مستقیم) به صورت زیر میپردازیم.

مجموع n جمله اول سری (۱) یعنی عدد کاملاً تعریف شده

$$s_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$$

مجموع جزیی n ام سری نامیده می شود. مثلاً $s_1=a_1$ ؛ $s_2=a_1+a_2$ ؛ $s_3=a_1+a_2+a_3$ وغیره. فرض کنیم دنباله مجموعهای جزیی $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا با حد

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

باشد. در این صورت می گوییم سری (۱) همگرا با مجموع s است و هرگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ وقتی $n\to\infty$ به حدی متناهی نزدیک نشود گوییم سری (۱) واگرا بدون مجموع است. اگر سری(۱) همگرا با مجموع باشد می نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots = s$$

که در آن برای اولین بار مجازیم سری را یک عدد تصور کنیم.

آزمونهای همگرایی

همگرایی یا واگرایی یک سری را می توان از مقایسه آن با یک سری دیگری که رفتارش قبلاً معلوم شده معین کرد. با توجه به نیاز ما در این مقاله چند آزمون را بیان می نماییم.

آزمون ۱ (مقایسه): فرض کنید که $\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \sum_{i=1}^{\infty} b_i$ دو سری مفروض باشند اگر وجود داشته باشد $k\in N$ به طوریکه به ازای هر $n\ge k$ داشته باشیم $a_n \ge b_n$ ، آنگاه

الف) از همگرایی سری $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ همگرایی سری $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$

نتیجه می شود

ب) از واگرایی سری $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ واگرایی سری $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ نتیجه می شود

آزمون-۲ (مقایسه‌حدی): فرض کنید که $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ دو سری مفروض باشند و

$$t = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$$

در این صورت

الف) اگر $t \neq 0$ مقدار ثابتی باشد از همگرایی (واگرایی) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ، همگرایی (واگرایی) $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ نتیجه می شود و برعکس.

ب) اگر $t = 0$ باشد از همگرایی $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ همگرایی $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ نتیجه می شود

ج) اگر $t = \infty$ باشد از واگرایی $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ واگرایی $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ نتیجه می شود

آزمون-۳ (نسبت): در سری(۱) با جمله عمومی a_n فرض کنید که

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

موجود و برابر L باشد (L ممکن است که ∞ نیز باشد) در این صورت سری(۱) همگراست اگر $L > 1$ و واگراست اگر $L < 1$. در حالت $L = 1$ سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

آزمون ۴ (ریشه): در سری (۱) با جمله عمومی a_n فرض کنید که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

موجود و برابر r باشد (r ممکن است که ∞ نیز باشد) در این صورت سری (۱) همگراست اگر $r < 1$ وواگراست اگر $r > 1$. در حالت $r = 1$ سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

می توان اثبات نمود که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ به ازای $k > 1$ همگرا و به ازای $k \leq 1$ واگراست.

هدف ما در این مقاله بیان رابطه سری نامتناهی مثبت با سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ است. به این معنی که اگر $k > 1$ موجود باشد که بعد از مرحله ای از اعداد طبیعی جمله عمومی سری مثبت مفروض از جمله عمومی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ کوچکتر باشد (وجود دارد k به طوریکه به ازای هر $n \geq k$ داشته باشیم $a_n \leq \frac{1}{n^k}$) سری مثبت همگراست.

و یا اگر $k < 1$ موجود باشد که بعد از مرحله ای از اعداد طبیعی جمله عمومی سری نامتناهی مثبت مفروض از جمله عمومی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ بزرگتر باشد (وجود داشته باشد k به طوریکه به ازای هر $n \geq k$ داشته باشیم $a_n \geq \frac{1}{n^k}$) سری واگراست.

به عنوان مثال به سری نامتناهی مثبت زیر توجه کنید:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\mathrm{Ln}(n))^{\mathrm{Ln}(n)}}$$

در این سری اگر ما k را برابر با $1 + \left[e^{e^2}\right]$ در نظر بگیریم برای هر $n \geq k$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{(\mathrm{Ln}(n))^{\mathrm{Ln}(n)}} < \frac{1}{n^2} \qquad (2)$$

بنابراین سری فوق همگراست. به عنوان مثال اگر ما $n = 1620$ در نظر بگیریم داریم:

$(\mathrm{Ln}(1620))^{\mathrm{Ln}(1620)} = 2627355.2$ و $(1620)^2 = 2624400$

در نتیجه رابطه(۲) برقرار است.

در حالت کلی می توان اثبات نمود که جمله عمومی سری فوق بعد از مرحله ای از اعداد طبیعی از $\frac{1}{n^k}$ به ازای هر $k > 1$ کوچکتر است.

به منظور سادگی کار از این به بعد سری مثبت مفروض ما به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ نشان داده خواهد شد. برای رسیدن به اهداف فوق آزمون زیر را پیشنهاد می کنیم.

آزمون - ۵: با فرض وجود داشتن حد (۳) سری مثبت مفروض $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ همگراست اگر $t > 1$ و، واگراست اگر $t < 1$.

در حالتی که $t = 1$ سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد. که

$$t = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Ln}(f(n))}{\mathrm{Ln}(n)} \qquad (3)$$

اثبات: فرض کنیم که حد موجود است (با فرض اینکه $t \neq \infty$) در این صورت با توجه به تعریف حد می توان گفت به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، وجود دارد عدد M به طوری که به ازای هر $n \geq M$

$$\left|\frac{Ln(f(n))}{Ln(n)} - t\right| < \varepsilon$$

که نتیجتاً داریم:

$$\frac{1}{n^{t+\varepsilon}} < \frac{1}{f(n)} < \frac{1}{n^{t-\varepsilon}}$$

با فرض $t > 1$ و با اختیار $\varepsilon < t - 1$ داریم:

$$\frac{1}{f(n)} < \frac{1}{n^{t-\varepsilon}}, \quad t - \varepsilon > 1$$

با توجه به آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ همگراست.

اگر فرض $t < 1$ را داشته باشیم با اختیار $\varepsilon < 1 - t$ داریم

$$\frac{1}{n^{t+\varepsilon}} < \frac{1}{f(n)}, \quad t + \varepsilon < 1$$

با توجه به آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ واگراست.

اگر فرض کنیم که $t = \infty$. با توجه به تعریف حد به ازای هر $N > 0$ ، وجود دارد $M > 0$ به طوریکه به ازای هر $n \geq M$

$$\frac{Ln(f(n))}{Ln(n)} > N$$

یا به ازای هر $N > 1$ داریم:

$$\frac{1}{f(n)} < \frac{1}{n^N}$$

بنابراین سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ همگراست.

برای حالت $t = -\infty$ اثبات مشابهی با حالت $t = +\infty$ وجود دارد.
با استفاده از آزمون فوق همگرایی سری ۳ را اثبات می نماییم.
در این سری

$$f(n) = [Ln(n)]^{Ln(n)}$$

بنابراین $t = +\infty$ و نتیجتاً سری همگراست.
مفهوم بی نهایت در حالت $t = +\infty$ عبارتست از اینکه به ازای هر k متناهی بعد از مرحله ای از اعداد طبیعی داریم:

$$\frac{1}{f(n)} < \frac{1}{n^k}$$

به عنوان مثال در سری (۳) به ازای هر عدد بزرگتر از e^{e^k} داریم

$$\frac{1}{f(n)} < \frac{1}{n^k}$$

جالب است بدانید که در اینجا آزمون ریشه ونسبت برای این سری جواب نمی دهند.
حال با استفاده از آزمون ۵ به حل چند مسأله می پردازیم.

مسأله ۱ - همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(Ln(n))^p}$ را بررسی کنید.

حل: در این مسأله داریم

$$f(n) = (Ln(n))^p$$

بنابراین

$$t = Lim \frac{Ln(f(n))}{Ln(n)} = \frac{pLn(Ln(n))}{Ln(n)} = 0$$

یعنی به ازای هر p سری واگر است.

مسأله ۲ - بررسی نمایید که به ازای pهایی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\right)^p$$

همگراست.

حل: ابتدا جمله عمومی را به صورت ساده تری درمی آوریم. برای این منظور صورت و مخرج کسر را در مخرج کسر ضرب می کنیم.

$$a_n^{\frac{1}{p}} = \frac{(2n)!}{(2.4.6...2n)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

بنابراین

$$a_n = \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^p$$

با توجه به اینکه ما n را به سمت بی نهایت میل می دهیم بنابراین غیرمنطقی نیست که از تقریب استرلینگ استفاده کنیم. یعنی

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

بنابراین

$$t = Lim \frac{Ln(f(n))}{Ln(n)} = \frac{p}{2} Lim \frac{Ln(2\pi n)}{Ln(n)} = \frac{p}{2}$$

پس اگر $p > 2$ سری همگراست و به ازای $p < 2$ سری واگراست.

مسأله ۳ - در مورد همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(Ln(n))^p}$ بحث کنید.

حل : در این مسأله $f(n)=n(Ln(n))^p$ بنابراین

$$t=\lim_{n\to\infty}\frac{Lnf(n)}{Ln(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(n(Ln(n)^p))}{Ln(n)}=1$$

یعنی آزمون جواب نمی دهد. در حالیکه با استفاده از آزمون انتگرال میتوان اثبات نمود که این سری بازای $p>1$ همگرا و بازای $p\le 1$ سری واگراست.

رفتار سری در حالتی که $t=1$ قابل تأمل است. فرض کنید که $t=1$.

در این صورت با توجه به تعریف حد می توان گفت به ازای هر $\varepsilon>0$ وجود دارد $N>0$ به طوری که به ازای هر $n\ge N$

$$\left|\frac{Ln\, f(n)}{Ln(n)}-1\right|<\varepsilon$$

در این صورت $\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}<\frac{1}{f(n)}<\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}$ یعنی این که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$ بعد از مرحله ای از اعداد طبیعی از یک سری واگرا کوچکتر و بعد از مرحله ای از اعداد طبیعی از یک سری همگرا بزرگتر است. نتیجتاً آزمون جواب نمی دهد.

در آزمون نسبت و ریشه وقتی که شاخص ما برابر با یک می گردد دقیقاً نمی توان گفت که از چه آزمون دیگری باید استفاده نمود تا همگرایی یا واگرایی سری برای ما مشخص گردد. در حالت $t=1$ در آزمون ۵ شاید این مطلب را با این شدت نتوان بیان نمود چرا که در بعضی مواقع آزمون ۶ (آزمون زیر) بتواند کارساز باشد.

آزمون ۶ ـ تحت مفروضات آزمون ۵ـ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$ همگراست اگر $k>1$ و واگراست اگر $k<1$ که k برابر است با

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln\left(f(n)/n\right)}{Ln(Ln(n))}$$

اثبات این مسئله همانند اثبات آزمون ۵ می باشد با این تفاوت که این آزمون سری مفروض $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$ را با سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(Ln(n))^p}$ که به زای $p>1$ همگرا و بازای $p\le 1$ سری واگراست مقایسه می کند.

مسأله ۴ ـ همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ را برزسی نمایید.

حل : ابتدا با استفاده از آزمون ۵ مسئله را حل می کنیم.

$$t=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(f(n))}{Ln(n)}=1$$

پس آزمون ۵ جواب نمی دهد.

حال این مسئله را با استفاده از آزمون ۶ بررسی می نماییم.

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(f(n)/n)}{LnLn(n)}=\frac{\frac{1}{n}Ln(n)}{(LnLn(n))}=0$$

یعنی سری واگراست.

مسأله ۵ ـ همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ را با استفاده از آزمون ۶ بررسی نمایید.

حل : در این مسأله داریم:

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(f(n)/n)}{LnLn(n)}=\lim\frac{Ln(n)}{LnLn(n)}=\infty$$

بنابراین سری همگراست.

مسألهٔ ۶ ـ همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ را با استفاده از آزمون ۶ بررسی نمایید.

حل :

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(f(n)/n)}{LnLn(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(1)}{LnLn(n)}=0$$

بنابراین سری واگراست.

در حالت کلی با استفاده از آزمون ۶ می توان اثبات نمود که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ به ازای $k>1$ همگرا و به ازای $k\le 1$ واگراست. در حالی که اثبات نمودن این مسأله با آزمونهای دیگر ممکن است کار آسانی نباشد.

زیرنویس:

یکی از مباحثی که درآموزش حساب دیفرانسیل وانتگرال مطرح می شود، بحث سری های نامتناهی است. از آنجا که در برنامه ریزی های جدید، مقدمات این مبحث در دورهٔ پیش دانشگاهی معرفی شده است، شایسته دیدیم با ارائهٔ این مقاله فرصت مطالعه وتأمل بیشتر در این زمینه را برای خوانندگان گرامی ایجاد نمائیم.

• آزمونها توسط امین حسن زاده ارائه شده است.

مرجع:

حساب دیفرانسیل وانتگرال و هندسه تحلیلی جدید. نویسنده: ریچارد ا. سیلورمن.
مترجم: دکتر علی اکبر عالم‌زاده

گزارش مختصری از

کنگرهٔ بزرگداشت دکتر غلامحسین مصاحب و نهمین سمینار آنالیز و کاربرد آن

شکر بی پایان به درگاه حضرت حق که توان برگزاری **کنگرهٔ بزرگداشت دکتر غلامحسین مصاحب و نهمین سمینار آنالیز و کاربرد آن** را در ۱۱ و ۱۲ شهریور ماه ۱۳۷۷ به ما ارزانی داشت.

یکی از اهداف این کنگره و سمینار این بوده است که یادی از استاد فرزانه، ریاضیدان نامی و ادیب توانا دکتر غلامحسین مصاحب داشته باشد، مردی که همهٔ عمر خود را در راه اعتلای سطح علمی و فرهنگی جامعه بخصوص تدریس و اشاعهٔ ریاضیات نوین صرف کرده است.

ابتدا، به صورت مختصر، به شرح زندگی و فعالیتهای آموزشی و پژوهشی دکتر غلامحسین مصاحب می پردازیم: دکتر غلامحسین مصاحب در سال ۱۲۸۹ در تهران متولد شد و دورهٔ دبیرستان را در سن ۱۶ سالگی با رتبهٔ اوّل و معدل بالای ۱۹ به پایان رسانید. سپس به خدمت دولت درآمد و عهده دار مشاغلی از قبیل رئیس کل تعلیمات عالیه، مدیرکل فنی، و معاون فنی وزارت معارف شد. در سال ۱۳۰۹ مجله ریاضیات عالی و مقدماتی را منتشر کرد و پس از ۵ سال یعنی، اول مهرماه ۱۳۱۴ به عنوان دبیر در دانشسرای عالی (دانشگاه تربیت معلم فعلی) مشغول به کار، ولی بعد از ۴ ماه منتظر خدمت شد. او مجدداً در سال ۱۳۲۰ به شغل دبیری در دانشسرای عالی باز گشت. در سال ۱۳۲۴ جهت ادامهٔ تحصیل به انگلستان رفت، پس از سه سال به دریافت درجهٔ دکترا از دانشگا کمبریج انگلستان نائل آمد و در سال ۱۳۳۴ اولین کتاب خود را، در زمینهٔ منطق ریاضی منتشر کرد. دکتر مصاحب در سال ۱۳۳۹ کتاب به یادماندنی **«حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر»** را به جامعهٔ ریاضی هدیه کرد. رسالهٔ خیام در جبر از شاهکارهای علمی قرون وسطی است و در این کتاب آثار و تحقیقات حکیم عمر خیام در علم جبر معرفی شده است. دکتر غلامحسین مصاحب همکاری خود را با بخش ریاضی دانشگاه تربیت معلم در سال ۱۳۴۰ شروع کرد. دانشگاه تربیت معلم پیشقدم یا حداقل یکی از پیشقدمان ورود به ریاضیات نوین در ایران بوده است. برای اولین بار در ایران در سال تحصیلی ۴۱-۱۳۴۰ کرسی درس منطق جدید را در دانشگاه تربیت معلم دایر کرد. با توجه به احتیاج روزافزون دانشگاهها، دانشسراهای عالی و سایر مؤسسات آموزش عالی به مدرسین کارآزموده در رشته های ریاضیات، در آبان ماه ۱۳۴۴ دوره ای به نام **دورهٔ مدرسی ریاضیات** در دانشگاه تربیت معلم دایر کرد. با توجه به این احتیاج روزافزون دانشگاهها، دانشسراهای عالی و سایر مؤسسات آموزش عالی به مدرسین کارآزموده در رشته های ریاضیات، در آبان ماه ۱۳۴۴ دوره ای به نام دورهٔ مدرسی ریاضیات در دانشگاه تربیت معلم تأسیس کرد. بنابر آئین نامه استخدامی هیأت علمی دانشگاهها، وزارت علوم و آموزش عالی موظف شد که فارغ التحصیلان مؤسسه ی مدرسی ریاضیات را با حقوق و مزایای استادیاری به خدمت بگمارد. مؤسسه ی ریاضیات دکتر غلامحسین مصاحب از سال ۱۳۴۵ تاکنون ۱۹۲ نفر در دورهٔ کارشناسی ارشد ریاضی (محض، کاربردی و آمار) و ۶ نفر در دورهٔ دکترای ریاضی (محض و کاربردی) فارغ التحصیل داشته است. از کارهای ارزنده دکتر غلامحسین مصاحب انتشار جلد اول **دایرة المعارف فارسی** (الف ـ س) در سال ۱۳۴۵ است که از نظر نگارش و سبک تدوین مطالب در نوع خود بی نظیر است. کتاب **آنالیز ریاضی** او در سال ۱۳۴۸ منتشر گردید و در سال ۱۳۵۰ به عنوان اثر ممتاز شناخته شد. از کتاب های ارزندهٔ دیگر دکتر غلامحسین مصاحب، **تئوری مقدماتی اعداد** در ۵ جلد است که دو جلد آن در سال ۱۳۵۷ و سه جلد دیگر آن در سال ۱۳۵۸ منتشر شد و در دههٔ فجر ۱۳۶۲ به عنوان بهترین کتاب ریاضی انتخاب گردید.

دکتر مصاحب در روز شنبه ۲۱ مهرماه ۱۳۵۸ در منزل خود در حالی که مشغول مطالعه و قلم به دست بود، بدرود حیات گفت.

کار اصلی استاد در زمینهٔ آنالیز بود. لذا، در کنار بزرگداشت یاد و خاطرهٔ دکتر غلامحسین مصاحب، **نهمین سمینار آنالیز و کاربرد آن** نیز برگزار گردید تا ضمن ارائهٔ پژوهشهای تازه در این زمینه، دانشجویان دکترا و کارشناسی ارشد با دیدگاهها و دستاوردهای جدید آشنا شوند.

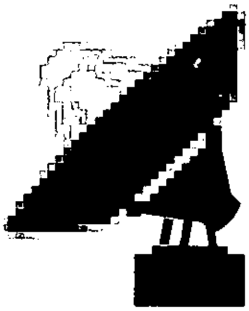
در این کنگره ۲ سخنرانی عمومی و ۳ سخنرانی ۳۰ دقیقه ای در زمینه های ذیل ایراد گردید:

نقش مصاحب در آموزش ریاضی به ویژه آنالیز، نتایج علمی و خدمات آموزشی مصاحب به جامعه ریاضی کشور، اصول و روشی که مصاحب در تهیهٔ واژه های ریاضی و نگارش کتابهایش به اهل علم ارائه داد.

در زمینهٔ آنالیز و کاربرد آن نیز، ۳ سخنرانی عمومی و ۲۴ سخنرانی تخصصی ۳۰ دقیقه ای ایراد شد. که امید است زمینه را برای شناخت بهتر از کیفیت کار دیگران در شاخه های پژوهشی و همکاری مشترک در بین همکارانی که شاخه پژوهشی آنان یکسان است، تا حدودی مهیا کرده باشد. در ضمن، دو میزگرد یکی در مورد کنگره بزرگداشت مصاحب و دیگری در مورد آنالیز و مسائل پژوهشی آن برگزار شد که موضوع و مطالب آن در گزارش کنگره و سمینار درج خواهد شد.

در جریان برگزاری کنگره و سمینار نمایشگاهی از دستاوردهای علمی فارغ التحصیلان مؤسسه ی ریاضیات برگزار گردید. در ضمن، آثار آموزشی و فعالیتهای پژوهشی دکتر غلامحسین مصاحب نیز به نمایش گذاشته شد. جهت گرامیداشت و تقدیر از فارغ التحصیلان مؤسسه ی ریاضیات، که در حال حاضر در قید حیات نیستند، با بیان امور آموزشی و پژوهشی آنان یاد و خاطره این عزیزان زنده شد. روحشان شاد و یادشان گرامی باد.

دبیر کنگره و سمینار، جواد لالی



دو خبر از دفتر آموزشهای نظری و پیش دانشگاهی

خبر اول

برگزاری اولین مسابقه کارگاهی رایانه ویژه دانش آموزان دورهٔ متوسطه در سطح کشور

اولین دوره مسابقات کارگاهی رایانه کشور ویژه دانش آموزان دوره متوسطه وزارت آموزش و پرورش با هدف تشویق و ترغیب دانش آموزان به اهمیت و انجام مطالعات کارگاهی رایانه و استفاده از این تجربیات در جهت کاربردی نمودن آن و همچنین اهمیت دادن به قسمت عملی درس رایانه در دبیرستانهای کشور در تاریخهای ۷۷/۵/۱۲ لغایت ۷۷/۵/۱۴ در تهران برگزار گردید این مسابقات در چهار سطح آموزشگاهی، منطقه ای، استانی و کشوری برگزار گردید که در مرحله نهایی از هر استان دو دانش آموز برای شرکت در مرحله چهارم مسابقات معرفی گردیدند. سؤالات این مرحله در دو قسمت تئوری و عملی مطرح گردید که همگی دانش آموزان پس از شرکت در آزمونهای فوق رتبه بندی شدند که اسامی نفرات برتر این رتبه بندی در دو رده تیمی و انفرادی به قرار ذیل می باشد.

رده تیمی استانهای برتر عبارتند از: ۱ـ اصفهان، ۲ـ فارس، ۳ـ خراسان، ۴ـ شهر تهران، ۵ـ کرمانشاه

رده انفرادی نفرات برتر: ۱ـ پویا کریمیان (فارس)، ۲ـ سید حمیدرضا مبلغ (اصفهان)، ۳ـ فرشید امیری (کرمانشاه)، ۴ـ حامد ایروانچی (شهر تهران)، ۵ـ محمد علی چاقوری (خراسان)

بدین ترتیب از بین ۵۶ دانش آموز شرکت کننده در این مرحله پنج دانش آموز از میان دختران و بقیه از بین پسران انتخاب شده بودند و به نظر می رسد که وجود برخی از مشکلات مانع از شرکت بیشتر دختران در این مسابقه گردیده که امید است با برنامه ریزیهایی که در سال آینده در نظر گرفته خواهد شد نسبت به رفع این مشکل اقدام مناسب انجام گیرد. این مسابقه در مجتمع آموزشی شریعتی منطقه ۱۶ تهران برگزار گردید که در مراسم پایانی جوایزی نیز به نفرات برتر رده انفرادی توسط آقایان مهندس جعفر علاقه مندان معاونت محترم آموزش متوسطه وزارت آموزش و پرورش، مهندس محسن جعفرآبادی مدیرکل دفتر آموزشهای نظری و پیش دانشگاهی و آقای زکریا یازرلو معاونت آموزشی و پژوهشی این دفتر اهداء گردید.

خبر دوم

برگزاری اولین دوره دانش افزایی دبیران ریاضی تهران

اولین دوره دانش افزایی دبیران ریاضی با هدف ایجاد انگیزه مطالعاتی و ارتقاء مهارتهای علمی دبیران در شهر تهران برگزار شد این دوره آموزشی در دانشگاه صنعتی شریف تهران برگزار گردید و محتوی آموزشی آن مشتمل بر آشنائی با گرافها و ترکیبیات و آشنایی با روش حل مسأله بود که از اساتید محترم این دانشگاه نیز جهت تدریس موارد مربوط استفاده گردید.

از ویژگیهای این دوره می توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱ـ تدریجی بودن دوره آموزشی به مدت یک نیم سال تحصیلی و حدوداً بیش از سه ساعت در هفته

۲ـ منطبق بودن محتوی دوره با مسائلی که دبیران کشور بیشتر در تدریس آنها با مشکل مواجه می شوند.

۳ـ برگزاری دوره در یک محیط علمی دانشگاهی و ارتباط دبیران با اساتید محترم دانشگاه و ایجاد تکامل مطلوب فی ما بین

۴ـ طراحی برخی از موارد فوق برنامه مانند کلاسهای آشنایی با اینترنت و آموزش برخی از نرم افزارهای ریاضی در طول برگزاری دوره ها.

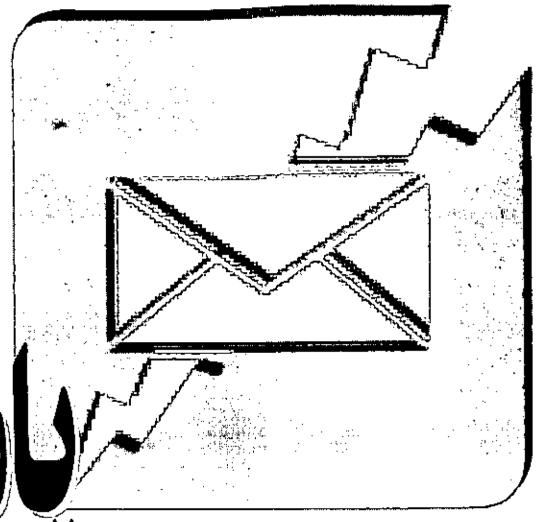
۵ـ اختصاص مدارک علمی از طرف دانشگاه معادل سه واحد درس دانشگاهی جهت افرادی که با موفقیت آزمونهای مربوط به هر کلاس را پشت سر می گذراند و از آنجائیکه طراحی این دوره بصورت آزمایشی انجام گرفته بود و همچنین به دلیل برگزاری تدریجی دوره در طول یک نیمسال امکان حضور دبیران سراسر کشور در این دوره ها میسر نبود لذا این طرح در قدم اول برای دبیران شهر تهران برگزار گردیده است و امیدواریم با توجه به بازخورد مثبت از طرح انجام شده و پیش بینی زمینه های استفاده از افراد آموزش دیده در دوره زمینه های لازم جهت اجرا دوره های مشابه در سایر استانهای کشور نیز فراهم گردد.

اخبار انجمن ها

در پی تشکیل انجمن ریاضی استان کردستان مطلع شدیم که اعضاء این انجمن برای اعلام رسمی موجودیت آن در زمستان ۷۶ اقدام به چاپ نشریه ای با نام «تام» نموده اند. همچنین در اردیبهشت ۷۷ اولین خبرنامهٔ این انجمن چاپ شد.

علاقه مندان می توانند از طریق مکاتبه به عضویت انجمن ریاضی استان کردستان درآمده و از نشریات آنها استفاده نمایند.

آدرس: سنندج، صندوق پستی ۵۹۷ ـ ۶۶۱۳۵ انجمن ریاضی استان کردستان



پاسخ به نامه ها

آقای رضا اکبری ـ تهران

ضمن ابراز خرسندی از علاقهٔ جنابعالی، به اطلاع می رساند که برای تهیهٔ نرم افزار ریاضی Derive، می توانید با در دست داشتن یک دیسکت ۳/۵ اینچی با ظرفیت ۱/۲ مگابایت به دفتر مجله مراجعه نمائید.

آقای حسین احمدی ـ شیراز

مطلب ارسالی شما به عنوان یک کار دانش آموزی جالب بود، به همین دلیل آن را به «مجلهٔ رشد جوان» ارجاع دادیم. موفق باشید.

آقای سعید اخوان آستانه ـ آستانهٔ اشرفیه

نامه های شما در مورد حل مسأله فرما در حالتهای و که p اول باشد به دست ما رسید. بدینوسیله به آگاهی می رسانیم که مجله در تلاش است که مقاله ای راجع به جنبه های آموزشی حل مسأله فرما توسط آندرو وایلز تهیه و منتشر کند. همچنین، اگر سؤالی دربارهٔ المپیاد ریاضی دارید، می توانید با باشگاه دانش پژوهان جوان با شماره تلفن های ۲۰۵۱۴۰۰ ـ ۲۰۴۷۱۷۷ تماس بگیرید.

آقای رضا محمّدخانی ـ کامیاران کردستان

آندرو وایلز ـ ریاضیدان معروف آمریکائی با تکنیکهای پیشرفتهٔ هندسهٔ جبری این قضیه را در ۲۰۰ صفحه اثبات کرده است. امیدواریم در فرصتی مناسب، راجع به این اثبات در مجله مقاله ای داشته باشیم.

همچنین، قسمت حل مسائل حذف نشده است امّا چگونگی آن تغییر کرده است.

آقای محمّد علی شریعتی ـ اصفهان

با خوشحالی از علاقهٔ شما به یادگیری ریاضی، دانش پژوه، نشریهٔ باشگاه دانش پژوهان جوان می تواند بخشی از نیازهای شما را برآورده سازد.

آقای سیّد مهدی گلستان هاشمی ـ اصفهان

رونوشت برگ سفارش اسناد منتشر شدهٔ تیمز برای شما ارسال شد. شما می توانید با مرکز ملی مطالعهٔ تیمز در ایران ـ سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، آقای دکتر علیرضا کیامنش نیز تماس بگیرید.

آقای احمد نیشابوری ـ مشهد

ما در تلاش هستیم تا بتوانیم به شما در تهیّهٔ منابع مورد علاقهٔ خود کمک کنیم. با ما در تماس باشید.

آقای تیمور رضائی ـ اصفهان

مخاطب مطلب ارسالی شما «مجلهٔ رشد آموزش ریاضی» نیست.

در ضمن، واژه نامهٔ ریاضی که توسط انجمن ریاضی ایران منتشر شده است می تواند در این زمینه راهنمای خوبی باشد.

بسم الله الرحمن الرحیم

Roshd
Mathematics Educational Journal

No. 53 - 1998

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning

Teaching Aids Publications Office

CONTENTS:

Managing Editor: Mohsen Goldansaz
Editor: Zahra Gooya
Executive Director: Soheila Gholamazad
Graphic Designer: Fariborz Siamaknejad

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6588

فرم اشتراک مجلات آموزشی رشد

نام و نام خانوادگی : ....

تاریخ تو لد : ....

میز ان تحصیلات: ....

تلفن : ....

نشانی کامل پستی: استان : ....

شهر ستان : ....

خیابان : ....

کو چه : ....

پلاک : ....

کُدپستی: ....

مبلغ واریز شده : ....

شماره رسید بانکی: ....

تاریخ رسید بانکی: ....

مجله در خو استی : ....

امضاء:

شر ایط اشتراک

۱ ــ واریز حداقل مبلغ ۱۰۰۰۰ ریال به عنوان علی الحساب به حساب شمارهٔ ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبهٔ سرخه حصار ، کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست و ارسال رسید بانکی به همراه فرم تکمیل شدهٔ اشتراک به نشانی دفتر انتشارات کمک آموزشی.

۲ ــ شروع اشتراک از زمان وصول فرم درخواست است . بدیهی است یک ماه قبل از اتمام مبلغ علی الحسب ، به مشترک جهت تجدید اشتراک اطلاع داده خواهد شد.

ریاضیات راه توسعه