رشد

آموزش ریاضی ۷۰

سال نوزدهم ـ ۲۰۰ تومان
ISSN 1606 - 9188
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.org

خاطره‌ای از پروفسور فاطمی

روزی استاد ضمن رفتن به کلاس، از حیاط دانش سرای عالی که دانشجویان رشتهٔ تربیت بدنی در آن جا مشغول بازی بودند، عبور می کرد در انتهای مسیر دست دانشجویی را که برای گرفتن توپ خارج شده از زمین آمده بود، گرفته می گوید: با من بیا.

دانشجو جواب می دهد: جناب استاد کجا؟

استاد : به کلاس ریاضی!

جوان: من دانشجوی رشتهٔ ورزش هستم!

پروفسور جواب می دهد: عیب ندارد. آخر فردا که شما به شهرستان می روید اگر در آن جا دبیر ریاضی نباشد ممکن است شما را برای تدریس ریاضی به کلاس بفرستند! سال گذشته این اتفاق افتاده است.

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی ۷۰

سال نوزدهم / سال ۱۳۸۱ / تیراژ ۱۰۰۰۰

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده
سردبیر: زهرا گویا
مدیر داخلی: سپیده چمن آرا

طراح گرافیک: فریبرز سیامک نژاد

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ – ۱۵۸۷۵
تلفن امور مشترکین: ۸۸۳۹۱۸۶
تلفن دفتر مجله: ۹ – ۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۱) E-mail:info@roshdmag.org

چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلّمان مقاطع مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی، موارد زیر رعایت شود:

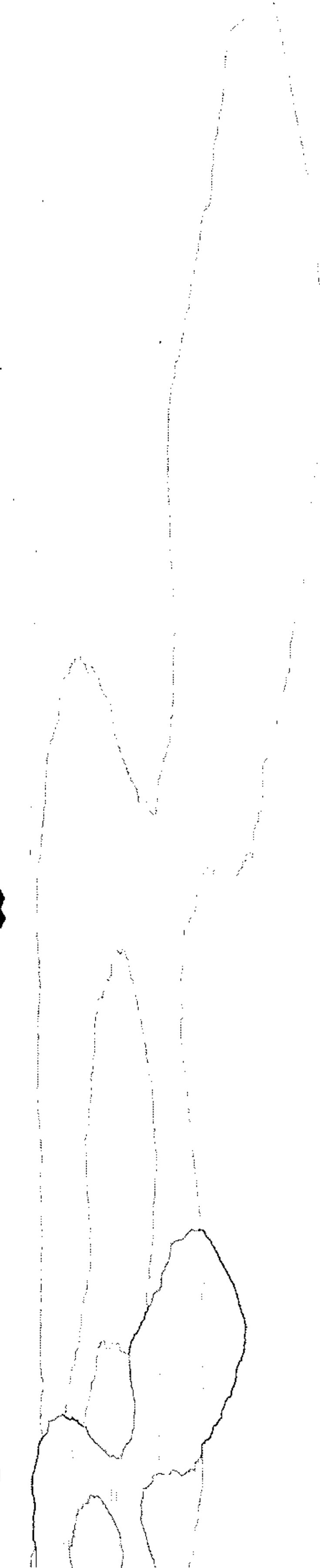
- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول‌ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- اصل مقاله‌های ترجمه شده به پیوست، ارسال شود.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادلهای فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویس ها و منابع کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از موضوع مطلب ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.

همچنین:

- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.
- مطالب مندرج در مجله، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

فهرست:

یادداشت سردبیر



در رابطه با آموزش معلمان، یکی از روش های تحقیقی که در دو دههٔ اخیر مورد توجّه مجامع آموزشی قرار گرفته است، «تحقیق عمل» است.

«تحقیق عمل»، نوع ویژه‌ای از تحقیق است که هدف اصلی آن، **بهبود عمل تدریس** می باشد. درنتیجه، جهت گیری اصلی این دوره ها، باید به گونه‌ای باشد تا به ایجاد اعتماد به نفس و استقلال تصمیم گیری در معلمان بیانجامد و آن ها را متوجّه ظرافت ها، پیچیدگی ها، غیرمترقبه بودن ها، ناپایداری ها و منحصر به فرد بودن عمل تدریس از کلاسی به کلاس دیگر، کند. جامعهٔ آموزشی نوین، نیازمند معلمانی است که به طور طبیعی، محقّق باشند و تجربه های غنی خود را در تمام مراحل تدوین برنامه و تدریس، به کار گیرند. البتّه، این پژوهندگی، با پژوهشگر حرفه ای بودن و از بیرون به جریان تدریس نگریستن، تفاوت زیادی دارد. درنتیجه، دوره‌های ضمن خدمت «تحقیق عمل»، نباید بر مراحل رسمی تحقیقات دانشگاهی (از هر نوع آن)، تأکید داشته باشند و به جای آن، لازم است تا در این دوره ها، بر ایجاد فرصت های مناسب برای معلمان به قصد توسعهٔ روحیهٔ پژوهشی در آن ها متمرکز شد تا معلمان، بتوانند در کلاس درس واقعی خویش، عمل تدریس خود را مورد تحقیق قرار دهند و برای حل مسایل نو یا کهنهٔ کلاس درسی، راه‌حل های بدیع بیابند.

به گفتهٔ کانلی و پرتز (۱۹۸۱)، «معلمان نمی توانند به طور خنثی، مجری برنامه ها و به کار گیرندهٔ یافته های پژوهشی باشند، بلکه آنان از طریق انطباق، برگردان، و جرح و تعدیل آن برنامه ها و یافته های پژوهشی، برنامه های درسی ویژه‌ای برای کلاس درس خود تدارک می بینند و حتی گاهی، ممکن است مواد برنامهٔ درسی خود را تولید کنند» (ص ۶۴۸)، و این ها به شرطی است که مدرسه و کلاس درس معلم، مرکزی برای جستجو و تحقیق او باشد، یعنی، باید یک طرز تلقّی باز، جستجوگرانه و کاوشگرانه نسبت به معلم و مدرسه، حامی هر پروژهٔ «تحقیق عمل» در مدرسه باشد و طبیعی است که داشتن چنین طرز تلقی ای، مستلزم تغییر نگاه به مدرسه و معلم و نقش آن ها در یک نظام آموزشی است.

به طور مثال، برنامه های درسی «مقاوم در برابر معلّم»، روحیهٔ پژوهندگی معلم را تضعیف می کند و استقلال او را نادیده می گیرد؛ و گاهی معلم دوره‌دیده را در نظام آموزشی و کلاس های درسی که برنامه های آن، بیشتر جزمی هستند، دچار تعارض، نگرانی یا انفعال می کند. یکی از هدف های تحقیق عمل، فراهم کردن شرایط مناسب برای تبدیل شدن معلم از مجری صرف به تصمیم گیرنده و انتخاب گر است.

برای این تغییر و تبدیل، تحقیق عمل آموزشی روشی ارایه می کند که در آن، معلم به تنهایی یا با مشارکت دیگران، محقق کلاس درس خود می شود و از این طریق، صلاحیت های حرفه ای خود را افزایش می دهد. هدف از پژوهش معلم این نیست که معلم، پژوهشگر حرفه‌ای باشد، بلکه او می تواند با تیزبینی تحقیقی، به مجموعهٔ تدریس خود بنگرد و با بازتاب بر عمل تدریس و تجزیه و تحلیل آن، تدریس بعدی خود را برنامه ریزی کند و بدین ترتیب، به طور مستمر، عمل تدریس غنی تر و غنی تر می شود. چنین فعالیت هایی، بینش و نگرش معلمان را نسبت به دانش آموزان، یادگیری آن ها، محتوای درسی و چگونگی ارزش یابی تغییر داده و بر باورهای معلمی آن ها، تأثیر قابل تأملی می گذارد.

به گفتهٔ بیشاپ، اگر عملِ معلم دارای سه ویژگی زیر باشد، می توان آن را تحقیق نامید.

به اعتقاد وی، اولین هدف هر تحقیق یا جستجو، **آگاهانه و عمدی** بودن آن است. محقق باید بداند چه کار می‌خواهد بکند و نباید تصادفی به تحقیق بپردازد.

دومین ویژگی آن است که برای هر تحقیقی، باید **شواهدی** داشته باشیم، به‌خصوص آن که هر نوع آموزش و یادگیری، در دنیای واقعی اتفاق می‌افتد. پس باید با دنیای واقعی به راه‌های مختلف رابطه برقرار کند و بهترین راه این ارتباط، جمع‌آوری شواهد است. بالاخره، سومین ویژگی، **نظریه** است. همان‌طور که بیشاپ اظهار می‌دارد، هر فردی ممکن است قصد و ارادهٔ بسیار خوب و عزمی جزم برای انجام تحقیق داشته باشد و شواهد بسیار زیادی هم جمع‌آوری کرده باشد، ولی اگر مبنای نظری وجود نداشته باشد، معلم یا هر پژوهشگری، نمی‌داند با آن مشاهدات چه کند و چگونه از آن‌ها، در جهت بهبود عمل تدریس خویش استفاده کند. با این حال، بیشاپ تأکید می‌کند که منظور وی از مبانی نظری، بیشتر ایجاد توانایی نظریه‌پردازی در زمینهٔ تدریس در معلمان است و این توانایی، می‌تواند بر اثر بازتاب‌های معلمان بر تدریس خود و تجزیه و تحلیل تجربه‌های خودشان به‌تنهایی یا به کمک شریکان پژوهش، به‌وجود آید.

این نوع فعالیت‌های پژوهشی معلمان، فایده‌های آموزشی فراوان دارد که از آن جمله، می‌توان به این موارد اشاره کرد:

۱ ـ کمک به پویایی معلمان؛

۲ ـ استقلال معلمان برای پذیرش مسئولیت‌های جدید انتخاب‌گری و تصمیم‌گیری در مورد تدریس؛

۳ ـ افزایش اعتمادبه‌نفس معلمان برای اقدام به عمل بدیع آموزشی و پذیرش مسئولیت آن؛

۴ ـ ایجاد احساس مالکیت در معلمان نسبت به یافته‌های پژوهشی خویش؛

۵ ـ ارتقای روحیهٔ مشارکتی در معلمان و توسعهٔ دانش حرفه‌ای آن‌ها؛

۶ ـ بهبود اوضاع تدریس؛

۷ ـ ارتقای یادگیری دانش‌آموزان.

به طور خلاصه، کانلی و پرتز (۱۹۸۱)، مشارکت معلمان را در پژوهش کلاس درسی، به سه دسته تقسیم کرده‌اند، «نخستین ویژگی آن است که معلمان و متخصصان، در یک موقعیت حل مسأله، با هم همکاری می‌کنند. ویژگی دوم، همکاری معلمان را در انتخاب پیش‌نیازهای لازم در یک موقعیت آموزشی لازم می‌داند و بر نقش معلمان به‌عنوان شرکای تولید فکرها و راه‌حل‌ها تأکید دارد؛ و آخرین ویژگی آن است که معلمان نقش تصمیم‌گیرنده؛ موضعی، کاوشگرانه و محققانه را اتخاذ می‌کنند» و بالاخره، با تأکید بر بهبود فرایند تصمیم‌گیری، به‌عنوان هدف اصلی طرح‌ها و دوره‌هایی که به قصد ارتباط بیشتر بین معلمان و پژوهش برگزار می‌شود، یادآوری می‌کنند که معلمان، مجریان صرف فرایند تحقیق و توسعه نیستند و لزوماً، همکار تحقیق به شمار نمی‌آیند، «بلکه در عوض و در بهترین شکلش، به‌عنوان کارگزاران مستقلی به شمار می‌آیند که دارای کارکرد آموزشی و تربیتی در فرایند برنامه‌ریزی درسی و اجرا باشند.»

بنابراین، لازمهٔ اتخاذ چنین رویکردی به نقش معلم در هر نظام آموزشی، ایجاد تغییر در سایر بخش‌های نظام آموزشی و افزایش تدریجی اختیارات معلمان به‌منظور تصمیم‌گیری در تمام امور آموزشی است. درنتیجه، کارآمدی دوره‌های «تحقیق عمل» مستلزم رویارویی با دو چالش اصلی است که اولی، نوع برنامه‌ریزی، چگونگی اجرا و محتوای این دوره‌هاست و دیگری، تلاش در جهت فراهم کردن بستری مناسب در نظام آموزشی است که استقلال تصمیم‌گیری و ضمانت اجرا را توسط معلمان، به رسمیت بشناسد و از آن، حمایت کند.

زیر نویس

1. Action Research

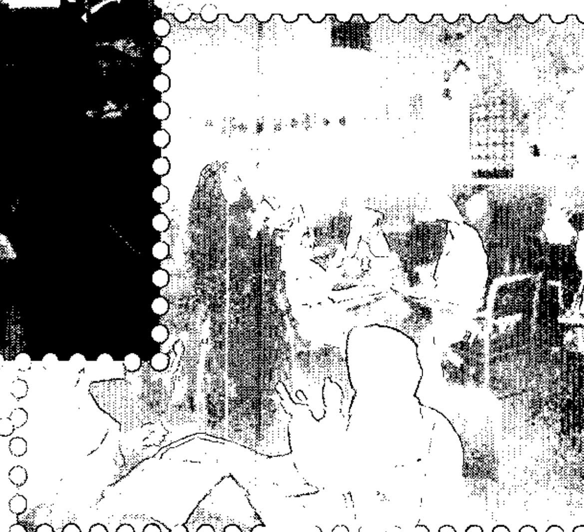
توضیح: در ایران معادل «اقدام پژوهی» نیز برای «تحقیق عمل»، استفاده می‌شود.

مراجع

۱ ـ بیشاپ، آلن (۱۳۷۷) سنت تحقیقات آموزشی و توسعهٔ برنامه درسی ریاضی. ترجمه زهرا گویا. مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۵۱، بهار ۷۷، صص ۸ تا ۱۵.

۲ ـ کانلی، اف. ام. پرتز، میریام بن (۱۳۸۱) معلمان، پژوهش و برنامه‌ریزی درسی. ترجمه زهرا گویا. از کتاب: مهرمحمدی، محمود (پدیدآورنده) برنامه درسی: نظرگاه‌ها، رویکردها و چشم‌اندازها. انتشارات بهنشر. ۱۳۸۱، صص ۶۴۷ تا ۶۶۷.

■



فرآیند یاددهی ـ یادگیری در قرن جدید

در ۳۰ فروردین ۱۳۸۱، «در مرکز تحقیقات دانش‌آموزی صائب» اصفهان، یک سخنرانی با همین عنوان، برای دانش‌آموزان عضو انجمن علمی جوان اصفهان توسط خانم زهرا گویا انجام شد و در «دهمین شمارهٔ مجموعه سخنرانی‌های انجمن علمی جوان» به چاپ رسید. به پیشنهاد هیأت تحریریهٔ رشد آموزش ریاضی، بخش‌هایی از آن سخنرانی و پرسش و پاسخی که با دانش‌آموزان شرکت‌کننده انجام شده بود، در این شمارهٔ مجله، چاپ می‌شود. هیأت تحریریهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی پیشاپیش، از مسئولان مرکز تحقیقات دانش‌آموزی صائب که اجازهٔ استفاده از این سخنرانی را در مجلهٔ رشد آموزش ریاضی دادند، سپاسگزاری می‌نماید.

آن موقع‌ها که ما مدرسه می‌رفتیم، امکانات آموزشی ـ بر خلاف این که بزرگترهای شما ممکن است بگویند که وای ما چه گذشتهٔ پر نعمتی داشتیم و طفلکی شما چیزی ندارید! ـ واقعاً این طور نبود. در واقع، محدودیت‌های ما بیش‌تر بود. نه فضایی داشتیم به این شکل که شما دارید و نه امکانات خارج از مدرسه‌ای داشتیم به این شکل که شما دارید. منتها چون دنیای ما کوچک‌تر بود و خودمان هم کوچک بودیم، به خاطرات گذشته که فکر می‌کنیم، تصور می‌کنیم که امکانات داشتیم. در صورتی که امکانات ما، درون آن دنیای کوچک بود. شما الآن در هر جایی که هستید، با دنیای بزرگ‌تر در ارتباط هستید. حالا به قول معروف یا نان گندم می‌خورید یا دست مردم می‌بینید. از طریق رادیو و تلویزیون و کامپیوتر و اینترنت، با دنیا در ارتباطید. این ارتباط هم به این معنا نیست که مثلاً در تمام ساعات روز دسترسی به اینترنت داشته باشید، نه. ولی به هر حال تبادل اطلاعات وجود دارد و از آن طریق، می‌دانید که در دنیا چه خبر است. در نتیجه فاصلهٔ شما با دنیای وسیع‌تر از خودتان کمتر شده است. اما در چهار دیواری

مدرسه، شاید این فاصله را هنوز حس بکنید. برای همین است که ارزش مکان‌هایی مثل این جا (اشاره به مرکز تحقیقات) خیلی بیش‌تر احساس می‌شود، زیرا آن فاصله‌ای که شما در چارچوب مدرسه می‌بینید و در تصورتان آن فاصله نباید وجود داشته باشد را، در اینجا می‌توانید پر بکنید. به هر حال ان‌شاءالله از هر مکانی که برایتان ایجاد می‌شود، نهایت استفاده را بکنید، هم چنان که این کار را می‌کنید.

بعضی از شما به نظر من خیلی کوچک می‌آمدند. از مسئولین پرسیدم این‌ها دبیرستانی هستند؟ گفتند بلی دبیرستانی هستند. به هر حال، علتش این است که خود ما مسن‌تر شده‌ایم و گر نه، شما ظاهر طبیعی یک بچّه دبیرستانی را دارید. مسألهٔ مهم این است که آدم وقتی توی چشم‌های شما نگاه می‌کند، آینده را می‌بیند و خوشحال می‌شود. چون به هر حال و بدون تعارف، آینده توسط شما ساخته می‌شود. مطمئن باشید که اگر شما نخواهید و آینده را خوب نسازید، کس دیگری نیز نخواهد توانست. در نتیجه، آن خود باوری که در شما به وجود آمده، برای همهٔ ما با ارزش است. امیدوارم طوری عمل کنیم که این فرصت‌های طلایی را از دست ندهیم و از خود باوری شما بیش‌ترین استفاده را در جهت پرورش شما بکنیم.

من خیلی قصد سخنرانی رسمی ندارم. فقط به چند نکته اشاره می‌کنم که فکر می‌کنم ویژگی‌های دانش‌آموز این قرن است. اگر اشتباه کردم، بگویید! چون باز هم با تخیّل مناسب سن خودم، شما را می‌بینم. شما باید بگویید چه ویژگی‌هایی دارید. من هم نظرم را می‌گویم و بعد، بحث را باز می‌کنیم. روی دیوار اینجا نوشته شده «اول اندیشه وانگهی گفتار». ان‌شاءالله خوب می‌اندیشید، بعد با هم صحبت می‌کنیم. ببینیم تا چه حد تصوّرات ما مسن‌ترها با تصورات شما نوجوان‌ها نزدیکی دارد و اگر فاصله زیاد بود، ما را کمک کنید تا این فاصله را پر کنیم. پس من، یک سری ویژگی برمی‌شمرم که فکر می‌کنم ویژگی‌های دانش‌آموز این عصر و نسل در تقابل با دانش‌آموز نسل خودم هستند. هم چنین، یک‌سری ویژگی هم برای تکلیف‌های غنی عنوان می‌کنم. به این معنی برای شما که خواهان یادگیری بیش‌تر و غنی‌تری هستید، بیش‌تری و غنا را چگونه معنی کنیم؟ آیا بیش‌تری و غنا به معنی پرخوری علمی است یا خوراک بهتر آماده کردن برای ذهن و اندیشه است؟ به هر حال این‌ها بستگی به تعریف‌های افراد از تکلیف غنی دارد. من هم تعریفی برای خودم دارم که فکر می‌کنم یک تکلیف غنی باید این ویژگی‌ها را داشته باشد. خوب اگر این تکلیف، غنی باشد و دانش‌آموز هم متفاوت باشد، پس تکلیف منِ معلم چیست؟ دیگر من که نمی‌توانم همان معلم قدیمی باشم، مجبورم که معلم متفاوتی باشم. پس ببینیم که ویژگی‌های این معلم متفاوت چیست؟ باز هم بعد از صحبت‌هایم باید از شما نظرخواهی کنم تا ببینم که آیا این ویژگی‌هایی که می‌گویم، با خواست‌های شما مطابقت دارد یا ندارد؟ زیرا این واقعیتی است که اگر شما نگویید چه می‌خواهید، ما بر اساس تصورات خودمان، برای شما برنامه‌ریزی می‌کنیم. پس باید صداهای شما را بشنویم. منظورم جیغ و دادهای شما نیست! باید نظرات شما شنیده شود. بر اساس آن نظرات، برنامه‌ریزی شود و برنامه‌ها طوری باشند که بیش‌ترین امکان را برای پرورش استعدادهای شما به وجود آورند. چون ان‌شاءالله نیّت همه خیر است، ولی خیر بودن نیّت کافی نیست. مسأله سر این است که تا چه اندازه می‌توانیم با توجه به امکاناتی که در اختیار داریم، خواسته‌هایمان را بهینه کنیم. شما از طریق کتاب‌های درسی ریاضی راجع به بهینه‌سازی، چیزهای زیادی یاد گرفته‌اید. خوب حالا در ارتباط با خودتان، ببینید بهینه کردن امکانات یعنی چه؟ شما ظرفیت‌های نامحدودی از نظر استعداد و اندیشه دارید. اما امکانات محدودی از نظر در اختیار گرفتن آن‌ها به منظور پروراندن ذهن و اندیشه‌تان دارید. ببینید آن نقطهٔ بهینهٔ صرف وقت و انرژی به منظور یادگیری مؤثرتر کجاست؟ آیا واقعاً آن چیزی که این روزها در جامعهٔ ما مُد شده که دانش‌آموزان ساعت‌های درس خواندنشان را به رخ هم بکشند؛ بهینه سازی امکانات یادگیری آن‌هاست؟ دیشب با یک بچهٔ کنکوری صحبت می‌کردم. می‌گفت: وای آن همکلاسیم گفته من دوازده ساعت در شبانه روز درس می‌خوانم. آن دیگری می‌گفت ۱۶ ساعت و یکی هم می‌گفت که بدون توقف ۳۲ ساعت در یک هفته، حسابان خوانده است! پس من چه کنم که نمی‌توانم این تعداد ساعت را در شبانه‌روز درس بخوانم؟ چقدر می‌خواهید این عِدّه و عُدّه را مقابل هم به نمایش

بگذارید؟ با آن‌ها صف‌آرایی کنید و اعصاب همدیگر را خرد کنید؟ اصلاً فرض که خدای ناکرده دچار بیماری شده‌اید که اصلاً خوابیدن را فراموش کرده‌اید و فقط می‌خوانید! ولی آن نقطهٔ بهینهٔ یادگیری کجاست؟ چقدر از این نوع خواندن‌ها به دست می‌آورید؟ عقل سالم در بدن سالم است. اگر شما نتوانید جسمتان را پرورش دهید، دوازده ساعت که سهل است، تمام هفته را هم یک ضرب و بدون توقف بخوانید، باز هم معجزه‌ای رخ نمی‌دهد. پس سعی کنید تا از مفاهیم ریاضی مدرسه‌ای که با آن سر و کار دارید، استفاده کنید و ارتباط آن‌ها را با دنیای واقعی و زندگی واقعی، ببینید و حس کنید و درک کنید. اینجاست که می‌توانید ادعا کنید کسی که ریاضی می‌خواند، انسان موفق‌تری می‌شود. حال باید تکلیف چند چیز را در این جملهٔ خبری، روشن کنیم. اولاً آن ریاضی که دانش‌آموز می‌خواند، چیست؟ در ثانی آن خواندن چه نوع خواندنی است و بالاخره معنای موفقیت چیست؟ آیا موفقیت، نمرهٔ بالایی است که کسب می‌کنیم؟ از نظر من آن نمره، حداقل موفقیت است، زیرا تضمین کنندهٔ خیلی چیزها نیست. ممکن است برای یکی دو درصد بالای کنکور، مثقال مثقال نمره هم اثر داشته باشد، به خصوص در گرفتن جواز عبور برای گذشتن از بعضی از سدهایی که جلوی شما هست. ولی در نهایت، آن چیزی که شما را انسان موفق‌تری یا خدای ناکرده ناموفق‌تری می‌کند، چیست؟ برای مثال، آیا اگر شما، نیم نمره از بغل دستی خود کمتر داشته باشید، خود را به اندازهٔ نیم نمره کمتر موفق می‌بینید یا برعکس؟ به هر حال، امید است مطالبی که در مدرسه می‌خوانید کمک کند و شما را، انسان موفق‌تری کند، موفق با تعریفی که شما خودتان برای موفقیت خودتان دارید و آن، از ویژگی‌های این قرن است، که خدمت شما می‌گویم.

ویژگی‌های دانش‌آموز قرن جدید

دانش‌آموز این قرن، در مقایسه با دانش‌آموز ده سال پیش ـنمی‌گویم قرن گذشته، شروع قرن، انتهای قرن را می‌گویم- بیش‌تر جستجوگر است چون منابع اطلاعاتی که در اختیارش است، بیش‌تر است. دانش‌آموز این قرن، مستقل‌تر و خودباورتر است.

دانش‌آموز این عصر و نسل، دیرتر قانع می‌شود و تا خودش قانع نشود، بر درستی چیزی صحه نمی‌گذارد. این انسان، باید خودش به دست بیاورد، در نتیجه دوست دارد سازندهٔ دانش، خودِ او باشد نه دیگران. او می‌خواهد خودش را بسازد و به دست بیاورد، درنتیجه دوست ندارد محصولات تولید شده توسط بزرگان را به خوردش بدهند و نمی‌تواند خودش را قانع و دل‌خوش کند که این‌ها را یاد گرفتم پس می‌توانم پا جای پای بزرگان بگذارم.

جوان این عصر و نسل، باید خودش مزهٔ بزرگی را بچشد و عوامل بزرگی را در خودش به وجود بیاورد. می‌خواهد ببیند، خودش را محک بزند و ببیند چقدر توان تولید دارد. آن موقع است که احساس رضایت می‌کند. احساس می‌کند که خودش در ساختن دانش و شخصیت خودش نقش دارد.

دانش‌آموز این عصر و نسل، با افسانه‌هایی که ما از گذشته می‌گوییم، قانع نمی‌شود. ممکن است با شنیدن افتخارات گذشته برایش انگیزه‌های مقطعی به وجود بیاید، ولی تا مزهٔ رسیدن به آن افتخار را نچشد، انگیزه‌ای که از گذشتگان می‌گیرد، خیلی ماندگار نخواهد بود. دانش‌آموز این عصر و نسل، دلیل می‌خواهد. پاسخ هر چیزی را به خاطر این که بزرگ‌تر از او گفته است، نمی‌پذیرد. در زبان می‌پذیرد چون مصلحت‌اندیش است. می‌داند اگر گاهی وقت‌ها حرف بزرگترها را نپذیرد دچار مشکل می‌شود، پس می‌گوید چَشم! ولی آن اقناع درونی، با این چَشم گفتن ظاهری خیلی فرق دارد. تا خودش را قانع نکند کس دیگری را نمی‌تواند قانع کند. به نظر شما ویژگی دانش‌آموز این عصر که شما باشید، چیست؟ فکر می‌کنید چه فرقی با پدر و مادرهایتان دارید؟

یکی از دانش‌آموزان: خواسته‌هایمان بیش‌تر است.

سخنران: از چه نظر بیش‌تر است؟ منظور هم در سطح و عمق آن است و هم در تنوّعش؟

دانش‌آموز: امکانات بیش‌تری را می‌طلبیم، از قبیل امکانات تفریحی.

سخنران: طبیعی است! چشم می‌بیند، دل می‌خواهد.

زندگی امروز با دنیای بستهٔ گذشته که تمام زندگی شاید در یک کوچه می‌گذشت، فرق می‌کند. شما از طریق ارتباطات، با تمام دنیا مرتبط هستید. دیگر به این که به شما **بگویند همین است و جز این نیست، قانع نمی‌شوید، زیرا می‌دانید جز این هم می‌تواند باشد.**

نیازمند گفتگو و مجاب شدن هستید. پیش فرض گفتگو هم، خوب گوش کردن است. گفتگو فقط صحبت یک طرفه نیست که بی‌انقطاع بگویید و بروید. گفتگو یعنی این که اول خوب گوش بدهید، خوب بر شنیده‌هایتان بازتاب داشته باشید و بعد پاسخ دهید.

دانش‌آموز: دانش‌آموز این عصر و نسل، کمی خسته‌تر به نظر می‌آید، کمتر شاد است. دانش‌آموزان قبل، خیلی شادتر بودند، خیلی زیادتر.

سخنران: خوب، نسل من باید در مقابل این احساس، پاسخ‌گو باشد. چون یادگیری بدون شادابی و نشاط، یادگیری نیست. یادگیری تا از درون، شما را راضی نکند و جلوهٔ آن رضایت و شادی درونی، در تظاهرات بیرونی شما نباشد، یادگیری واقعی نیست. انباشتن ذهن از محتوای حجیم شده است. به نظر شما، چه کار کنیم تا در حالی که یاد می‌گیریم، شاد هم باشیم؟

یک دانش‌آموز: من آن طوری درس می‌خوانم که دوست دارم. تحقیقی می‌کنم که نتیجهٔ آن مایهٔ نشاط و شادیم شود. بنابراین، هرکس آن طور زندگی می‌کند که می‌خواهد.

سخنران: ایشان می‌گوید نواندیشی شادی‌آور است و طراوت می‌دهد.

دانش‌آموز دیگر: نه این طور نیست. ما مجبوریم علی‌رغم میل خودمان، خود را برای کنکور آماده کنیم. چیزهایی را از ما می‌خواهند که ما دوست نداریم.

سخنران: همهٔ راه‌ها که به کنکور ختم نمی‌شود. به جز مسألهٔ کنکور، شما یازده سال مدرسه می‌روید. می‌توانید یازده سال شاد باشید، مدرسه رفتن که همه‌اش کنکور نیست. بحث آن را هم به موقع مطرح می‌کنم. ولی ببینیم علّت این خستگی که شما همگی با صدای بلند و غرّاً گفتید «درست است» و تأیید کردید، چیست؟ چرا خسته‌اید؟

دانش‌آموز: اگر دقت کنید، می‌بینید خستگی در اثر تضاد ایجاد می‌شود. من چیزی را می‌خواهم، ولی محیط این را به من نمی‌دهد. حتی می‌خواهید بخوابید، ولی نمی‌توانید بخوابید. پس بیش‌تر خسته می‌شوید، چون فکر شما آشفته است.

دانش‌آموز دیگر: نسل شما ما را خسته کرده است. ما می‌گوییم کیفیت و محتوای مطالبی که در کتاب می‌آید مهم است و باید مطالبی باشد که به درد زندگی ما بخورد، شما به کمیّت توجه می‌کنید. به چه درد ما می‌خورد فرمول آب H_2O است. حالا صدتا از این کتاب‌ها هم بنویسید چه فایده‌ای دارد؟

سخنران: درود بر این پسرم و شهامت او، بارک‌اللّه! چرا خسته‌تان کرده‌ایم؟ چطوری خسته‌تان کرده‌ایم؟

دانش‌آموز دیگر: شما از ما می‌خواهید هر دو درسی را که یکی برای من جالب‌تر است و دیگری برایم مهم نیست یکسان بخوانم. این چیزی است که نظام آموزشی از من می‌خواهد.

سخنران: چرا چنین است؟ خوب تا برایت این سؤال ایجاد نشود، هر چه من بگویم فایده ندارد. باید این «چرا» ایجاد شود تا من دلیل آن را بگویم.

حالا اجازه بدهید بحثی را که باز کردیم، جمع کنیم و وارد بحث دیگری شویم. ببینید بحثی که الآن باز کردیم این بود که تا چه اندازه دیدگاه شما نوجوانان با دیدگاه ما، نسبت به یک موضوع مشترک، متفاوت است. وقتی من بزرگسال از بیرون به شما نگاه می‌کنم و شما از بیرون به من بزرگسال، شما می‌گویید بزرگسال‌ها چنین هستند و من می‌گویم

جوانان چنان هستند و شاید هر دو نادرست باشد. ببینید الآن درون این جمع محدود چه اندازه تنوع فکر نسبت به یک موضوع واحد که برای همهٔ شما موضوع اصلی زندگی فعلی‌تان هست، وجود دارد؟ چقدر دیدگاه‌ها متضاد است؟ پس ببینید مسأله‌ای که مهم‌تر است، آن است که برنامه‌ها به قول شما به جای آن که حجیم باشند و بچه‌ها را خسته کنند، بهتر است انعطاف داشته باشند. انعطاف یعنی چه؟ یعنی برنامه‌هایی که پذیرای این همه تنوع فکر باشد، در عین حالی که حداقلی را برای همه فراهم کند. تهیهٔ چنین برنامه‌هایی آسان نیست. راحت‌ترین برنامه این است که ما موضوع‌های علمی را تفکیک کنیم، برای هر کدام یک عنوان انتخاب کنیم. ده پانزده تا را بریزیم توی یک برنامه و اسمش را بگذاریم «برنامهٔ درسی مدرسه‌ای» و هر کدام را با اندازهٔ مشخصی به خورد بچه‌ها بدهیم! اینجاست که دانش‌آموز خسته می‌شود. اینجاست که دانش‌آموز به شدت تضاد بین خواسته و نخواسته‌اش را می‌بیند. ولی اگر شما برنامه‌هایی داشته باشید و تکالیفی در مدرسه داشته باشید که از تلفیق علوم مختلف تشکیل شده باشد و به شما فرصت استفاده از توانایی‌هایتان را در حیطه‌های مختلف بدهد، آن موقع هر کس به اندازهٔ وسع خودش جذب می‌کند و از آن برنامه، بهره می‌گیرد. یعنی برنامه در حداقلش برای همه یکسان است نه در حداکثرش. در نتیجه، برنامه آن حداقلی را که برای شروع لازم هست به همهٔ دانش‌آموزان ارایه می‌دهد و دانش‌آموز به اندازهٔ حداکثر ظرفیتش از برنامه استفاده می‌کند. اگر چنین باشد، آن برنامه برای شما خستگی ایجاد نمی‌کند. به خاطر این که شما انتخاب گر هستید، نه آن که یکی دیگر انتخاب کند و به شما بدهد. به طور مثال این دو دوست عزیزم دو نظر متضاد دارند. یکی از آن‌ها می‌گوید همه چیز را می‌شود بر اساس رضایت درونی تنظیم کنیم، یعنی شما می‌توانید مدرسه بروید برای این که لذت درونی را احساس کنید. احساس خودارضایی علمی کنید و فکر کنید به آن چیزی که دوست دارید، رسیده‌اید. یک دوست دیگر هم می‌گوید نه! ما مجبوریم، زیرا محدودیت‌های بیرونی به ما فشار می‌آورند. ما اگر می‌خواهیم در این جامعه موفق شویم، باید به فکر آن محدودیت‌های بیرونی هم بیفتیم. حالا اگر بخواهیم بین این دو دیدگاه افراطی پلی بزنیم چه باید بکنیم؟ دو دیدگاهی که یکی از آن‌ها، همگی را از روی خواسته‌های شخصی برمی‌گرداند و قناعت می‌کند به این که اگر شخصی از درون قانع باشد، دیگر مهم نیست که در بیرونِ شخص چه می‌گذرد و دیدگاه دیگری که تمام ارضاهای درونی را رها می‌کند و به خاطر محدودیت‌های بیرونی، آن‌ها را نادیده می‌گیرد. برای این که پلی بین این دو بزنیم، مدرسه چه کار باید بکند؟ و چه نوع تکلیف‌هایی را باید ارایه دهد[1]؟

ویژگی‌های تکلیف غنی

من فکر می‌کنم تکلیف‌هایی که غنی هستند، می‌توانند شما را ارضا کنند و پاسخ‌گوی خواسته‌های متنوع و بلند پروازانه‌ای که خوشبختانه دارید، باشند. ویژگی این تکلیف‌ها از نظر من این‌ها هستند:

یک تکلیف غنی، دانش‌آموز را برای موفقیت در خارج از مدرسه آماده می‌کند، در صورتی که یک تکلیف سنتی، دانش‌آموز را فقط برای موفقیت درون مدرسه آماده می‌کند. توجه کنید این دو خیلی با هم تفاوت دارند. البته پیش‌فرض موفقیت در بیرون، موفقیت در درون هم هست، اما فقط به این اکتفا نمی‌کند. بعضی از شما الآن گفتید از مدرسه که برمی‌گردید، از شدت خستگی به حال غش می‌افتید. فقط به شرطی این خستگی کمتر فشار می‌آورد که از تلاشی که در درون مدرسه انجام داده‌اید احساس قدرت کنید، احساس لذّت کنید، احساس اعتبار کنید. آن موقع، خستگی را احساس نمی‌کنید. ولی اگر برعکس، احساس کنید حتی در جمع کوچک خانوادگی از نظر استدلالی و از نظر اطلاعاتی و از نظر توجیهات منطقی کم می‌آورید، آن وقت فکر می‌کنید که اصلاً برای چه به مدرسه می‌روید؟ ممکن است با خود بگویید «این همه به مدرسه می‌روم که فقط یک نفر را راضی کنم؟ آن یک نفری که با نمره‌ای، جواز عبور از یک مرحله به مرحلهٔ بعدی را به من داده است؟ یا این که من مدرسه می‌روم تا در نهایت، شهروند بهتری شوم و به حال جامعه‌ام مفیدتر باشم.» تکلیفی که این توانایی را در شما ایجاد کند، یک تکلیف غنی است. برای مثال، اصرار می‌کنیم و می‌گوییم ریاضی جزء جداناپذیر برنامهٔ درسی مدرسه‌ای است، ریاضی‌ای جداناپذیر است که در

تربیت شهروند مسؤول و انتخاب‌گر نقش دارد. این که می‌گویند ریاضی باید عمومی شود، ریاضی باید همگانی شود، برای چیست؟ چه چیزی درون این برنامهٔ درسی ریاضی نهفته است که ضرورت عمومی کردن و همگانی کردنش را ایجاب می‌کند؟ آن بچه‌ای که به مدرسه می‌رود، باید از طریق برنامهٔ درسی ریاضی، احساس قدرت بیش‌تری بکند و در حل مسایل واقعی زندگی خودش، تواناتر شود. آن موقع است که می‌تواند بگوید چرا ریاضی جزء جداناپذیر برنامهٔ درسی مدرسه‌ای است. ولی اگر جوانی ببیند بین آن کسی که اصلاً ریاضی نخوانده و هیچ چیز نمی‌داند با آن کسی که ریاضی خوانده، از نظر موقعیت اجتماعی و موفقیت فردی هیچ تفاوتی نیست، ممکن است در درون خود به این حرف‌ها بخندد و فقط چون بزرگان می‌گویند، آن‌ها را به ظاهر تأیید کند، و این کافی نیست. آماده کردن دانش‌آموز برای موفقیت در خارج از مدرسه، ویژگی یک تکلیف غنی و یک برنامهٔ غنی است.

برنامهٔ غنی یا تکلیف ریاضی غنی، نتایج یادگیری متعدد دارد. به طور مثال، از طریق تدریس تابع می‌توانید چند چیز دیگر را یاد بگیرید. استدلال کردن را یاد می‌گیرید، تصمیم‌گیری را یاد می‌گیرید، انتخاب‌گری را یاد می‌گیرید، توجه کردن را یاد می‌گیرید، خیلی چیزهای دیگر را یاد می‌گیرید که تابع ابزاری در خدمت یاد دادن آن‌ها به شما است. در صورتی که در تکلیف‌های سنتی یا برنامه‌های سنتی، نتایج یادگیری محدود هستند. مثلاً در برنامهٔ سنتی می‌نویسند که هدف از تدریس تابع این است که دانش‌آموز در پایان درس بداند که:

۱ـ تعریف تابع چیست؟

۲ـ دامنه را بگوید.

۳ـ بُرد را بگوید.

۴ـ ضابطهٔ تابع را پیدا کند.

۵ـ مقدار تابع را پیدا کند و از این قبیل.

این نتایج یادگیری، محدود و سنتی هستند. مربوط به زمان من است نه شما که دوست دارید هر موضوع درسی را بهانه‌ای برای پرورش ذهن و اندیشهٔ خودتان قرار دهید.

در برنامهٔ غنی، تأکید بر بین رشته‌ای است، یعنی اگر شما ریاضی یاد می‌گیرید، تمام بخش‌های ریاضی در خدمت شما است. آن‌ها ابزاری هستند تا شما را با ذهن ریاضی قوی‌تری تربیت کنند. در ریاضی مدرسه‌ای، تأکید فقط بر مثلثات، جبر، هندسه، حسابان، و امثال این‌ها نیست. ریاضی می‌خوانید که در نهایت، شما را انسان تواناتری بکند. در صورتی که در برنامهٔ بیش‌تر سنتی، تأکید بر باریکه‌هایی از علوم است، مثل همین است که شماها گفتید، خیلی از آن‌ها را دوست ندارید و بعد، یادگیری آن‌ها برایتان شکنجه‌آور می‌شود. بعضی از آن‌ها را دوست دارید، ولی نمی‌توانید تمام وقت خودتان را صرف این دوست داشتن بکنید. این را هم در پرانتز بگویم که وقتی بخش عمده‌ای از انتظارات شما در دنیای مدرسه یا اجتماع برآورده شود، آن وقت محدودیت‌ها را هم به شیرینی می‌پذیرید. چون هر جامعه‌ای برای خود، قواعد مخصوص به خودش را دارد و این هم قواعد مدرسه است که شما برای رسیدن به خواسته‌های منطقی خودتان، باید به آن‌ها احترام بگذارید. مجبورید دو سه تا درس را هم که دوست ندارید بخوانید، عیب ندارد. حاضرید این سرمایه گذاری را بکنید به شرط این که همهٔ برنامه، اجبار و ناخواسته نباشد.

تکلیف غنی یا برنامهٔ درسی غنی، نیاز به استفاده از مهارت‌های درهم تنیده دارد، نه این که بگوییم این مهارت برای این موضوع، این مهارت برای این مسأله، بلکه می‌خواهیم از انواع مهارت‌ها استفاده کنیم. مثل این آزمایشگاهی که اینجا دارید. شما وقتی وارد آزمایشگاه می‌شوید، نمی‌گویید چون می‌خواهم این قانون را کشف کنم یا این را امتحان کنم، پس فقط به این مهارت نیاز دارم. خیر! این جا وقتی وارد آزمایشگاه می‌شوید، به معنای وسیع‌تر به مهارت‌هایی مانند مشاهده کردن، شنیدن، اندازه‌گیری، تصمیم‌گیری، انتخاب کردن، حدسیه‌سازی، فرضیه‌سازی، فرمول درآوردن، صورت‌بندی کردن و ده‌ها مهارت دیگر نیاز دارید، نه فقط یک مهارت. اما در اغلب برنامه‌های درسی سنّتی، ما معلمان بیش‌تر دنبال آزمودن یک مهارت در هر مرحله هستیم. اغلب ارزشیابی‌های سنتی هم چنین است. یک مهارت، آموزش داده می‌شود و آن مهارت، مورد ارزشیابی قرار می‌گیرد.

تکلیف یا برنامهٔ درسی غنی، اصالت دارد. این حرف یعنی چه، برای چه کسی و چرا اصالت دارد؟ برای شما

اصالت دارد. یعنی این که شما مصرف‌کنندهٔ تولیدات دیگران نیستید، بلکه در موقعیتی قرار می‌گیرید که می‌خواهید خودتان دانشی را تولید کنید و آن موقعیت، برای شما واقعی است، ممکن است برای یک ریاضی‌دان واقعی نباشد، اما برای شما واقعی است. شمایید که می‌خواهید نتیجه‌گیری کنید و به نتایج جدید برسید. به هر نتیجه‌ای که برسید، برای شما تازگی دارد. ممکن است از نظر یک ریاضی‌دان، جدید نباشد. ولی چون خود شما این فرآیند را طی کرده‌اید و نتیجه‌گیری کرده‌اید، پس برای شما محترم است و چون خودتان آن را به دست می‌آورید، نسبت به آن متعصب هستید، حافظ آن هستید و تا دلیل قانع‌کننده‌ای برای رد آن پیدا نکنید، از آن دفاع می‌کنید. در صورتی که برنامه‌های سنتی، بیش‌تر تصنّعی هستند و همین طور که گفتم، محصول تولیدات دیگران هستند.

در حالی که برنامه‌های غنی، زمینه‌مدارند. یعنی زمینه‌اش واقعیت شما است و واقعیت دیگران نیست و از این زمینه برای طرح مسایل واقعی استفاده می‌کنیم، امّا برنامه‌های سنتی بیش‌تر مستقل از زمینه هستند. شما ببینید خیلی وقت‌ها مثلاً ریاضی که می‌خوانید مستقل از واقعیت است. به طور مثال، در کتاب‌های قدیمی‌تر ریاضی، اغلب از همان ابتدا و پس از نام خدا، با عدد و رقم و بدون زمینه‌یابی، درس را شروع می‌کردیم. ممکن است زمانی دیگر، جور دیگری افراط کنیم و همه‌اش قصه بگوییم و باز، زمانی برگردیم و همه‌اش عدد و رقم بگوییم. هر دو این‌ها غیر طبیعی و تصنّعی است. زمینه، چیزی است که شما در آن قرار گرفته‌اید. به همین دلیل، در برنامه‌های زمینه‌مدار، برنامهٔ بومی یعنی برنامه‌ای که متأثر از فرهنگ و جامعه است، بیش‌تر معنا پیدا می‌کند.

برنامهٔ غنی یا تکلیف غنی شما را به استفادهٔ متوازن از اعمال مختلف تشویق می‌کند. یعنی شما از هر چه که در واقع در توان دارید استفاده می‌کنید، تا یک مسأله را حل کنید. در صورتی که در برنامهٔ سنتی، کمتر چنین چیزی وجود دارد. مثلاً اگر مشتق خواندید، در ارزشیابی معمولاً فقط توانایی مشتق‌گیری شما را می‌خواهند، اگر حدّ خواندید فقط توانایی حدّگیری و اگر تابع خواندید، توانایی محاسبهٔ مقدار تابع. این چنین باریک اندیشی، در برنامه‌های درسی متعلق به عصر صنعتی شروع قرن بیستم است و به برنامه‌های درسی عصر اطلاعات و قرن بیست‌ویکم تعلق ندارد.

تکلیف غنی بر حل مسأله تأکید دارد، یعنی هر چه که می‌گوید، در خدمت حل مسأله است. البته منظورم از حل مسأله، حل مسأله‌های آخر کتابتان نیست. منظورم حل مسأله‌های واقعی است. یعنی یک مسأله را بگیرید، مدتی با آن کلنجار بروید و در گروه‌های کوچک که با همکاری خودتان به وجود آورده‌اید، با هم تلاش کنید تا بعد بتوانید به یک حل بدیع برسید. در حالی که در تکلیف‌ها یا برنامه‌های سنتی، بیش‌تر تأکید بر رویّه‌ها، قواعد و الگوریتم‌ها است. انگار نقشه را به دستتان داده‌اند و طبق نقشه‌ای که دیگران تهیه کرده‌اند، شما نشانی را پیدا می‌کنید و به نتیجه می‌رسید. در واقع، برنامهٔ سنتی کمتر حسّ جستجوگری را در شما ایجاد می‌کند. شما فقط می‌دانید کجا باید بروید. زیرا نشانی مستقیم را به شما داده‌اند. در صورتی که در برنامهٔ غنی، هنگامی که به یک جنگل وارد می‌شوید، همه می‌خواهید این جنگل را بشناسید و خودتان ویژگی‌های آن را کشف کنید. این دو تفکر، مختلف است و با هم تفاوت‌های زیادی دارند.

در تکلیف غنی، بیش‌تر تفکر بازتابی و استفاده از تصوّر، تشویق می‌شود. یعنی تصوّر شما خیلی با ارزش است، به خصوص در حل مسایل خودتان. در صورتی که در تکلیف‌های سنتی، بیش‌تر به جمع‌آوری تشویق می‌کنیم و وقتی اطلاعات جمع شد، یعنی شما خیلی عالِم شده‌اید! بعد باید تمرین کنید تا آن اطلاعات از دست نرود. این سنّتِ تمرین و تکرار، متعلق به زمانی است که آن اطلاعات را فقط مدرسه به بچه‌ها می‌داد. در صورتی که می‌دانید در دنیای فعلی، اصلاً چنین نیست و منابع دریافت اطلاعات، متعدد و متنوع هستند.

در تکلیف غنی، فضا برای اجرای وسیع‌تر باز می‌شود. یعنی ممکن است مسأله‌ای باشد که ۷ یا ۸ راه حل مُختلف داشته باشد که همگی مناسب و همگی درست باشند و راه حل انتخابی، بستگی به انتخاب‌گرش دارد. اما تکلیف یا برنامهٔ سنتی، بر اجرای محدود تکیه دارد. برای رسیدن به جواب، همگی باید از یک مسیر بروند و به یک هدف برسند. یعنی در برنامه‌های سنتی، ابتدا و انتهای مسیر بسته

است. امّا در برنامهٔ غنی، غنی سازی درون خود تکلیف است. به این معنا که شما از طریق انجام دادن یک عمل، خودتان را غنی و غنی تر می کنید، نه این که مرتّب تزریق های بیرونی به شما داده شود. مثلاً ضعف داری، ویتامین B تزریق کن! پوستت خراب شد، ویتامین E تزریق کن! نمی دانم، اگر غش کردی، ویتامین D تزریق کن! این گونه، یادگیری واقعی اتفاق نمی افتد. مسأله این است که این بدن و این ذهن در کل، نیاز به غنی شدن دارد. در صورتی که در تکلیف های سنتی، همین طور که گفتم اجزا را جدا جدا غنی می کنیم، یعنی تکلیف را پُر و پُرتر می کنیم! ببینید الآن اغلب برنامه هایی که برای بچه های تیزهوش گذاشته می شود، متأسفانه حجیم تر شدهٔ همان برنامه های سنتی است. چنین برنامه ای در واقع غنی تر نشده، یعنی عمق برنامه از نظر تنوع، انعطاف و گوناگونی خیلی فرق نکرده است، بلکه به حجم آن اضافه شده است. به طور مثال، اگر دانش آموز پنجم ابتدایی باشد، درس های اوّل راهنمایی را به او می دهند. اگر سال اول دبیرستان است، درس های سال سوم دبیرستان را به او می دهند و همین طور، این روش ادامه دارد. خوب که چی؟ این همه دویدن برای چیست؟ به کجا می خواهیم برسیم؟ شما می خواهید از یادگیری لذّت ببرید. آن لذّت بردن و عدم خستگی وقتی حاصل می شود که ببیند با یک خوراک محدود، یک دنیا کار می توانید انجام دهید. آن موقع احساس نشاط می کنید، احساس قدرتمندی می کنید و بیش تر به این که خواسته های علمی شما ارضا شود نیاز دارید. خواسته هایی که رسیدن به آن ها، در شما احساس قدرتمندی ایجاد می کنند. قدرتمندی به معنایی که احساس توانایی بکنید. هم چنین، در تکلیف غنی، استفاده از استراتژی های متعدد تدریس و یادگیری تشویق می شود. در صورتی که تکلیف های سنتی، بیش تر بر استراتژی های محدود تکیه دارند.

یادگیری برای فهم و درک

یادگیری، هم می تواند برای فهم و درک باشد و هم طوطی وار. ببینیم تفاوت این دو در چیست و ببینیم در جریان فعلی آموزشی، کدام بر دیگری ارجحیت دارد.

یادگیری برای درک و فهم قانع کننده است، یادگیری طوطی وار قانع کننده نیست. انجام آن را از شما خواسته اند ولی قناعت درونی برای شما ندارد.

یادگیری برای درک و فهم راهی برای تفکر است، اما یادگیری طوطی وار مجموعه ای از رویّه ها و قواعد است.

یادگیری برای فهم و درک فرآیند معناسازی است، یعنی شما در واقع در جریان قانع کردن خودتان، معناهای جدید می سازید. چیزی را می پذیرید که احساس می کنید به درد شما می خورد و احساس می کنید که معنایی برای شما دارد. با این حال، یادگیری طوطی وار از بزرگ به کوچک است. بزرگ می گوید، کوچک گوش می کند.

یادگیری برای درک و فهم مشارکتی است. یادگیری طوطی وار، یادگیری رئیس و مرئوسی است.

یادگیری فهم و درک بر اساس نیاز دانش آموز است. یادگیری طوطی وار بی توجه به نیازهای یادگیرنده است.

یادگیری برای فهم و درک، از نظر یادگیرنده برجستگی و ویژگی دارد، چیزی دارد که او به دنبالش برود. یادگیری طوطی وار این ویژگی را الزاماً ندارد.

یادگیری برای فهم و درک شرایطی ایجاد می کند که شما، درستی آن را درک کنید. یادگیری طوطی وار شرایطی ایجاد می کند که درستی آن را بپذیرید. درک درستی با پذیرش درستی خیلی فرق می کند.

در یادگیری برای درک و فهم، دانش آموز فعال است و در یادگیری طوطی وار، دانش آموز منفعل است.

یادگیری اگر با فهم و درک اتفاق بیفتد، دانش آموز است که به آن اعتبار می دهد. در یادگیری طوطی وار، معلم است که به یادگیری اعتبار می دهد.

در یادگیری برای فهم و درک، حقیقتْ ساخته شدنی است. در یادگیری طوطی وار، حقیقت به دانش آموز ارایه می شود.

در یادگیری برای درک و فهم، دانش آموز خودش مالک یادگیری خود است چون آن را ساخته است. در یادگیری طوطی وار، معلم مالک آن یادگیری است.

یادگیری برای فهم و درک، با قدرت و تلاش یادگیرنده نتیجه می شود. در یادگیری طوطی وار، عموماً به طور مکانیکی به نتایج می رسیم.

در یادگیری برای فهم و درک، دانش آموز قانون ساز

است . در یادگیری طوطی‌وار ، دانش‌آموز قانون‌پذیر است .
در یادگیری برای فهم و درک ، دانش‌آموز است که به زبان خودش توضیح می‌دهد . در یادگیری طوطی‌وار ، زبان ، زبان معلم است و دانش‌آموز آن را تکرار می‌کند .
در یادگیری برای فهم و درک ، معلم تسهیل کننده است ، معلم مدیر یادگیری و یاور دانش‌آموز است . در یادگیری طوطی‌وار ، معلم گویندهٔ یک طرفه است .
در یادگیری برای فهم و درک ، تلاش می‌شود تا یک حقیقت دوباره‌سازی شود تا به راحتی به یاد آورده شود ، زیرا مفاهیم با یکدیگر مرتبط هستند . در صورتی که در یادگیری طوطی‌وار ، اغلب مفاهیم فراموش می‌شوند ، چون دوباره‌سازی نمی‌شوند . آن‌ها فقط به عنوان یک حقیقت ارایه می‌شوند و بعد هم چون درونی نشده‌اند ، در ذهن نمی‌مانند .
در یادگیری برای فهم و درک ، آخر بحث ، کلاس به نتیجه می‌رسد . در یادگیری طوطی‌وار ، اول نتیجه توسط معلم گفته می‌شود ، بعد تمرین می‌کنیم تا آن نتیجه را به خاطر بسپاریم .
یادگیری برای فهم و درک ، مرتبط و جامع است و رویّه‌ها را از درون خودش به وجود می‌آورد . در صورتی که در یادگیری طوطی‌وار ، مطالب پراکنده و موردی هستند و با دنبال کردن رویّه‌ها ، به نتیجه می‌رسند .
با این تفاوت‌هایی که خدمت شما عرض کردم [چون وقت کم است مطالب را جمع می‌کنم] فعالیت‌هایی که دانش‌آموز در چنین شرایطی غیر سنتی انجام می‌دهد ، گسترده‌تر ، متنوع‌تر و مرتبط‌تر هستند .

انواع فعالیت‌های دانش‌آموزان

در یک تدریس غیر سنتی که تأکید بر یادگیری برای فهم و درک است ، دانش‌آموز جستجوگر است ، دنبال کشف می‌گردد ، در نتیجه بازی می‌کند ، درگیری فکری برای خودش ایجاد می‌کند ، تفسیر می‌کند ، در مورد پدیده‌ها بحث می‌کند ، فرض می‌کند ، بررسی می‌کند ، تعیین می‌کند ، سؤال ایجاد می‌کند ، فرضیه‌سازی می‌کند ، بارش ذهنی دارد ، (بارش ذهنی به معنای هم‌فکری . مثلاً وقتی در گروه نشسته‌اید ، ذهن شما فی‌البداهه تولید می‌کند . به این می‌گوییم بارش ذهنی . یعنی از قبل مطلب به شما داده نشده است . شما با یک مورد غیرمترقبه مواجه می‌شوید و بر روی آن بازتاب می‌کنید . اصطلاحاً به این تکنیک می‌گوییم بارش ذهنی) . دانش‌آموز تصور می‌کند ، مسأله طرح می‌کند و حدسیّه‌سازی می‌کند . دانش‌آموز در چنین شرایطی ، مدل‌سازی می‌کند . بعد از این که این جستجو و کشف را به طرح یک مسأله رسانید ، حالا مدل‌سازی می‌کند . استراتژی تعیین می‌کند ، نقشه انتخاب می‌کند ، دنبال الگو می‌گردد ، مسایل واقعی را به مدل ریاضی در می‌آورد . سعی می‌کند آن‌ها را با انواع بازنمایی‌های مختلف نمایش دهد تا بتواند از طریق آن‌ها ، با دیگران ارتباط برقرار کند . دست‌ورزی و انتقال در چنین فضایی از طریق محاسبه ، اندازه‌گیری ، حل ، جایگزینی ، فاکتورگیری ، استفاده از عمل‌گرها ، نمودار ، ترجمه ، ساختن ، فرآیند و امثال این‌ها انجام می‌شود . ببینید! همهٔ این‌ها در خدمت کشف و جستجوی شما است نه این که از این ابزار استفاده کنیم تا به کشف برسیم . کشف می‌کنید و این توانایی‌ها را در خدمت خودتان می‌گیرید ، بعد از این که این کارها را کردید ، نتیجه‌گیری و استنباط می‌کنید . برای نشان‌دادن درستی نتیجه‌گیری‌تان توجیه می‌کنید ، ارزشیابی می‌کنید ، نظارت می‌کنید ، پیش‌بینی می‌کنید ، مقایسه می‌کنید ، تعمیم می‌دهید ، تشخیص می‌دهید ، از چیزی که ساخته‌اید ، دفاع می‌کنید و این اتفاقی است که کلاس درس غیر سنتی به طور طبیعی باید اتفاق بیفتد . بعد ، از طریق خواندن ، نوشتن ، صحبت کردن ، گوش دادن ، گزارش دادن ، ثبت کردن ، نمودار کشیدن ، توضیح دادن و تعامل بین تولید خودتان و تولید افراد دیگری درون گروه خودتان ، ارتباط برقرار می‌کنید . این ویژگی‌هایی است که من فکر می‌کنم یک کلاس غیر سنتی ، یک برنامهٔ غیر سنتی و یک معلم و یک دانش‌آموز غیر سنتی دارند .

■

زیرنویس

1. Flewelling , G. & Higginson, W. (2000). Realizing a Vision of Tommorrow's Mathematics Classroom: A Handbook on Rich Learning Tasks. Ontario, Canada.

عوامل مهم در آموزش مؤثر ریاضیات

مقالهٔ ارایه شده درسی و سومین کنفرانس ریاضی کشور ـ ۸ تا ۱۱ شهریور ۱۳۸۱
« مشهد مقدّس ـ دانشگاه فردوسی »

اسماعیل بابلیان
عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم تهران

جامعهٔ مدرن امروز از شهروندان خود دانش ریاضی بسیار بیش‌تری را، نسبت به گذشته، طلب می‌کند و از این‌رو، چالش اساسی برای آموزشگران ریاضی چگونگی تدارک آموزش ریاضی مناسب و کافی برای بیش‌ترین شمار شهروندان است [۱].

برای تجزیه و تحلیل بیش‌تر موضوع آموزش ریاضی در ایران، لازم است به عوامل اجتماعی و شیوهٔ تربیت شهروندان توجه خاص شود. برخورد والدین در نسل‌های قبلی، چه در خانواده‌های مرفه و چه در خانواده‌های غیرمرفه، به نوعی با سختگیری‌های مادّی با فرزندان نیز، همراه بوده است و این به نوبهٔ خود باعث می‌شده که فرزندان نسل‌های قبل، مثلاً من و شما، بیش‌تر به خود متکی بوده و کمتر روی کمک والدین، حساب می‌کرده‌اند. تربیت فعلی ما بر این اساس است که سعی داریم کمبودهایی که (به ظاهر) خودمان در دوران کودکی داشته‌ایم، فرزندان ما نداشته باشند. مدرسهٔ خوب، لباس و کفش مناسب، غذای دلخواه، گردش و تفریح، پول تو جیبی، انتخاب مایحتاج و غیره، حتی در خانواده‌های کم‌درآمد هم (با مشقت) برای فرزندان فراهم می‌شود. لذا به نوعی، آزادی کامل به فرزندان خود می‌دهیم و آن‌ها به این آزادی، عادت می‌کنند. ولی آیا این آزادی در آموزش ما هم وجود دارد؟

همان‌طور که می‌دانید، در بهترین شرایط برای آموزش یک درس، مراحل زیر طی می‌شود:

یک شورا، ریز مواد موضوع درسی را تهیه می‌کند:

- مؤلف در چارچوب رهنمودهای شورای فوق و محدودیت‌های دیگر، تألیف می‌کند.
- احیاناً معلم در چارچوب کتابِ تألیف شده، آموزش می‌بیند.
- دانش‌آموز در چارچوب کتاب (یا جزوهٔ معلم یا نظام ارزشیابی)، آموزش می‌بیند!

آیا در هیچ‌یک از مراحل بالا، خبری از آزادی عمل و

توجه به مشکلات انسان‌های درگیر در فرآیند **یاددهی ـ یادگیری** وجود دارد؟

یکی از مسایل مهم در آموزش ریاضی، دموکراتیزه کردن آموزش ریاضی و غلبه بر موانع دموکراتیزه کردن آن است[۱].

متأسفانه در نظام آموزشی ما، اساس فکری این است که با صدور یک یا چند بخش‌نامه، اصلاحات لازم صورت گیرد!؟ نمونه‌هایی از این بخش‌نامه‌ها را قبلاً ملاحظه کرده‌اید.

- امتحان نگرفتن در دورهٔ ابتدایی
- اختصاص ۱۰ نمره به تحقیق در دورهٔ راهنمایی
- تدریس به روش دانش‌آموز محوری
- تهیهٔ الگوهای روش تدریس برتر
- انتخاب معلم پژوهنده

و این فهرست، ادامه دارد.

البته بخش نامه‌های فوق، خوشبختانه، حاکی از آن است که برخی از مسئولان، از روند جهانی آموزش تا حدودی مطلع هستند و برحسب مورد، عکس‌العمل نشان می‌دهند. امّا آیا با صِرفِ صدور یک بخش نامه، نظام به اصلاح مورد نظر دست یابی پیدا می‌کند؟

برای این‌که آموزش ما مؤثر باشد، باید به سه عاملِ مهم، توجه کامل داشته باشیم:

Heart ....قلب
Head ....سر
Hands ....دست‌ها

این عوامل را با ذکر مقدمه‌ای، به تفصیل شرح می‌دهیم.

در «پنجمین کنفرانس بین‌المللی یونسکو و مرکز نوآوری‌های آموزشی برای توسعهٔ آسیا و اقیانوسیه» [۲] که در سال ۱۳۷۸ در شهر بانکوک تایلند برگزار شد، مطالب مهمی از طرف شرکت‌کنندگان در کنفرانس، که اغلب مسئولان و متفکرانِ آموزش و پرورش بودند، مطرح شد که چکیده‌ای از آن بیان، و تجزیه و تحلیل می‌شود. بارزترین ویژگی کنفرانس از نظر محتوا، اعلام ناکارآمدی نظام‌های آموزشی و برنامه‌های درسی فعلی توسط تمام کشورهای شرکت‌کننده، به عنوان یک درد مشترک بود. سخنران‌ها، عدم توانایی پاسخ گویی مدارس به نیازهای واقعی دانش‌آموزان و نادیده گرفتن نقش تکنولوژی در مدارس فعلی را از جمله دلایل عمدهٔ ناکارآمدی آموزشی اعلام کردند.

چیترا چیندا از تایلند، در سخنرانی خود، به نظرخواهی انجام شده از دانش‌آموزان تایلندی اشاره کرد و اظهار داشت که **نتایج نظرخواهی حاکی از ناخشنودی دانش‌آموزان از محتوای درسی، روش‌های تدریس و نظام ارزشیابی است.**

او می‌گوید: **زندگی آب است و ما مانند ماهی هستیم. آموزش و پرورش، ما را از آب بیرون می‌آورد تا به ما، چگونه زیستن در آب را بیاموزد. سپس ما را به آب برمی گرداند!**

اینک، به شرح سه عامل مهم در آموزش مؤثر ریاضیات می‌پردازم.

الف) قلب

منظور، میل قلبی و انگیزهٔ قوی برای یادگیری است. تا زمانی که یادگیرنده آمادگی برای پذیرش محتوای آموزشی نداشته باشد، امکان ندارد بتوان به او چیزی آموزش داد. لذا، ایجاد انگیزه و آماده سازی یادگیرنده، از چالش‌های مهم در آموزش است. در آموزش ریاضیات که اکثر مفاهیم انتزاعی و غیرملموس است، کار مشکل‌تر است و نیاز به تمهیدات بیش‌تر دارد و آموزشگر ریاضی، باید به ابزارهای پیشرفته‌تری برای آموزش مؤثر مجهز باشد.

هنرِ معلم است که یادگیرنده را از عوامل زاید و حاشیه‌ای منفک می‌کند و نظر او را به مطلب و موضوع درس معطوف می‌نماید. البته این کار، با تنظیم ماهرانهٔ محتوا و هدایت مدبّرانهٔ یادگیرنده و از همه مهم‌تر، شرکت مؤثر او در آموزش میسر است.

اصولاً طرح سؤال زیر و توجه به پاسخ مناسب به آن، می‌تواند انگیزه‌بخش باشد:

چرا به مدرسه می‌آیید و برای چه درس می‌خوانید؟

این سؤال برای چندین دانش‌آموز طرح شد. به جواب‌های بعضی از دانش‌آموزان، توجه کنید:

- برای این که پدرمان خواسته!

■ برای این‌که سرگرم باشیم!
■ برای این‌که به دانشگاه برویم!
■ برای این‌که شغل خوبی پیدا کنیم.
■ برای این‌که در جامعه از احترام برخوردار باشیم.
■ برای این‌که اطلاعاتمان بالا برود.

امّا هدف اصلی آموزش مدرسه‌ای، **تکامل شناخت علمی نسبت به خود و محیط اطرافمان است** که به طور طبیعی، در برگیرندهٔ اهداف جزیی بازگو شده از طرف دانش‌آموزان نیز، هست.

به خاطر آوریم که شاعر نامدار ایران، فردوسی می‌گوید:

توانا بود هر که دانا بود

لذا، از دانش‌آموزان می‌خواهیم که «**در جهت تکامل اطلاعات خود در مورد موضوعات مورد علاقه‌شان، کوشا باشند.**»

آموزش سنتی «گچ و صحبت» یا «جزوه‌گویی»، طرح مسایل دور از ذهن، جداسازی ریاضیات از زندگی روزمره، و عدم ارزشیابی صحیح این درس، از مواردی است که انگیزهٔ افراد را برای یادگیری ریاضی کاهش می‌دهد. ترساندن دانش‌آموز از ریاضی، ساکت کردن او با جزوه‌گویی، و جلوگیری از سؤال کردن او با طرح مسایل پیچیده، نادرست است و ریاضیات و معلم ریاضی را از نظر دانش‌آموز می‌اندازد.

ب) سر

منظور مغز، چشم، گوش و زبان است. متأسفانه در آموزش و پرورش ما بیش‌تر به **حافظه و حفظیات** توجه می‌شود و در آموزش، کمتر از بقیه مؤلفه‌های موجود در سر استفاده می‌شود. استفاده از فن‌آوری روز، یعنی فیلم، نوار ویدئو، نوارهای صوتی و نرم‌افزارهای کامپیوتری، کمتر در آموزش ما رایج هستند. شیوهٔ سنتی «گچ و صحبت»، عدم توجه به علاقهٔ دانش‌آموز، عدم ارتباط دانش ارایه شده با نیازهای جامعه و یادگیرنده، از نارسایی‌های آموزش سنتی است.

«جامعه ما از نظر زیربنایی، نسبت به گذشته، تغییرات زیادی کرده است. اگرچه با دنیای پیشرفته فاصلهٔ زیادی داریم، ولی مجاز به رعایت این فاصله تا همیشه نیستیم. به خاطر سرعت ارتباطات و تحولاتی که بر اثر پیشرفت تکنولوژی در دنیا ایجاد شده است، این فاصله به لحاظ ذهنی رفته رفته پر شده است ولی به لحاظ اجرایی و برنامه‌ریزی، شکاف عمیق‌تری ایجاد شده است. آموزش و پرورش میزبان انسان‌هایی است که به لحاظ ذهنی متحول شده‌اند و توقع عضویت در عصر اطلاعات را دارند، امّا به لحاظ برنامه‌ریزی و اجرایی، هنوز در قرن بیستم به سر می‌برند و این دوگانگی از موانع اصلی هر گونه اطلاحات در آموزش و پرورش است.»[۳]

توصیه این است که به گونه‌ای حساب شده از تکنولوژی روز استفاده کنیم. ماشین حساب، کامپیوتر، نرم‌افزارهای آموزشی، فیلم‌های آموزشی، گردش‌های علمی، برپا نمودن همایش‌های علمی و تشویق دانش‌آموزان به استفاده از فن‌آوری جدید در یادگیری، می‌تواند روند آموزش را متحول سازد. بله، باید سرمایه‌گذاری کرد، باید با سوءاستفاده از تکنولوژی مقابله کرد، باید در جهت تهیه نرم‌افزارهای استاندارد آموزشی تلاش کرد و بالاخره، رادیو و تلویزیون را به خدمت گرفت تا آموزش ما پویا، جذاب و مؤثر باشد.

ویکتور اردُنر (۱۹۹۹)، دبیر دفتر منطقه‌ای یونسکو در بانکوک می‌گوید: «در عصری که توسط سیطرهٔ تکنولوژی مورد تهدید قرار گرفته، نیاز به تعقل داریم. تکنولوژی یک وسیله و محرک است، نه محتوا. وظیفهٔ آموزش و پرورش چیرگی بر این ابزار است نه این که تحت سلطهٔ آن قرار گیرد.»[۳]

ج) دست‌ها

استفاده از دست‌ها، منظور استفاده از روش‌های فعال در آموزش است. یعنی، شرکت دادن دانش‌آموز و دخالت او در فرآیند یاددهی ـ یادگیری. شواهد فراوانی وجود دارد که کلیه اطلاعات مورد نیاز بشر در او نهفته است و کار معلم، شکوفاسازی و ظاهر کردن این اطلاعات توسط یادگیرنده و روش‌های مناسب است.

دلور و همکاران (۱۹۹۶)، چهار ستون برای آموزش قایل شده‌اند. یادگیری برای دانستن، یادگیری برای انجام دادن، یادگیری برای هم‌زیستی و یادگیری برای بودن یا

زیستن.

آمار نشان می‌دهد که روزانه حدود ۱۰۰۰ صفحه مطلب جدید ریاضی، تولید و عرضه می‌شود. آیا می‌توان این مطالب را فوراً در کتاب‌های درسی گنجاند؟ آیا می‌توان تمام این مطالب را به طور روزانه یاد گرفت؟ چه باید کرد؟

«معلم نباید تنها منبع دانش باشد. هدف آموزش باید بارور کردن مهارت‌های جستجوگرانهٔ دانش در دانش‌آموزان، از طریق خودآموزی باشد تا آن‌ها بتوانند در طول زندگی و به طور مستمر، در هر زمان و در هر مکان یاد بگیرند.»

نقش معلم در این نوع آموزش، **هدایت حساب شدهٔ یادگیرنده** و تهیهٔ محتوایی برنامه‌ریزی شده برای رسیدن به هدف اصلی است.

در آموزش به روش فعال، فواید زیر عاید می‌شود:

- **افزایش انگیزه برای یادگیری**، چرا که یادگیرنده مورد احترام قرار گرفته، به حساب آمده و نظر می‌دهد؛
- **آموزش برای انجام کار گروهی**، عادت به مشورت کردن و اظهار عقیده در جمع، بحث و تبادل‌نظر، احترام گذاشتن به نظر دیگران و نظایر آن؛
- **یادگیری از یکدیگر**، زیرا معلم تنها منبع یادگیری نیست، راحت‌تر پرسش و پاسخ انجام می‌شود، کمتر به عواقب سؤال نامربوط فکر می‌شود، و چراها راحت‌تر بیان می‌شوند؛
- **تمرین و تقویت کار با دست، صحبت کردن در جمع، توجه به نظریات دیگران، یعنی تمرین رهبری صحیح یک گروه؛**
- **بررسی یک مسأله از جنبه‌های مختلف و آموزش خوب نگاه کردن به جزییات؛**
- **یادگیری عمیق‌تر و پایاتر؛**
- **ارزشیابی چند جانبهٔ یادگیرنده؛**
- **پیدا کردن آمادگی برای مقابله با مسایل و اندیشیدن برای حل آن مسایل و رفع مشکلات.**

مشکلات پیاده سازی روش فعال

- به هم خوردن نظم فعلی کلاس‌ها (اجتناب ناپذیر بودن وجود سر و صدا در کلاسی که به روش فعال اداره می‌شود)؛
- در ابتدا، کند بودن روند یادگیری (گرچه مؤثرتر است)؛
- شیطنت‌های دانش‌آموزان؛
- تمسخر اظهارنظر کننده و ایجاد تنش در گروه؛
- تقسیم‌بندی دانش‌آموزان به طور مؤثر به گونه‌ای که یادگیری سریع صورت گیرد و همهٔ اعضای گروه راضی باشند.

زیر بنای یک حرکت اصلاحی در آموزش و پرورش، تغییر در جهان‌بینی و فلسفه آموزشی حاکم و نوع نگاه به انسان است [۱].

ایجاد محیط مناسب آموزشی، کارآفرینی، بهرهٔ مناسب از تکنولوژی، بهره‌گیری از معلمان با تجربه و با دانش حرفه‌ای مناسب، ارزش قایل شدن برای یادگیرنده و شرکت فعال او در فرآیند یاددهی ـ یادگیری، ایجاد جو تحقیق و انجام پروژه‌های تحقیقاتی مناسب و تعامل دوستانه با فراگیرنده، می‌تواند سبب پویایی مراکز آموزشی، شادابی دانش‌آموزان و رضایت خاطر معلمان باشد.

■

منابع

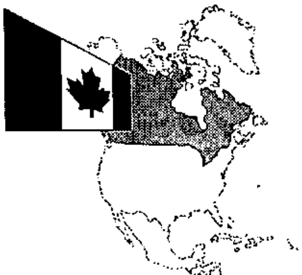
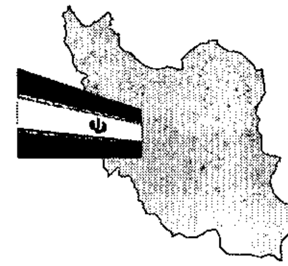
[۱] بیشاپ، آلن (۲۰۰۰). غلبه بر موانع دموکراتیزه کردن آموزش ریاضی، ترجمهٔ سهیلا غلام‌آزاد، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شماره ۶۶، دفتر انتشارات کمک آموزشی.

[۲] گویا، زهرا (۱۳۷۹). گزارش کنفرانس اصلاحات یادگیری، برنامهٔ درسی و پداگوژی: دیدگاه‌های نوآورانه برای قرن جدید، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۵۷، دفتر انتشارات کمک آموزشی.

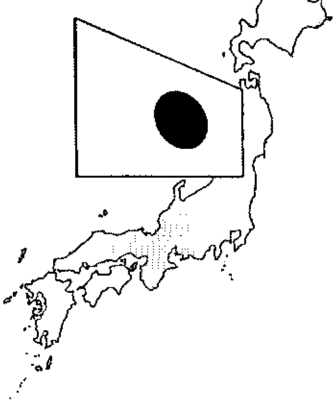
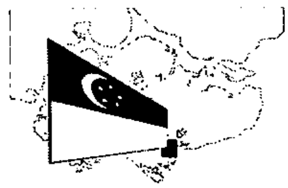
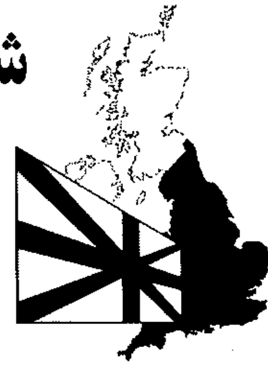
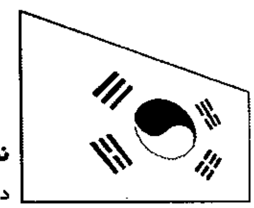
[۳] گویا، زهرا (۱۳۸۰). یادداشت سردبیر، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۶۶، دفتر انتشارات کمک آموزشی.

زیرنویس

1. ACEID: Asia-Pacific Center of Educational Innovation for Development.

آشنایی با
نظام‌های آموزش و پرورش شش کشور دنیا

نویسنده: ابوالفضل رفیع‌پور

دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

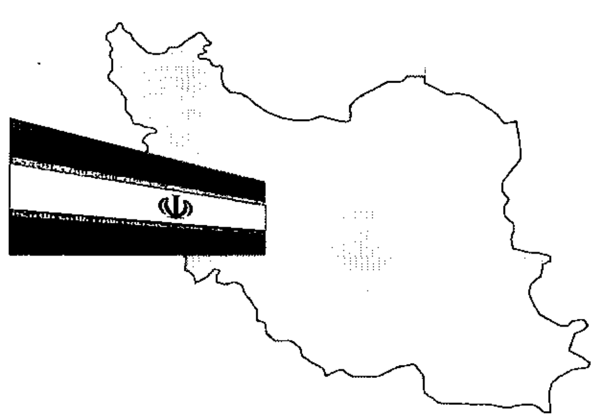
منبع اصلی این نوشته، کتاب «قالب‌های ملّی برای آموزش ریاضی و علوم: دایرةالمعارف نظام‌های آموزشی کشورهای شرکت‌کننده در تیمز» از سری انتشارات تیمز است که توسط دیوید روبیتایل، مسئول سابق کمیتهٔ بین‌المللی تیمز، و استاد آموزش ریاضی دانشگاه بریتیش کلمبیا در کانادا، تدوین شده است. این کتاب در سال ۱۹۹۷، توسط انتشارات آموزشی پاسیفیک، دانشکدهٔ علوم تربیتی دانشگاه بریتیش کلمبیا، چاپ شده است. نویسندهٔ مقاله، این مطلب را به‌عنوان بخشی از تکلیف درس «نظریه‌های آموزش ریاضی» که توسط دکتر زهرا گویا، در نیم‌سال دوم تحصیلی ۸۱-۱۳۸۰ در دانشگاه شهید بهشتی تدریس شد، تهیّه کرده است.

مقدمه

نتایج حاصل از سومین مطالعهٔ بین‌المللی ریاضیات و علوم[1] (TIMSS) و تکرار آن (TIMSS-R)[2] که توسط انجمن بین‌المللی ارزش‌یابی پیشرفت تحصیلی[3] (IEA) برگزار شد، نشان داد که عملکرد دانش‌آموزان ایرانی نسبت به عملکرد دانش‌آموزان سایر کشورهای جهان، بسیار ضعیف است و با متوسط جهانی، فاصلهٔ زیادی دارد (کیامنش؛ خیریه، ۱۳۷۹). این مطالعه، مهم‌ترین و بزرگ‌ترین مطالعهٔ این انجمن در دههٔ ۹۰ بود و نزدیک به ۴۱ کشور عضو انجمن، در این مطالعه (TIMSS) شرکت داشتند (عصاره، ۱۳۸۰). طبیعی است که همهٔ کسانی که به نحوی با آموزش ریاضی در ارتباط هستند، در پی کسب این نتایج ضعیف، به جستجوی علل این نتیجهٔ غیرمنتظره پرداختند. شاهد این ادعا، برگزاری همایش علمی-پژوهشی آموزش ریاضی و علوم با تأکید بر یافته‌های تیمز (TIMSS) در روزهای ۱۰ و ۱۱ آذر ۱۳۷۸ در دانشگاه تربیت مدرس است و نوشتن چند پایان‌نامه در رابطه با تیمز (سلسبیلی، ۱۳۷۸). اگرچه تعداد پایان‌نامه‌هایی که در این زمینه نوشته شده‌اند بسیار کم هستند، ولی این مورد از اهمیت موضوع کم نمی‌کند و شاید یکی از دلایل نبودن پژوهش‌های بیش‌تر در این زمینه، عدم وجود رشتهٔ آموزش ریاضی تا قبل از سال ۱۳۸۰ باشد. به هر حال، باید در جستجوی روش‌هایی برای ارتقای سطح سواد عمومی ریاضی در کشور بود. البته این روش‌ها باید براساس کارهای پژوهشی اصیل باشند تا نتیجه‌های مناسب را برای آموزش عمومی کشور به همراه داشته باشند. به گفتهٔ گویا (۱۳۷۶) در تحولات آموزشی، حداقل ده سال تلاش مستمر و همگانی لازم است تا نتایج مطلوب حاصل شوند. بنابراین، برای ایجاد تغییرات مناسب و مفید در آموزش و پرورش، باید وقت لازم را برای آن صرف کرد. بسیاری از معلمان و بعضی از معلمان ریاضی، علت این نتایج ضعیف را ناشی از کمبودهای نظام آموزشی، شلوغ بودن کلاس‌ها، متمرکز

بودن نظام آموزشی و غیره می‌دانند، در حالی که عوامل زیادی را نادیده می‌گیرند. در این مقاله، سعی شده است تا ساختار آموزش و پرورش چند کشور دنیا که خصوصیات ویژه‌ای دارند، مورد بحث و بررسی قرار گیرد تا این شبهه که علت این ضعف در عملکرد، تنها به کمبودهای کلاس درس برنمی‌گردد، بلکه به عواملی مانند نحوهٔ ارزش‌یابی، نحوهٔ تدریس و غیره نیز بستگی دارد، رفع شود. در دنبالهٔ این مقاله، شش کشور مختلف از قاره‌های متفاوت جهان و با نظام‌های آموزشی متنوع از قبیل متمرکز و نیمه‌متمرکز، انتخاب شده‌اند، تا شاید بتوانیم ضمن آشنایی با آن‌ها و چگونگی برنامه‌ریزی درسی‌شان، از روش‌هایی که موجب موفقیت یا شکست آن‌ها شده است، تجربه کسب کنیم. برای این منظور، کشورهای سنگاپور، کرهٔ جنوبی و ژاپن، که هم در مطالعهٔ تیمز و هم در مطالعهٔ تکرار تیمز، عملکرد بسیار خوبی نسبت به سایر کشورهای جهان داشتند، و نیز کشورهای انگلستان و کانادا که از جملهٔ کشورهای صنعتی هستند که نتایج خوبی در این مطالعه نداشتند، انتخاب شده‌اند.

لازم به ذکر است که کشور کرهٔ جنوبی، برنامه‌های پنج سالهٔ توسعه را هم‌زمان با ایران شروع کرده و کلاس‌های درسی کشور کرهٔ جنوبی، هم‌چون کلاس‌های درسی ایران، از نظر تعداد دانش‌آموز، شلوغ است و حتی در بعضی موارد، شلوغ‌تر هم هست (روبیتایل، ۱۹۹۷).



ایران

به گفتهٔ کیامنش (به نقل از روبیتایل، ۱۹۹۷)، در سال‌های ۹۳، ۹۴ و ۹۵، پنج درصد درآمد ناخالص ملی در ایران، صرف آموزش و پرورش شد، که مقدار هزینهٔ صرف‌شده برای آموزش و پرورش به‌ترتیب ۱/۵، ۱/۹ و ۲ میلیارد دلار بود. خط مشی‌های تربیت و تدریس را وزارت آموزش و پرورش تهیه و اجرا می‌کند و این خط مشی‌ها، برای کل آموزش و پرورش قبل از دانشگاهی اجرا می‌شود. برای تهیه و تدارک کتاب‌های درسی، در جلسات ویژه‌ای اهداف هر سطح آموزش تعیین می‌شوند. در سال ۹۵ـ۱۹۹۴، آموزش و پرورش بیش از ۱۷۱ میلیون شماره از کتاب‌های درسی مدرسه‌ای را با بیش از ۱۰۰۰ عنوان چاپ کرده است، ساختار آموزش و پرورش ایران ۱ـ۳ـ۳ـ۵ است و آموزش اجباری، شامل ۸ پایهٔ اول است. در دبیرستان، دانش‌آموزان به سه گروه اصلی نظری، فنی‌ـحرفه‌ای و کار و دانش تقسیم می‌شوند. گذراندن یک سال پیش‌دانشگاهی برای ورود به دانشگاه الزامی است. سازمان‌های دولتی قادر به تأسیس مدارس خصوصی هستند، ولی باید همان برنامهٔ درسی ملی که در مدارس عمومی اجرا می‌شود را، اجرا نمایند. برای سال ۱۹۹۵، درصد خیلی کمی از مدارس خصوصی بودند. تقویم مدرسه در ایران برای هر سه سطح ابتدایی، راهنمایی و دبیرستان، شامل ۲۰۰ روز است و دانش‌آموزان، ۶ روز در هفته از شنبه تا پنج‌شنبه به مدرسه می‌روند. تعطیلات شامل یک تعطیلات تابستانی سه‌ماهه و تعطیلات ۱۳ روزه برای سال نو است و در مجموع، چندین تعطیلات ملی در طول سال وجود دارد. در پایهٔ ابتدایی، دانش‌آموزان ۲۴ تا ۲۸ ساعت در هفته در کلاس درس شرکت می‌کنند که ۱۸ تا ۲۱ درصد از این زمان صرف ریاضی می‌شود. در دورهٔ راهنمایی، دانش‌آموزان ۳۰ تا ۳۳ ساعت در هفته در کلاس درس شرکت می‌کنند که ۱۲ تا ۱۷ درصد از این زمان صرف ریاضی می‌شود. متوسط تعداد دانش‌آموزان در کلاس‌های مدارس ابتدایی ۲۹ نفر و این تعداد برای دوره‌های راهنمایی و دبیرستان، ۳۲ نفر است.

تا پایان سال اول دبیرستان، هیچ گروه‌بندی وجود ندارد. ولی برای شروع سال دوم دبیرستان، دانش‌آموزان برحسب توانایی‌هایشان و آزمون رغبت‌سنج، به شاخه‌ها و رشته‌های مختلف تقسیم‌بندی می‌شوند.

معلمان به یکی از دو روش روبرو، گواهی‌نامهٔ تدریس را دریافت می‌کنند:

الف) در مراکز تربیت معلم یک دورهٔ دو ساله که ۲۰ درصد آن صرف آموزش پداگوژی می‌شود را می‌گذرانند. این دوره برای تربیت معلمان در سطوح ابتدایی و راهنمایی است.

ب) گرفتن لیسانس در یک رشته خاص که چهار سال طول می‌کشد و ۱۸ درصد این دوره صرف آموزش پداگوژی می‌شود.

ایران در سال ۱۹۹۱، به عضویت انجمن ارزش‌یابی پیشرفت تحصیلی درآمد و در مجموع، در مطالعهٔ تیمز و مطالعهٔ آموزش زبان دوم که توسط این انجمن برگزار شد، شرکت کرده است. در مطالعهٔ تیمز در سال ۱۹۹۵، ایران در دو جمعیت یک و دو شرکت داشته که جمعیت اول شامل پایه‌های سوم و چهارم ابتدایی؛ و جمعیت دوم شامل پایه‌های دوم و سوم راهنمایی است.

برنامه درسی ریاضی در سطح ملی طراحی می‌شود که تمام مدارس، ملزم به اجرای آن هستند. اهداف برنامه درسی به‌وسیلهٔ شورای ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی تهیه، و به‌وسیلهٔ شورای عالی آموزش و پرورش تأیید می‌شود. به‌طور مثال، اهداف برنامهٔ درسی ریاضی از پایهٔ یک تا هشت به صورت زیر است:

- توسعهٔ راه‌های تفکر نظام‌وار که دانش‌آموزان بتوانند در نتیجه‌گیری و تجرید از این راه‌ها استفاده کنند؛
- توسعهٔ توانایی انجام محاسبات ذهنی ساده شامل تخمین عددی و اندازه؛
- آشنا کردن دانش‌آموزان با جنبه‌هایی از ریاضیات که مربوط به سایر موضوعات است؛
- توسعهٔ توانایی‌های حل مسأله؛
- توسعهٔ فهم مفاهیم ریاضی در هر مسأله و توانایی توضیح دادن آن مفاهیم در هر قالب ریاضی.

در حال حاضر، راهنمای برنامهٔ درسی برای کتاب‌های درسی و تغییر برنامهٔ درسی وجود ندارد. در ویرایش جدید کتاب‌های درسی دورهٔ ابتدایی، براساس نظریه‌های یادگیری، تغییراتی ایجاد شده است. به‌طور مثال، مطالب مربوط به ضرب و تقسیم کسرها از پایهٔ چهارم و تقسیم اعشاری از پایهٔ پنجم حذف شده‌اند و در کتاب‌های جدید برای آوردن مثال‌ها و تمرین‌ها از زمینهٔ زندگی واقعی استفاده شده است. برای دوره راهنمایی، کتاب پایهٔ سوم راهنمایی که به تازگی انتشار یافته است، تغییر کرده است. به‌طور مثال، مقدمات هندسه تحلیلی و تبدیلات هندسی در این کتاب، گنجانیده شده است. در سطح دبیرستان، با تغییر نظام آموزشی، کتاب‌های درسی به‌طور کلی عوض شده و ریاضیات محاسباتی و الگوریتمی در تمام پایه‌ها گنجانیده شده و روی کاربرد تأکید شده است. کتاب‌های درسی به‌وسیلهٔ وزارت آموزش و پرورش تهیه و توزیع می‌شوند و تمام مدارس، باید از آن‌ها استفاده کنند. در مدارس ابتدایی و راهنمایی، معلم دقیقاً کتاب درسی را دنبال می‌کند تا نسبت به برنامهٔ درسی وفادار باشد. بیشتر کتاب‌های درسی شامل شکل‌های زیاد و توضیح به کمک تصویر است.

انگلستان

به گفتهٔ دیویس[۴] (روبیتایل، ۱۹۹۷)، براساس گزارش یونسکو، انگلستان رتبهٔ خوبی به لحاظ رشد اقتصادی دارا است. مخارج آموزش و پرورش در سال ۹۴-۱۹۹۳ شانزده درصد از مخارج دولت بود و ۵ درصد درآمد ناخالص ملی در سال ۱۹۹۱ صرف آموزش و پرورش شد.

در انگلستان، دولت مرکزی مسئول تأمین نیازهای آموزشی، برنامه‌ریزی و تعیین خط‌مشی ملی است. طبق قانون اصلاح آموزش و پرورش محلی سال ۱۹۸۸، بیش‌تر مدیران مدارس توسط انجمن محلی تعیین می‌شوند.

آموزش اجباری در انگلستان از ۵ سالگی تا ۱۶ سالگی است و سطوح ابتدایی (۱۱-۵ سالگی) و راهنمایی (۱۶-۱۱ سالگی) را دربرمی‌گیرد و تا پایان پایهٔ ۱۱،

درس‌های ریاضی و علوم، اجباری هستند.

در انگلستان، سال تحصیلی به سه بخش تقسیم شده است که شامل یک تعطیلات تابستانی طولانی و یک تعطیلات کوتاه دو تا سه هفته‌ای در کریسمس و عید پاک است. هفتهٔ مدرسه‌ای از دوشنبه تا جمعه و روز درسی، تقریباً ۶ ساعت است. در سال ۱۹۹۵، متوسط تعداد دانش‌آموزان در دورهٔ ابتدایی در هر کلاس ۲۷ دانش‌آموز و در دورهٔ دبیرستان، ۲۲ دانش‌آموز در هر کلاس بود. در انگلستان، هیچ خط‌مشی مشخصی برای گروه‌بندی وجود ندارد و بیش‌تر مدارس، گروه‌بندی ندارند. کلاس‌های مدارس ابتدایی شامل دانش‌آموزان با توانایی‌های متفاوت در ریاضی و علوم است ولی در دبیرستان، گروه‌بندی در درس ریاضی رایج است اما در درس علوم، کمتر اتفاق می‌افتد.

معلمان برای دریافت گواهی‌نامهٔ معلمی باید به یکی از دو روش زیر عمل کنند:

الف) دورهٔ چهار سالهٔ لیسانس علوم تربیتی را بگذرانند.

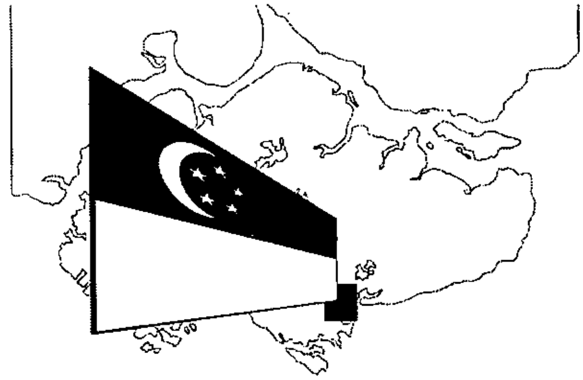
ب) پس از پایان دبیرستان، یک سال علوم تربیتی[5] بخوانند و سه سال دیگر را در یک رشتهٔ تحصیلی صرف کنند.

انگلستان و ولز از سال ۱۹۵۹، عضو انجمن ارزش‌یابی پیشرفت تحصیلی هستند. انگلستان به تنهایی یا به همراه ولز، در مطالعات قبلی این انجمن از جمله FIMSS[6]، FISS[7]، SISS[8]، SIMSS[9]، شرکت کرده‌اند. انگلستان در مطالعهٔ تیمز ۱۹۹۵، در دو جمعیت ۱ و ۲ شرکت داشته است. جمعیت ۱ شامل دانش‌آموزان پایهٔ ۴ و ۵ ابتدایی و جمعیت ۲ شامل دانش‌آموزان پایهٔ ۸ و ۹ دبیرستان است.

در سال ۱۹۸۸، برای اولین بار در انگلستان برنامهٔ درسی ملی[10] مطرح شد که در سطح آموزش اجباری، به کار گرفته شد. مدارس مستقل، ملزم به پیروی از این برنامهٔ ملی نیستند، ولی باید یکی از برنامه‌های تأیید شده را انتخاب کرده و اجرا کنند. استفاده از ابزارهای کمک‌آموزشی هم‌چون ماشین‌حساب و کامپیوتر در کلاس‌های درس ریاضی، طی ده سال گذشته افزایش یافته است. در حال حاضر، نگرش دانش‌آموزان نسبت به ریاضی منفی است و همین باعث می‌شود که مطالعهٔ ریاضی را در سطوح بالاتر دنبال نکنند. در سطوح بالاتر، نسبت دختران به پسران، برای مطالعهٔ ریاضی کم‌تر است و این نگرانی را ایجاد می‌کند که باید راهی برای ترغیب بیش‌تر دختران به خواندن ریاضی پیدا کرد.

کتاب‌های درسی به‌طور طبیعی توسط شرکت‌های تجاری تولید می‌شوند. با این حال، بسیاری از کتاب‌ها قدیمی شده‌اند، چون برنامه‌های درسی تغییر کرده‌اند، ولی کتاب‌های درسی هیچ تغییری نکرده‌اند. در حال حاضر، ناشران در حال دوباره‌نویسی کتاب‌ها هستند تا با برنامهٔ درسی جدید، متناسب باشند. در انگلستان، انتخاب زیادی برای برگزیدن کتاب درسی مدرسه‌ای وجود دارد. یکی از کتاب‌های درسی که در دورهٔ دبیرستان خیلی زیاد استفاده می‌شود، از سری پروژهٔ ریاضیات مدرسه‌ای (SMP)[11] است.

تا سال ۱۹۹۱، برای دریافت دیپلم متوسطه انجام کارهای پروژه‌ای اجباری نشده بود، ولی از آن پس، اجباری شد. برای دانش‌آموزان پایه‌های پایین‌تر، کارهای پروژه‌ای معرفی شدند و دانش‌آموزان در این پایه‌ها برخلاف گذشته، بیش‌تر به کار گروهی تشویق می‌شوند. هم‌چنین، کامپیوترها به‌طور وسیعی در مدارس در دسترس هستند و دانش‌آموزان با چگونگی استفاده از آن‌ها و کاربردهایشان، آشنا شده‌اند. در اواسط دههٔ هشتاد در انگلستان، در هر مدرسه ابتدایی و راهنمایی حداقل یک کامپیوتر شخصی وجود داشت و در حال حاضر، در مدارس ابتدایی، به‌طور متوسط ۱۰ کامپیوتر و در مدارس راهنمایی، به‌طور متوسط ۸۵ کامپیوتر وجود دارد. در انگلستان، یک بحث جدی در زمینهٔ تربیت معلمان، چگونگی به‌دست آوردن تکنولوژی جدید توسط معلمان است. در نظام آموزشی انگلستان، دو نوع ارزش‌یابی وجود دارد که یکی ارزش‌یابی‌های پیوسته است و به‌وسیلهٔ معلم اجرا می‌شود و دیگری، ارزش‌یابی خارجی است که در پایان ۷، ۱۱، ۱۴ و ۱۶ سالگی و به طور متمرکز، اجرا می‌شود. لازم به ذکر است که ارزش‌یابی خارجی فقط برای تعدادی از دانش‌آموزان به‌عنوان نمونه اجرا می‌شود و هدف آن، ارزش‌یابی نظام آموزشی است و بر ارزش‌یابی شخصی دانش‌آموزان، تأکید ندارد.



سنگاپور

با توجه به گفته‌های انگ، تونگ و توه[12] (روبیتایل، ۱۹۹۷)، می‌توان گفت که نظام آموزشی سنگاپور در مواردی، شبیه ایران است. به‌طور مثال، مردم سنگاپور به زبان‌های چینی، مالزیایی و هندی تکلم می‌کنند درحالی که زبان رسمی کشور، واحد است. هم‌چنین، جمعیت جوان دانش‌آموزان در کشور سنگاپور، مشابه ایران است، و نظام آموزشی، متمرکز است. کل مخارج دولت در حدود ۹/۲ میلیارد دلار است که ۲۲ درصد آن صرف آموزش و پرورش می‌شود. قوانین آموزش و پرورش برای کل کشور است. هدف وزارت آموزش و پرورش، تدارک آموزش کودکان در مدرسه و فراهم کردن آموزش به تناسب توانایی‌های بالقوهٔ هر دانش‌آموز است. توسعهٔ برنامهٔ درسی، انتخاب کتاب‌های درسی، آموزش و استانداردهای ارزش‌یابی، در وزارت آموزش و پرورش متمرکز شده‌اند.

هر دانش‌آموز سنگاپوری حداقل ۱۰ سال آموزش عمومی می‌بیند که شامل ۶ سال دورهٔ ابتدایی و ۴ سال متوسطه است. در پایهٔ ۱ تا ۴، روی سواد پایه و مهارت‌های عددی تأکید می‌شود و تمام دانش‌آموزان در این مرحله، یک برنامهٔ درسی مشترک را دنبال می‌کنند. در پایان پایهٔ چهارم، دانش‌آموزان براساس توانایی‌هایشان طبقه‌بندی می‌شوند. در سنگاپور، سه‌نوع طبقه‌بندی وجود دارد. تمام دانش‌آموزان در پایان پایهٔ ششم، به‌وسیلهٔ یک آزمون ملی ارزش‌یابی می‌شوند و سپس، براساس توانایی‌هایشان، در یکی از دوره‌های نظری یا فنی ثبت‌نام می‌کنند. پس از پایان دبیرستان، دانش‌آموزان حتماً باید یک دورهٔ دو ساله را برای ورود به کالج کمبریج-سنگاپور بگذرانند. تمام دانش‌آموزان از پایهٔ ۱ تا ۱۰، ریاضی را مطالعه می‌کنند.

هر سال مدرسه‌ای، شامل ۴ ترم ۱۰ هفته‌ای است. بین ترم‌های ۱ و ۲ و بین ترم‌های ۳ و ۴ مدارس یک هفته تعطیل است. یک تعطیلات ۴ هفته‌ای در پایان نیم‌سال و یک تعطیلات طولانی ۶ هفته‌ای در پایان سال وجود دارد. در سنگاپور، بیش‌تر مدارس دونوبتی هستند. روزهای مدرسه‌ای از دوشنبه تا جمعه است و فعالیت‌های فوق‌برنامه، قبل یا بعد از ساعت مدرسه یا در روز شنبه برگزار می‌شود. میزان وقتی که برای درس ریاضی در پایه‌های مختلف صرف می‌شود، متغیر است. به‌طور مثال، برای پایه‌های ۱ تا ۴، ۲۰ درصد؛ در پایه‌های ۵ و ۶، ۲۰ تا ۲۷ درصد؛ در پایه‌های ۷ و ۸، ۱۳ تا ۱۴ درصد و در پایه‌های ۹ و ۱۰، بین ۱۳ تا ۲۵ درصد از زمان برنامهٔ درسی، صرف ریاضی می‌شود.

متوسط تعداد دانش‌آموزان در کلاس‌های دورهٔ ابتدایی ۳۷ نفر، در کلاس‌های دبیرستانی ۳۵ نفر و در سطح کالج، کمتر از ۲۲ نفر است.

آموزش حرفه‌ای معلمان در سنگاپور، به‌وسیلهٔ شورای ملی آموزش و پرورش تهیه و تدوین شده است که شامل دوره‌های زیر است:

الف) دورهٔ چهار سالهٔ لیسانس برای تدریس در دورهٔ ابتدایی و راهنمایی؛

ب) گذراندن یک دورهٔ یک ساله پس از فارغ‌التحصیل شدن در یک رشتهٔ دانشگاهی که با گذراندن این دوره، دانشجویان می‌توانند معلم ابتدایی یا راهنمایی شوند؛

ج) گذراندن دیپلم آموزشی که مدت آن دو سال بوده و می‌توان با گذراندن این دوره، معلم ابتدایی شد؛

د) دوره‌های ضمن خدمت که برای تمرین عملی تدریس، از سوی شورای ملی پیشنهاد شده است.

اگرچه جمعیت دانش‌آموزی سنگاپور همانند ایران جوان است، ولی متوسط سن معلمان ابتدایی و متوسطه آن، ۴۱ سال است.

سنگاپور در سال ۱۹۸۲ به‌عضویت انجمن ارزش‌یابی پیشرفت تحصیلی درآمد. درگذشته سنگاپور در آزمون‌های دیگر این انجمن از جمله SIMSS شرکت داشته است. در سال ۱۹۹۵، سنگاپور در جمعیت ۱ و ۲ تیمز شرکت کرده است.

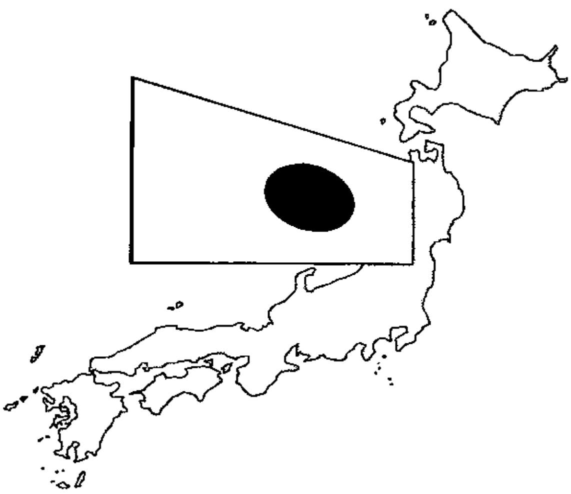
در سال ۱۹۹۰، در بخش‌های ریاضی برنامهٔ درسی ارایه‌شده، بازنگری شد. برنامهٔ درسی جدید، تأکید بیش‌تری بر مفاهیم ریاضی و توانایی به‌کار بردن آن‌ها برای حل مسأله ریاضی دارند و بر روش‌های تدریس مؤثر تأکید شده است. این روش‌ها عبارتند از:

- توسعهٔ مفاهیم ریاضی از طریق انجام فعالیت‌های معنی‌دار؛
- استفاده از تفکر ریاضی، ارتباط‌های ریاضی‌وار و حل مسألهٔ ریاضی؛
- استفاده از تکنولوژی کامپیوتر، در تدریس و یادگیری ریاضیات.

وزارت آموزش و پرورش سنگاپور، فهرستی از کتاب‌های درسی و مواد کمک‌آموزشی مناسب را تهیه و در اختیار همه قرار می‌دهد. لازم به توضیح است که کتاب‌های درسی این فهرست، به‌طور تجاری تهیه می‌شوند. این کتاب‌ها بدون انعطاف، برنامهٔ قصدشده را دنبال می‌کنند. دانش‌آموزان به‌خواندن کتاب‌های درسی تشویق می‌شوند، ولی از کتاب‌ها چیزی نمی‌آموزند و بیش‌تر، از تدریس معلم‌شان برای مرور درس و انجام تکالیف‌شان استفاده می‌کنند.

از آن‌جایی که دانش‌آموزان در یادگیری ریاضیات دوست دارند که از یک فرآیند ملموس و عینی به سوی تجرید حرکت کنند، معلمان تشویق می‌شوند که از این روند، برای آموزش آن‌ها استفاده کنند. معلمان برای به‌کار بردن شیوهٔ فعال در یادگیری دانش‌آموزان و با استفاده از مواد آموزشی، فیلم‌های متنوع و کامپیوتر ترغیب می‌شوند.

ارزش‌یابی، بخشی از فرآیند یادگیری و تدریس است و هدف آن، اندازه‌گیری میزان یادگیری مورد نظر است. ارزش‌یابی، آمادگی دانش‌آموزان را برای یادگیری موضوعات جدید، مورد بررسی قرار می‌دهد و به‌این ترتیب، برای میزان اثربخشی تدریس معلم، بازخورد مناسبی تهیه می‌کند.



ژاپن

به گفتهٔ میاکه و ناگاساکی[۱۳] (روبیتایل، ۱۹۹۷)، در سال ۱۹۹۰، هفده درصد هزینهٔ عمومی دولت ژاپن صرف آموزش و پرورش شده است که این میزان، تقریباً ۶درصد تولید ناخالص ملی است.

وزارت آموزش و پرورش ژاپن قالب‌های برنامهٔ درسی استاندارد را تهیه کرده است و مدارس، برای آموزش اجباری باید یکی از آن‌ها را انتخاب کنند. در ژاپن، آموزش و پرورش بر طبق الگوی ۳ ـ ۳ ـ ۶ است.

آموزش اجباری شامل شش سال در مدارس ابتدایی و سه سال در مدارس متوسطه است. میزان ریاضی تدریس‌شده در پایه‌های مختلف در جدول زیر آمده است.

در آموزش و پرورش ژاپن، هم مدرسهٔ خصوصی وجود دارد و هم مدرسهٔ دولتی. بیش‌تر مخارج مدارس دولتی به‌عهدهٔ دولت مرکزی است. حتی نیمی از مخارج مدارس خصوصی نیز، به‌عهدهٔ دولت مرکزی است. سال مدرسه‌ای که از اول آوریل شروع می‌شود و در ۳۱ مارس تمام

پایه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
زمان کلاس ریاضی برحسب ساعت	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۲	۲۲	۲۵	۲۵	۲۵
درصد کلاس ریاضی	٪۱۶	٪۱۹	٪۱۸	٪۱۷	٪۱۷	٪۱۷	٪۱۰	٪۱۳	٪۱۳

می‌شود، به سه بخش تقسیم شده است. بیش‌تر مدارس ابتدایی و متوسطه، به مدت ۳۵ هفته یا ۱۹۰ روز باز هستند. روزهای مدرسه‌ای در هر هفته، از دوشنبه تا جمعه است. دانش‌آموزان در هر روز، ۶ ساعت به مدرسه می‌روند و گاهی ۴ ساعت نیز در کلاس‌های روز شنبه که ۲ تا ۳ بار در هر ماه برگزار می‌شود، حضور می‌یابند.

در سال ۱۹۹۴، تعداد متوسط دانش‌آموز در کلاس‌های ابتدایی ۲۹ نفر بود و این تعداد، برای دورهٔ متوسطه ۳۴ نفر بود. در حالی که بیش‌ترین تعداد دانش‌آموزان در دبیرستان، ۴۰ دانش‌آموز در کلاس درس بود.

در ژاپن، هیچ برنامهٔ مشخصی برای گروه‌بندی دانش‌آموزان وجود ندارد و یک برنامهٔ اجباری ریاضی و علوم در کلاس‌هایی با توانایی‌های متفاوت دانش‌آموزان تا پایان پایهٔ نهم، ارایه می‌شود. با شروع پایهٔ نهم، مدارس باید درس‌های انتخابی از ریاضی را در برنامهٔ درسی قرار دهند تا دانش‌آموزان علاقه‌مند، درس‌ها را بگیرند.

کسانی که می‌خواهند در آینده معلمان ابتدایی و متوسطه شوند، باید یک لیسانس چهار ساله را به همراه چندین دوره در نظریه‌های آموزشی و پداگوژی، به‌عنوان قسمتی از لیسانس حرفه‌ای معلمی، داشته باشند. دوره‌های دوسالهٔ کالج نیز در آموزش وجود دارند که فارغ‌التحصیلان این دوره، می‌توانند در پایه‌های ۱ تا ۹ تدریس کنند.

متوسط سن معلمان ژاپن در دورهٔ ابتدایی ۴۰ سال و در دورهٔ اول متوسطه (پایه‌های ۷ تا ۹)، ۳۹ سال و برای دورهٔ دوم متوسطه (پایه‌های ۱۰ تا ۱۲)، ۴۲ سال است.

ژاپن از سال ۱۹۶۱، عضو انجمن ارزش‌یابی پیشرفت تحصیلی است و قبل از شرکت در مطالعهٔ تیمز، در مطالعه‌های تطبیقی دیگر این انجمن از قبیل FIMSS, SIMSS, FISS, SISS شرکت کرده است. ژاپن در مطالعهٔ تیمز در سال ۱۹۹۵، در دو جمعیت ۱ و ۲ شرکت کرده است.

شورای برنامه‌ریزی در وزارت آموزش و پرورش ژاپن، هدف‌های برنامهٔ درسی را هدایت می‌کند.

در دورهٔ ابتدایی، هدف‌ها، کمک به دانش‌آموزان در مطالعهٔ خردمندانه و منطقی پدیده‌های زندگی روزانه، کسب علوم و مهارت‌های اساسی در ارتباط با اعداد، کمیت‌ها و شکل‌های هندسی، ایجاد نگرش مثبت نسبت به ریاضی و دست یافتن به رضایت‌مندی در استفاده از ریاضیات در زندگی روزانه است.

در سطح دبیرستان، این اهداف شاملِ کمک به دانش‌آموزان در عمیق‌تر کردن فهمشان از مفاهیم پایه‌ای ریاضی، اصول و قواعد درباره اعداد، کمیت‌ها و شکل‌های هندسی است. دانش‌آموزان باید بیاموزند که پدیده‌های ریاضی را نمایش دهندو از شیوه‌های ریاضی‌وار دیدن و فکر کردن، قدردانی نمایند. تغییرات ایجادشده در برنامهٔ درسی به ترتیب در سال‌های ۱۹۹۲ و ۹۳ و ۹۴ برای پایه‌های ۱ تا ۶ و ۷ تا ۹ و ۱۰ تا ۱۲ اجرا شد. اساس این اصلاح، تأکید بر ریاضیات پایه، ایجاد قدردانی نسبت به ریاضیات، راه‌های ریاضی‌وار فکر کردن، و فراهم کردن وضعیتی که دانش‌آموزان بتوانند به طور فردی تربیت شوند، است. در برنامهٔ درسی جدید، استفاده از کامپیوتر از دورهٔ ابتدایی شروع می‌شود و در دورهٔ دبیرستان، در سطح وسیعی به کار گرفته می‌شود. از پایهٔ پنجم به بعد، از ماشین حساب در تدریس به طور فزاینده‌ای استفاده می‌شود.

براساس سومین مطالعهٔ بین‌المللی ریاضیات و علوم تیمز، و مطالعات دیگر، به‌نظر می‌رسد که دانش‌آموزان ژاپنی از ریاضی بیزار هستند و این طرز تلقی، در بین دانش‌آموزان رشد یافته است و باید برای آن، تدبیری اندیشیده شود. برای استفاده از ماشین حساب و کامپیوتر در برنامهٔ درسیِ قصدشده، تأکید زیادی شده ولی به‌نظر می‌رسد که به‌طور مؤثر در کلاس درس از آن‌ها استفاده نمی‌شود و باید در این زمینه، معلمان را بیش‌تر آموزش داد.

کتاب‌های درسی توسط تیم نویسندهٔ آن‌ها که شامل آموزشگران ریاضی، ریاضی‌دان‌ها و معلمان است، نوشته شده و توسط انتشاراتی‌های تجاری چاپ می‌شود. هیأت محلی آموزش و پرورش در مشورت با نماینده‌های معلمان، مشخص می‌کنند که از کدام کتاب درسی از فهرست تولیدات تأیید شده توسط وزارت آموزش و پرورش، استفاده شود. در تمام سطوح، از معلم انتظار می‌رود تا از کتاب درسی برای تدریس استفاده کند و معلمان، معمولاً از کتاب‌های درسی برای مرور، استحکام بخشیدن دانش‌ها

و مهارت‌های پایه‌ای و خلاصه کردن قواعد استفاده می‌کنند. کتاب‌ها از یک رهیافت حل مسأله که شامل پنج گام پرس و جو، تشریح، مثال‌ها، تمرین‌ها و کاربردها است، استفاده می‌کنند و بیش‌تر از موضوعات حقیقی زندگی برای معرفی مفاهیم ریاضی استفاده می‌نمایند.

راهنمای برنامهٔ درسی بر برقراری تعادل بین تدریس تکنیک‌های محاسباتی و توسعهٔ مفاهیم، تأکید دارد. ولی معلم‌ها در تدریسشان بیش‌تر بر تکنیک‌ها تأکید دارند. اگرچه ریاضیات به صورت یک علم یک پارچه است، ولی گرایش معلم‌ها در تدریس ریاضی به صورت موضوعات مجزا است و این گرایش، در ریاضیات دبیرستانی بسیار رشد کرده است. استفاده از ماشین حساب از پایهٔ پنجم به بعد توصیه شده است ولی معلمان به‌ندرت از آن استفاده می‌کنند، و نیز، استفاده از کامپیوتر برای تمام پایه‌ها توصیه شده اما هنوز هم در کلاس‌های درس، خیلی کم از آن استفاده می‌شود. رهیافت‌های استقرایی برای تدریس مفاهیم ریاضی در پایه‌های ۱ تا ۹ مورد استفاده قرار می‌گیرد. مواد آموزشی و دست‌ورزی در دورهٔ ابتدایی استفاده می‌شوند درحالی که در دورهٔ دبیرستان، به‌ندرت مورد استفاده قرار می‌گیرند. استفاده از پروژه‌های تحقیقی و باز ـ پاسخ، قویاً توصیه شده‌اند. در حال حاضر، همهٔ معلمان موافقند که پروژه‌ها مهم هستند، ولی در چگونگی استفاده از این روش مطمئن نیستند. به یادگیری مشارکتی هم توجه زیادی نشده و هنوز روش‌های معلم‌ـمحوری حاکم هستند.

در نظام آموزشی ژاپن، به‌طور رسمی، هیچ ارزش‌یابی خارجی وجود ندارد. ولی برای آزمون ورودی سه سطح وجود دارد. اولی در پایان پایهٔ ششم و برای ورود به دورهٔ اول دبیرستان و دومی در پایان پایهٔ نهم و ورود به دورهٔ دوم دبیرستان و سومی در پایان پایهٔ ۱۲، برای ورود به دانشگاه است. ارزش‌یابی محلی نیز برای دادن بازخورد به مدارس و کمک به آن‌ها در انجام وظایفشان، وجود دارد. ارزش‌یابی‌های کلاسی، به‌منظور پرورش دانش‌آموزان و توسعه تدریس انجام می‌شود. در ارزش‌یابی‌های کلاسی، استفاده از آزمون کتبی هنوز شیوهٔ غالب است.

کانادا

به گفتهٔ تیلور[14] به نقل از روبیتایل، ۱۹۹۷، کشور کانادا دارای یک حکومت مرکزی و چندین حکومت فدرالیِ استانی است که آموزش و پرورش، به‌وسیلهٔ استان‌ها اداره می‌شود. کانادا جزو هفت کشور صنعتی جهان است و هزینه‌های آموزش و پرورش کانادا، دومین هزینهٔ ملی این کشور است که در سال ۹۳ـ۱۹۹۲، این هزینه، ۲۰ درصد کل هزینه‌های ملی در کانادا بود. هزینه‌های آموزش و پرورش در سال ۱۹۹۲ بیش از ۷ درصد درآمد ناخالص ملی بود و در سال ۹۳ـ۱۹۹۲ این هزینه‌ها، به ۳۰ میلیارد دلار رسید. کانادا کشوری باتنوع بسیار زیاد جغرافیایی، سازمان‌دهی سیاسی و ساختار فرهنگی است، که همهٔ این عوامل، بر ساختار و ماهیت نظام آموزشی آن، تأثیر می‌گذارد.

ساختار آموزش و پرورش کانادا عموماً، ۶ـ۳ـ۳ است. در طول سال، ۱۸۰ تا ۲۰۰ روز درسی وجود دارد و شامل چند تعطیلی ملی و محلی است. دانش‌آموزان از دوشنبه تا جمعه در مدرسه حضور می‌یابند. دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی هفته‌ای ۳۰ ساعت به مدرسه می‌روند که ۲۳ تا ۲۴ ساعت از آن، صرف تدریس و بقیهٔ آن صرف بازی روزانه، نهار و زنگ تفریح می‌شود. در دبیرستان، دانش‌آموزان هفته‌ای ۳۰ تا ۳۵ ساعت به مدرسه می‌روند. در کانادا ممکن است کلاس‌هایی با کمتر از ۱۰ دانش‌آموز یا کلاس‌هایی با بیش از ۴۰ دانش‌آموز وجود داشته باشند، ولی میانگین تعداد دانش‌آموزان در سال ۹۴ـ۱۹۹۳ در ایالت کبِک، برای دورهٔ

ابتدایی ۲۷ نفر و برای دوره دبیرستان ۳۰ نفر بود. خواندن ریاضی تا پایهٔ ۹ یا ۱۰، اجباری است. در بعضی از استان‌ها، این وضعیت تا پایان پایهٔ ۱۱ ادامه دارد. درس‌های انتخابی در ریاضی، معمولاً در سطح دبیرستان ارایه می‌شوند. گروه‌بندی دانش‌آموزان در کانادا، یک موضوع قابل بحث است، چرا که با اهداف مدارس عمومی تناقض دارد. گروه‌بندی، موافقان و مخالفانی دارد و فلسفهٔ طرفداران گروه‌بندی، عمل‌گرایی است.

معلمان برای دریافت گواهی‌نامهٔ معلمی، به یکی از دو روش زیر اقدام می‌کنند:

الف) یک دورهٔ چهار سالهٔ دانشگاهی در یک رشته، به اضافهٔ یک دورهٔ یک‌ساله در تربیت معلم را می‌گذرانند،

ب) بعد از اخذ لیسانس، یک دورهٔ دو سالهٔ آموزش معلمان را می‌گذرانند.

بیش‌تر زمان صرف شده برای دوره‌های تربیت معلم، بر پداگوژی و برنامهٔ درسی تأکید دارد. آموزش ضمن خدمت به‌وسیلهٔ آموزش و پرورش، هیأت آموزشی مدرسه یا دانشکده‌های علوم تربیتی ارایه می‌شود. شرکت در این دوره‌ها اجباری نیست، ولی در بسیاری از مواقع و در زمان تغییرات برنامهٔ درسی و اطمینان بخشی به معلمان، ضروری است.

استان‌های کبک، اُنتاریو و بریتیش کلمبیا از سال ۱۹۸۱، عضو انجمن ارزش‌یابی پیشرفت تحصیلی شده‌اند، که در دومین مطالعهٔ ریاضی نیز شرکت کرده بودند. کانادا در مطالعهٔ تیمز، در تمام سطوح جمعیتی شرکت داشته است. در مجموع، پنج استان بریتیش کلمبیا، آلبرتا، اُنتاریو، نیوبرانزویک، و نیوفوندلند، مستقلاً در یک یا بیش‌تر از جمعیت‌های تیمز شرکت داشته‌اند.

اغلب دوره‌های برنامهٔ درسی ریاضی در کانادا، مشابه هستند و تمرکز جدید کتاب‌های درسی ریاضی، بر یادگیری فعال و فرآیند ریاضی قرار گرفته است. یکی از دلایل این تشابه این است که ناشران، برای صرفهٔ اقتصادی بیش‌تر، مواد درسی‌ای را در کتاب‌های خود می‌گنجانند که حداقل، مورد تأیید دو یا چند استان کانادا باشند.

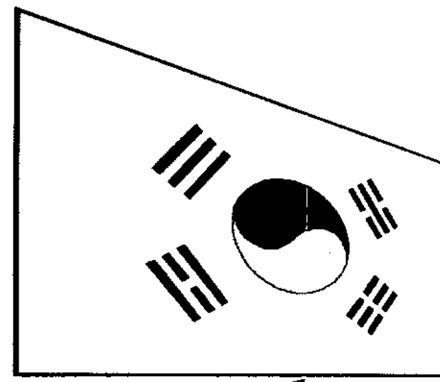
اهداف ریاضی در راهنمای برنامهٔ درسی که به‌وسیلهٔ هر ایالت منتشر شده است، موجود است. این اهداف در اکثر موارد، شبیه استانداردهای برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای است که توسط شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM)[15] تهیه شده است.

رهیافت‌های تدریس در ۱۰ سال اخیر، تغییر زیادی کرده‌اند. این رهیافت‌ها به‌سوی یادگیری فعال رفته‌اند و سعی می‌کنند تا دانش‌آموزان را در تکالیف باز-پاسخ، فعالانه شرکت دهند. استفاده از ابزارهای کمک‌آموزشی الکترونیکی از قبیل ماشین حساب و کامپیوتر در کلاس درس ریاضی، طی ۱۰ سال اخیر افزایش یافته است. در سطح مدارس ابتدایی، استفاده از ماشین حساب به‌طور محسوسی افزایش یافته است، به‌گونه‌ای که صحت بیش‌تر جواب‌های به دست آمده برای مسایل ریاضی، با استفاده از ماشین حساب بررسی می‌شوند. ماشین حساب باعث شد تا مسایل ریاضی واقعی‌تر شوند، چرا که قبلاً سعی می‌شد تا اعداد به‌گونه‌ای سرراست باشند تا محاسبات، ساده باشند. ولی اکنون با استفاده از ماشین حساب، می‌توان با اعداد غیرمعمولی و واقعی نیز، به‌راحتی کار کرد. استفاده از ماشین حساب‌های گرافیکی، انقلابی در تدریس و یادگیری نمودار و کاربردهای آن پدید آورده است. در حال حاضر، تأکید برنامهٔ درسی ریاضی بر حل مسأله و کاربردهای ریاضیات در جهان واقعی و روابط بین‌رشته‌ای مانند رابطهٔ ریاضی با سایر علوم است. در راستای این تأکیدها، کتاب‌های درسی نیز تغییر کرده‌اند. بسیاری از مدارس، از تکنولوژی جدید در برنامهٔ درسی استفاده می‌کنند تا بتوانند از برنامه‌های نرم‌افزاری و پایگاه‌های داده‌های بین‌المللی نیز، استفاده کنند.

برنامهٔ درسی بر تدریس مفاهیم، بیش از یادگیری طوطی‌وار تأکید دارد. استفاده از ماشین حساب در تمام سطوح توصیه شده است. به‌ویژه در جمعیت ۳، استفاده از کامپیوتر نیز قویاً، توصیه شده است. استفاده از روش یادگیری فعال، یادگیری مشارکتی و برنامهٔ درسی باز-پاسخ در تمامی دوره‌ها، مورد انتظار است.

معلمان برای ارزش‌یابی آموخته‌های دانش‌آموزان، از آزمون‌های کتبی، پروژه‌های کلاسی و ارزش‌یابی فردی استفاده می‌کنند. از زمانی که رهیافت‌های تدریس به سمت یادگیری فعال تغییر یافته، معلمان، استفاده از رویه‌های

ارزش‌یابی غیرسنتی مانند مشاهده را گسترش داده‌اند. هم‌چنین، آن‌ها از سایر روش‌های ارزش‌یابی که شامل ارزش‌یابی پروندهٔ کاری[16]، مشاهده دقیق و خودارزش‌یابی است، نیز استفاده می‌کنند.



کره جنوبی

به گفتهٔ کیم[17] (روبیتایل، ۱۹۹۷)، در سال ۱۹۹۴، هزینه‌های آموزش و پرورش در کرهٔ جنوبی، بیست و سه درصد از کل هزینه‌های دولت و در حدود ۴ درصد از درآمد ناخالص ملی بود.

در کرهٔ جنوبی، وزارت آموزش و پرورش مسئول تهیهٔ خط‌مشی مربوط به آموزش، چاپ و تأیید کتاب‌های درسی، سیاست‌های اجرایی و فراهم کردن پشتوانهٔ مالی برای دانشگاه‌های ملی است. هیأت مدیرهٔ هر ناحیهٔ آموزش و پرورش، تصمیمات مربوط به آن ناحیه را می‌گیرد. مسئولیت تمام مدارس ابتدایی و متوسطه، با ادارات محلی آموزش و پرورش است. از زمان انقلاب کره در سال ۱۹۴۸، مدارس کره ملزم هستند تا برنامهٔ درسی ملی را که توسط وزارت آموزش و پرورش تهیه شده است، اجرا کنند. ساختار آموزش و پرورش کره ۶ـ۳ـ۳ است که شامل ۶ سال ابتدایی و سه سال راهنمایی و سه سال دبیرستان است. بیش‌تر مدارس در کره دولتی هستند ولی تعدادی مدرسهٔ خصوصی نیز وجود دارد که معمولاً توسط یک شخص و با رعایت بعضی اصول تعیین شده توسط دولت، اداره می‌شوند. سال مدرسه‌ای در کره از اول مارس تا آخرین روز فوریه است و شامل بیش از ۲۲۰ روز است که از این میان، ۲۰۴ روز برای آموزش و ۱۶ روز برای فعالیت‌های فوق برنامه و جشنواره است. سه دورهٔ تعطیلی در طول سال تحصیلی وجود دارد. دانش‌آموزان در هر هفته، از دوشنبه تا شنبه به مدرسه می‌روند. در سطح ابتدایی، دانش‌آموزان ۲۴ تا ۳۱ ساعت در هفته و در سطح دبیرستان، ۳۴ ساعت در هر هفته به مدرسه می‌روند. در سال ۱۹۹۵، متوسط تعداد دانش‌آموزان در کلاس‌های درس دورهٔ ابتدایی ۳۷ نفر بود و این تعداد برای دورهٔ راهنمایی و دبیرستان، به ترتیب ۴۸ و ۴۹ نفر بود.

در کرهٔ جنوبی، قانون رسمی برای گروه‌بندی دانش‌آموزان وجود ندارد و کلاس‌ها دربرگیرندهٔ دانش‌آموزان با توانایی‌های متنوع هستند. مطالعهٔ ریاضی تا پایان پایهٔ ۱۱، اجباری است.

معلمان به یکی از دو روش زیر گواهی‌نامهٔ تدریس را دریافت می‌کنند:

یا دورهٔ چهارسالهٔ لیسانس را در یک کالج می‌گذرانند و یا یک دورهٔ معلمی را که توسط دانشگاه‌ها ارایه می‌شود، سپری می‌کنند.

در سال ۱۹۹۴، متوسط سن معلمان برای مدارس ابتدایی، دورهٔ اول دبیرستان و دورهٔ دوم دبیرستان، به ترتیب ۴۲ و ۳۹ و ۴۰ سال بود. کره از سال ۱۹۸۲، عضو انجمن ارزش‌یابی پیشرفت تحصیلی است و در دومین مطالعهٔ بین‌المللی علوم و مطالعهٔ محیط زیست، شرکت داشته است. کره در جمعیت ۱ و جمعیت ۲ مطالعهٔ تیمز شرکت کرده است. کره در جمعیت ۳ شرکت نکرد چرا که دانش‌آموزان پایهٔ ۱۲، کار زیادی برای ورود به کالج انجام می‌دهند و برنامهٔ سنگینی دارند.

اهداف کلی آموزش ریاضی در کره، به صورت زیر معرفی شده است:

ـ فهمیدن مفاهیم و اصول پایه‌ای و اشکال هندسی از طریق استفاده از رهیافت‌های ریاضی در مشاهده و سازمان‌دهی پدیده‌های مختلف که در زندگی روزمره اتفاق می‌افتد؛

ـ حل مسایل منطقی متفاوت به‌وسیلهٔ تمرین مهارت‌های ریاضی پایه و به‌کار بردن آن‌ها در زندگی روزمره؛

ـ افزایش توانایی‌ها و قابلیت‌های مورد نیاز ریاضی کاربردی و مهارت‌های حل مسایل مختلف.

در کره، خط‌مشی مشخصی در رابطه با استفاده از وسایل کمک‌آموزشی مانند کامپیوتر و ماشین‌حساب در

کلاس‌های درس، وجود ندارد و استفاده از آن‌ها، فقط به علاقهٔ معلم بستگی دارد ولی استفاده از این وسایل در آینده، اجتناب‌ناپذیر است.

اگرچه رویکرد برنامهٔ درسی ریاضی به‌سوی روش فعال تغییر کرده، ولی تغییر شیوهٔ تدریس خیلی کند است. با این‌که آموزشگران ریاضی استفاده از شیوه‌های متفاوت تدریس را توصیه می‌کنند، ولی معلمان استفاده از روش سخنرانی را پیشنهاد می‌کنند. چون در کره جنوبی، تعداد دانش‌آموزان در کلاس‌های درس زیاد است، خواستهٔ والدین هم این است که مدرسه، فرزندانشان را برای آزمون ورودی دانشگاه‌ها، آماده کنند.

در این کشور، در دورهٔ ابتدایی از یک کتاب درسی و یک کتاب تمرین که توسط وزارت آموزش و پرورش تهیه شده، استفاده می‌شود. کتاب تمرین بر تمرین‌های محاسباتی و کاربردی تمرکز یافته است. کتاب‌های درسی طی ده سال اخیر، تغییر بسیاری کرده است. این کتاب‌ها به‌وسیلهٔ مؤسسات تخصصی که زیر نظر وزارت آموزش و پرورش کار می‌کنند، چاپ می‌شوند. نویسندگان کتاب‌ها، معمولاً ترکیبی از معلمان، متخصصان آموزش و پرورش و متخصصان موضوعی هستند.

استفاده از سؤالات باز-پاسخ در امتحانات خارجی مثل ارزش‌یابی ملی و امتحان‌های ورودی دانشگاه‌ها، افزایش یافته است و در کلاس درس، بر این نوع سؤالات، تأکید بیش‌تری می‌شود. معلمان سعی می‌کنند بر فعالیت‌های دست‌ورزی ملموس و کار گروهی، تأکید کنند. برای آسان‌تر کردن یادگیری، تعدادی تکلیف با هدف مرور آن‌چه که آموخته شده، در پایان هر درس، به دانش‌آموزان داده می‌شود. اگرچه ماشین‌حساب به‌عنوان قسمتی از زندگی روزانه در کره جنوبی شده است، ولی دانش‌آموزان اجازهٔ استفاده از آن را در برنامهٔ ریاضی مدرسه‌ای ندارند. علوم کامپیوتری، برنامه‌های کامپیوتری و کاربردهای آن‌ها در برنامهٔ درسی ریاضی ضروری نیستند و به‌صورت موضوعات مجزا، تدریس می‌شوند. در کره، آموزش از طریق تلویزیون، بخش مهمی از آموزش کلاسی طی ده سال گذشته بوده است.

ارزش‌یابی ملی برای دانش‌آموزان کره‌ای یکی برای ورود به دبیرستان و دومی برای ورود به دانشگاه است. دانش‌آموزان برای شرکت در امتحان ورودی دبیرستان باید در ناحیهٔ آموزشی خود شرکت کنند. البته، دانش‌آموزان یک آزمون پیشرفت تحصیلی هم در سطح ملی می‌دهند که در مدارس ابتدایی، راهنمایی و دبیرستان اجرا می‌شود و هدف آن، ارزش‌یابی، کنترل فرآیند یادگیری دانش‌آموزان و کارآمدی نظام آموزشی در سطح ملی است. ارزش‌یابی‌های محلی و کلاسی نیز با روش‌های متفاوتی انجام می‌شوند.

زیرنویس‌ها

1. Third International Mathematics and Science Study
2. Third International Mathematics and Science Study-Repead
3. International Association for the Evaluation of Educational Achievement
4. Claudia J. Davis
5. Education
6. First International Mathematics and Science Study
7. First International Science Study
8. Second International Mathematics and Science Study
9. Second International Science Study
10. National Curriculum
11. School Mathematics Project (SMP)
12. Chan Siew, Eng Chang Swee Tong, and Mary Toh
13. Masao Miyake and Eizo Nagasaki
14. Alan R. Taylor
15. National Council of Teachers of Mathematics
16. Portfolio
17. Jingyu Kim

منابع

[1] Robitaile, David F. (1997). **National Contexts for Mathematics and Science Education, AN ENCYCLOPEDIA OF THE EDUCATION SYSTEMS PARTICIPATING IN TIMSS,** Published by Pacific Educational Press, Faculty of Education, University of British Columbia.

[۲] سلسبیلی، نادر، (۷۹ـ۱۳۷۸)، همایش علمی-پژوهشی آموزش ریاضی و علوم با تأکید بر یافته‌های سومین مطالعهٔ بین‌المللی ریاضیات و علوم (تیمز)، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۵۷. سال پانزدهم، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

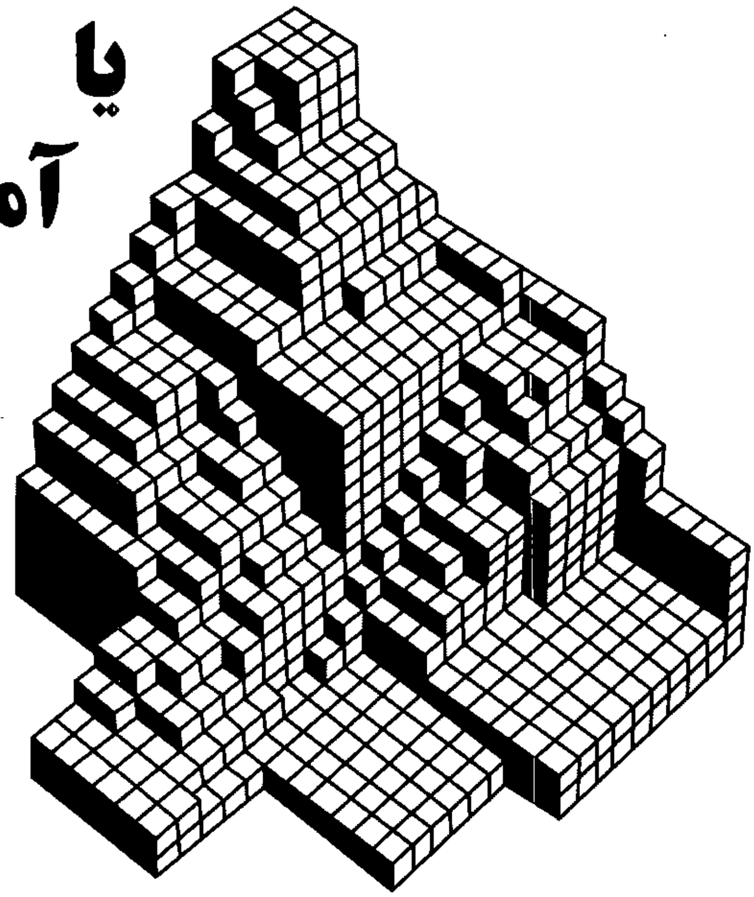
[۳] عصاره، علیرضا. (۸۰ـ۱۳۷۹). عوامل مؤثر بر پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم راهنمایی کشور در درس ریاضی (جمعیت دوم تیمز)، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۵۹ و ۶۰، سال پانزدهم، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

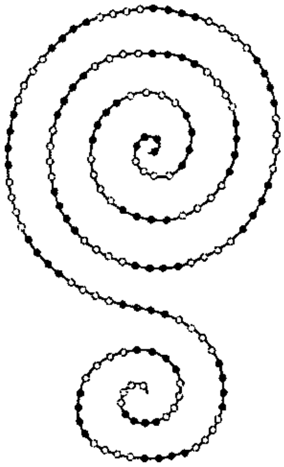
[۴] کیامنش، علیرضا؛ خیریه، مریم، (۱۳۷۹)، روند تغییر درون‌دادها و برون‌دادهای آموزش ریاضی براساس یافته‌های TIMSS و TIMSS-R، انتشارات پژوهشکدهٔ تعلیم و تربیت، وزارت آموزش و پرورش.

[۵] گویا، زهرا؛ غلام‌آزاد، سهیلا، (۸۰ـ۱۳۷۹)، گزارش بیست و چهارمین کنفرانس روان‌شناسی آموزش ریاضی، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۶۱، سال پانزدهم، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

[۶] گویا، زهرا، (۱۳۷۶)، یادداشت سردبیر، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۴۸، سال یازدهم، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

ریاضی جدید یا آموزش جدید؟





نویسنده: هانس فرودنتال

مترجمان: سحر ظهوری زنگنه، کارشناسی ریاضی کاربردی ـ دانشگاه صنعتی شریف

زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

حدود بیست سال پیش، یک سخنرانی تحت عنوان «تدریس ریاضیات نوین یا تدریس نوین ریاضیات» ایراد کردم. در همان زمان هم آبروی من به عنوان یک ریاضی‌دان، خدشه‌دار شده بود. آن زمان، اولین دفعه‌ای نبود که همکاران ریاضی‌دان من رسوا شده بودند و معلمان ریاضی که به حرف‌های آن‌ها گوش می‌دادند، به رفتارهای عجیب یک محقق ریاضی که تدریس ریاضی را به عنوان یک موضوع درسی که به صورت کُد درآمده درنظر می‌گیرد و بر مدرنیزه کردن تدریس ریاضی به گونه‌ای که این موضوع درسی را متناسب با [پیشرفت‌های اخیر آن]، به روز کند، به دیدهٔ شک می‌نگریستند.

ریاضی، اولین موضوع آموزشی بود که از همکاری بین‌المللی بهره‌مند شد (در کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی[1] که در اوایل این قرن بنیان گذاری شد). امّا تا دههٔ ۱۹۵۰ میلادی، زمینهٔ اصلی این همکاری، سازمان‌دهی و موضوع درسی بود و دیدگاه غالب بر آن، دیدگاه ریاضی‌دان‌های دانشگاهی بود.

در حوالی آغاز این قرن [قرن بیستم]، فلیکس کلاین به شکاف عظیمی بین ریاضی مدرسه‌ای و ریاضی دانشگاهی اشاره کرد، اگرچه تفسیر او از این دو نوع ریاضی، فقط به محتوای ریاضی محدود شده بود. در اواخر دههٔ ۱۹۵۰، شوک «اسپاتنیک»، بی‌اعتمادی نسبت به تدریس ریاضی و علوم را که تنها براساس حقایق[2] موضوعی بود، برانگیخت و این بی‌اعتمادی، که از ایالات متحدهٔ آمریکا شروع شد،

به سرتاسر جهان، انتقال یافت.

در اروپا، سازمان OEEC (که بعدها به سازمان OECD تغییر یافت)، [از بی‌اعتمادی به وضع موجود آموزش ریاضی در آن زمان]، این پیام را دریافت کرد که ریاضیاتی که در مدارس تدریس می‌شود، یک قرن عقب‌تر از وضعیت کنونی ریاضیات است و این پیام را به طور گسترده، به همهٔ دنیا رساند. کنفرانس‌هایی که در «رویامونت»[۳] (۱۹۵۹) و «دوبرووونیک»[۴] (۱۹۶۰) برگزار شدند، اولین پاسخ‌ها به این پیام بودند؛ یعنی تلاش برای جبران شکاف ایجاد شده در یک قرن، از طریق پیشنهاد انبوهی از موضوع‌های درسی جدید و ترجمهٔ آن‌ها به صورت کتاب‌های درسی جدید که ریاضی جدید[۵] نام گرفت ـ رقابتی خشم‌آلود بین متخصصان و شارلاتان‌ها[۶] (کلاهبردارها) که در کل، نتایج اندوه‌باری دربر داشت. کسانی که توانایی دنبال کردن آن موضوع‌ها را نداشتند، افراد ضعیف کلاس‌های درس بودند که از آن‌ها انتظار می‌رفت تا ریاضیِ جدید را یاد بگیرند و آن را تدریس کنند. ریاضیات جدیدی که در بیش‌تر اوقات، درواقع، خزعبلات جدید[۷] بود که غیرقابل تدریس، نیاموختنی، و غیرریاضی بود.

نشاط دههٔ ۱۹۶۰، به طور فاحشی در دهه ۱۹۷۰ محو شد. در آغاز این جنبش [ریاضی جدید]، فریادهای اولیه‌ای که بر علیه این جریان هشدار می‌دادند، در غوغاها گم شدند ـ غوغاهایی که ادّعا می‌کرد درواقع، مخالفت‌های ابراز شده برعلیه جنبش «ریاضی جدید» یا تلاش برای حفظ ریاضیات منسوخ شده، یا یک خیانت و پیمان‌شکنی برعلیه ریاضی جدید است. اکنون بیست سال بزرگ‌تر شده‌ایم. آیا ما، بیست سال عاقل‌تر و محزون‌تر نیز هستیم؟

خطای عمدهٔ طرفداران «ریاضی جدید»، یک دیدگاه نادرست بود. این دیدگاه، متأثر از یک سنّت قدیمی است که می‌پندارد، تدریس ریاضی در هر سطحی، به وسیلهٔ آن چه که در سطح بعدی مورد نیاز است، تعیین می‌شود ـ یک فرآیند گزینشی تدریجی، که در بالاترین سطح، به تحقیقات ریاضی والا و اصیل، منجر می‌شود. ایدهٔ تازه‌ای که توسط طرفداران «ریاضی جدید» ارایه شد، یک راه میان‌بُر بود: شروع تدریس مفاهیم بسیار پیچیده از دورهٔ پیش‌دبستانی ـ ولو این که آن مفاهیم، توسط معلمانی تدریس می‌شد که کوچک‌ترین شناختی از آن‌ها و چگونگی استفاده از آن مفاهیم در ریاضیات اصیل و واقعی، نداشتند. درنتیجه، ابزار مجرّدسازی ریاضی، از معنا و زمینهٔ ریاضیِ خود جدا شدند، به صورت موضوع درسی تفسیر شدند و به صورت غیرمعقولی، عینی شده و به کودکان در هر سنی، تدریس شدند.

درست طرف مقابل این دیدگاه که به ریاضی، به صورت یک موضوع درسیِ سطح بالا و تصنّعی نگاه می‌کرد که از آسمان به زمین افتاده است، دیدگاه دیگری وجود دارد که ریاضی را یک فعالیت طبیعی و اجتماعی می‌داند که براساس رشد و افزایش نیازهای فردی در دنیای رو به گسترش، توسعه می‌یابد. ریاضی یک طرز تلقّی و راهی برای چیرگی شناختی، عملی و احساسی بر این دنیا است. ریاضیات به دلیل تأکید بر رابطهٔ بین شکل[۸] و محتوا[۹]، با بسیاری از فعالیت‌های شناختی دیگر متفاوت است.

در تمام علوم، مقدار دانش به طور چشمگیری افزایش یافته و هنوز هم با سرعت پرشتابی، درحال افزایش است. امّا در ریاضی، علاوه بر دانش ریاضی، اهداف و راه‌ها و فعالیت‌هایی که این دانش را سازمان‌دهی می‌کنند نیز، افزایش یافته است.

از ابتدای تاریخ ریاضی تا به حال، کسانی که دغدغهٔ سازمان‌دهی دانش ریاضی توسط اهداف ریاضی را داشته‌اند، ریاضی‌دان‌هایی بوده‌اند که مشغول تولید دانش ریاضی بوده‌اند، نه کسانی که دانش تولید شده را گردآوری کرده‌اند. اختراع جبر حروفی[۱۰] و هندسهٔ مختصاتی، حتی حسابان، در ابتدا، روش‌های سازمان‌دهی دوبارهٔ دانش موجود به وسیلهٔ خلق ابزارهای سازمان‌دهی بود. به تدریج که ثابت شد آن ابزارها بسیار قدرتمند هستند، خود آن‌ها نیز باعث تولید انبوهی از دانش جدید شدند.

اهداف جدید سازمان‌دهی ریاضیات، شناسایی ساختارهای مشابه مستتر در اشیا[۱۱]، عملیات و روش‌های گوناگون ریاضیات، تمرکز بر این ساختارها، و تعریف دوبارهٔ آن‌ها به صورت مستقل، در جهت سازمان‌دهی و توسعهٔ حوزه‌های وسیع تحقیق و بررسی [در ریاضی] است.

ساختارها یک پدیدهٔ جهانی هستند. از طریق ساختن

دنیای اطراف خودمان، موفق می‌شویم که تا حدی، بر آن چیره شویم. زمانی که درحال شمارش، اندازه‌گیری، یا وزن کردن مردم هستیم، برای [بهتر] اداره کردن امور، افراد را فراموش می‌کنیم و همین کار، باعث می‌شود تا یک ساختار غنی، بی‌خاصیت شود.

ریاضیات، ساختارهایی از انواع گوناگون را می‌شناسد: فقیرترین ساختار قابل تصور، مجموعهٔ خاص است، درحالی که سیستم تمام مجموعه‌ها را می‌توان به وسیلهٔ یک ساختار غنی تولید کرد. یک ساختار غنی به طور مثال، هندسهٔ اقلیدسی است با [همهٔ] خطوطش، صفحات، دایره‌ها، مربع‌ها، کره‌ها، شکل‌های منتظم، کاشی‌کاری‌ها، بازتاب‌ها، دوران‌ها و تقارن‌هایش. ساختارهای ضعیف، در سطح وسیعی به کار برده می‌شوند، امّا به کار بردن آن‌ها، به معنای یک کار غیربدیهی[12] است، و آن: غنی‌سازی یک ساختار ضعیف به طریق مناسبی است. از طرف دیگر، ساختارهای ریاضی ممکن است آن قدر غنی باشند که بتوانند به طور سرراست نیز، به کار برده شوند، اگرچه فقط در شرایط بسیار خاصی [این کاربرد وجود داشته] باشد.

تدریس نوین ریاضی، براساس یک سلسله مراتب تحمیلی بنا شده است. این تدریس، با ضعیف‌ترین ساختارهای ریاضی یعنی مجموعه‌ها، شروع می‌شود که به تدریج، به وسیلهٔ شبکه‌ای از شاخه‌های مختلف ریاضی که دایم درحال پالوده شدن است، غنی می‌شود. برای ساختن چنین سلسله مراتبی، تصمیم‌هایی باید گرفته شود. این روش، یکی از ابزارهای سازمان‌دهی ریاضی است که این سازمان‌دهی را می‌توان به طُرُق مختلف، بسته به هدف‌های مختلف، انجام داد.

پیاژه که اولین بار، تحت تأثیر سلسله مراتب هندسهٔ کلاین[13] قرار گرفته بود، دست به کار شد تا به طور تجربی ثابت کند که این سلسله مراتب، دقیقاً همان گونه است که مفاهیم فضایی در ذهن ساخته می‌شوند. پس از آن، هنگامی که پیاژه با سلسله مراتب ریاضی بورباکی[14] مواجه شد، همان استراتژی را با توجه به سلسله مراتب توسعهٔ مفاهیم ریاضی، آزمایش کرد. نظر کلی پیاژه این بود که رشد و توسعهٔ فردی، خطوط معرفت‌شناختی را دنبال می‌کند، و آن‌چه که باید در هندسه و ریاضی درک می‌شد، توسط او و براساس سلسله مراتب کلاین و بورباکی ـ تنها [ریاضی‌دان‌هایی] که او می‌شناخت ـ تعیین شدند. درنتیجه، از نظر پیاژه، توسعهٔ شناختی باید با ضعیف‌ترین ساختارها [که مجموعه‌ها باشند]، شروع می‌شد و در راستای غنی‌سازی تدریجی، پیشرفت می‌کرد. به نظر من، این یک فرضیهٔ به شدت غیرمحتمل بود. اگرچه آزمایش‌های پیاژه برای پشتیبانی این فرضیه طراحی شده بودند، اما نتایج چنین آزمایش‌هایی، همیشه قانع‌کننده نیستند.

این یک حقیقت است که عدد، مانند زبان و به عنوان یک لغت آموخته می‌شود؛ از طریق این لغت [عدد] و نظم آن، یعنی به وسیلهٔ دستگاه اعشاری است که کودک بر یادگیری اعداد و حساب، تسلط می‌یابد. با این حال، هیچ سلسله مراتبی در ریاضی، توجهی را که من به چنین جنبهٔ انسان‌شناسانه‌ای[15] یادگیری اعداد دارم ندارد. به راستی ریاضی جهانی است، و همان‌طور که از قبل بود، آسمانی است. درنتیجه، نه پیاژه، نه مکتب او، و نه سایر روان‌شناسان، هیچ توجهی به نقشی که ساختار اعشاری اعداد در توسعه و یادگیری ایفا می‌کند، نکردند.

برای آن که مثال دیگری بزنم، باید بگویم که طبق نظر پیاژه، به طور ذهنی، مفهوم صفحه و فضا در دستگاه‌هایی که او می‌شناخت، یعنی دستگاه مختصات دکارتی، تشکیل و ساخته می‌شود. با وجود این عقیده، تمامی مشاهدات نشان می‌دهند که در توسعهٔ ذهنی، به جای ساختار دکارتی، مفهوم صفحه و فضا در ساختار مختصات قطبی ساخته می‌شوند. [این جا هم]، همان دیدگاه اشتباه، خودش را تکرار می‌کند: یعنی حرکت از ضعیف‌ترین ساختارها به سمت غنی‌ترین ساختارها. این دیدگاه، بر استنتاجی بودن ریاضی به عنوان یک محصول، به جای دیدگاه تاریخی یا تحولی رشد ریاضی تأکید دارد. این یک دیدگاه آموزشی خوب نیست. امّا این دیدگاه، توسط استدلال‌های پیاژه توجیه شده و در «ریاضی جدید»، حداقل به عنوان یک اصل، پذیرفته شده است.

شکست امروزه در بعضی از حوزه‌ها، به سختی با احساس رضایت دههٔ ۱۹۶۰، قابل توجیه است. رضایت آن دوره از این ایدهٔ نادرست ناشی شد که [فکر می‌کردند]

می‌توان تدریس ریاضی یا هر موضوع دیگر را، با دستور و فرمان، با کتاب‌های درسی خوب یا بد، یا با چاپ‌های سیاه و سفید و سه رنگ، به طور بنیادی، تغییر داد. در خیلی از کشورها، این ایده پیاده شد و به جای «ریاضی جدید»، سیاست آن بود که در دنیا شکست خورد.

متأسفانه، تولد «ریاضی جدید» با ظهور نظریه‌های برنامهٔ درسی که سعی بر قانون‌مند کردن توسعهٔ آموزشی به صورت یک فرآیند اداری[16] داشتند، قرین شد ـ دیدگاهی که هنوز قوی است و به نظر می‌رسد از هر شکست تازه‌ای، نیرو می‌گیرد. درمقابل، دیدگاه متفاوتی وجود دارد که نوآوری را به عنوان یک فرآیند یادگیری درنظر می‌گیرد که تمامی افراد مربوط به این فرآیند ازجمله معلمان و آن‌چه را که در کلاس درس اتفاق می‌افتد، دربر می‌گیرد.

امروز، فریاد رهایی از این سراب، به وسیلهٔ شعار جدید «رجعت به اصول»[17]، که به معنی برگشتن از «ریاضی جدید» به ریاضی خوب قدیمی است، شنیده می‌شود. این [بازگشت] مثل مُد لباس خانم‌ها است که مدل‌های قدیمی، به شکل جدید پرورده و عرضه می‌شوند. آیا تولیدکنندگان می‌توانند به این زودی، با مواد آموزشی [جدید] سازگار شوند؟ مطمئناً نه، تولیدکنندگان در عوض، با تبلیغات سازگار می‌شوند. یکی از سری کتاب‌های درسی که ده سال پیش در زمان اوج ریاضی جدید توصیه شد، امروزه به عنوان نمونه‌ای از ریاضیات خوب قدیمی، ستوده می‌شود. از نو، این نشانگر آن است که در کل، چقدر تغییر بنیادی، کم‌صورت گرفته است.

«رجعت به اصول»، دیدگاه اشتباه دیگری است. راه درست، بایستی «پیش به سوی اصول» باشد. امّا نه ساعت پدربزرگ، و نه حسابی که پدربزرگ می‌دانست، هیچ کدام «اصول» نیستند. مسایل حسابی قدیمی، هیچ گاه دوباره مطرح نمی‌شوند، هم‌چنان که تدریس ریاضی به سبک دوران قدیم نیز، هیچ گاه دوباره رواج نمی‌یابد.

امّا نظر شما دربارهٔ «سوادآموزی عددی»[18] زمان قدیم چیست؟ اگر این سؤال پرسیده شود، من می‌اندیشم که چرا مردم به همین اندازه، دغدغهٔ چگونگی خطاطی در دوران قدیم را ندارند؟ نسخه‌های خطّی قرون وسطی، آثار هنری بسیار زیبایی هستند. اما دوران قدیم، با پایان قرون وسطی، تمام نشد. حروف و نسخه‌های خطّی چند نسل گذشته، تردیدهای جدیدی را [نسبت به این باور] ایجاد کرد که در زمان‌های گذشته، خطاطی یک عادت عمومی یا یک ارزش بوده است.

آیا سوادآموزی عددی به عنوان یک توانایی عمومی، تنزل پیدا کرده است؟ من مطمئن نیستم. آیا الآن، درحال تنزل است؟ شاید در بعضی از کشورها [درحال تنزل] باشد. پاسخ دادن به این سؤال‌ها، وظیفهٔ متخصصان آموزشی است که ببینند تا چه اندازه سنجش و ارزیابی آموزشی، باعث چنین تنزلی بوده است. در بعضی از نقاط دنیا، نظریه‌ها و اعمال آموزشی با این ایده آمیخته‌اند که در آموزش، هر چیزی را می‌توان و باید، اندازه گرفت. حتی اگر این ایده درست بود، جواب این سؤال را نمی‌داد که «چه چیزهایی» را می‌توان و باید، اندازه گرفت. برای پاسخ به این سؤال، شما نیازمند یک فلسفهٔ تدریس هستید. اگر چیزهایی که اندازه‌گیری می‌شوند، چیزهای درستی نباشند، ممکن است نتایج به طور رسمی، درست باشند، اما چنین نتایجی، بی‌معنی و خطرناک هستند. اجازه دهید دیدگاه‌های نادرستی که به آن‌ها اشاره کردم را، [با هم] مرور کنیم. آن‌ها همه به هم مرتبط هستند: یک تسلسل نزولی از ریاضیات بالاتر به سمت ریاضیات پایین‌تر، اول ساختارهای ضعیف و به دنبال آن ساختارهای قوی، نوآوری بر اثر فشارهای خارجی نه رشد داخلی، رجعت به اصول به جای پیش به سوی اصول. باید اصول، به معنای یک فلسفهٔ بنیادی باشد که به طور عام آموزشی و به طور خاص، مربوط به یک حوزهٔ مشخص است. هیچ آموزش و توسعهٔ آموزشی، بدون فلسفه وجود ندارد، و فهرست‌هایی از آرمان‌ها و اهداف آموزشی، نمی‌توانند جایگزینی برای یک فلسفه باشند.

ریاضیات نیز مانند بیان، نقاشی و نوشتن، هم یک فعالیت طبیعی و هم یک فعالیت اجتماعی بشر است. ریاضی جزو اولین فعالیت‌های شناختی است که می‌شناسیم و تدریس ریاضی، اولین نوع تدریس بوده است.[19]

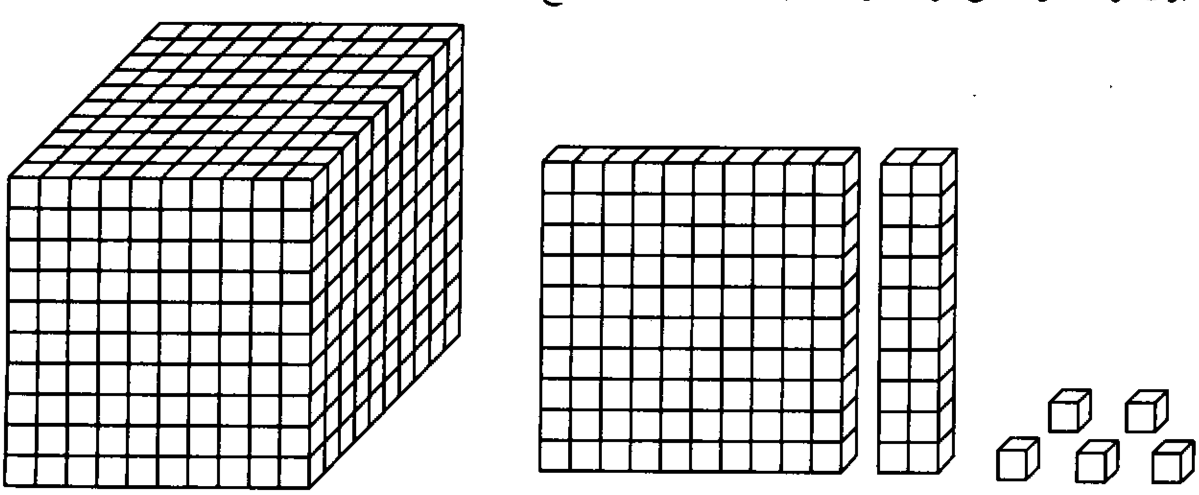
اما ریاضی نیز مانند فلسفه و تدریس ریاضی، تحت تأثیر تغییرات اجتماعی، رشد کرده و تغییر یافته است. اجازه دهید من این رشد و تغییر را با مثالی از سواد عددی، نشان دهم.

از یک هزارهٔ پیش، برای هر کسی که نقشی در زندگی اقتصادی ایفا می‌کرد، درجهٔ مشخصی از سواد عددی لازم بود. اما این حداقل، به زودی توسط کارمندان سازمان‌های خصوصی و دولتی و مؤسسات مالی، بسیار فراتر رفت، که بعدها، تبدیل به یکی از منابع ریاضیات حرفه‌ای شد. سواد عددی نیز همانند سواد خواندن و نوشتن، درجاتی دارد: ریاضیاتی که مغازه‌داران و بانک‌داران از کارکنان خود می‌خواستند، در سطح بسیار بالایی بود که تنها، توسط اقلیتی قابل حصول بود که زندگی خود را از طریق اجرای قابل اتکای عملیات حسابی، می‌گذراندند ـ یک نیروی کار ارزان، که برای حدود نیم‌قرن، موفق شدند جلوی رشد و توسعه و رواج ماشین حساب‌های مکانیکی و الکتریکی را بگیرند. محاسبات عددی توسط انسان، حتی در بالاترین سطح آن نیز، دیگر نمی‌تواند با کامپیوترهای الکترونیکی رقابت کند.

سواد عددی یعنی چه؟ جواب هرچه که می‌خواهد باشد، معنی فعلی آن، با آن‌چه که حدود نیم‌قرن پیش از آن استنباط می‌شد، فرق دارد، و معنای سواد عددی در کشورهای توسعه‌یافته با کشورهای درحال توسعه، تفاوت دارد. علاوه بر سواد عددی، این مسأله برای تمام ریاضیات، برقرار است. ریاضی به عنوان یک ایده، جهانی است، اما به عنوان یک پدیده، به محیط بستگی دارد. من اگر هم چیزی راجع به جهان سوم و نیازهای آن بدانم، بسیار ناچیز است، اما هروقت که می‌بینم در کشورهای درحال توسعه، ریاضیاتی که برای کودکان نوشته می‌شود، صرفاً از آن‌چه که در مناطق توسعه‌یافته تدریس می‌شود، نسخه‌برداری شده است، دچار شوک می‌شوم، همان شوکی که وقتی می‌بینم ریاضیاتی که برای نوجوانان تهیه می‌شود، تحت تأثیر «بورباکی» است، دچار آن می‌شوم.

این یک واقعیت است که اکثر نوجوانان ۱۲ تا ۱۳ ساله، هنوز قادر به انجام عملیات حسابی مطمئن نیستند. این یک توهم است که باور کنیم که بهبود تدریس، باعث ایجاد تغییرات اساسی می‌شود. امتحان کردن آن، هدر دادن نیروی کار است. امروزه انجام محاسباتی که می‌توان به آن اطمینان کرد، به عهدهٔ کامپیوترها است. فهمیدن حساب، بحث دیگری است. مایهٔ تأسف است که در اغلب تحقیقات آموزشی مربوط به ریاضی، بین مهارت‌های خود به خودی و فهمیدن، تمایز نسبی گذاشته نمی‌شود.

طبقه‌بندی‌های[20] انجام شده که تظاهر به شفاف کردن ایده‌های مبهم دارند، خود ابهام و اغتشاش بیش‌تری، به خصوص در توسعهٔ آزمون‌ها، ایجاد کرده‌اند. اگر این یک اصل است که تعداد اندکی از ۱۲ تا ۱۳ ساله‌ها، قادر به انجام عملیات حسابی مطمئن هستند، اما تعداد بسیار بیش‌تری هستند که قادر به فهمیدن حساب می‌باشند. مردودی در آزمون‌های مهارتی، به معنای مردودی در فهمیدن نیست. خوشبختانه، در مقابل فرهنگ آزمون، کتاب‌های درسی به طرز فزاینده‌ای برای تدریس فهم و درک حساب، اهمیت قایل شده‌اند. روش‌های جدیدی برای تدریس الگوریتم‌ها توسط درک جامع و مطمئن «سیستم موضعی»[21] ابداع شده‌اند.



شکل (۱-الف)

«سیستم موضعی» ما بر پایهٔ دو اصل ساخته شده است، یکی ساختاری که هر ده واحد را به یک واحد جدید تبدیل می‌کند، و دیگری نمادی، که از نمادهای یکسان برای تعداد واحدهای هر سطح استفاده می‌کند، و سطوح را با وضعیت آن‌ها نشان می‌دهد.

اصل اولی، به ریاضیات مصر باستان برمی‌گردد، در حالی که اصل دوم از ریاضیات بابلی نشأت گرفته است (البته به جای مبنای ۱۰، از مبنای ۶۰ استفاده می‌شد). هر دو اصل، توسط مواد [کمک آموزشی] مدرن، عینی شده‌اند (شکل ۱ ـ الف): مکعب‌ها برای نشان دادنِ پایین‌ترین واحدها [یکان] است. هر ده مکعب به صورتِ میله با هم ترکیب شده‌اند، هر ۱۰ میله به صورت یک صفحه و هر ۱۰ صفحه به صورت یک مکعب بزرگ ترکیب شده‌اند که به ترتیب نمایانگر واحدهای ۱، ۱۰، ۱۰۰ و ۱۰۰۰ ـ هستند. برای پایه‌های غیر ۱۰ نیز، سیستم به صورت «بلوک‌های چند پایه‌ای»[۲۲] موجود است. این‌ها، مواد [آموزشی] با ارزشی هستند، هر چند که فاقد انعطاف‌پذیری و کامل بودن ایدهٔ سیستم وضعی هستند. هر دو اصل با هم، در چرتکه وجود دارند که قدیمی‌ترین ابزار حسابی نوع بشر است که در قسمت‌هایی از شوروی [سابق] و آسیای شرقی، محفوظ مانده است. البته چرتکه، پس از اوج‌گیری حسابِ نوشتاری در اروپا، نادیده گرفته شده است، ولی امروزه، دوباره، به عنوان یک ابزار آموزشی بسیار مؤثر، احیا شده است. (شکل‌های ۱ ـ ب و ۱ ـ ج).

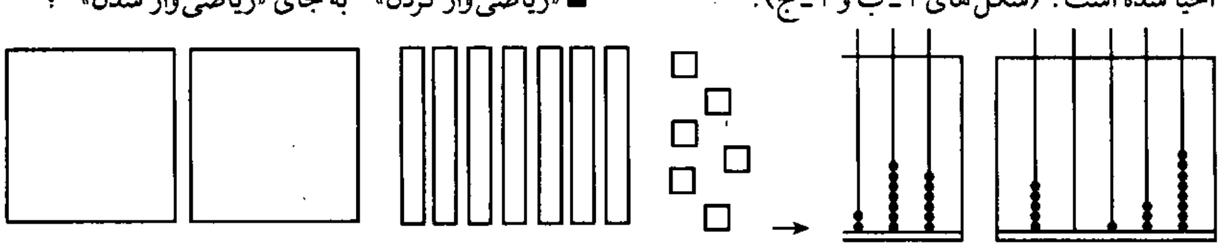
من مسألهٔ سوادآموزی عددی را برای مثال انتخاب کردم تا بتوانم اثر فلسفهٔ آموزش را بر توسعهٔ آموزشی، نشان دهم: اگرچه سوادآموزی عددی، حتی در سطح ابتدایی نیز، نیروی ریاضی را هدر نمی‌دهد. درست در مقابل این، تأکید بیش از حدّ بر سوادآموزی عددی، ممکن است عارضه‌ای از فلسفهٔ بد ـ یا به عبارت بهتر، فلسفهٔ کهنه ـ باشد، که با وجود این، هنوز اکثر کتاب‌های درسی دورهٔ ابتدایی، با وجود توجه لفظی به سایر ارزش‌ها، به این فلسفهٔ کهنه، وفادار هستند.

اما با وجود این کتاب‌های درسی، تلاش‌های جهانی برای بیان فلسفه‌ای وسیع‌تر توسط نوع جدیدی از آموزش ریاضی، متعدد و امیدوارکننده بوده است. خوانندگان مرا خواهند بخشید، اگر من گزارشم را به فلسفه‌ای که آشنایی بیش‌تری با آن دارم، یعنی به «مؤسسهٔ توسعهٔ آموزش ریاضی»[۲۳] [IOWO]، تیبردریف ۴، واقع در شهر اوترخت کشور هلند، محدود می‌کنم.

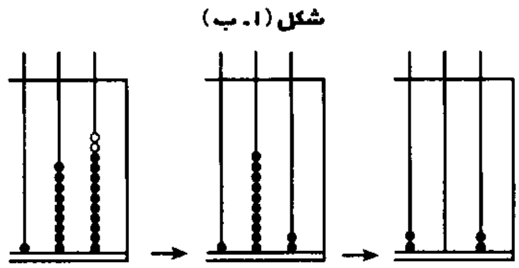
IOWO در سال ۱۹۷۱، و پس از یک دورهٔ ده ساله که به عنوان کمیسیون مدرنیزه کردن برنامهٔ درسی ریاضی فعالیت می‌کرد، تبدیل به مؤسسه شد. اجازه دهید نظرات اساسی IOWO را در چند شعار، بیان کنم. این شعارها، بر موارد زیر تأکید دارند:

■ ریاضی به عنوان یک فعالیت بشری به جای ریاضی به عنوان یک موضوع درسیِ از پیش ساخته شده؛

■ «ریاضی‌وار کردن»[۲۴] به جای «ریاضی‌وار شدن»[۲۵]؛



شکل (۱ـ ب)



شکل (۱ـ ج)

■ خلق دوبارهٔ ریاضی به جای انتقال ایده‌های ریاضی؛
■ حقیقت به عنوان یک منبع «نظری»[۲۶]، به جای حوزه‌ای برای کاربرد ریاضی؛
■ ریاضی به عنوان روابط، به جای پدیده‌های مجزا؛
■ ریاضی به عنوان زمینه‌ای غنی به جای مجموعه‌ای از مسایل کلامی؛
■ شکل گیری مفاهیم ریاضی در ذهن، به جای اکتساب مفاهیم ریاضی؛
■ رویکردهای چندگانه به مفاهیم جدید به جای تجسم چندگانه؛
■ فهم و درک مفاهیم ریاضی به جای مهارت‌آموزی.

من گفتم «تأکید» که به معنی تغییر تعادل و توازن باشد. یادگیری مؤسسه‌ای، بیش‌تر متمایل به «اشتباه» است، تلاش‌های نوآورانه، تعدیل را ترجیح می‌دهند.

یک فلسفهٔ خوب، به جای حروف، خودش را با کردار بیان می‌کند. شعارها هیچ معنایی ندارند مگر آن که به حقایقی ارجاع دهند. آموزش ریاضی شامل مواد [آموزشی] زیادی نه تنها برای دانش‌آموز، بلکه برای معلم، دانشجو ـ معلم، آموزشگرِ معلمان، مشاور، توسعه گر آموزشی؛ گزارش و تحلیل تجربیات تدریس در تمام سطوح، موفقیت‌ها و شکست‌ها، و ایده‌های امتحان شده و نشده است. با این حال، تمام این مواد هیچ ارزشی ندارند، مگر آن که فلسفهٔ آن، قابلِ اِعمال باشد.

در یک مقیاس کوچک، ثابت شده است که می‌توان [آن فلسفه را، اِعمال کرد]. در مقیاس بزرگ، اثبات آن، زمان می‌برد. آموزش نوآورانه، یک فرآیند یادگیری جامعه است، اما در مقایسه با یادگیرنده‌های فردی، گروه‌های یادگیری، و مؤسسات در حال توسعه، هم جامعه کندترین یادگیرنده در بین همه است، و هم نسبت به ریاضی و تدریس ریاضی، موضوع درسی ساده‌تری برای یادگیری وجود دارد.

مقالهٔ فعلی، برای این نوشته نشده است که ایده‌های تدریس ریاضی را به کار ببندد، اما حداقل تلاش می‌کنم تا ایدهٔ کم‌رنگی از معنایی که هدف «شعارهایم» است، بدهم.

به من اجازه بدهید تا با یک داستان کوچک از دورهٔ پیش‌دبستانی شروع کنم:

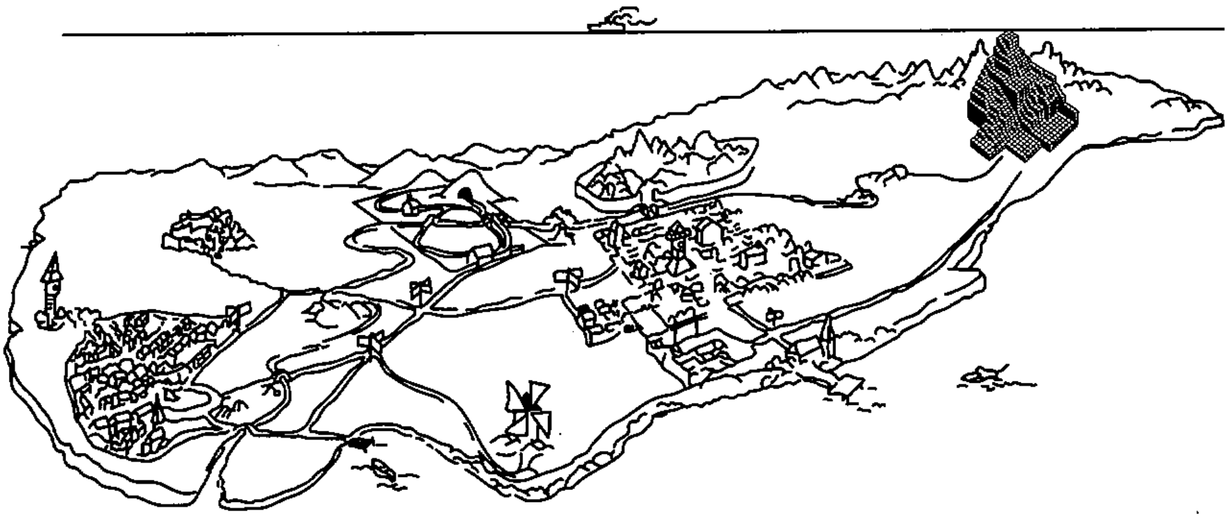
یک تُنگ ماهی در کلاس وجود دارد. هر از گاهی، این تنگ بایستی تمیز شود. کودکان از نحوهٔ تمیز کردن آن توسط معلم، در شگفتند. باید ماهی‌ها را با یک تور گود گرفت و داخل تنگ دیگری گذاشت. آنا[۲۸] می‌گوید «حالا می‌توانیم به راحتی، تعداد ماهی‌ها را بشماریم». البته، او یک بار این کار را امتحان کرده است، اما موفق نشده است. او قبلاً گفته بود، «خانم، ماهی‌ها دارند به صورت جمعی، تُند تُند، شنا می‌کنند.»

معلم، یکی‌یکی ماهی‌ها را داخل تور می‌کند. سه تا ماهی شمرده شد، اما بعد، سه تا ماهی با هم داخل تور می‌شوند. آنا می‌گوید، «خانم، حالا دوباره، من نمی‌توانم آن‌ها را بشمرم». خانم جواب می‌دهد: «شاید بتوانی ماهی‌ها را روی یک ورق نقاشی کنی، و اگر این کار را کردی، ماهی‌ها را روی کاغذ بشمار». ایدهٔ خوبی است. آنا یک ورق کاغذ و یک مداد می‌آورد [و به معلمش می‌گوید]، «باید یک لحظه صبر کنید». او اول، سه ماهیِ داخلِ تُنگ دیگر را می‌کشد، و بعد، سه ماهی جدید را می‌کشد. او به راحتی می‌تواند ماهی‌ها را بشمارد، هیچ ماهی‌ای از دستش در نرفته است. وقتی که تُنگ خالی است، او قصد دارد ماهی‌ها را بشمارد. او با افتخار اعلام می‌کند: «حالا می‌دانم چند تا ماهی آن‌جا هست: پانزده تا.»

چند روز بعد، دو ماهی می‌میرند. او می‌گوید: «حیف، الآن دیگر، آن شمارش غلط است». او نمی‌داند که الآن، چند تا ماهی زنده در تنگ وجود دارد. معلم به او پیشنهاد می‌دهد که «به نقاشی ماهی‌ها که کشیدی نگاه کن.» او دو ماهی را روی کاغذ خطّ می‌زند و حالا، جواب جدید را می‌داند.

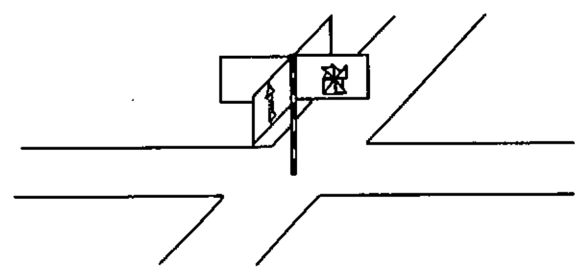
احتیاجی نیست که برای این داستان کوتاه، توضیحی بدهم. یک داستان دیگر به عنوان مثال، داستان «شهر آبی» است، یک جزیرهٔ خیالی که بسیاری از کلاس اولی‌ها، چند ماه از آموزش ریاضی خود را در آن، می‌گذرانند. آن‌ها با قایق، [به جزیره] می‌رسند (شکل ۲ـ صفحهٔ بعد).

چند تا کودک، چند تا اتوبوس، با دو یا سه نفر روی هر نیمکت؟ آن‌ها به چه جهتی رانندگی می‌کنند؟ کوتاه‌ترین مسیر چیست، و آن را چگونه توصیف می‌کنید؟ طول این جاده چقدر است؟ چگونه از آسیاب بادی به فانوس دریایی، می‌روید؟ علایم روی تابلو جاده را حدس بزنید. این تابلو



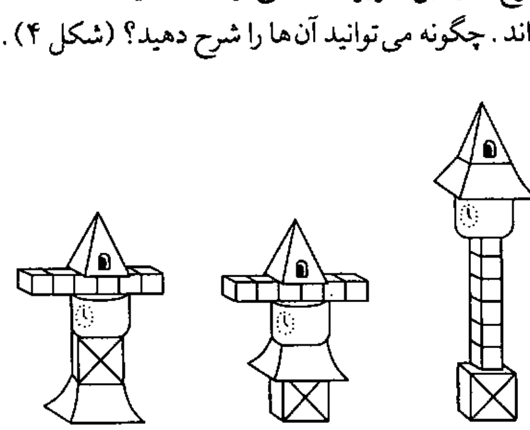
شکل - ۲

کجا می‌تواند قرار گیرد؟ (شکل ۳).



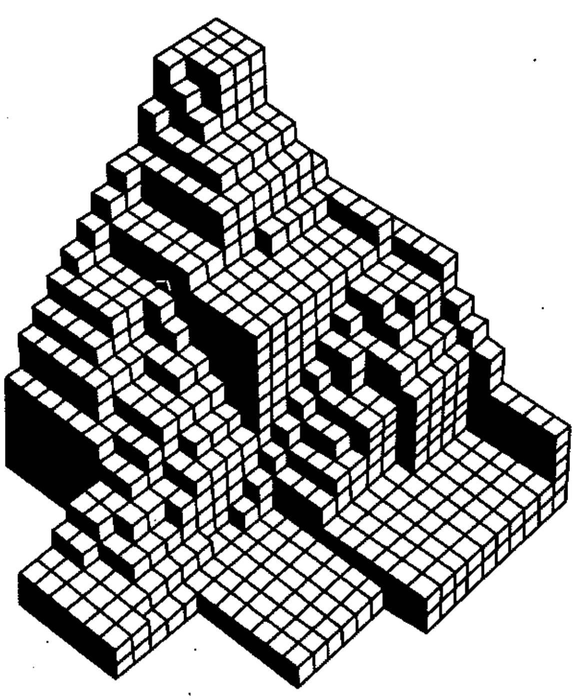
شکل - ۳

برج‌های این جزیره، همگی از قطعات یکسان ساخته شده‌اند. چگونه می‌توانید آن‌ها را شرح دهید؟ (شکل ۴).



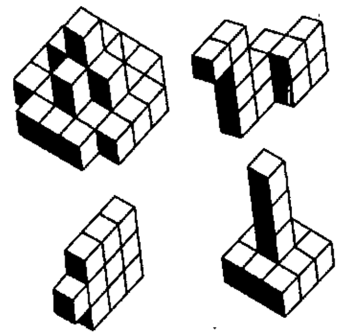
شکل - ۴

در گوشهٔ سمت راست، چگونه می‌توانید از برجی که با بلوک‌های مکعبی ساخته شده، بالا بروید؟ (شکل ۵). این برج، از چند مکعب تشکیل شده است؟



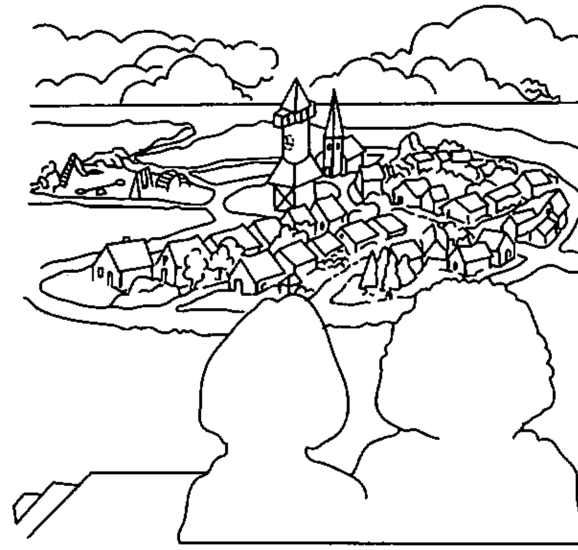
شکل - ۵

چگونه می‌توانید ساختار این بلوک‌ها را توضیح دهید؟ (شکل ۶).



شکل-۶

از آن نقطهٔ جزیره، چه می‌توانید ببینید، و این عکس، از کجا گرفته شده است؟ (شکل ۷).

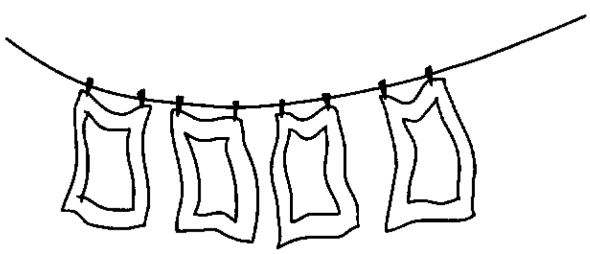


شکل-۷

در آن پارکینگ، چند تا ماشین هست؟ صف‌های اتوبوس با آدم‌هایی که در حال وارد شدن و خارج شدن هستند، راهی برای انجام حساب است (شکل ۸).

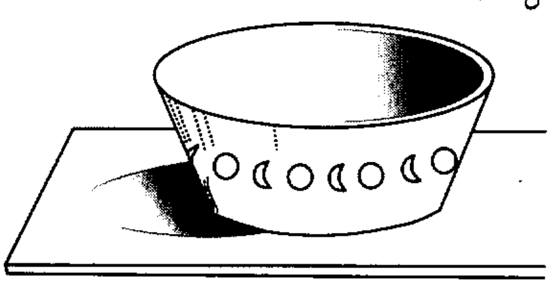
در مفاهیم متعدد ریاضی جدید، «مجموعه‌ها» یک مفهوم پایه‌ای است. احتیاج نیست تاکید کنم که IOWO، می‌تواند از چنین مجردسازی‌های ناپخته‌ای، پرهیز کند. در IOWO، عدد نه بر مجموعه‌ها بنا می‌شود و نه با آن معرفی می‌شود. برای نشان دادن آن که مفهوم عدد چگونه بر «ساختارسازی»[۲۹] بنا شده و حاصل شده است، چند مثال تصویری آورده شده است.

چند تا دستمال گردن؟ چند تا گیرهٔ لباس؟ آیا می‌توان این لباس‌ها را با تعداد گیره‌های کمتری روی بند آویزان کرد؟ (شکل ۹).



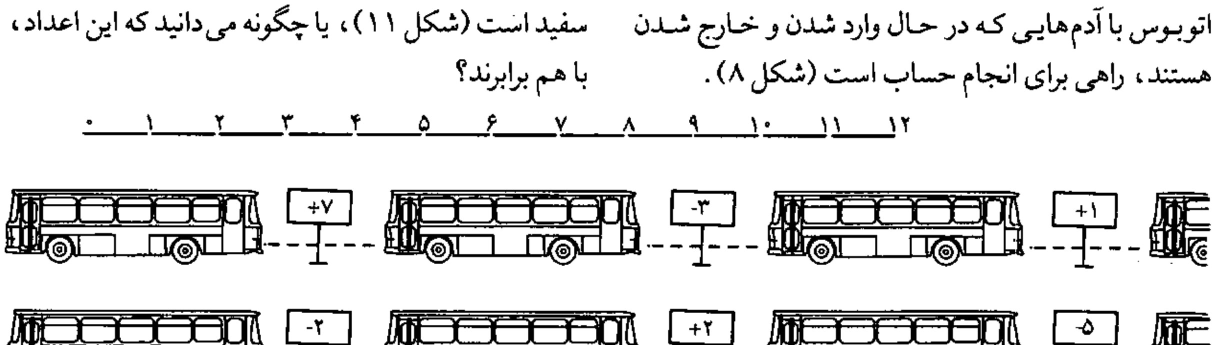
شکل-۹

آیا تعداد طرح‌های ماه، بیش‌تر از خورشید است؟ (شکل ۱۰).

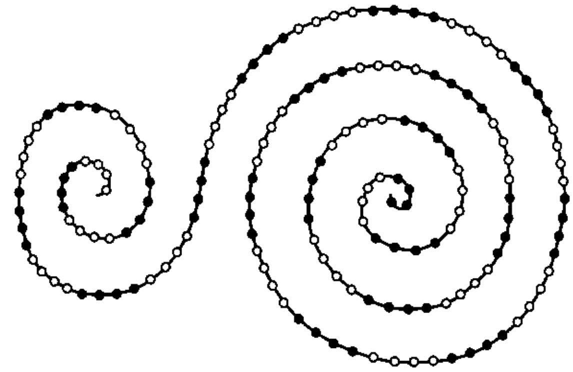


شکل-۱۰

آیا تعداد مرواریدهای سیاه، بیش‌تر از مرواریدهای سفید است (شکل ۱۱)، یا چگونه می‌دانید که این اعداد، با هم برابرند؟

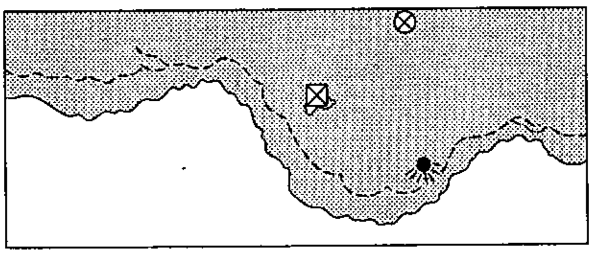


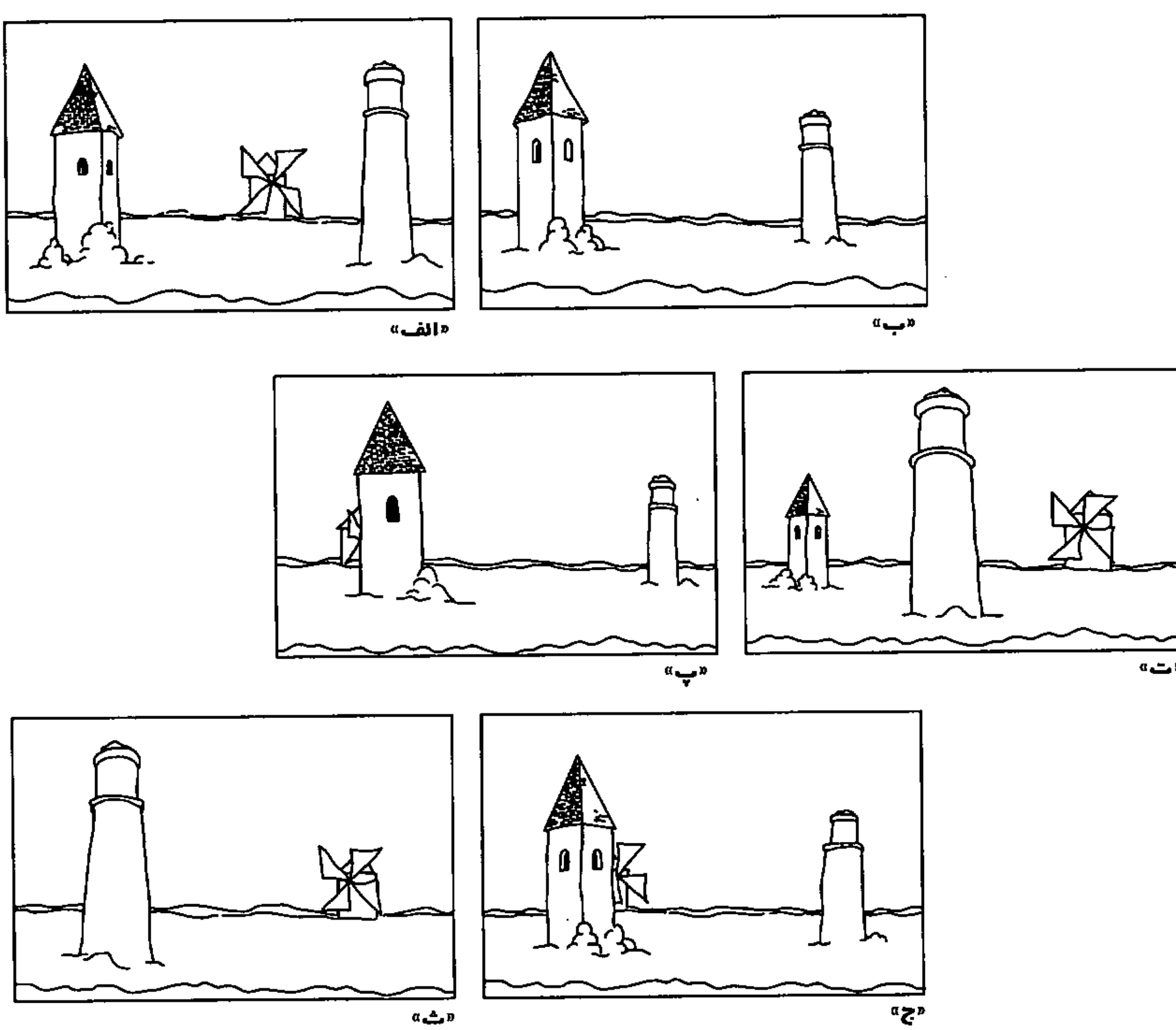
شکل-۸



شکل - ۱۱

شهر آبی، از نوع زمینه هایی است که در واژگان IOWO «موقعیت»[۳۰] نام دارد. یک موقعیت دیگر، «داستان» است. مثال دیگری که می‌خواهم بزنم، داستان نجات دادن «برمودا»[۳۱] است که یک کشتی اشرافی در خطر است و توسط یک قایق کوچک، شناسایی و نجات داده می‌شود (درسی برای دانش‌آموزان پایه های ۴ و ۵). استفاده از نقشه و انجام هندسه، موقعیت‌های خوبی برای یادگیری هستند. می‌توانم مثالی از این داستان (شکل ۱۲)، بزنم. این عکس‌ها، به چه ترتیبی از کشتیِ در حال حرکتِ کنار ساحل، گرفته شده است؟





شکل - ۱۲

شکل ۱۳: فکر می‌کنی در عکس، قدّت چقدر خواهد بود؟
چارلز تخمین خودش را نشان می‌دهد: «همه موافقید؟»
او فکر می‌کند پیتر خیلی بلند باشد: «تو به بلندی آن در نیستی.»
چارلز تخمین خودش را تصحیح می‌کند.
معلم، قسمت دیگری از تصویر را اضافه می‌کند.

نسبت[31]، یکی از روش‌های بسیار قوی برای ساختن واقعیت است. در تدریس ریاضی، قدرت نسبت، به شدت توسط ریاضی‌وار شدن نارس و به زبان ریاضی درآوردن، در حال کاهش است. رویکرد IOWO با قسمتی از یک درس (پایه‌های ۱ و ۲) نشان داده شده است (شکل‌های ۱۳ و ۱۴).

اجازه دهید سخن را در همین جا، به پایان برسانیم. به جای یک دیدگاه جهانی، من با چند مثال، ایده‌های اساسی IOWO را نمایش داده‌ام.

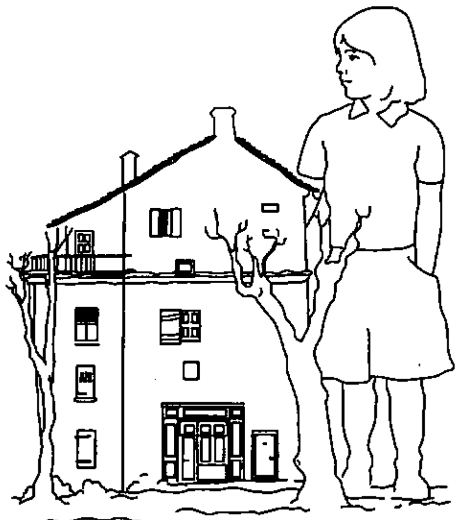
برنامهٔ درسی IOWO به زبان هلندی نوشته شده است؛ بعضی از قسمت‌های آن به زبان انگلیسی یا فرانسوی، ترجمه شده‌اند. مروری بر فعالیت‌های IOWO به زبان انگلیسی، با عنوان «پنج سال IOWO» در مجلهٔ «مطالعات آموزشی در ریاضی»[32]، جلد ۷، شمارهٔ ۳، آگوست ۱۹۷۶، چاپ شده است.

زیرنویس‌ها

1. International Commission on Mathematics Instruction (ICMI)
2. Facts
3. Royaumont
4. Dubrovnik
5. New Math
6. Charlatans
7. New Nonesense
8. Form
9. Content
10. Letter Algebra

۱۱ـ در متون ترجمه‌ای قدیمی فارسی، برای اشیا (objects)، معادل ذوات انتخاب شده بود.

شکل ۱۴: «چطور چنین چیزی ممکن است؟»
«اوه، فهمیدم، این یک خانهٔ عروسکی است!»



12. Non-Trivial
13. Klein
14. Bourbaki
15. Anthropomorphic
16. Bureaucralic
17. Back to Basic
18. Numeracy

۱۹ـ شاید اشارهٔ فرودنتال، به گفت‌وگوی بین سقراط و منون بوده که دربارهٔ چگونگی رسم مربعی است که مساحت آن، دوبرابر مساحت مربع مفروض است و در کتاب جمهوریت افلاطون آمده است [مترجم].

۲۰ـ به نظر می‌رسد که اشارهٔ فرودنتال به انواع طبقه‌بندی‌های رفتاری و شناختی، از جمله طبقه‌بندی بلوم است [مترجم].

21. Positional System

پرویز شهریاری، از آن به عنوان «عددنویسی موضعی» یاد کرده است و برای مثال، به عدد ۶۶۶ اشاره کرده است که «همه‌اش با یک نماد نوشته می‌شود: ولی آن ۶ سمت راست، یک معنا دارد، و ۶ بعد از آن به معنای ۶۰ است، و ۶ بعدی به معنای ۶۰۰ می‌باشد، و همهٔ این‌ها با هم بسیار تفاوت دارند.» (زندگی‌نامه و خدمات علمی و فرهنگی پرویز شهریاری: استاد دانشمند و ریاضی‌دان برجسته، انجمن آثار و مفاخر فرهنگی، ۱۳۸۱، ص ۱۰۷)

22. Multi - Based Blocks
23. Institute Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (Institute for the Development of Mathematics Education (IOWO), Tiberdreef 4, Utrecht, Netherlands.
24. Mathematizing
25. Mathematized
26. Priori
27. Ann
28. Structuring
29. Location
30. Bermuda
31. Ratio
32. Educational Studies in Mathematics

منبع اصلی

Freudental, Hans. (1979). New Math or New Education. **Prospects**, Vol.IX,No.3, 321-329.

علت اصلی ترجمهٔ این مقاله، نقش اثرگذار آن در شکل‌گیری مبانی نظری آموزش ریاضی در جهان است. این رشته در ایران، مراحل طفولیت خود را می‌گذراند و آشنایی با سیر تحول جهانی این رشته، هم به لحاظ نظری و هم تجربی، یک ضرورت است.

روایت معلمان

به‌دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله باعنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری بامعلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق، فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به‌تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه‌ها به‌عمل در می‌آیند و مجدداً عمل به‌نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می‌کند.

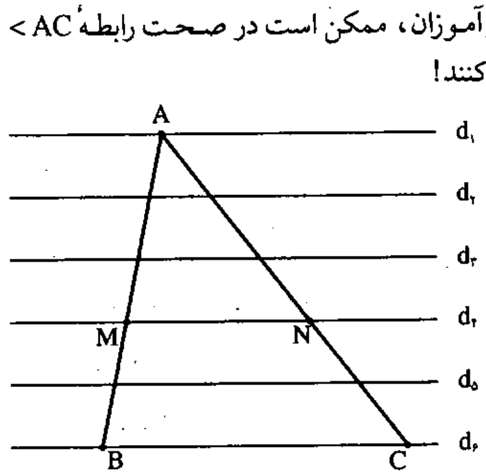
از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم، نشر آن است. معلمان عزیز باید به‌اهمیّت تجربه‌های خود واقف شوند و باپویایی، به‌غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

امین جامی ، دبیر ریاضی مدارس راهنمایی شهرستان تایباد

فقدان پندارهٔ صحیح از ریاضیات و تولد استنتاج‌های نادرست در حل مسأله

آیا دانش‌آموزان آن چه را که می‌بینند و هر آن چه را که عقل سلیم بدان حکم می‌کند، باور دارند؟ شواهد موجود نشان می‌دهد که دانش‌آموزان در برخی شرایط و موقعیت‌ها، بر آن‌چه که چشمانشان به وضوح می‌بیند، اعتماد نکرده و از استفاده از عقل خویش (به دلیل این که آن را در آن موقعیت، ناکارآمد می‌پندارند) نیز پرهیز می‌کنند. همین موقعیت‌ها هستند که به دلیل فقدان پندارهٔ صحیح از ریاضیات، باعث تولد استنتاج‌های نادرست در دانش‌آموزان می‌شوند. روایت زیر، شاهدی بر این مدّعاست.

اگر تصویر مقابل را در دست بگیرید و در یک پیاده‌روی پر رفت و آمد، از کلیهٔ رهگذران بخواهید مشخص کنند AB بزرگ‌تر است یا AC، به احتمال زیاد سادگی سؤال شما عده‌ای را به خنده می‌اندازد و عده‌ای نیز به سلامت روانی شما شک خواهند کرد! حتی اگر در میان رهگذران، تعدادی از دانش‌آموزان شما نیز باشند، به قدری واضح است که $AC > AB$ که در کامل بودن عقل شما شکّ خواهند کرد. در حالی که در همهٔ موقعیت‌ها چنین نیست و همین دانش‌آموزان، ممکن است در صحت رابطهٔ $AB < AC$ شک کنند!



در یکی از کلاس هایم با رسم شکل فوق، خاطر نشان کردم که فاصلهٔ هریک از d_1 تا d_p، متوالیاً ۱ سانتی متر است. آن گاه پرسیدم: پاره خط AM، به چند قسمت ... چند نفر به میان حرف هایم دویدند و فریاد زدند: ۳ سانتی متر. پس از آن، گفتگوی زیر بین من و آن ها رد و بدل شد:

معلم (م): گفتید AM چند سانتی متر است؟
دانش آموزان (د): ۳ سانتی متر.
م: AN چطور؟
د: ۳ سانتی متر.
م: در این صورت AB چند سانتی متر است؟
د: ۵ سانتی متر.
م: و AC؟
د: آن هم ۵ سانتی متر.
م: در این صورت آیا AB با AC هم اندازه است؟
د: (با بی اعتمادی) بله!
م: اما همان طور که می بینید، AC از AB بزرگ تر است!

فقط، یکی که جسورتر از دیگران بود، پاسخ داد: علت این است که شکل، فرضی رسم شده ولی در حقیقت AB با AC برابر است. (و این در حالی بود که دو ـ سه نفر از دانش آموزان ممتاز، با ناراحتی و تعجب به فکر فرو رفته و گیج شده بودند).

در حالی که همین دانش آموزان، در پیاده روی خیابان، مطمئنند که $AB > AC$، چه چیزی موجب می شود که در کلاس درس چنین اشتباهی بکنند؟ علّت چنین اشتباهی را احتمالاً باید در یکی از دلایل زیر جستجو کرد:

۱ ـ تأکید بیش از اندازهٔ معلمان ریاضی بر استدلال دقیقِ ریاضی بدون بها دادن به شهود و تجسم؛ به طوری که شهود، که مقدمهٔ استدلال است، و استدلال، که همیشه بعد از شهود قرار می گیرد، جای خود را با یکدیگر عوض کرده اند تا جایی که دانش آموزان عادت کرده اند ابتدا استدلال کنند، سپس با توجه به نتیجهٔ استدلال، شهود خود را شکل دهند و اگر این شهود با آن استدلال مطابقت نکرد، برچسب فرضی بودن شکل و امثال آن را به آن چه که می بینند، می چسبانند!

۲ ـ وجود این دیدگاه در دانش آموز که در تناقض بین مشاهده و استدلال، همیشه بُرد با استدلال است و ریشهٔ تناقض را باید در مشاهده جستجو کرد، نه در استدلال (در حالی که ممکن است علّت تناقض، استدلالِ نادرست باشد!)

۳ ـ تلقی دانش آموزان از ریاضی به عنوان علمی کاملاً انتزاعی و غیر واقعی، تا جایی که در پیاده روی خیابان (دنیای واقعی) AB را کوچک تر از AC می داند ولی در دنیای غیر واقعیِ کلاس درس، بدون توجه به شهود و واقعیت ها، AB را برابرِ AC می داند.

اگر دانش آموزان با مشاهدهٔ این تناقض، علاوه بر بررسی دوبارهٔ شکل، به بررسی مجدد استدلال هایشان نیز می پرداختند، مطمئناً به اشتباه استدلالی خود پی می بردند. علّت سکوت دانش آموزان ممتاز و گیج شدن آن ها را باید در این جستجو کرد که ایشان، معلم را دانای خطاناپذیر می دانند و خود را، افرادی ضعیف که باید همیشه تفکرات و نتایجشان، تابعِ صحبت های معلم باشد و می پندارند در تناقض بین ایدهٔ خودشان و ایدهٔ معلم، همیشه بُرد با معلم بوده است و ریشهٔ تناقضات را باید در ایده های خودشان جستجو کرد نه ایدهٔ معلم که دانای مطلق است!

امید است که به دانش آموزانمان یاد دهیم همیشه حق با کسی است که با **استدلال صحیح**، حقیقت را می گوید. فرقی نمی کند که گویندهٔ حقیقت دیوانه باشد یا یک نابغه... .

روش های حل رابطهٔ بازگشتی خطی درجهٔ یک

نویسنده: عبدالحسین مصحفی

بعضی از دنباله ها، با رابطهٔ بازگشتی نموده می‌شوند. برای بررسی ویژگی هایی از این دنباله ها، و برای حل مسأله هایی در زمینهٔ آن‌ها، به دست آوردن جملهٔ عمومی آن دنباله ها، لازم است. به دست آوردن جملهٔ عمومی دنباله‌ای را از روی رابطهٔ بازگشتی آن، حل این رابطهٔ بازگشتی می‌نامند. برای حل رابطهٔ بازگشتی، بنابر نوع آن، روش هایی نموده شده‌اند. در این نوشتار، روش های حل رابطهٔ بازگشتی خطی درجهٔ یک در حالت های گوناگون آن بازگو می‌شوند. در هر حالت، به یک راه‌حل بسنده نمی‌شود، بلکه هر چند روش را که می‌توان به کار برد، نموده می‌شوند. خواننده، هم با روش های گوناگون آشنا می‌شود و به سنجش آن‌ها با یکدیگر دست می‌یابد، و هم این آمادگی برایش فراهم می‌شود تا آن روش ها را برای حل رابطه‌های بازگشتی از درجهٔ بالاتر، تعمیم دهد.

۱. چند یادآوری

آ) عمل های ریاضی روی دنباله ها. دنباله ها عنصرهایی ریاضی‌اند و عمل هایی ریاضی را می‌توان روی آن‌ها انجام داد. هر عمل روی یک دنباله روی تک تک جمله ها و هم‌چنین، روی جملهٔ عمومی آن انجام می‌گیرد. هر عمل روی دو دنباله، روی جمله‌های هم‌مرتبهٔ آن‌ها انجام می‌گیرد. حاصل هر عمل روی یک یا چند دنباله، بنابر نوع عمل، ممکن است یکتا باشد یا نباشد؛ حاصل جمع دو دنباله یکتاست، اما عمل تبدیل یک دنباله به مجموع دو دنبالهٔ دیگر، یکتا نیست.

برای نمونه، اگر داشته باشیم

$$\{a_n\} = 1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 3n-2, \ldots$$
$$\{b_n\} = 2, 6, 12, 20, 30, \ldots, n(n+1), \ldots$$

خواهیم داشت

$$3\{a_n\} = \{3\times a_n\} = 3, 12, 21, 30, 39, \ldots, 3(3n-2), \ldots$$
$$\{a_n\}+\{b_n\} = \{a_n+b_n\} = 3, 10, 19, 30, 43, \ldots, n(n+4)-2, \ldots$$
$$\{a_n\}-\{b_n\} = \{a_n-b_n\} = -1, -2, -5, -10, -17, \ldots, n(2-n)-2, \ldots$$
$$\{a_n\}.\{b_n\} = \{a_n.b_n\} = 2, 24, 84, 200, 390, \ldots, n(3n^2+n-2), \ldots$$
$$\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{10}{20}, \frac{13}{30}, \ldots, \frac{3n-2}{n^2+n}, \ldots$$

توجه داشته باشید که هیچ یک از جمله های b_n ، صفر نیست.

$$\{(a_n)^۲ - ۵\} = -۴,۱۱,۴۴,۹۵,\ldots,۹n^۲ - ۱۲n - ۱,\ldots$$

ب) معادلهٔ مشخصه (= معادلهٔ سرشت نما). بنابرآن که (E) معادلهٔ چندجمله ای از درجهٔ k و با جملهٔ ثابت غیرصفر باشد، ضریب جملهٔ درجهٔ k از این معادله، مخالف صفر است و از تقسیم دو طرف معادله بر این ضریب، معادله به صورت کلی زیر خواهد بود

$$x^k + px^{k-۱} + qx^{k-۲} + \ldots + vx + w = ۰ \quad (E)$$

هرگاه تعداد k عدد (حقیقی یا مختلط) α ، β ، γ ، ...، λ ، ریشه های معادلهٔ (E) باشند، هرکدام از آن ها در معادله صدق می کند و خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&\alpha^k + p\alpha^{k-۱} + q\alpha^{k-۲} + \ldots + v\alpha + w = ۰\\
&\beta^k + p\beta^{k-۱} + q\beta^{k-۲} + \ldots + v\beta + w = ۰\\
&\gamma^k + p\gamma^{k-۱} + q\gamma^{k-۲} + \ldots + v\gamma + w = ۰\\
&\vdots\\
&\lambda^k + p\lambda^{k-۱} + q\lambda^{k-۲} + \ldots + v\lambda + w = ۰
\end{aligned}$$

بنابر آن که A ، B ، C ، ... ، L ، عددهای حقیقی دلخواه غیرصفر باشند و n عددی طبیعی باشد، دوطرف برابری یکم را در $A\alpha^n$ ، دو طرف برابری دوم را در $B\beta^n$ ، دوطرف برابری سوم را در $C\gamma^n$ ، ... و سرانجام دوطرف آخرین برابری را در $L\lambda^n$ ضرب می کنیم و برابری های به دست آمده را به هم می افزاییم و با فرض

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n + \ldots + L\lambda^n$$

رابطهٔ بازگشتی زیر را خواهیم داشت

$$a_{n+k} = -pa_{n+k-۱} - qa_{n+k-۲} - \ldots - va_{n+۱} - wa_n \quad (R)$$

که با تبدیل n به n-k آن را به صورت زیر نیز می توانیم بنویسیم

$$a_n = -pa_{n-۱} - qa_{n-۲} - \ldots - va_{n-k+۱} - wa_{n-k} \quad (R')$$

معادلهٔ (E) را *معادلهٔ مشخصهٔ* هریک از رابطه های بازگشتی (R) یا (R′) می نامند. اگر معادلهٔ (E) داده شده باشد، برای به دست آوردن رابطهٔ بازگشتی نظیر آن کافی است به ازای هر مقدار k، هر x^k را به a_{n+k} تبدیل کرد. اگر هم رابطهٔ بازگشتی (R) داده شده باشد، برای دست یابی به معادلهٔ مشخصهٔ آن، کافی است به ازای هر مقدار n، هر a_n را به x^n تبدیل و معادله را ساده کرد.

برای نمونه، اگر داشته باشیم

$$۳x^۳ - ۳x + ۴ = ۰ \quad (\Rightarrow ۳x^۳ - ۳x + ۴x^۰ = ۰)$$

رابطهٔ بازگشتی نظیر آن می شود

$$۳a_{n+۳} - ۳a_{n+۱} + ۴a_n = ۰ \Rightarrow a_{n+۳} = a_{n+۱} - \frac{۴}{۳}a_n$$

$$\Rightarrow a_n = a_{n-۲} - \frac{۴}{۳}a_{n-۳}$$

و اگر داشته باشیم

$$a_n = ۳a_{n-۱} + ۲a_{n-۲}$$

معادلهٔ مشخصهٔ آن می شود

$$x^n = ۳x^{n-۱} + ۲x^{n-۲} \Rightarrow x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$$

ج) تابع مولد دنباله. ضریب های هر چندجمله ای یک دنباله را پدید می آورند. هرگاه تابع f(x)، که روی مجموعهٔ عددهای حقیقی تعریف شده است، به صورت یک چندجمله ای با ضریب های حقیقی به گونهٔ زیر بسط داده

شود (در برابری زیر، x یک نماد است نه یک عدد و این بسط، صوری است)

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_nx^n+\dots$$

ضریب‌های این چندجمله‌ای، دنبالهٔ زیر را پدید می‌آورند:

$$\{a_n\}=a_0,a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,a_{n+1},\dots$$

در این صورت، تابع f(x) را *تابع مولد* دنبالهٔ $\{a_n\}$ می‌نامند.

برای نمونه، اگر تقسیم ۱ بر x+۱ بنابر توان‌های صعودی x انجام گیرد به دست می‌آید

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^nx^n+\dots$$

و هرگاه از دوطرف این برابری نسبت به x مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+\dots+(-1)^n(n+1)x^n+\dots$$

بنابراین، $\frac{1}{1+x}$ تابع مولد دنبالهٔ

$$\{a_n\}=1,-1,1,-1,\dots,(-1)^n,(-1)^{n+1},\dots$$

و $\frac{1}{(1+x)^2}$، تابع مولد دنبالهٔ زیر است

$$\{b_n\}=1,-2,3,-4,\dots,(-1)^n(n+1),\dots$$

با پذیرفتن این که یک تابع می‌تواند مولد یک دنباله باشد، با داده شدن یک دنباله هم باید بتوانیم یک تابع مولد آن را به دست آوریم.

برای نمونه، اگر داشته باشیم

$$\{a_n\}=1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\dots$$

نخست چندجمله‌ای را می‌نویسیم که جمله‌های این دنباله، ضریب‌های آن باشند

$$P(x)=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x^3+\dots+\frac{1}{2^n}x^n+\dots$$

اکنون دو طرف این برابری را در $\left(1-\frac{x}{2}\right)$ ضرب می‌کنیم*

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)P(x)=\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+\dots\right)$$

حاصل ضرب طرف دوم برابر با یک می‌شود و داریم

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)P(x)=1\Rightarrow P(x)=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{2}{2-x}$$

۲. رابطهٔ بازگشتی خطی درجهٔ یک

این رابطه در حالت کلی، به یکی از دو صورت زیر نوشته می‌شود

$$a_{n+1}=pa_n+f(n)\,,\qquad (n\geq 1)\quad (1)$$
$$a_n=pa_{n-1}+f(n)\,,\qquad (n\geq 2)\quad (2)$$

در این رابطه‌ها، p عدد حقیقی ثابت است و صفر نیست و f(x) تابعی است که دامنه‌اش مجموعهٔ عددهای طبیعی است و ممکن است مقدار ثابت باشد. هرگاه مقدار یکی از جمله‌های $\{a_n\}$ داده شده باشد، چه از رابطهٔ (۱)

و چه از رابطهٔ (۲)، مقدار هرجملهٔ دیگر دنباله به دست می‌آید. معمول است که مقدار $a_۱$ داده می‌شود و آن را *شرط آغازی* رابطهٔ بازگشتی می‌نامند. شرط آغازی رابطهٔ (۲) را گاهی مقدار $a_۰$ و n را بزرگ‌تر یا مساوی یک می‌گیرند. با هر مقدار n، در رابطهٔ (۱) مقدار جملهٔ یک مرتبه بالاتر و در رابطهٔ (۲) مقدار جملهٔ با همان مرتبه به دست می‌آید. در رابطهٔ (۲)، اگر مقدار طرف دوم بر حسب n به دست آید، همان ضابطهٔ جملهٔ عمومی دنباله خواهد بود. از نویسندگان متن‌های ریاضی، بعضی رابطهٔ (۱) را و بعضی رابطهٔ (۲) را بر دیگری ترجیح می‌دهند. یادآوری می‌شود که با تبدیل n به n ـ ۱، رابطهٔ (۱) از گونهٔ رابطهٔ (۲) می‌شود.

$$n \to n-۱ \Rightarrow \left[a_{n+۱} = a_n + f(n) \to a_n = a_{n-۱} + f(n-۱)\right]$$

و با تبدیل n به n+۱، رابطهٔ (۲) از گونهٔ رابطهٔ (۱) می‌شود.

$$n \to n+۱ \Rightarrow \left[a_n = a_{n-۱} + f(n) \to a_{n+۱} = a_n + f(n+۱)\right]$$

برای نمونه، اگر داشته باشیم

$$a_{n+۱} = a_n + n(n+۱) \ , \ a_۱ = ۷ \ (۱)$$

با تبدیل n به n ـ ۱ خواهیم داشت

$$a_n = a_{n-۱} + (n-۱)n \ , \ a_۱ = ۷ \ (۲)$$

و برای به دست آوردن مقدار $a_۲$، باید مقدار n را در رابطهٔ (۱) برابر با ۱ و در رابطهٔ (۲) برابر با ۲ بگیریم و در هر دو مورد، خواهیم داشت $a_۲ = ۹$.

حل رابطهٔ بازگشتی درجهٔ یک در حالت کلی، بر پایهٔ حالت‌های ویژهٔ آن انجام می‌گیرد. از این رو، نخست روش‌های حل حالت‌های ویژه نموده می‌شوند.

۳. حل رابطهٔ بازگشتی درجهٔ یکِ خطی و همگن

رابطهٔ بازگشتی درجهٔ یک در حالت خطی و همگن، به صورت کلی زیر است

$$a_n = pa_{n-۱} \ , \ a_۱ = r$$

که در آن، r مقداری معلوم است. در این حالت، اگر p برابر با یک باشد، همهٔ جمله‌های دنباله با هم و با $a_۱ = r$ برابرند و داریم $a_n = r$.

هرگاه p برابر با یک نباشد، هریک از روش‌های زیر را برای حل رابطه می‌توانیم به کار ببریم.

روش یکم. با تبدیل n به ترتیب به n ـ ۱، به n ـ ۲، به n ـ ۳، ...، و سرانجام به ۱، داریم

$$\begin{aligned} a_n &= pa_{n-۱} \\ a_{n-۱} &= pa_{n-۲} \\ a_{n-۲} &= pa_{n-۳} \\ &\vdots \\ a_۳ &= pa_۲ \\ a_۲ &= pa_۱ \\ a_۱ &= r \end{aligned}$$

دوطرف این برابری‌ها را نظیر به نظیر درهم ضرب می‌کنیم. عامل‌هایی که در دوطرف با هم برابرند، حذف می‌شوند. در طرف یکم a_n می‌ماند و طرف دوم، حاصل ضرب n ـ ۱ عامل p در r می‌شود. بنابراین

$$a_n = rp^{n-۱}$$

روش دوم. در رابطهٔ داده شده، $a_{n-۱}$ را برحسب $a_{n-۲}$، آن‌گاه $a_{n-۲}$ را برحسب $a_{n-۳}$، آن‌گاه این یکی را برحسب $a_{n-۴}$، ...، و سرانجام $a_۳$ را برحسب $a_۲$، و این یکی را برحسب $a_۱ = r$ می‌نویسیم

$$\begin{aligned} a_n &= pa_{n-1} = p(pa_{n-2}) = p^2 a_{n-2} \\ &= p^2(pa_{n-3}) = p^3 a_{n-3} \\ &= p^3(pa_{n-4}) = p^4 a_{n-4} \\ &\vdots \\ &= p^{n-3}(pa_2) = p^{n-2} a_2 \\ &= p^{n-2}(pa_1) = p^{n-1} r \end{aligned}$$

و باز هم $a_n = rp^{n-1}$ به دست می‌آید.

روش سوم. استقرای ریاضی را به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} a_1 &= r \\ a_2 &= pa_1 = pr \\ a_3 &= pa_2 = p^2 r \\ a_4 &= pa_3 = p^3 r \end{aligned}$$

و سرانجام اگر داشته باشیم $a_k = p^{k-1} r$، خواهیم داشت

$$a_{k+1} = pa_k = p^k r$$

و بنابر اصل استقرای ریاضی، به ازای هر عدد طبیعی n داریم

$$a_n = rp^{n-1}$$

روش چهارم. معادلهٔ مشخصه را به دست می‌آوریم. در رابطهٔ بازگشتی داده شده، چون هر a را به x و هر زیروند را به توان تبدیل کنیم، به دست می‌آوریم $x^n = px^{n-1}$. این معادله را به x^{n-1} ساده می‌کنیم و معادلهٔ مشخصه می‌شود $x = p$.

معادلهٔ مشخصه یک ریشهٔ p دارد و جملهٔ عمومی دنبالهٔ نظیر آن می‌شود

$$a_n = Ap^n$$

در این برابری اگر n را یک بگیریم به دست می‌آوریم

$$a_1 = r = Ap \Rightarrow A = \frac{r}{p}$$

$$a_n = \frac{r}{p}.p^n = rp^{n-1}$$

برای نمونه، اگر $a_n = 5a_{n-1}$ و $a_1 = -10$، آن‌گاه

$$a_n = -10 \times 5^{n-1} = -2 \times 5^n$$

و اگر $3a_n = a_{n-1}$ و $a_1 = 1$، آن‌گاه

$$a_n = \frac{1}{3}a_{n-1}, a_1 = 1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3}{3^n}$$

و چنان‌چه $a_1 = -2\sqrt{3}$ و $a_{n+1} = (-\sqrt{2})\ a_n$، خواهیم داشت

$$a_n = -2\sqrt{3}(-\sqrt{2})^{n-1}$$

۴. حل رابطهٔ بازگشتی درجهٔ یک خطی ناهمگن

این رابطهٔ بازگشتی در حالت کلی به صورت زیر است

$$a_n = pa_{n-1} + f(n) \text{ و } a_1 = r$$

روش کلی حل این گونه رابطهٔ بازگشتی به این ترتیب است که فرض می‌شود دنبالهٔ $\{a_n\}$ مجموع دو دنبالهٔ $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$ باشد به گونه‌ای که

$$\begin{cases} (1)\ a_n = u_n + v_n \\ (2)\ a_1 = r \end{cases}, \begin{cases} (3)\ u_n = pu_{n-1} \\ (4)\ v_n = g(n) \end{cases}$$

رابطهٔ بازگشتی (۳) همگن است و بنابر آن‌چه پیش از این بیان شد، جواب عمومی آن به صورت $u_n = Ap^n$ به دست می‌آید. برای دست‌یابی به مقدار v_n، باید تابع g(n) چنان به دست آید که در رابطهٔ بازگشتی

$$v_n = pv_{n-1} + f(n)$$

و در نتیجه در معادلهٔ تابعی زیر صدق کند

$$g(n) - pg(n-1) = f(n)$$

نوع تابع g(n) به نوع تابع f(n) بستگی دارد. از این رو، رابطهٔ بازگشتی درجهٔ یک خطی ناهمگن بنابر نوع تابع f(n) حالت‌های گوناگون دارد. این حالت‌ها بررسی می‌شوند و چنان‌که خواهد آمد، برای آن‌ها روش‌هایی ویژه را نیز می‌توان به کار برد.

حالت یکم. تابع f(n) برابر با مقدار ثابت q باشد (نسبت به n، چند جمله‌ای از درجهٔ صفر باشد) و ضریب a_{n-1} نیز، یک باشد. در این حالت داریم

$$a_n = a_{n-1} + q \text{ و } a_1 = r \text{ مقدار معلوم}$$

برای حل این رابطهٔ بازگشتی، روش‌هایی ویژه را هم به شرح زیر می‌توانیم به کار ببریم.

روش یکم**. n را به ترتیب با $n-1$، $n-2$، ...، ۲، ۱، جانشین می‌کنیم.

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + q \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + q \\ a_{n-2} &= a_{n-3} + q \\ &\vdots \\ a_2 &= a_1 + q \\ a_1 &= r \end{aligned}$$

این برابری‌ها را با هم جمع می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$a_n = r + (n-1)q$$

روش دوم. استقرای ریاضی را به کار می‌بریم. اگر $n = 1$، آن‌گاه $a_1 = r$، و اگر $n = 2$، آن‌گاه $a_2 = r+q$، و اگر $n = 3$، آن‌گاه $a_3 = r+2q$، ...، و سرانجام اگر با $n = k$ داشته باشیم $a_k = r+(k-1)q$، آن‌گاه خواهیم داشت $a_{k+1} = r+kq$. بنابراین هرچه باشد عدد طبیعی n، داریم $a_n = r+(n-1)q$.

روش سوم. می‌پذیریم که $a_n = u_n + v_n$ به گونه‌ای که

$$u_n = u_{n-1} \qquad (1)$$

$$v_n = g(n)\ ;\ g(n) - g(n-1) = q \qquad (2)$$

از (۱) به دست می‌آید که u_n مقدار ثابت است و این مقدار ثابت را A می‌گیریم، یعنی $u_n = A$. بنابر رابطهٔ (۲)، g(n) و g(n−1) هم‌درجه‌اند و چون تفاضل آن‌ها مقدار ثابت q است، هر دو از درجهٔ یکم‌اند. بنابراین

$$\begin{aligned} &g(n) = Bn + c\ ,\ g(n-1) = B(n-1) + C \\ &g(n) - g(n-1) = q \Rightarrow Bn + C - Bn + B - C = q; B = q \\ &v_n = qn + C\ ,\ a_n = A + qn + C, \\ &a_1 = r \Rightarrow r = A + q + C \Rightarrow A + C = r - q, \\ &a_n = r - q + qn = r + (n-1)q. \end{aligned}$$

برای نمونه، اگر $a_n = a_{n-1} - 17$ و $a_1 = 7$، آن‌گاه

$$a_n = 7 - 17(n-1) = 24 - 17n$$

و اگر $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}$ و $a_1 = -\frac{1}{2}$، آن‌گاه

$$a_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2} - 1$$

و چنان‌چه داشته باشیم $a_{n+1} = a_n + \sqrt{2}$ و $a_{100} = 105\sqrt{2}$، خواهیم داشت

$$a_{100} = r + 99\sqrt{2} = 105\sqrt{2} \Rightarrow r = 6\sqrt{2} \,,$$
$$a_n = 6\sqrt{2} + (n-1)\sqrt{2} = (n+5)\sqrt{2}$$

حالت دوم. در رابطهٔ بازگشتی، ضریب a_{n-1} عدد ثابت و غیرصفر p و $f(n)$ برابر با مقدار ثابت q باشد. در این صورت داریم

$$a_n = pa_{n-1} + q \;,\; a_1 = r$$

برای حل این رابطه هم می‌توانیم هریک از روش‌های قبلی را با تفاوتی جزیی به کار ببریم.

روش یکم. به ترتیب می‌نویسیم

$$\begin{aligned} a_n &= pa_{n-1} + q \\ pa_{n-1} &= p^2 a_{n-1} + pq \\ p^2 a_{n-2} &= p^3 a_{n-3} + p^2 q \\ &\vdots \\ p^{n-2} a_2 &= p^{n-1} a_1 + p^{n-2} q \\ p^{n-1} a_1 &= p^{n-1} r \end{aligned}$$

دو طرف این برابری‌ها را نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$a_n = rp^{n-1} + q(1 + p + p^2 + \dots + p^{n-2})$$

هرگاه $p = 1$، در این صورت داریم $a_n = r + (n-1)q$؛ که همان جواب حالت یکم است و هرگاه $p \neq 1$ داریم

$$\frac{(1-p)(1+p+p^2+\dots+p^{n-2})}{1-p} =$$
$$\frac{(1-p)^{n-1}}{1-p} = \frac{p^{n-1}-1}{1-p},$$
$$a_n = rp^{n-1} + q\left(\frac{p^{n-1}-1}{p-1}\right).$$

روش دوم. استقرای ریاضی را به کار می‌بریم

$$\begin{aligned} &n = 1 \;;\; a_1 = r \\ &n = 2 \;;\; a_2 = pr + q \\ &n = 3 \;;\; a_3 = p^2 r + pq + q = rp^2 + q(p+1) = \\ &rp^2 + q\left(\frac{p^2-1}{p-1}\right) \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

و سرانجام اگر

$$n = k \;;\; a_k = rp^{k-1} + q\left(\frac{p^{k-1}-1}{p-1}\right)$$

آن‌گاه

$$n = k+1 \;;\; a_{k+1} = rp^k + q\left(\frac{p^k-1}{p-1}\right)$$

بنابراین، هرچه باشد عدد طبیعی n داریم

$$a_n = rp^{n-1} + q\left(\frac{p^{n-1}-1}{p-1}\right)$$

روش سوم. می‌پذیریم که $a_n = u_n + v_n$ به گونه‌ای که

$$u_n = pu_{n-1} \quad (1)$$
$$v_n = g(n) \quad (2)$$

بنابر آن‌چه پیش‌تر ثابت شد، از رابطهٔ (۱) به دست می‌آید $u_n = Ap^n$، که مقدار ثابت A باید حساب شود. بنابر رابطهٔ (۲)، باید $g(n)$ را چنان انتخاب کنیم که به ازای هر عدد طبیعیِ n داشته باشیم

$$g(n) - pg(n-1) = q$$

طرف دوم این همانی مقدار ثابت است و طرف یکم آن هم، تنها می‌تواند مقدار ثابت باشد. بنابراین

$$v_n = g(n) = B$$

که در آن، B مقدار ثابتی است.

$$B - pB = q \Rightarrow B = \frac{q}{1-p}$$

$$a_n = Ap^n + \frac{q}{1-p},$$

$$a_1 = r \Rightarrow Aq + \frac{q}{1-p} = r \ , \ A = \frac{1}{p}\left(r - \frac{q}{1-p}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{p}\left(r - \frac{q}{1-p}\right)p^n + \frac{q}{1-p} = rp^{n-1} + q\left(\frac{p^{n-1}-1}{p-1}\right).$$

برای نمونه، اگر $a_n = 3a_{n-1} + 5$ و $a_1 = 2$، آن‌گاه

$$a_n = 2\times 3^{n-1} + 5\times\frac{3^{n-1}-1}{2} = \frac{1}{2}(6\times 3^n - 5)$$

و اگر $a_n = 5a_{n-1} - 3$ و $a_1 = \frac{3}{4}$، آن‌گاه

$$a_n = \frac{3}{4}\times 5^{n-1} - 3\times\frac{5^{n-1}-1}{4} = \frac{3}{4}$$

و چنان‌چه داشته باشیم $a_{n+1} = -2a_n + 6$ و $a_1 = 8$، آن‌گاه

$$a_n = 8(-2)^{n-1} + 6\left(\frac{(-2)^{n-1}-1}{-3}\right) = 6(-2)^{n-1} + 2$$

حالت سوم. در رابطهٔ بازگشتی، ضریب جملهٔ قبلی عدد ثابت و غیر صفر p و تابع f(n) یک چند جمله‌ای با ضریب‌های حقیقی و از درجهٔ ناکوچک‌تر از یک است. در این حالت، رابطهٔ بازگشتی به یکی از دو شکل زیر نموده می‌شود

$$a_n = pa_{n-1} + f(n) \ , \ a_1 = r \quad (1)$$
$$a_{n+1} = pa_n + f(n) \ , \ a_1 = r \quad (2)$$

برای حل رابطه (در هر دو شکل آن)، روش کلی را به کار می‌بریم. می‌پذیریم که

$$a_n = u_n + v_n \ , \ a_1 = r \quad (3)$$
$u_n = pu_{n-1}$ یا $u_{n+1} = pu \quad (4)$

و $v_n = g(n)$ که g(n) یک چند جمله‌ای است و باید چنان انتخاب شود که هرچه باشد عدد طبیعی n، برای رابطهٔ به شکل (1) داشته باشیم

$$g(n) - pg(n-1) \equiv f(n) \quad (5)$$

و برای رابطهٔ به شکل (2) داشته باشیم

$$g(n+1) - pg(n) \equiv f(n) \quad (6)$$

تابع g(n) را چند جمله‌ای با ضریب‌های نامعین می‌گیریم به گونه‌ای که در حالت $p \neq 1$، درجهٔ g(n) همان درجهٔ f(n) باشد و در حالت $p = 1$، درجهٔ g(n) یکی بیشتر از درجهٔ f(n) باشد. پس از آن، چند جمله‌ای $g(n-1)$ [و یا $g(n+1)$] را به دست می‌آوریم و از همانی (5) [یا (6)]، ضریب‌های نامعین را حساب می‌کنیم تا جملهٔ عمومی v_n به دست آید. جملهٔ عمومی u_n هم بنابر رابطهٔ (4) می‌شود

$$u_n = ap^n$$

که A ثابت نامعین است. جواب عمومی رابطهٔ بازگشتی داده شده، می‌شود

$$a_n = ap^n + g(n)$$

برای به دست آوردن جواب خصوصی کافی است که مقدار A را از رابطهٔ $a_1 = r = Ap + g(1)$ به دست آوریم.

نمونهٔ ۱. برای حل رابطهٔ بازگشتی

$$a_n = a_{n-1} + 2n^2 - 5\ ,\ a_1 = 3$$

به ترتیب داریم

$$a_n = u_n + v_n\ ,\ a_1 = 3$$
$$u_n = u_{n-1} \Rightarrow u_n = A(1)^n = A$$

و چون $p=1$ و $f(n) = 2n^2 - 5$ از درجهٔ دوم است، $v_n = g(n)$ را چند جمله‌ای از درجهٔ سوم می‌گیریم

$$v_n = g(n) = Bn^3 + Cn^2 + Dn + E$$
$$v_{n-1} = g(n-1) = B(n-1)^3 + C(n-1)^2 + D(n-1) + E$$
$$= Bn^3 + (3B-C)n^2 + (3B-2C+D)n - B + C - D + E$$
$$v_n - v_{n-1} = 3Bn^2 - (3B-2C)n + B - C + D$$
$$\equiv 2n^2 - 5$$

$$\begin{cases} 3B = 2 \\ -3B + 2C = 0 \\ B - C + D = -5 \end{cases} \Rightarrow B = \frac{2}{3}\ ,\ C = 1\ ,\ D = -\frac{14}{3}$$

جواب عمومی چنین است

$$v_n = g(n) = \frac{2}{3}n^3 + n^2 - \frac{14}{3}n + E$$
$$a_n = u_n + v_n = \frac{2}{3}n^3 + n^2 - \frac{14}{3}n + E + A$$
$$a_1 = 3\ ;\ \frac{2}{3}(1)^3 + (1)^2 - \frac{14}{3}(1) + E + A = 3$$
$$\Rightarrow A + E = 6$$

و جواب خصوصی،

$$a_n = \frac{2}{3}n^3 + n^2 - \frac{14}{3}n + 6$$

می‌باشد.

آزمون جواب. با داشتن $a_1 = 3$، از روی رابطهٔ بازگشتی داده شده دو مقدار a_2 و a_3 را به دست می‌آوریم

$$a_2 = 3 + 2(2)^2 - 5 = 6\ ,\ a_3 = 6 + 2(3)^2 - 5 = 19$$

اکنون سه مقدار a_1، a_2 و a_3 را از روی جملهٔ عمومی (=جواب خصوصی) نیز به‌دست می‌آوریم.

$$a_1 = \frac{2}{3}(1)^3 + (2)^2 - \frac{14}{3}(1) + 6 = 3,$$
$$a_2 = \frac{2}{3}(2)^3 + (2)^2 - \frac{14}{3}(2) + 6 = 6,$$
$$a_3 = \frac{2}{3}(3)^3 + (3)^2 - \frac{14}{3}(3) + 6 = 19$$

می‌بینیم که نتیجه‌ها در هر دو مورد یکسانند.

نمونهٔ ۲. بنابر آن که داشته باشیم

$$a_{n+1} = 5a_n - 4n^2 - 2n + 2,\ a_1 = 3$$

به ترتیب خواهیم داشت

$$a_n = u_n + v_n, a_1 = 3$$
$$u_{n+1} = 5u_n \Rightarrow u_n = A \times 5^n$$

و چون $p \neq 1$ و $f(n)$ از درجهٔ دوم است، $v_n = g(n)$ را از درجهٔ دوم می‌گیریم

$$v_n = g(n) = Bn^2 + Cn + D,$$

$$v_{n+1}=g(n+1)=B(n+1)^2+C(n+1)+D$$
$$=Bn^2+(2B+C)n+B+C+D$$
$$v_{n+1}-5v_n=g(n+1)-5g(n)$$
$$=-4Bn^2+(2B-4C)n+B+C-4D$$
$$\equiv -4n^2-2n+2$$

$$\begin{cases}-4B=-4\\ 2B-4C=-2\\ B+C-4D=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=1,\ \ C=1,\ \ D=0\\ v_n=n^2+n\end{cases}$$

جواب عمومی چنین خواهد بود

$$a_n=u_n+v_n=A\times 5^n+n^2+n$$

و جواب خصوصی عبارت است از

$$a_1=3;\ \ 3=A\times 5+1+1\Rightarrow A=\frac{1}{5}$$

$$a_n=\frac{1}{5}\times 5^n+n^2+n=5^{n-1}+n^2+n$$

حالت چهارم. تابع $f(n)$ نسبت به n نمایی باشد. در ساده‌ترین شکل داریم $f(n)=k\alpha^n$ که k و $\alpha\neq 1$ مقدارهای ثابت و معلوم‌اند و هیچ‌کدام صفر نیست. در این حالت داریم

$$a_n=pa_{n-1}+k\alpha^n,\ \ a_1=r$$

افزون بر آن که اگر $p=1$ می‌توانیم روش حذف واسطه‌ها و روش استقرایی ریاضی را نیز به‌کار ببریم، ساده‌تر است که همان روش کلی را به‌کار ببریم؛ همان روشی را که در حالت چندجمله‌ای بودن $f(n)$ به کار بردیم. با این تفاوت که تابع $g(n)$ را هم نمایی انتخاب می‌کنیم.

$$a_n=u_n+v_n,\ \ a_1=r$$
$$u_n=pu_{n-1}\Rightarrow u_n=Ap^n$$

اکنون انتخاب $v_n=B\alpha^n$ را در نظر می‌گیریم و باید داشته باشیم

$$B\alpha^n=pB\alpha^{n-1}+k\alpha^n$$

دو طرف را بر α^{n-1} تقسیم می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$B(\alpha-p)=k\alpha$$

۱) اگر $p\neq\alpha$، داریم

$$B=\frac{k\alpha}{\alpha-p}\Rightarrow v_n=\frac{k\alpha^{n+1}}{\alpha-p}$$

$$a_n=Ap^n+\frac{k\alpha^{n+1}}{\alpha-p},$$

$$n=1;\ \ r=Ap+\frac{k\alpha^2}{\alpha-p},$$

$$A=\frac{r-\dfrac{k\alpha^2}{\alpha-p}}{p}=\frac{r}{p}-\frac{k\alpha^2}{p(\alpha-p)},$$

$$a_n=(r-\frac{k\alpha^2}{\alpha-p})p^{n-1}+\frac{k\alpha^{n+1}}{\alpha-p}$$

۲) اگر $p=\alpha$ انتخاب $v_n=Bn\alpha^n$ را می‌پذیرند و به ترتیب به‌دست می‌آورند

$$v_{n-1}=B(n-1)\alpha^{n-1}=\frac{B(n-1)\alpha^n}{\alpha}$$
$$v_n=\alpha v_{n-1}+k\alpha^n;$$
$$Bn\alpha^n=B(n-1)\alpha^n+k\alpha^n\Rightarrow B=k$$
$$a_n=A\alpha^n+kn\alpha^n$$

جواب عمومی عبارت است از

$$n=1;\ r=A\alpha+k\alpha \Rightarrow A=\frac{r-k\alpha}{\alpha}$$

و جواب خصوصی

$$a_n=(\frac{r-k\alpha}{\alpha}+kn)\alpha^n$$

می‌باشد.

نمونهٔ ۱. برای حل رابطهٔ بازگشتی

$$a_n=a_{n-1}+10\times 3^n, a_1=-2$$

به ترتیب داریم

$$a_n=u_n+v_n,\ a_1=-2$$
$$u_n=u_{n-1}\Rightarrow u_n=A$$

که در آن، A مقدار ثابتی است.

$$v_n=B\times 3^n;\ v_{n-1}=B\times 3^{n-1}=\frac{B\times 3^n}{3}$$

$$B\times 3^n-\frac{B\times 3^n}{3}=10\times 3;\ B-\frac{B}{3}=10$$

$$B=15,\ v_n=15\times 3^n,\ a_n=A+15\times 3^n,$$
$$n=1;\ -2=A+15\times 3\Rightarrow A=-47$$
$$a_n=15\times 3^n-47$$

نمونهٔ ۲. برای حل رابطهٔ بازگشتی

$$a_n=2a_{n-1}+4\times 3^{n-1},\ a_1=18$$

به ترتیب چنین عمل می‌کنیم

$$a_n=2a_{n-1}+\frac{4}{3}\times 3^n,\ a_1=18$$
$$a_n=u_n+v_n,\ a_1=18$$
$$u_n=2u_{n-1}\Rightarrow u_n=A\times 2^n$$
$$v_n=B\times 3^n;\ v_{n-1}=B\times 3^{n-1}=\frac{B}{3}\times 3^n$$
$$B\times 3^n-2\times\frac{B}{3}\times 3^n=\frac{4}{3}\times 3^n\Rightarrow B=4$$
$$a_n=A\times 2^n+4\times 3^n$$
$$n=1;\ 18=A\times 2+4\times 3\Rightarrow A=3$$
$$a_n=3\times 2^n+4\times 3^n$$

نمونهٔ ۳. با داشتن رابطهٔ بازگشتی

$$a_n=5a_{n-1}+4\times 5^n,\ a_1=23$$

به ترتیب قبل داریم

$$a_n=u_n+v_n,\ a_1=23$$
$$u_n=5u_{n-1}\Rightarrow u_n=A\times 5^n$$

اکنون اگر $v_n=B\times 5^n$ اختیار کنیم، خواهیم داشت

$$B\times 5^n-5\times B\times 5^{n-1}=B\times 5^n-B\times 5^n=4\times 5^n$$

و این رابطه به برابریِ نشدنی $4\times 5^n=0$ می‌انجامد. در این حالت، $v_n=Bn\times 5^n$ را انتخاب می‌کنیم و داریم

$$v_{n-1}=B(n-1)\times 5^{n-1}=\frac{B(n-1)}{5}\times 5^n$$

$$Bn\times 5^n-5\times\frac{B(n-1)}{5}\times 5^n=4\times 5^n\Rightarrow B=4$$

$$v_n=4n\times 5^n;\ a_n=A\times 5^n+4n\times 5^n,$$

$$n=1;\ 23=A\times 5+4\times 5\Rightarrow A=\frac{3}{5}$$

$$a_n=\frac{3}{5}\times 5^n+4n\times 5^n=(\frac{3}{5}+4n)\times 5^n.$$

حالت پنجم. تابع $f(n)$ ترکیبی از تابع‌های به صورت‌های گوناگون باشد. در این حالت، a_n را همان ترکیب از u_n، v_n، w_n، ...، می‌گیریم و همان روش کلّی را به‌کار می‌بریم.

برای نمونه، اگر داشته باشیم

$$a_n = ۲a_{n-۱} - \frac{۳n^۲ - ۸n + ۷}{۲^n} + ۱۵ \times ۷^n,\ a_۱ = ۱۰۰$$

می‌پذیریم که

$$a_n = u_n + v_n + w_n,\ a_۱ = ۱۰۰$$

$$u_n = ۲u_{n-۱} \Rightarrow u_n = A \times ۲^n$$

$$v_n = \frac{Bn^۲ + Cn + D}{۲^n},\ w_n = E \times ۷^n$$

$$v_{n-۱} = \frac{Bn^۲ - (۲B - C)n + B - C + D}{۲^{n-۱}}$$

$$= \frac{۲\left[Bn^۲ - (۲B - C)n + B - C + D\right]}{۲^n}$$

$$v_n - ۲v_{n-۱} = \frac{-۳Bn^۲ + (۸B - ۳C)n - ۴B + ۴C - ۳D}{۲^n}$$

$$\equiv \frac{-۳n^۲ - ۸n + ۷}{۲^n}$$

$$B = ۱,\ C = ۰,\ D = ۱,\ v_n = \frac{n^۲ + ۱}{۲^n}$$

$$w_{n-۱} = E \times ۷^{n-۱} = \frac{E}{۷} \times ۷^n$$

$$E \times ۷^n - \frac{۲E}{۷} \times ۷^n = ۱۵ \times ۷^n \Rightarrow E = ۲۱,\ w_n = ۲۱ \times ۷^n$$

$$a_n = A \times ۲^n + \frac{n^۲ + ۱}{۲^n} + ۲۱ \times ۷^n$$

$$n = ۱;\ ۱۰۰ = ۲A + ۱ + ۲۱ \times ۷ \Rightarrow A = -۲۴$$

$$a_n = -۲۴ \times ۲^n + \frac{n^۲ + ۱}{۲^n} + ۲۱ \times ۷^n$$

تمرین

۱ـ بنابر آن که $a_n = ۵n(n-۱) + ۵^n$، رابطه‌های مربوط به $a_{n+۱}$ و $a_{n-۱}$ را به‌دست آورید.

۲ـ هرگاه داشته باشید

$$a_n = ۳a_{n-۱} + ۲n^۲ - n + ۱,\ a_{n+۱} = ۳a_n + f(n)$$

ضابطهٔ تابع $f(n)$ را به دست آورید.

۳ـ از راه تشکیل یک معادلهٔ مشخصه و رابطهٔ بازگشتی نظیر آن، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$S = (۳ + ۲\sqrt{-۵})^۷ + (۳ - ۲\sqrt{-۵})^۷$$

۴ـ تابع $\frac{۳x + ۲}{x^۲ + ۳x - ۴}$ مولد کدام دنباله است؟

۵ـ رابطه‌های بازگشتی زیر را حل کنید.

۱) $a_{n+۱} = ۴a_n,\ a_۱ = ۱۶$

۲) $a_n = a_{n-۱} - ۲\sqrt{۲},\ a_۱ = ۳$

۳) $a_n = -۳a_{n-۱} + ۷,\ a_۱ = ۱۴$

۴) $a_{n+۱} = ۲a_n + n^۲ - ۳$

۵) $a_n = ۶a_{n-۱} + ۵ \times ۲^n$

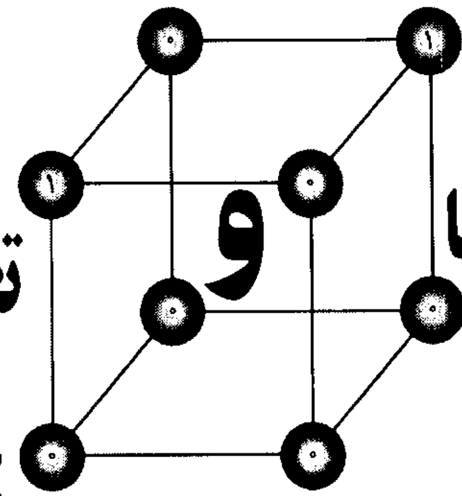
زیرنویس

* لازم به توضیح است که اعمالی چون مشتق گرفتن از یک سری نامتناهی یا ضرب کردن آن در یک چندجمله‌ای دیگر، تنها در صورتی مجاز است که بدانیم آن سری، همگرا است.

** از قاعدهٔ ادغام هم می‌توان استفاده کرد.

■

عمل‌ها و تغییرناپذیرها



رضا درّی گیو
دانشجوی کارشناسی مهندسی کامپیوتر
دانشگاه صنعتی شریف

۱ـ مقدمه

هدف این مقاله، رده‌بندی یک سری از مسایل در یک قالب کلی و سپس، تلاش برای یافتن یک راه حل عمومی برای آن‌هاست. ما یک رده از این مسایل را، عمل‌ها و تغییرناپذیرها نامیده‌ایم. شکل کلی این مسایل این گونه است: «یک عمل داریم که با هر بار انجام آن، از یک وضعیت مسأله به وضعیتی دیگر می‌رسیم. حال آیا با تعداد متناهی تکرار این عمل، می‌توان از یک وضعیت ویژه به وضعیت مشخص دیگری رسید؟»

به عبارت دیگر، ما در این جا با سه عنصر روبه رو هستیم: **وضعیت اولیه، عمل مورد نظر و وضعیت نهایی**. به عنوان مثال ساده، فرض کنید در ابتدا عدد ۱۷ را داریم و در هر مرحله، می‌توانیم یک عدد زوج دلخواه به این عدد اضافه یا از آن کم کنیم. آیا با تعداد متناهی تکرار این عمل، می‌توان به عدد ۰ رسید؟

روش ما در این مقاله، به ارایهٔ مثال‌های متعدد متکّی است (ایدهٔ اکثر این مثال‌ها، از المپیادهای ریاضی و کامپیوتر ایران و دیگر کشورهای جهان گرفته شده است).

این گونه مسایل را به دو دستهٔ کلی می‌توان تقسیم کرد. ما مشخصات هر بخش را جداگانه معرفی کرده، یک راه حل کلی برای هر بخش ارایه می‌دهیم و بعد، در هر مورد، مثال‌هایی ارایه می‌کنیم. این دو دسته را «مسایلی با ویژگی تغییرناپذیر» و «مسایلی با تغییرپذیرهای قابل پیش‌بینی»، نامیده‌ایم.

۲ـ مسایلی با ویژگی تغییرناپذیر

در بسیاری از مسایلی که می‌خواهیم ثابت کنیم، رسیدن از یک وضعیت به وضعیت دیگر، باهر تعداد تکرار عملِ خاصی، امکان‌پذیر نیست. پس بهتر است ابتدا «تغییرناپذیرمسأله» را مشخص کنیم. منظور از تغییرناپذیر، ویژگی خاصی از وضعیت مسأله است که ضمن عمل مورد نظر، تغییر نمی‌کند. به عنوان مثال، اگر عمل ما جمع کردن اعداد صحیح با عدد ۲ باشد، یکی از تغییرناپذیرهای مسأله، زوج یا فرد بودن اعداد است. پس از پیدا کردن تغییرناپذیر، اگر نشان دهیم ویژگی تغییرناپذیر در وضعیت اولیه و نهایی، متفاوت است، در حقیقت ثابت کرده‌ایم با هر تعداد متناهی تکرارِ عمل فوق، نمی‌توان از وضعیت اولیه به وضعیت نهایی رسید.

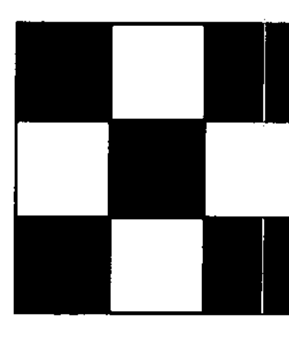
مثال‌های زیر موضوع راروشن‌تر می‌کنند.

مثال (۲ـ۱) جدول مربعی ۳×۳ با عددهای صحیح مطابق شکل صفحهٔ بعد، پر شده است. در هر حرکت، به دو عدد مجاور جدول، عددی یکسان (مثبت یا منفی) اضافه می‌کنیم (دو عدد را مجاور گوییم هرگاه خانه‌های آن‌ها در یک ضلع مشترک باشند). آیا می‌توان با چند بار تکرار این عمل، همهٔ خانه‌های این جدول را برابر صفر کرد؟ (این مسأله با اندکی تغییر، در مرحلهٔ اول هشتمین المپیاد ملّی کامپیوتر ایران آمده است، [۴]).

۰	۳	۳
۶	۷	۰
۴	۹	۵

بررسی مسأله . ابتدا عناصر مسأله را مشخص می‌کنیم. وضعیت اولیه همان جدول داده شده است. عملِ مورد نظر، همان حرکت ذکر شده در مثال می‌باشد. وضعیت نهایی نیز جدولی با ۹ رقم صفر است. حال می‌خواهیم تغییرناپذیر این مسأله را پیدا کنیم. (روی آن فکر کنید!)

برای رسیدن به پاسخ، در ذهن خود، جدول ۳×۳ را به صورت زیر شطرنجی می‌کنیم. اکنون با کمی دقّت، در می‌یابیم که از هر دو خانهٔ مجاور در جدول، یکی سفید و دیگری سیاه است. پس در هر حرکت، عددی یکسان به یک خانهٔ سفید و نیز به یک خانه سیاه، اضافه (یا کم) شده است. پس اگر مجموع ارقام همه خانه‌های سیاه را B و مجموع ارقام همه خانه‌های سفید را W بنامیم، در هر حرکت B و W به یک اندازه تغییر می‌کنند، و تفاضل آن‌ها یعنی $D=B-W$ ثابت می‌ماند. پس D، تغییرناپذیر مسأله است. حال تغییرناپذیر را در وضعیت‌های اولیّه و نهایی، بررسی می‌کنیم.

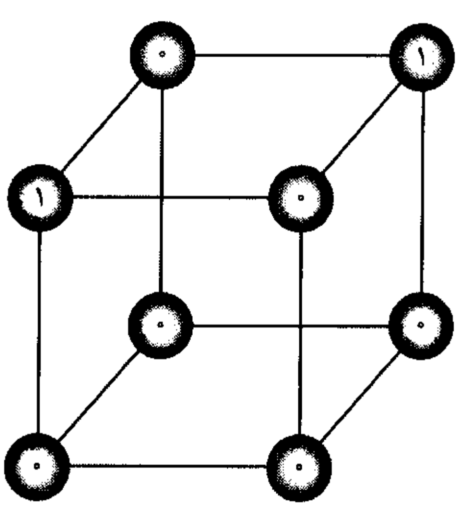


داریـــم، $D_0 = B_0 - W_0 = 19 - 18 = 1$ و $D_n = 0 - 0 = 0$

چون ویژگی تغییرناپذیر در وضعیت اولیه و نهایی یکسان نبود، نتیجه می‌گیریم با هر تعداد متناهیِ اجرای حرکت فوق، نمی‌توان همه خانه‌های جدول را برابر صفر کرد.

نکته (۲ـ۱) توجه کنید که اگر تغییرناپذیر مورد نظر ما، در وضعیت اولیه و نهایی یکسان بود، نمی‌توان نتیجه گرفت رسیدن از وضعیت اولیه به وضعیت نهایی با عمل فوق، قطعاً امکان‌پذیر است. برای اثبات امکان‌پذیر بودن، باید عملاً این کار را انجام دهیم. یعنی الگوریتمی برای رسیدن از وضعیت اولیه به نهایی ارایه دهیم. گاهی نیز ممکن است با انتخاب یک تغییرناپذیر دیگر، نتیجه گرفت که این عمل، اساساً امکان‌پذیر نیست (نکتهٔ ۳ـ۲).

تمرین (۲ـ۱) در هر رأس مکعب، عددی نوشته‌ایم. در هر گام (مرحله)، به دو عددی که روی یک یال دلخواه قرار دارند، یک واحد اضافه کرده‌ایم. آیا می‌توان بعد از چند گام، هر ۸ عدد را مساوی کرد به شرطی که عددهای اولیه، مطابق شکل، در مکعب جای گرفته باشند؟ (پانزدهمین المپیاد سراسری شوروی ـ ۱۹۸۱، [۱])



تمرین (۲ـ۲) روش مثال (۲ـ۱) را برای جدول‌های ۵×۵ بررسی کنید. آیا فکر می‌کنید می‌توان این روش را برای جدول‌های ۴×۴ نیز به کار برد؟

نکته (۲ـ۲) در بسیاری از مسایلِ مربوط به عمل‌ها و تغییرناپذیرها، زوج یا فرد بودن اعداد، نقشی اساسی دارند و غالباً ابزاری نیرومند و مفید هستند. به عنوان مثال، از

این واقعیت ساده که جمع کردن یک عدد با عددی زوج، زوج یا فرد بودن آن عدد را تغییر نمی‌دهد، در بسیاری از مسایل می‌توان استفاده کرد. به مثال‌های زیر، توجه کنید.

مثال (۲ـ۲) ابتدا برای آن که نشان دهیم در حل برخی مسایل، می‌توان تغییرناپذیرهای مختلفی را به کار برد، مثال (۲ـ۱) را به طریقی دیگر حل می‌کنیم. فرض کنید S_i مجموع تمام ارقام جدول پس از i بار انجام حرکت فوق باشد. می‌دانیم در هر حرکت به دو خانهٔ مجاور، عددی دلخواه (مثبت یا منفی) که آن را K می‌نامیم اضافه شده است. پس در هر مرحله، S به اندازهٔ ۲K تغییر می‌کند (K در هر مرحله می‌تواند متفاوت باشد). از طرفی، چون ۲K زوج است طبق نکتهٔ (۲ـ۲) زوج یا فرد بودن S تغییر نمی‌کند. پس زوج یا فرد بودن S را می‌توان به عنوان تغییرناپذیر مسأله انتخاب کرد. حال، به وضعیت‌های اولیه و نهایی توجه می‌کنیم. داریم: $S_\circ = ۳۷$ و $S_n = \circ$. چون $S_\circ$ فرد و S_n زوج است، نمی‌توان از حالت اولیه به حالت نهایی رسید.

نکتهٔ (۲ـ۳) توجه کنید که قدرت تغییرناپذیرهای مختلف گوناگون است. مثلاً ممکن است یک تغییرناپذیر ما را به جواب برساند، اما دیگری بی‌نتیجه باشد. به عنوان مثال، اگر در جدول اولیه، همهٔ اعداد صفر باشند و در جدول نهایی، یکی از اعداد ۲ و بقیه صفر باشند، تغییرناپذیر ارایه شده در مثال (۲ـ۲) ما را به نتیجه‌ای نمی‌رساند ولی تغییرناپذیر مثال (۲ـ۱) مفید واقع می‌شود.

تمرین (۲-۳) مثالی بزنید که استفاده از روش مثال ۱-۲ ما را به نتیجه‌ای نرساند ولی راه‌حل مثال ۲-۲ برای آن مفید باشد.

مثال (۲ـ۳) روی تختهٔ گچی، همهٔ اعداد از ۱ تا ۱۳۸۱ را نوشته‌ایم. هر بار دو عدد دلخواه را پاک می‌کنیم و به جای آن‌ها، تفاضلشان را می‌نویسیم. ثابت کنید هرچند بار و به هر نحوی این عمل را تکرار کنیم، نمی‌توانیم به حالتی برسیم که روی تختهٔ گچی، تنها عدد صفر باقی مانده باشد (المپیاد ریاضی لنینگراد ـ ۱۹۶۶ ـ با تغییر در اعداد).

بررسی مسأله. S_i را برابر مجموع اعداد روی تختهٔ گچی بعد از i بار اجرای عمل فوق بگیرید. در هر مرحله، دو عدد دلخواه a و b (با فرض $a > b$) را پاک کرده و به جای آن‌ها، عدد a-b را قرار می‌دهیم. پس S در هر مرحله به اندازه $(a+b)-(a-b) = ۲b$ واحد کاهش می‌یابد. از سوی دیگر، چون ۲b عددی زوج است، زوج یا فرد بودن S در هر مرحله، بدون تغییر می‌ماند. پس، تغییرناپذیر این مسأله را زوج یا فرد بودن S می‌گیریم. داریم $S_\circ = ۱+۲+\cdots+۱۳۸۱$ که با توجه به فرمول $۱+۲+\cdots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$، به دست می‌آید

$$S_\circ = \frac{۱۳۸۱ \times ۱۳۸۲}{۲} = ۱۳۸۱ \times ۶۹۱$$

یعنی $S_\circ$ فرد است، در حالی که $S_n = \circ$ زوج است. پس هرچند بار که عمل فوق را تکرار کنیم، نمی‌توانیم از حالت اولیه به حالت نهایی برسیم.

تمرین (۲ـ۴) اگر در مثال فوق، ۱۳۸۱ را به ۱۳۸۰ تبدیل کنیم، چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

تمرین (۲ـ۵) رشتهٔ abbaaabb را در نظر بگیرید. در هر مرحله، می‌توانیم به ازای یک i دلخواه جای حرف iام و i+۲ اُم رشته را (در صورت وجود) عوض کنیم. آیا پس از تعدادی مرحله، می‌توانیم به رشتهٔ abbaabab برسیم؟ (مرحلهٔ اول نهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۷۷، [۴])

(راهنمایی: روی تعداد aهای موجود در مکان‌های فرد، فکر کنید.)

ایدهٔ زوج و فرد بودن را می‌توان به بخش‌پذیری بر اعداد بزرگ‌تر از ۲ تعمیم داد. مثال‌های زیر را ملاحظه کنید.

مثال (۲ـ۴) دو ماشین در اختیار داریم که هر کدام، یک کارت را که بر روی آن یک عدد مثل a نوشته شده است، به عنوان ورودی دریافت می‌کند و یکی از آن‌ها، یک کارت که بر روی آن عدد a+۳ نوشته شده است و دیگری یک کارت که بر روی آن عدد ۲a نوشته شده است را تولید می‌کند. درابتدا، یک کارت که بر روی آن عدد (۱) نوشته شده است در اختیار داریم. آیا می‌توان با استفاده از این ماشین‌ها،

یک کارت ایجاد کرد که بر روی آن، عدد ۱۲ نوشته شده باشد؟ (مرحله اول هفتمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۷۵)

بررسی مسأله. با کمی دقت، معلوم می‌شود که اعمال مذکور، بخش‌پذیری بر ۳ را تغییر نمی‌دهند. یعنی اگر a بر ۳ بخش‌پذیر باشد، a+۳ و ۲a نیز بر بخش‌پذیرند و اگر a بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، a+۳ و ۲a نیز بر ۳ بخش‌پذیر نخواهند بود. پس، تغییرناپذیر مسأله، بخش‌پذیری اعداد روی کارت بر ۳ است. حال در حالت اولیه، ۱ بر ۳ بخش‌پذیر نیست در حالی که در حالت نهایی، ۱۲ بر ۳ بخش‌پذیر است. پس عمل فوق امکان ندارد.

تمرین (۲ـ۶) سه کامپیوتر کوچک، کارت‌هایی را که روی آن‌ها زوج عددهای طبیعی یادداشت شده‌اند را به عنوان ورودی دریافت کرده و کارت‌های جدیدی تولید می‌کنند. اولی با گرفتن کارت (a,b) کارت (a+۱ , b+۱) و دومی $\left(\frac{a}{۲} , \frac{b}{۲}\right)$ بر می‌گردانند. (دومی تنها در صورتی کار می‌کند که a و b اعدادی زوج باشند.) سومی با گرفتن دو کارت (a , b) و (b , c) کارت (a , c) را برمی‌گرداند. آیا با شروع از کارت (۱۹ , ۵) و استفاده از این ماشین‌ها، به هرترتیبی می‌توان به کارت (۱۰۰ , ۱) رسید؟ (دوازدهمین المپیاد سراسری شوروی ـ ۱۹۷۸، [۱])

تمرین (۲ـ۷) سه ماشین تحریر کامپیوتری با گرفتن کارتی که روی آن دو عدد نوشته شده است، یک کارت جدید با دو عدد بر می‌گردانند. اولی با گرفتن کارت (m,n) کارت $(m-n,n)$ را برمی‌گرداند. دومی با دریافت کارت (m,n) کارت $(m+n,n)$ را بر می‌گرداند و سومی با گرفتن کارت (m,n)، کارت (n,m) را برمی‌گرداند. آیا با استفاده از این سه ماشین، می‌توان از کارتی که روی آن اعداد (۲۱ , ۱۸) نوشته شده به کارتی رسید که روی آن، اعداد (۴, ۸) نوشته شده است؟ (از کتاب آمادگی برای المپیادهای ریاضی، [۶])

مثال (۲ـ۵) روی ۴۴ درختی که روی محیط یک دایره قرار گرفته‌اند، ۴۴ گنجشک نشسته‌اند (روی هر درخت یک گنجشک). هر چند لحظه یک بار دو تا از گنجشک‌ها پرواز می‌کنند و هر کدام روی درخت مجاور خود می‌نشینند، اما پروازهای آن‌ها، در جهت مخالف هم است (یکی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و دیگری درخلاف جهت آن)، آیا این امکان وجود دارد که پس از مدتی، گنجشک‌ها روی یک درخت جمع شوند؟ (از کتاب «مسأله‌های ریاضی، آسان ولی...»، [۵])

بررسی مسأله. درخت‌ها را به ترتیب از ۱ تا ۴۴ شماره‌گذاری می‌کنیم (درخت با شماره i بین درخت‌های با شمارهٔ i−۱ و i+۱ روی محیط دایره قرار دارد ($۲ \leq i \leq ۴۳$) و درخت با شمارهٔ ۴۴ بین درخت با شماره ۴۳ و درخت با شمارهٔ ۱ قرار دارد.) فرض کنید پس از i مرحله روی درخت با شماره k، d_k تا گنجشک قرار بگیرند. تعریف می‌کنیم

$$S_i = \sum_{k=۱}^{۴۴}(kd_k)$$

با کمی دقت مشخص می‌شود $S_{i+۱}$ یا با S_i مساوی است یا با آن ۴۴ واحد تفاوت دارد (چرا؟) پس بخش‌پذیری S_i بر ۴۴ تغییرناپذیر مسأله است. حال داریم

$$S_۰ = \sum_{k=۱}^{۴۴}(۱\times k) = \frac{۴۴\times۴۵}{۲}$$

که بر ۴۴ بخش‌پذیر نیست، در حالی که درحالت نهایی، اگر همه گنجشک‌ها روی درخت با شماره a جمع شوند، داریم $S_n = ۴۴a$ و S_n بر ۴۴ بخش‌پذیر است. پس این موضوع امکان‌پذیر نیست.

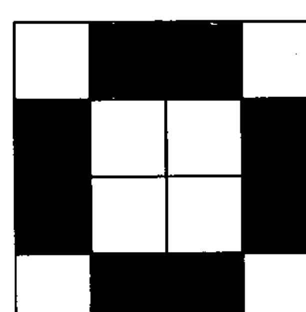
نکته (۲ـ۴) همان گونه که در مثال‌های بالا، ایدهٔ زوج و فرد بودن را به بخش‌پذیری بر اعداد گسترش دادیم، در مورد مسایل مربوط به جداول نیز می‌توان ایدهٔ رنگ‌آمیزی را که در مثال (۲ـ۱) دیدیم گسترش داد. تعمیم شطرنجی کردن را در مثال‌های (۳ـ۱) و (۳ـ۳) و (۳ـ۴) نشان خواهیم داد. حال به مثال زیر توجه کنید.

مثال (۲ـ۶) در جدول ۴×۴، علامت‌های (+) و (−) را مطابق شکل روبرو قرار داده‌ایم. تصمیم می‌گیریم

علامت همهٔ خانه‌هایی را که در یک سطر یا یک ستون یا به روی خط راستی موازی یک قطر (و در حالت خاص یکی از خانه‌های گوشه‌ای) قرار دارند، به طور هم‌زمان عوض کنیم. ثابت کنید اگر این عمل را هرچند بار انجام دهیم، به جدولی نمی‌رسیم که همهٔ علامت خانه‌های آن مثبت باشد. (دومین المپیاد سراسری شوروی ـ ۱۹۶۸، [۱])

+	−	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

بررسی مسأله. جدول را به شکل زیر رنگ‌آمیزی می‌کنیم. با کمی دقت معلوم می‌شود هر سطر یا ستون یا هر خط راست موازی یک قطر شامل ۰ یا ۲ خانهٔ سیاه، یعنی تعداد زوجی خانهٔ سیاه است. پس تعداد (−)های موجود در خانه‌های سیاه در هرگام، یا تغییر نمی‌کند یا دو تا تغییر می‌کند. پس زوج یا فرد بودن تعداد (−)های موجود در خانه‌های سیاه، تغییرناپذیر مسأله است. درحالت اولیه، این مقدار، فرد (۱) و در حالت نهایی، زوج (۰) است. پس این کار امکان ندارد.



۳ـ تغییرپذیرهای قابل پیش‌بینی

گاهی در برخی مسایل، ضمن انجام یک عمل، یک ویژگی مسأله نیز تغییر می‌کند، اما این تغییرات به صورت منظم و قابل پیش‌بینی صورت می‌گیرد، به طوری که می‌توان نتیجهٔ نهایی را پیش‌بینی کرد، در این گونه موارد، اگر نشان دهیم نتیجهٔ پیش‌بینی شده با وضعیت نهایی واقعی تفاوت دارد، در واقع نشان داده‌ایم با عمل فوق، نمی‌توان از حالت اولیه به حالت نهایی رسید. مثال‌های زیر، موضوع را روشن‌تر می‌کنند.

مثال (۳ـ۱) موشی با خوردن مکعب‌های ۱×۱×۱ در یک قطعه پنیر با ابعاد ۳×۳×۳، راه خود را باز می‌کند. اگر موش کارش را از یک گوشه مکعب شروع کند و هیچ‌گاه به مکعبی که قبلاً خورده شده است نرود، آیا می‌تواند با تونل‌زدن در این مکعب، تمام ۲۷ مکعب ۱×۱×۱ را بخورد و کارش را نیز در مرکز مکعب تمام کند؟ (المپیاد ریاضی یوگسلاوی ـ ۱۹۸۱، [۲])

بررسی مسأله. برای حل این مسأله، از ایدهٔ شطرنجی کردن در سه بُعد استفاده می‌کنیم. منظور از شطرنجی کردن، رنگ‌آمیزی خانه‌ها یا واحدها با دو رنگ به گونه‌ای است که رنگ هر واحد با همهٔ واحدهای مجاور آن، متفاوت باشد (مانند صفحهٔ شطرنج).

در این مسأله نیز، ۲۷ مکعب ۱×۱×۱ را با دو رنگ آبی و قرمز به گونه‌ای رنگ‌آمیزی می‌کنیم که هر مکعب، با مکعب‌های مجاور خود، رنگی متفاوت داشته باشد (دو مکعب را مجاور گوییم اگر یکی از سطوح آن‌ها، مشترک باشد). واضح است که موش در هر حرکت از هر خانه می‌تواند به خانه‌های مجاور آن برود. پس در هر حرکت، رنگ خانه‌ای که موش در آن قرار دارد، تغییر می‌کند. حال چون ۲۷ مکعب داریم و موش باید هر ۲۷ تا را بخورد و در نهایت به خانه مرکزی برسد، چون ۲۷ عددی فرد است، پس رنگ خانهٔ ابتدایی (یک گوشه مکعب) و خانه نهایی (مرکز مکعب)، باید یکسان باشد. اما اگر عملاً مکعب را شطرنجی کنیم، درمی‌یابیم که این دو خانه باید رنگی متفاوت داشته باشند (امتحان کنید!) پس پیش‌بینی ما با واقعیت در تناقض است. بنابراین، عمل فوق امکان ندارد.

همان‌طور که دیدید، در حل مسألهٔ بالا، از دو ایدهٔ

متداول شطرنجی کردن و زوج وفرد بودن به طورهم‌زمان، استفاده شد. اکثر مسایل دیگر این قسمت نیز، از این دو ایده استفاده می‌کنند. مسألهٔ زیر تا حدودی با مسایل دیگر این مقاله، متفاوت است.

مثال (۳ـ۲) یک جدول ۶×۱ را در نظر بگیرید که در هر خانهٔ آن، یک سکه به رو قرار دارد. در هر مرحله، دو خانهٔ مجاور را انتخاب کرده و سکه‌های موجود در آن خانه‌ها را پشت و رو می‌کنیم. این کار را آن‌قدر انجام می‌دهیم تا سکه‌های موجود در همهٔ خانه‌ها، به پشت برگردند. در این صورت، کار متوقف می‌شود. آیا کار پس از دقیقاً ۲۰ مرحله می‌تواند متوقف شود؟ (مرحله اول نهمین المپیاد ملی کامپیوتر ایران ـ ۱۳۷۷، [۴])

بررسی مسأله. در هر مرحله سکه‌های موجود در خانه‌های i و $i+1$ به ازای یک $1 \le i \le 5$ پشت و رو می‌شوند. به ازای $1 \le i \le 5$ فرض کنید S_i تعداد دفعاتی باشد که در آن، سکه‌های با شماره i و $i+1$ پشت و رو شده‌اند. چون سکهٔ موجود در خانهٔ اول تنها S_1 بار پشت و رو شده و درابتدا به رو و در انتها به پشت بوده، پس باید S_1 فرد باشد. به طور مشابه، سکه‌های موجود در همهٔ خانه‌ها باید به تعداد فرد، پشت و رو شده باشند. سکهٔ موجود در خانه دوم، $S_1 + S_2$ بار پشت و رو شده و چون S_1 فرد است، باید S_2 زوج باشد. در نتیجه، چون سکهٔ موجود در خانهٔ سوم، $S_2 + S_3$ بار پشت و رو شده، S_3 فرد است. به همین ترتیب، نتیجه گرفته می‌شود S_4 زوج و S_5 فرد است. از آن جا که تعداد کل حرکات برابر است با

$\sum_{i=1}^{5} S_i$، و از این ۵ عدد ۳ تا فرد و دو تا زوج هستند، تعداد کل حرکات، عددی فرد بوده و نمی‌تواند برابر ۲۰ باشد.

تمرین (۳ـ۱) یک جدول ۷×۱ درنظر بگیرید که در همه خانه‌های آن، یک سکه به رو قرار دارد. در هر مرحله دو خانهٔ مجاور را انتخاب کرده و سکه‌های موجود در آن خانه‌ها را پشت و رو می‌کنیم. این کار را آن‌قدر انجام می‌دهیم تا سکه‌های موجود در همهٔ خانه‌ها به پشت برگردند. در این صورت، کار متوقف می‌شود. آیا پس از تعداد متناهی تکرار این عمل، می‌توان کار را متوقف کرد؟

مثال (۳ـ۳) در یک صفحه کاغذ شطرنجی که از همه طرف تا بی نهایت ادامه دارد، همهٔ خانه‌های یک مستطیل $3k \times n$ را با مهره‌هایی پوشانده‌ایم. در هر حرکت، هر مهره می‌تواند از روی هر مهرهٔ دیگر مجاور خود بجهد (قائم یا افقی)، و در خانهٔ مجاور آن به شرطی که خالی باشد، بنشیند. بعد از این حرکت باید مهره‌ای را که از روی آن پرش شده است از صفحه خارج کرد. ثابت کنید هرگز به وضعی نمی‌رسیم که تنها یک مهره روی صفحه باقی بماند. (المپیاد ریاضی لهستان ـ ۱۹۸۲، [۲])

بررسی مسأله. برای حل مسأله، تمام خانه‌های صفحهٔ کاغذ را به شکل روبرو با اعداد ۱ و ۲ و ۳ (یا با سه رنگ) نام‌گذاری می‌کنیم. (تعمیم شطرنجی کردن)

۲	۱	۳	۲	۱	۳
۳	۲	۱	۳	۲	۱
۱	۳	۲	۱	۳	۲
۲	۱	۳	۲	۱	۳
۳	۲	۱	۳	۲	۱
۱	۳	۲	۱	۳	۲

حال، در هر سه خانه پشت سر هم به صورت عمودی یا افقی از هر کدام از شماره‌ها دقیقاً یکی وجود دارد. فرض کنید A_1 تعداد خانه‌های با شماره ۱ باشد که در آن‌ها، مهره قرار دارد و A_2 و A_3 نیز به‌طور مشابه، تعریف شوند. حال در هر حرکت به یکی از این سه عدد یک واحد اضافه شده و از دوتای دیگر، هر کدام یک واحد کم می‌شود (چرا؟) پس در هر مرحله، زوجیت و فردیت هر سه عدد به‌طور هم‌زمان، عوض می‌شود. یعنی اگر عددها زوج باشند فرد و اگر فرد باشند زوج می‌شوند. در ابتدا داریم $A_1 = A_2 = A_3 = kn$ (چرا؟) پس زوجیت و فردیت هر ۳ عدد مانند هم است. بنابراین، با هر تعداد تکرار این عمل نیز، باید زوجیت و فردیت این ۳ عدد یکسان بماند.

در حالی که در پایان، یکی از این سه عدد ۱ و دو تای دیگر ۰ هستند، یعنی یکی فرد و دوتای دیگر زوج هستند

که امکان‌پذیر نیست.

تمرین (۳-۲) روی تختهٔ گچی چند ۰ و ۱ و ۲ نوشته شده است. در هرگام، دو عدد نابرابر را پاک می‌کنیم و به جای آن‌ها، عدد سوم را می‌نویسیم. (به جای ۰ و ۱، عدد ۲، به جای ۰ و ۲ عدد ۱ و به جای ۱ و ۲، عدد ۰). ثابت کنید اگر بعد از چند گام، تنها یک عدد باقی بماند، این عدد بستگی به این ندارد که گام‌ها را به چه ترتیبی برداشته‌ایم؟ (نهمین المپیاد سراسری شوروی ـ ۱۹۷۵، [۱])

مثال (۳-۴) یک شبکهٔ فراگیر $m \times n$، شامل mn نقطه است که در m ردیف و n ستون قرار گرفته‌اند. یک مسیر فراگیر دراین شبکه، مسیری است که از گوشهٔ بالا و سمت چپ آغاز شده و از هر نقطهٔ شبکه، دقیقاً یک بار عبور کند و به نقطهٔ گوشه پایین و سمت راست شبکه برسد. در طی این مسیر، تنها مجازیم که از هر نقطه، به یکی از نقاط سمت راست، چپ، بالا یا پایین آن، در صورت وجود برویم. ثابت کنید مسیر فراگیر، تنها در صورتی وجود دارد که دست کم، یکی از دو عدد n و m فرد باشند. (مرحله دوم هشتمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۷۷، [۴])

بررسی مسأله. دوباره از ایدهٔ شطرنجی کردن استفاده می‌کنیم. نقطه‌ها را به گونه‌ای با دو رنگ آبی و قرمز رنگ‌آمیزی می‌کنیم که همهٔ خانه‌های مجاور یک نقطه (بالا و پایین و چپ و راست در صورت وجود) رنگشان متفاوت با آن نقطه باشد. حال اگر فرض کنیم m و n هر دو زوج باشند، می‌خواهیم ثابت کنیم مسیر فراگیر وجود ندارد. فرض کنید نقطهٔ بالا و سمت چپ آبی باشد. حال، رنگ نقطهٔ پایین و سمت راست را پیش‌بینی می‌کنیم. چون n زوج است، رنگ نقطهٔ بالا و سمت راست، مخالف نقطهٔ بالا و سمت چپ است، یعنی قرمز است به همین ترتیب، چون m زوج است، رنگ نقطهٔ پایین و سمت راست مخالف رنگ نقطهٔ بالا و سمت راست است، یعنی آبی است. پس رنگ نقطهٔ شروع و پایان مسیر فراگیر، یکسان است. از سوی دیگر، چون هر نقطه دقیقاً یک بار در مسیر فراگیر ظاهر شده، اگر دنبالهٔ نقاطی را که در مسیر فراگیر آمده به ترتیب بنویسیم، دقیقاً mn نقطه خواهیم داشت. از سوی دیگر، چون از هر نقطه فقط می‌توان به نقاط مجاور آن رفت، پس رنگ نقطه‌های این دنباله یک در میان آبی و قرمز خواهد بود. حال اگر نقطهٔ شروع آبی باشد، چون تعداد نقاط زوج است، نقطه پایان قرمز خواهد بود. در حالی که قبلاً نتیجه گرفتیم نقطه پایان آبی است. در نتیجه اگر m و n هر دو زوج باشند، مسیر فراگیر وجود ندارد. از سوی دیگر، درحالتی که حداقل یکی از m و n فرد باشند، مسیر فراگیر به سادگی یافت می‌شود (چگونه؟). پس مسیر فراگیر، تنها در صورتی وجود دارد که دست کم یکی از m و n فرد باشند.

تمرین (۳-۳) در رأس A_1 از دوازده ضلعی منتظم $A_1A_2\ldots\ldots A_{12}$، علامت منفی و در بقیه رأس‌ها، علامت مثبت گذاشته‌ایم. تصمیم می‌گیریم به طور هم‌زمان، علامت ۶ رأس متوالی را عوض کنیم. ثابت کنید نمی‌توان با تکرار چند بار این عمل، به جایی رسید که علامت رأس A_2 منفی و علامت بقیه رأس‌ها مثبت باشد (پنجمین المپیاد سراسری شوروی ـ ۱۹۷۱، [۱]).

■

منابع و مآخذ

[۱] مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی، نیکلای یوری سورویچ واسیلیف، آندره الکساندرویچ یه‌گوروف؛ ترجمهٔ پرویز شهریاری، نشر توسعه، ۱۳۶۹.

[۲] مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف، تألیف جمعی از مؤلفان شوروی؛ ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات فردوس، ۱۳۶۸.

[۳] المپیادهای ریاضی لنینگراد از سال ۱۹۶۱ به بعد، ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات اینشتین، ۱۳۷۴.

[۴] مسأله‌های المپیادهای کامپیوتر و ریاضی ایران، مرحلهٔ اول و مرحلهٔ دوم، سال‌های مختلف..

[۵] مسأله‌های ریاضی، آسان، ولی...، آ. ای. اوستروسکی، س. آ. مالچانوف، آ. ک. تولپیکو، آ. ال. روزنتال، ا. ب. دینکین؛ ترجمهٔ پرویز شهریاری، نشر گستره، ۱۳۶۳.

[۶] آمادگی برای المپیادهای ریاضی، ن. ب. واسیلیف، و. ل. گوتنماخر، ژ. م. رابوت، آ. ال. توم؛ ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات فاطمی، ۱۳۶۹.

حقیقتی ساده دربارهٔ بردارهای ویژه که احتمالاً، شما نمی‌دانید

نویسنده: وارن پی. جانسون
مترجمان: محمّد علی دهقانی، دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه یزد
سپیده چمن‌آرا، دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی

درس را با مثالی برای محاسبهٔ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه شروع کنید. مثلاً ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۵ & ۲ \\ ۳ & ۶ \end{pmatrix}$ را حل می‌کنیم. مقادیر ویژه، جواب‌های معادلهٔ

$$(۵ - \lambda)(۶ - \lambda) - ۲ \times ۳ = ۰$$

هستند که $\lambda_1 = ۳$ و $\lambda_2 = ۸$. برای پیدا کردن بردار ویژهٔ متناظر با $\lambda_1 = ۳$، پایه‌ای برای فضای پوچ $A - ۳I$ پیدا می‌کنیم.

$$A - ۳I = \begin{pmatrix} ۲ & ۲ \\ ۳ & ۳ \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب، برای به دست آوردن بردار ویژهٔ متناظر با $\lambda = ۸$، پایه‌ای برای فضای پوچ $A = ۸I$ می‌یابیم.

$$A - ۸I = \begin{pmatrix} -۳ & ۲ \\ ۳ & -۲ \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۳ \end{pmatrix}$$

اولّین باری که چنین مثالی را در کلاس حل کردم، بسیاری از دانشجویان متوجه نکتهٔ جالبی شدند و گفتند که «توجه کنید! هر دو ستونِ $A - ۳I$ مثل $\vec{v}_2$ هستند. خُب این موضوع، برای $A = ۸I$، کاملاً صادق نیست. ولی دست کم، هر دو ستون آن، حاصل ضربی از $\vec{v}_1$ هستند. آیا این امر، همیشه واقع می‌شود؟»، به بیان دیگر، آن‌ها با توجه خودشان، به این حدس هدایت شدند:

قضیه ۱. فرض کنید A یک ماتریس ۲×۲ با مقادیر ویژهٔ متمایز λ_1 و λ_2، و بردارهای ویژهٔ متناظر $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ باشد. آن‌گاه، هر دو ستونِ $A - \lambda_1 I$، حاصل‌ضرب‌هایی از $\vec{v}_2$، و هر دو ستونِ $A - \lambda_2 I$، حاصل ضرب‌هایی از $\vec{v}_1$ هستند.

آیا شما این حدس را می‌دانستید؟ من نمی‌دانستم. عکس‌العمل اولیهٔ من (که به اندازهٔ کافی، برای مخفی نگاه داشتن آن از دانشجویانم، دلیل داشتم)، این بود که احتمالاً این حدس نادرست است، زیرا اگر درست بود، باید در تمام کتاب‌های درسی، می‌آمد. در حقیقت، در هیچ

کتابی، آن را ندیده بودم، حتی هیچ‌یک از کسانی که این حدس را به آن‌ها نشان دادم، آن را به جا نیاوردند. تنها یک نفر را پیدا کردم که قبلاً به این مسأله توجه کرده بود و یکی دو نفر دیگر هم بلافاصله، این قضیه را اثبات کردند. ما این قضیه را از لم زیر، نتیجه خواهیم گرفت.

لم ۱. فرض کنید A ماتریسی با حداقل دو مقدار ویژهٔ متمایز باشد. فرض کنید λ یکی از آن‌ها بوده و $\vec{v}$ برداری ویژه است که مقدار ویژهٔ آن، λ نیست. آن‌گاه $\vec{v}$ در فضای ستونی $A-\lambda I$ قرار دارد.

این لِم، از لِم بدیهی زیر نتیجه می‌شود.

لم ۲. اگر $\vec{v}$ یک بردار ویژهٔ A با مقدار ویژهٔ μ باشد، آن‌گاه $\vec{v}$ یک بردار ویژهٔ $A-\lambda I$ با مقدار ویژهٔ $\mu-\lambda$ است.

اثبات لم‌ها. داریم

$$(A-\lambda I)\vec{v} = A\vec{v}-\lambda\vec{v} = \mu\vec{v}-\lambda\vec{v} = (\mu-\lambda)\vec{v}$$

که لِم (۲) را ثابت می‌کند. اگر $\mu \neq \lambda$، آن‌گاه یک مضرب اسکالر غیر صفر از $\vec{v}$ وجود دارد که ترکیبی خطی از ستون‌های $A-\lambda I$ است. بنابراین، $\vec{v}$ نیز یک ترکیب خطی از ستون‌های $A-\lambda I$ است، یعنی $\vec{v}$ در فضای ستونی $A-\lambda I$ است. در نتیجه، لم (۱) نیز ثابت شد.

همان‌طور که خواهیم دید، این لم غیر جالب، چند نتیجهٔ جالب دارد. قضیهٔ (۱)، نتیجهٔ بلافصل آن است، زیرا فضاهای ستون $A-\lambda_1 I$ و $A-\lambda_2 I$ یک بُعدی هستند. علاوه بر این، تعمیم زیر را داریم.

قضیهٔ (۲). فرض کنید A ماتریس $n\times n$ و مجموعهٔ $S=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \cdots, \vec{v}_n\}$ شامل n بردار ویژهٔ مستقل خطی A باشد. اگر λ یک مقدار ویژهٔ A باشد، آن‌گاه

i) بردارهای ویژه در S که متناظر λ هستند، پایه‌ای برای فضای پوچ $A-\lambda I$ تشکیل می‌دهند.

ii) بردارهای ویژه در S که متناظر λ نیستند، پایه‌ای برای فضای ستونی $A-\lambda I$ تشکیل می‌دهند.

اثبات: نکتهٔ اساسی قضیه، حکم (ii) است، زیرا بردارهای ویژهٔ A، متناظر با λ، همگی در فضای پوچ $A-\lambda I$ هستند، پس بنا به تعریف، (i) برقرار است. برای اثبات (ii)، فرض کنید که k بردار ویژه در S متناظر λ وجود دارد. آن‌گاه می‌دانیم که

الف) $n-k$ بردار ویژه در S وجود دارد که همهٔ آن‌ها، متناظر λ نیستند و طبق لم (۱)، در فضای ستونی $A-\lambda I$ هستند.

ب) بُعد فضای پوچ $A-\lambda I$، برابر با k است. بنابراین، بُعد فضای ستونی $A-\lambda I$ برابر $n-k$ است.

حال از (الف) و (ب)، (ii) نتیجه می‌شود، زیرا هرگاه $n-k$ بردار مستقل خطی در یک فضای برداری با بُعد $n-k$ داشته باشیم، آن‌ها باید پایه‌ای برای آن فضا باشند.

قضیهٔ (۱)، روشی ساده برای بررسی درستی محاسبات انجام شده برای یافتن بردارهای ویژهٔ اغلب ماتریس‌های 2×2 در اختیار ما قرار می‌دهد. هم‌چنین، می‌توان برای کوتاه کردن محاسبات، از آن استفاده کرد: اگر در زمانی که داریم اولین مثالمان را حل می‌کنیم، قضیهٔ (۱) را داشتیم، یافتن هریک از $A-3I$ یا $A-8I$، هر دو بردار ویژهٔ A را به ما می‌دهد.

زمانی که محاسبهٔ عددی مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ خیلی آسان نباشد، مثل وقتی که مقادیر ویژه، اعداد مختلط باشند می‌توان از این ایده به خوبی استفاده کرد.

مقادیر ویژهٔ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ برابر $\lambda = 2 \pm 3i$ هستند. برای پیدا کردن بردارهای ویژهٔ $2-3i$، باید طبق معمول، فضای پوچ

$$\begin{pmatrix} 1-(2-3i) & -2 \\ 5 & 1-(2-3i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3i & -2 \\ 5 & 1+3i \end{pmatrix}$$

را به دست آوریم. تصوّر این که دانشجویی در انجام این محاسبات، اشتباه کند، سخت نیست. در عوض، باید توجّه کنیم که هریک از ستون‌های ماتریس بالا، مثلاً

$\begin{pmatrix}-۲\\ ۱+۳i\end{pmatrix}$ ، باید یک بردار ویژه برای $۲+۳i$ باشد . بنابراین ،

$\begin{pmatrix}-۲\\ ۱-۳i\end{pmatrix}$ نیز باید یک بردار ویژه برای $۲-۳i$ باشد .

احتمال این که بتوان به روشی مشابه ، قضیهٔ (۲) را برای ماتریس‌های بزرگ‌تر به کار بُرد ، کم است ، ولی صفر نیست . یکی از این مثال‌ها ، که جزییات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم ، ماتریس زیر است .

$$\begin{pmatrix} ۳ & ۲ & ۱\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۳ & ۶ & ۵\end{pmatrix}$$

شاید بگویید که جالب‌ترین نکته دربارهٔ قضیهٔ (۲) این است که این قضیه ، جالب نیست ـ یعنی حالت کلّی ، از حالت ۲×۲ ، جذابیت کم‌تری دارد . اما من فکر می‌کنم قضیهٔ (۲) ، می‌تواند چند نظریهٔ مربوط به درس جبر خطی مقدماتی را به شکل مطلوبی با هم ادغام کند .

علاوه بر این ، به کمک لِم (۱) می‌توان اثبات ساده‌ای از یکی از نتایج استاندارد دربارهٔ بردارهای ویژهٔ ماتریس‌های متقارن ، ارایه کرد .

قضیهٔ (۳) . فرض کنید A یک ماتریس متقارن حقیقی $n\times n$ باشد . اگر $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ، بُردارهای ویژهٔ مختلف باشند ، آن‌گاه $\vec{v}\perp\vec{w}$.

به خاطر بیاورید که ماتریس‌های متقارن ، مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ حقیقی دارند . بنابراین ، هیچ مزدوج مختلطی برای تعامد ، مورد نیاز نیست .

اثبات . فرض کنید λ مقدار ویژهٔ $\vec{v}$ باشد ، یعنی $\vec{v}$ در فضای پوچ $A-\lambda I$ است . به‌علاوه ، چون λ مقدار ویژه برای $\vec{w}$ نیست ، $\vec{w}$ در فضای ستونی $A-\lambda I$ است . چون A متقارن است ، $A-\lambda I$ نیز متقارن است ، و بنابراین ، $\vec{w}$ در فضای سطری $A-\lambda I$ است . امّا فضای سطری و فضای پوچ ، مکمّل متعامد هستند ، پس باید داشته باشیم $\vec{v}\perp\vec{w}$.

این اثبات ، در مسألهٔ ۱۸ بخش ۴ . ۶ کتاب استرنگ [۱] ، مطرح شده است . به نظر من ، حداقل این اثبات به اندازهٔ معمول ، خوب است و اثبات‌های محاسباتی‌تر را نیز می‌توان در این کتاب (یا کتاب‌های دیگر جبر خطی) یافت .

سپاس گزاری : من ، با قضیه‌های (۱) و (۲) ، در ترم اول سال ۱۹۹۶ ، در کالج بلویت[1] و در زمانی که برای اولین بار ، جبر خطی را تدریس کردم ، آشنا شدم . دوست دارم از [دانشجویان] آن کلاس ، به خاطر کمکی که به من کردند تا این حقایق (و سایر حقایق) را یاد بگیرم ، و برای سهمی که در تبدیل کردن جبر خطی از درسی که به طور مشخص ، در دوران دانشجویی خود دوست نداشتم ، به درسی که از تدریس آن خیلی لذت می‌برم ، تشکر کنم . هم‌چنین می‌خواهم از گیل استرَنگ[2] که بعد از خواندن پیش‌نویس اولیهٔ این مقاله ، مرا تشویق کرد و پیشنهادهایی به من داد ، و به خاطر کتاب خوبش [۱] ، که کتاب درسی مورد علاقهٔ من در جبر خطی است ، تشکر می‌کنم از پاول ترویلیگر[3] نیز به خاطر اظهارنظر مفیدش ، سپاسگزارم .

زیرنویس

1. Beloit
2. Gil Strang
3. Paul TerwilliGer

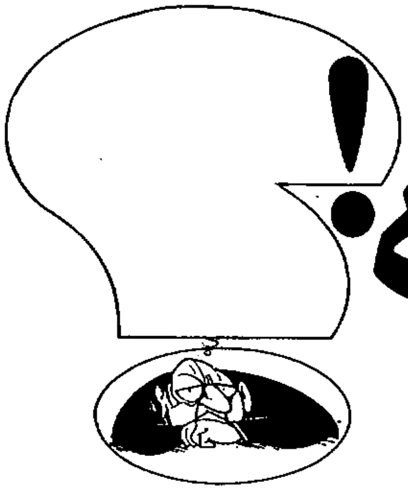
مرجع

[1] Strang, G. (1998). *Introduction to Linear Algebra.* 2nd edition, Wellesley - Cambridge Press. Wellesley, MA.

منبع اصلی

Johnson, W.P. (2001). A Simple Fact About Eigenvectors that You Probably Don't Know. **Mathematics Magazine**, Vol. 74, No.3, June 2001, 227-230

■



یک استدلال لجوجانه!

گفتم: می‌تونی یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x+1=0$ را پیدا کنی؟

یکی گفت: آره! ببین $x=0$ که جواب معادله نیست! پس

$$x(x+1+\frac{1}{x})=0$$

و چون باید عبارت صفر بشه، داریم:

$$x+1+\frac{1}{x}=0$$

پس

$$x+1=-\frac{1}{x}$$

حالا توی معادلهٔ اصلی جاگذاری کن:

$$x^2+(-\frac{1}{x})=0$$

$$x^2-\frac{1}{x}=0$$

$$\frac{x^3-1}{x}=0$$

اما صفر بودن این عبارت یعنی صفر شدن صورت،

$$x^3-1=0$$

و می‌دونیم $x=1$ یکی از ریشه‌های این عبارته. پس ریشهٔ معادله ست!

گفتم: عجب! یعنی میگی $1^2+1+1=0$ ؟!

گفت: کاری ندارم جواب هست یا نه! اما این ریشهٔ معادله ست!

گفتم: آخه . . . !

گفتش: همین که هست! مگه راه من اشتباهه؟!!

بسم الله الرحمن الرحیم

Roshd
Mathematics Education Journal

Vol.19 - No.70 - 2003

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning

Teaching-Aids Publications Office

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585 / E-mail:info@roshdmag.org

CONTENTS:

خطوط مستقیم و خمیده

کاری از : صدف خوانساری ، دانش آموز اول راهنمایی


رشد
آموزش فیزیک
۶۱
sinθc = nr/ni
رشد
آموزش فیزیک
۶۲
رشد
آموزش فیزیک
۶۳