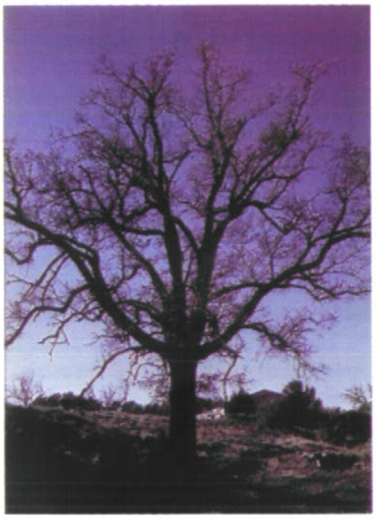
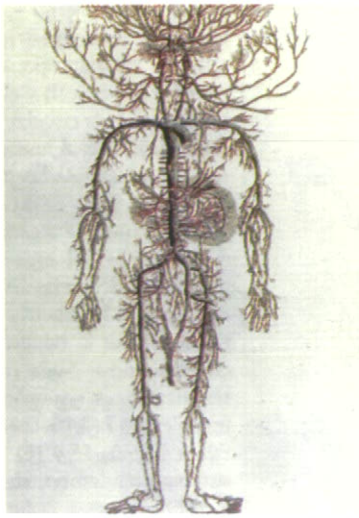
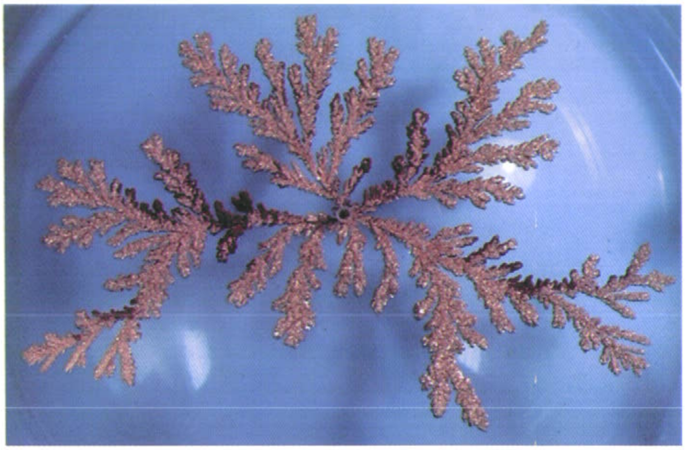
www.roshdmag.ir
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
آموزشی-تحلیلی-اطلاع رسانی

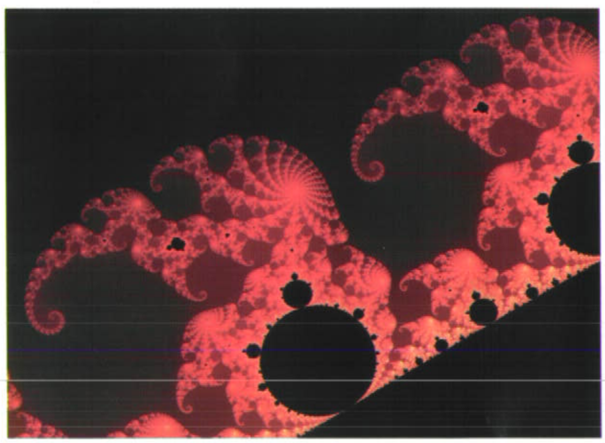
رشد آموزش ریاضی ۸۹

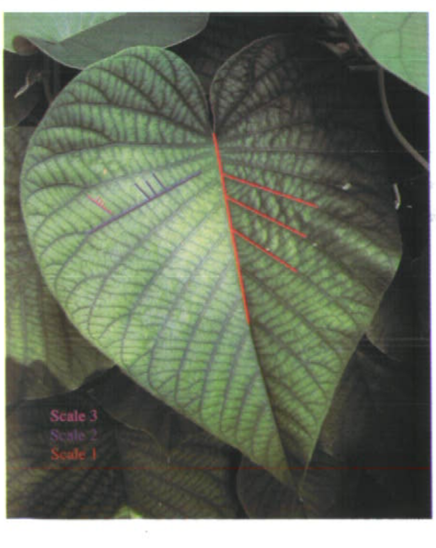
دوره‌ی بیست و پنجم، شماره‌ی ۱، پاییز ۱۳۸۶، بها: ۳۵۰۰ ریال

- آموزش معلمان: چشم انداز ارایه شده در یکی از سندهای پروژه‌ی ۲۰۶۱
- نقش زمان و زبان در آموزش ریاضی
- محققین تازه‌کار در حوزه‌ی آموزش ریاضی
- موضوعات مطالعاتی در آموزش ریاضی ایران







ر.ک. مقاله‌ی «کاربرد فرکتال ها» صفحه‌ی ۴۴

بسم الله الرحمن الرحیم

آموزشی - تحلیلی - اطلاع رسانی

www.roshdmag.ir

رشد آموزش ریاضی ۸۹

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

دوره ی بیست و پنجم، شماره ی ۱ ، پاییز ۱۳۸۶

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن دفتر مجله: ۹- ۸۸۸۳۱۱۶۱
(داخلی ۲۷۰ - ۲۷۴)

E-mail:info@roshdmag.ir
پیام گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲-۸۸۸۳۹۲۳۲
مدیر مسئول: ۱۰۲
دفتر مجله: ۱۱۳
امور مشترکین: ۱۱۴
چاپ: شرکت افست (سهامی عام)
شمارگان: ۲۵۰۰۰

مجله ی رشد آموزش ریاضی نوشته ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم وتربیت، به ویژه معلّمان دوره های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه ی مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیات تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می تواند سفارش ترجمه ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویس ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره ی صفحه ی مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از موضوع مطلب ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.

هم چنین:

- مطالب مندرج در مجله، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است.
- مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، باز گشت داده نمی شود.

اندر باب تحقیق و مقاله‌نویسی در آموزش ریاضی

نوشتن از مقوله‌های بسیار سخت است، زیرا همان‌طور که هالموس بیان کرده، رسالت اصلی آن «انتقال اندیشه» است. به‌همین دلیل، نیازمند انگیزه، دانش قابل اتکا، توانایی ارتباطی قوی، دقت، تمرکز، منابع غنی، داده‌های مرتبط و باارزش از نظر تحقیقی و بالاخره، هنر نویسندگی است. البته هالموس هشدار می‌دهد که «برای این‌که این‌کار را به‌خوبی و روشنی انجام دهید، باید چیزی برای گفتن داشته باشید و هم‌چنین، باید کسی را داشته باشید که آن را برای او بیان کنید»[۱].

آن‌چه که هالموس بدان اشاره نموده، ازاهمیت ویژه‌ای برخوردار است و می‌تواند راهنمایی ارزشمند برای نگارش مقاله در هر حوزه، از جمله آموزش ریاضی باشد. تذکر هالموس، در عین سادگی، به‌شدّت عمیق و مهم است که اولاً، تا حرفی برای گفتن نداشته باشیم، بافتن آسمان و ریسمان به یک‌دیگر، نه حاصلی دارد و نه ارزش منتقل کردن به دیگران. درثانی، لازم است دیگرانی را که می‌خواهیم با آن‌ها ارتباط برقرار کنیم، خوب بشناسیم و با سطح انتظارات علمی آن‌ها آشنا باشیم. بدین‌جهت است که هالموس، باز هم بر این نکته تأکید کرده و اظهار می‌دارد که «ممکن است پافشاری بر این مطلب که برای آن‌که چیزی را خوب بیان کنید، باید چیزی برای گفتن داشته باشید، طنزآمیز و غیرلازم به نظر بیاید، اما چنین نیست. بسیاری از بدنویسی‌ها، چه در ریاضیات و چه در زمینه‌های دیگر، ناشی از نادیده گرفتن این اولین اصل نگارش است ... در دو حالت ممکن است یک نوشته بدون موضوع باشد، یا هیچ اندیشه‌ای در پس آن نباشد، یا آن‌که اندیشه‌های بسیاری در آن بیان شده باشد».

حالت اول به ندرت اتفاق می‌افتد، زیرا تا اندیشه‌ای نباشد، اصولاً تمایلی به نگارش وجود نخواهد داشت ـ البته گاهی اندیشه وجود دارد، اما در لابلای سطور کاغذ یا حتی سطور ذهنی نویسنده پنهان است و نوشته‌ها، توانایی برجسته‌کردن و شفاف کردن آن را ندارند.

حالت دوم محتمل‌تر است و اغلب اتفاق می‌افتد، بسیاری از افراد در نوشته‌هایشان، چندین اندیشه را با هم مطرح می‌کنند، بدون آن‌که روشن باشد که از طرح آن‌ها، چه هدفی را دنبال می‌نمایند. گاهی تعدّد اندیشه‌ها، باعث ایجاد اغتشاش در نوشته می‌شود و این به‌هم ریختگی، به‌راحتی به خواننده منتقل می‌گردد، زیرا خواننده انتظار دارد بداند که حرف اصلی نویسنده چیست و چگونه آن را بیان کرده است.

در چنین وضعیتی، خواننده ممکن است یا سردرگم شود یا آن‌که منفعل گردد و انگیزه‌ی خود را برای خواندن مقاله از دست بدهد، زیرا باوجود تلاشی که کرده، هنوز نقطه‌ی تمرکز اصلی مقاله را نیافته است. مثلاً، بارها پیش آمده است که با مقاله‌هایی ـ ریاضی یا علوم پایه و علوم انسانی و علوم تربیتی ـ مواجه می‌شویم که سرشار از جمله‌های زیبا و عبارت‌های نغز، گزاره‌های درست و اثبات‌های دقیق و علاوه بر این‌ها، رعایت به‌جا و به‌موقع آئین نگارش هستند. ولی پس از اتمام چنین مقاله‌هایی، اگر از خواننده‌های آن‌ها سؤال شود که صغری وکبرای بحث نویسندگان چه بوده و چگونه به نتیجه‌گیری‌های ارایه شده رسیده‌اند، پاسخی برای ارایه ندارند. طبیعی است که این اتفاق، می‌تواند در تمام حوزه‌ها واقع شود، اما آن‌چه که مورد بحث این یادداشت است، مقاله‌نویسی در آموزش ریاضی است و چنین تفکیک یا تمایزی، می‌تواند ورود مناسبی به این بحث باشد، یعنی تمرکز این نوشته بر این حوزه است و نویسنده‌ی این سطور، با مقاله‌نویسی در سایر حوزه‌های معرفتی کاری ندارد!

***

آموزش ریاضی، حوزه‌ای تلفیقی است که ریشه در دو سنت قوی و متمایز و در بعضی جنبه‌ها متضادِ ریاضی و علوم تربیتی دارد و به همین دلیل، مقاله‌نویسی در این حوزه، سخت است. سخت است زیرا مخاطب مقاله، خواننده‌ای است که در این دو سنت قوی آموزش دیده است و هریک از این آموزش‌ها، انتظارات متفاوتی در وی ایجاد کرده است. به‌طور مثال، آموزش در حوزه‌ی ریاضی و مقاله‌نویسی در آن، به فرد آموزش دیده یاد می‌دهد که وقتی یک اثبات، از نظر منطقی سازگار بود، قابل قبول است و تأیید مرجع دیگری جز نظام منطقی را نیاز ندارد ـ البته بگذریم از این‌که چنین تعبیری از اثبات، می‌تواند مقاله‌نویسی را تا حد ارایه‌ی تنها یک سری روابط منطقی تنزل دهد و در عوض، سرعت تولید را به شدت بالا ببرد! علاوه بر این، نویسنده‌ی یک مقاله‌ی ریاضی، با اشیای ریاضی سروکار دارد که باوجود جان‌مجازی، فاقد روح‌وجان واقعی هستند! به‌همین دلیل، در سطوح پایین، می‌توان شاهد مقاله‌های ریاضی بود که بیش‌تر حالت تمرینی دارند و نه به درد دنیا می‌خورند و نه آخرت! اما هنوز، خطری جدی برای جامعه به‌حساب نمی‌آیند. در حالی‌که در حوزه‌ی علوم تربیتی، هر ادعایی اگر با پشتوانه‌های جدی تحقیقی حمایت نشده باشد، می‌تواند سرنوشت فرد و جامعه را به‌خطر بیاندازد؛ زیرا آزمودنی‌های علوم تربیتی انسانند و اشیای ریاضی نیستند.

هر ادعایی در مورد انسانی که دارای شعور و متشکل از گوشت‌وپوست و استخوان و روح‌وروان است، و هر توصیه‌ای در مورد تعلیم و تربیتِ چنین

موجودی، تبعات خوب یا بد بی‌درنگ دارد. هم چنین، در مورد این اشرف مخلوقات، نمی‌توان هیچ چیزی را با قطعیت ریاضی ابراز کرد ـ انسان دودوتا بردار نیست. از فردی به فردی و از محیطی به محیطی، تمام بایدها و نبایدها نیازمند جرح و تعدیل می‌شوند. به همین دلیل، منطق اثبات ریاضی با منطق تأیید صحت یک یافته‌ی علوم تربیتی از زمین تا آسمان فرق می‌کند و این تفاوت، یکی از سخت‌ترین کارها در حوزه‌ی آموزش ریاضی است، یعنی قانع کردن خواننده‌ای که اگر نسبت به سنت ریاضی خود متعصب باشد و نسبت به سنت علوم تربیتی بی‌علاقه، کم توجه یا کم‌مطالعه، همان‌قدر سخت یا حتی غیرممکن است که قانع کردن خواننده‌ای که متقابلاً، به سنت علوم تربیتی خود متعصب است و نسبت به سنت ریاضی بی‌علاقه، کم‌توجه و کم‌مطالعه.

برخلاف بسیاری از شاخه‌های علوم تربیتی که هدف، روش، آزمودنی و شرایط آموزش می‌توانند موضوع اصلی مورد مطالعه باشند، در آموزش ریاضی، خودِ موضوع ریاضی نیز شأنیت ویژه دارد و همین، وجه تمایز اصلی آموزش ریاضی با آموزش یا تعلیم و تربیت به طور عام است. حال با توجه به وجه تمایز آموزش ریاضی با ریاضی و وجه تمایز آموزش ریاضی با آموزش به‌طور عام، می‌توان دو شاخص مهم و مفید را منتزع کرد و از آن‌ها، به‌عنوان معیار و ملاکی برای قضاوت در مورد یک مقاله‌ی تحقیقی در حوزه‌ی آموزش ریاضی، استفاده نمود.

همان‌طور که اشاره شد، تمایز عمده‌ی بین آموزش ریاضی با ریاضی یکی موضوع مورد تحقیق و دیگری تحقیق‌شونده است. برای شفاف‌تر شدن این تمایز، مثلاً فرض کنید که کسی قضیه‌ای در یکی از شاخه‌های جبر دانشگاهی اثبات کند و آن اثبات، بسیار خلاق و نوآورانه و قابل تعمیم باشد و آن مقاله را برای یک مجله‌ی آموزش ریاضی یا یک کنفرانس آموزش ریاضی در ایران یا خارج از ایران ارسال نماید. طبیعی است که چنین مقاله‌ای ـ بدون قضاوت در مورد کیفیت آن ـ توسط داوران رد شود زیرا مخاطب چنین مقاله‌ای، یکی از مجله‌های مرتبط با آن شاخه‌ی ریاضی یا یک کنفرانس ریاضی در داخل و خارج کشور است نه یک مجله یا کنفرانس آموزش ریاضی. از طرف دیگر، تصور کنید که کسی، ادعای تحقیقی‌اش این باشد که با یک شیوه‌ی تدریسی ارایه شده، دانشجویان به جبر دانشگاهی علاقه‌مندتر شده و توانایی‌های تولید اثبات‌های خلاق و نوآورانه در آن‌ها افزایش یافته است. اگر این محقق فرضی، تنها به طرح چنین ادعایی بسنده کند، مقاله‌اش از جنس آموزش ریاضی نخواهد بود و بیش‌تر در مقوله‌ی مقاله‌های توصیفی در رابطه با تدریس جبر دانشگاهی از زبان یک استاد با تجربه قرار خواهد گرفت. اما اگر این محقق فرضی، براساس یافته‌های تجربی خود، تحقیقی را طراحی کند که در آن، ادعاهای تجربی خود را تحقیق‌پذیر کرده و با معیارهای تحقیقی، آن ادعاها را اثبات یا رد کند، یک تحقیق آموزش ریاضی انجام داده است که مقاله‌ی حاصل از آن را می‌تواند به یک مجله‌ی آموزش ریاضی یا یک کنفرانس آموزش ریاضی در داخل یا خارج ایران ارسال نماید و منتظر نتیجه‌ی داوری بنشیند. حتی اگر چنین مقاله‌ای رد شود، علت آن با مورد اول که فقط به دلیل نامربوط بودن مقاله با حوزه‌ی آموزش ریاضی رد شده بود و مورد قضاوت علمی قرار نگرفته بود، تفاوت فاحش دارد. پس شناخت این تمایز، می‌تواند معیار مناسبی برای قضاوت در مورد یک مقاله‌ی آموزش ریاضی باشد.

این در حالی است که تمایز بین آموزش ریاضی با آموزش یا تعلیم و تربیت به طور عام نیز به اندازه‌ی تمایز قبلی، حساس و گاهی مهم‌تر است. مثلاً، معلمی که سال‌ها ریاضی تدریس کرده و تجارب ارزنده‌ای کسب نموده و باورهایی در مورد تدریس و یادگیری در او شکل گرفته، خیلی طبیعی است که بخواهد آن تجارب را با دیگران در میان بگذارد و خواسته‌ی وی، می‌تواند برای جمع وسیعی از معلمان مفید باشد. یا مثلاً، اگر کسی در مورد آسیب‌های نظام آموزشی، مشکلات کنکور، نقش خانواده در یادگیری، مشکلات روحی ـ روانی دانش‌آموزان، معیشت معلمان و نظایر آن، برای روزنامه‌ی مورد علاقه‌ی خود مطلبی بنویسد ـ به شرطی که مستندات قابل قبولی ارایه دهد ـ مخاطبان وسیعی را جذب خواهد کرد. اما ارسال هریک از این نوع مقالات به یک مجله یا کنفرانس آموزش ریاضی، به احتمال زیاد با رد از نوع اول ـ یعنی غیرمرتبط بودن با آموزش ریاضی ـ مواجه خواهد شد. تنها در صورتی مقاله‌ای مربوط به حوزه‌ی آموزش ریاضی می‌شود که در آن، هر ادعایی، در رابطه با آموزش و یادگیری ریاضی قابل طرح باشد. این مسأله، به‌خصوص در ایران که آموزش ریاضی، دوران طفولیت خود را می‌گذراند و هنوز، این مرزبندی‌ها بین ریاضی و آموزش ریاضی و بین آموزش ریاضی و علوم تربیتی در کلان آن، به شفافیت لازم نرسیده، اهمیت بیش‌تری پیدا می‌کند. به‌ویژه، چون بسیاری از مباحث مربوط به آموزش ـ چه عام چه خاص ـ به یادگیرنده یعنی دانش‌آموز و یاددهنده یعنی معلم و به دنبال آن، تمام عوامل تأثیرگذار بر جریان یاددهی ـ یادگیری مربوط می‌شود، طبیعی است که تحقیقات علوم تربیتی به طور عام، به مرزبندی بین آموزش ریاضی و شاخه‌های مختلف علوم تربیتی، حساسیت کمتری نشان دهند. مثلاً، تحقیقات متعددی در ایران و جهان، در حوزه‌ی روان‌شناسی تربیتی و در رابطه با نقش ریاضی در افزایش خودکارآمدی دانش‌آموزان انجام شده است، اما این تحقیقات با تحقیقاتی که یک محقق آموزش ریاضی در این مورد انجام می‌دهد، تفاوت ماهوی دارد. به طور مثال، آزمون‌هایی که یک آموزشگر ریاضی برای انجام تحقیق خود می‌سازد، بخش مهمی از تحقیق وی محسوب می‌شود، زیرا آن‌ها، حاصل مطالعات و مستندات پژوهشی حوزه‌ی آموزش ریاضی هستند. در صورتی که یک محقق علوم تربیتی، عموماً قضاوتی نسبت به ماهیت آزمون‌ها ندارد و تا وقتی که آزمون‌ها مورد تأیید مراجع علمی دیگری باشند ـ چه به‌صورت استاندارد، چه دستکاری شده ـ مشکلی در استفاده از آن‌ها برای جمع‌آوری داده‌ها احساس نمی‌کند.

* * *

در هر صورت، آن‌چه در این یادداشت آمد، تنها طرح مسأله در مورد تحقیق و مقاله نویسی در آموزش ریاضی بود. تفصیل این یادداشت به نهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران ارایه خواهد شد و امید است که با طرح این مسأله، بتوان به معیارهای کیفی‌تر و ملموس‌تری برای داوری مقاله‌های آموزش ریاضی در ایران پرداخت.

زیرنویس

۱. تمام نقل‌قول‌های این یادداشت از مقاله‌ی هالموس با عنوان «چگونه ریاضی بنویسیم» گرفته شده که توسط آقای دکتر حسن نجومی ترجمه شده و در شماره‌ی ۲ پائیز ۱۳۸۲ نشریه‌ی **فرهنگ و اندیشه‌ی ریاضی** در صفحات ۴۲ تا ۷۱ به چاپ رسیده است.

آموزش معلمان:

چشم‌انداز ارایه شده در یکی از سندهای پروژه‌ی ۲۰۶۱

مترجمان: زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی
نرگس مرتاضی مهربانی، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و معلم ریاضی مقطع ابتدایی تهران

اشاره

مقاله ی حاضر، قسمتی از پیش نویس سندی است با عنوان «پروژه ی ۲۰۶۱». این پروژه، ابتکاری بلندمدت است که به منظور اصلاحات آموزشی علوم پایه، اعم از علوم و ریاضی و تکنولوژی، از پیش دبستانی تا پایه ی دوازدهم در آمریکا طراحی شده است. در سال ۱۹۸۵ میلادی، زمانی که ستاره ی دنباله دار هالی از جو زمین عبور کرد، پدیدآورندگان پروژه ی ۲۰۶۱، حمایت هایی به منظور سوادآموزی علوم، ریاضیات و تکنولوژی فراهم آوردند. آنان معتقد بودند که تغییرات باید به گونه ای ایجاد و به طور مستمر طی ۷۶ سال به گونه ای جرح و تعدیل شوند که هنگام بازگشت مجدد ستاره ی هالی در سال ۲۰۶۱، دانش آموزانی که تحت این تغییرات آموزش دیده اند، به شهروندانی تواناتر تبدیل شده باشند. این پروژه، برای رسیدن به اهداف خود، دوازده موضوع ارزشیابی، تجارت و صنعت، ارتباطات برنامه ی درسی، انصاف، خانواده و جامعه، سرمایه گذاری، آموزش عالی، مو اد و تکنولوژی، سیاست گذاری، تحقیقات، سازمان دهی مدارس و آموزش معلمان را مورد بررسی قرار داد. هم چنین، در مورد این که دانش آموزان پس از فارغ التحصیل شدن از دبیرستان، در علوم و ریاضیات و تکنولوژی، چه باید بدانند و قادر به انجام چه کارهایی باشند، توصیه هایی ارایه داده است. بسیاری از ایده ها و پیشنهادهای ارایه شده در این سند، با توجه به شرایط موجود و بازخوردهای گرفته شده از جامعه ی آموزشی کشور آمریکا می باشد؛ لیکن با توجه به وسعت و انعطاف این پیشنهادها،می توانند برای خوانندگان ایرانی نیز مفید باشند. برای اطلاعات بیش تر می توانید به آدرس های زیر، مراجعه کنید:

www.project2061.org

www.project2061.org/publications/bfr/online/blipintro.htm

آموزش معلمان، نقش مهمی در اصلاحات[1] آموزش علوم دارد. برخی مصلحان[2] آموزشی، تغییر در آموزش معلمان را اولین گام در جهت تغییرات چشم گیر در آموزش علوم می دانند. اما اصلاح همه جانبه ی نظام آموزش معلمان به تلاش های فوق العاده ی مشابهی برای اصلاح مؤلفه های دیگر از جمله استانداردها، برنامه ریزی و ارزشیابی نیازمند است. مجهز کردن معلمان به گونه‌ای که بتوانند سوادآموزی علوم برای همه را محقق کنند، یک چالش روشنفکری و عملی است که دارای اهمیت زیاد اجتماعی است.

بسیاری از دانشکده ها و دانشگاه ها، مبتنی بر دیدگاه ها و

اصول گروه هولمز[3] (۱۹۹۰)، در مقابل این چالش، واکنش نشان دادند. همکاری بین کالج‌ها و مدارس پیش‌دبستانی تا پایه‌ی ۱۲ (K-۱۲) در تشکیل مدارس توسعه‌ی حرفه‌ای، از لزوم تغییرات خبر می‌دهد. از دیگر ابتکارات امیدوارکننده، برنامه‌ی مشارکتی آموزش معلمان ریاضی و علوم[4] می‌باشد که حاکی از نیاز به کار نظام‌وار و وسیع توسط آموزشگران معلمان، دانشمندان و مدارس است (بنیاد ملی علوم، ۱۹۹۵)[5]. به هر حال، هنوز در اجرای مدل‌های کارا در هزاران برنامه‌ی آموزش معلمان در سطح کشور، راه طولانی را در پیش داریم. (نمودار ۱)

این مقاله، روش‌هایی را برای اصلاح آموزش معلمان آینده [قبل از خدمت] و نیز آموزش مستمر معلمان فعلی [ضمن خدمت] علوم، ریاضی و تکنولوژی، پیشنهاد می‌دهد. ما، شرایطی را بررسی می‌کنیم که تحت آن، معلمان شاغل، عمل خود را توسعه و انجام می‌دهند، و عواملی را که لازم است آموزشگران معلمان برای طراحی برنامه‌های بهتر لحاظ کنند، پیشنهاد می‌کنیم.

در ادامه، نخست برای دوباره‌سازی آموزش دوره‌ی کارشناسی، توصیه‌هایی در چهار حوزه داده شده است: آماده‌سازی معلمان در موضوعات درسی، آماده‌سازی معلمان برای دانش‌آموزان گوناگون، آماده کردن معلمان برای تدریس، و استخدام معلمان علوم. این توصیه‌ها با پیشنهادهایی برای بهبود (۱) تدریس توسط هیأت علمی دانشکده‌ها و (۲) آموزش مستمر معلمان علوم، دنبال می‌شود. بالاخره، برای آموزش حرفه‌ای معلمان، اصول و پیشنهادهایی رهنمون‌گر، ارایه می‌دهیم. اگرچه این مقاله بر آموزش معلمان تمرکز دارد، اما اهمیت آموزش مستمر مسئولان اجرایی نیز باید مورد توجه قرار گیرد. مطمئناً، اگر قرار باشد که مسئولان اجرایی، مدارس خود را بنا به تصورات مصلحان آموزش علوم اداره کنند، ناچار به تغییر نقش‌های خود خواهند بود.

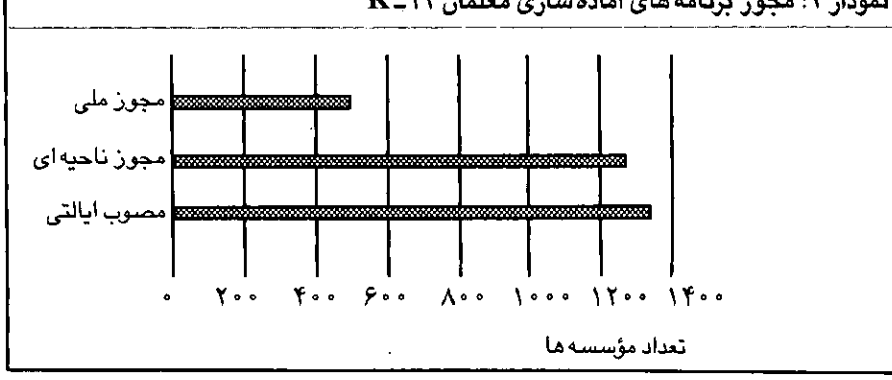
تغییرات لازم در آموزش معلمان در دوره‌ی کارشناسی

اگرچه در حال حاضر، نوع تدریسی که توسط مصلحان علوم توصیه شده، برای چندین دهه مورد حمایت قرار گرفته است، اما با این حال، به‌ندرت با موفقیت به کار گرفته شده‌اند. مؤسسه‌های آموزش معلمان باید راه‌هایی برای عرضه‌ی مبانی پایدار پیدا کنند تا معلمان بتوانند باورها[6]، مهارت‌ها، و دانش مورد نیاز استانداردهای ملی آموزش علوم[7] [استانداردها] (شورای ملی تحقیق ۱۹۹۶)[8] و معیارهایی برای سوادآموزی علوم[9] [معیارها] (اتحادیه‌ی آمریکایی برای اعتلای علوم، ۱۹۹۳)[10] را کسب کنند. آموزشگران معلمان، در طراحی مجدد برنامه‌های آموزش معلمان باید چندین عامل را در نظر بگیرند؛ هم‌چنین، لازم است که در هر مرحله از تغییر، بدیل‌ها را ارزشیابی کنند. ارزشیابی وضعیت جاری آموزش معلمان در دوره‌ی کارشناسی ـ که به دنبال می‌آید ـ به منظور تهییج بحث درخصوص تغییرات مورد نیاز است.

آماده‌سازی معلمان آینده در علوم

نشان دادن مفاهیم شخصی دانش‌آموزان از پدیده‌های علمی یکی از چالش‌های تدریس علوم است، زیرا این امر مستلزم دانش عالی علوم به همراه درک عمیقی از یادگیری علوم است. در واکنش به تجارب روزانه با پدیده‌های طبیعی، کودکان ـ از جمله معلمان آینده ـ برای تفسیر جهان اطرافشان،

نمودار ۱: مجوز برنامه‌های آماده‌سازی معلمان K-۱۲

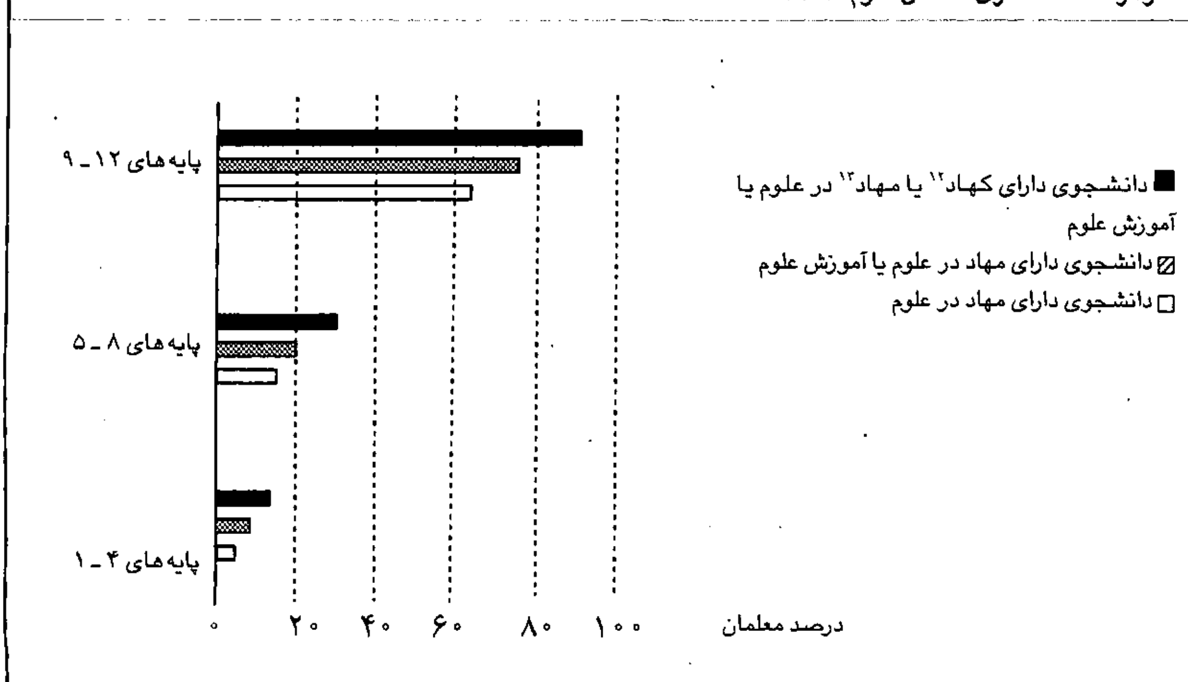


نظریه‌ها و توضیحات خودشان را می‌سازند. بعضی از این ساختن‌ها، فایده‌های محدودی دارند و می‌توانند با یادگیری درباره‌ی پدیده‌ی علمی، تداخل پیدا کنند. برای مثال، خیلی از مردم، تغییر فصل را نتیجه‌ی تغییر فاصله‌ی زمین تا خورشید می‌پندارند. از آن‌جا که ایده‌هایی از این دست، برای مشاهدات شخصی و اغلب برای توضیح پدیده‌های محلی (بومی) کفایت می‌کنند، بنابراین به سختی قابل تغییر هستند. هم‌چنین، چون سؤال‌های امتحان‌های سنتی، می‌توانند با پاسخ‌هایی مشابه این گونه ایده‌ها، پاسخ داده شوند، اغلب معلمان علوم چه در پیش‌دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم (K_۱۲) و چه در آموزش عالی، نمی‌توانند آن‌ها را شناسایی کنند. نتیجه این است که حتی باورهای غلط بعضی از دانش‌جویانی که در رشته‌های علوم تحصیل می‌کنند- برای مثال دلیل نادرست تغییر فصل- ادامه می‌یابد. بنابراین، برای مؤثر بودن، لازم است که بیش‌تر معلمان علوم، نسبت به اصول پیچیده و اغلب ضد شهودی[۱۱] علمی، درک عمیق‌تر و تعمیم‌یافته‌تری از آن‌چه که در حال حاضر دارند، کسب کنند.

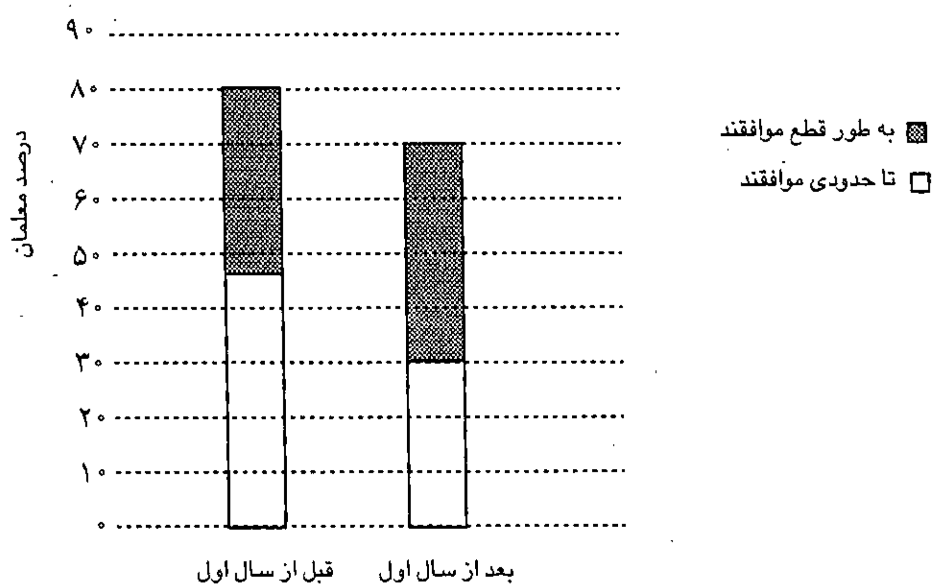
برای اجرای اهداف ارایه شده در «معیارها و استانداردها»، حیاتی است که تمام معلمان علوم، سواد کافی در زمینه‌ی علوم داشته باشند. مطالعه‌ی عمیق یک دیسیپلین، احتمال این را که معلمان آینده قادر باشند تا علوم را در یک سطح عمیق و مفهومی درک کرده و بر ایده‌های مهم، نظریه‌ها و کاربردها بازتاب داشته باشند، افزایش می‌دهد. به این دلیل، اکثر آموزشگران اتفاق‌نظر دارند که تمام معلمان علوم دبیرستان- و احتمالاً معلمان پایه‌های راهنمایی نیز- باید در [یکی از] رشته[های] علوم، تخصص داشته باشند. (نمودار ۲)

قسمت اعظم علوم و ریاضیات در پایه‌های ابتدایی، به‌وسیله‌ی افراد غیر متخصص که در رشته‌ی آموزش ابتدایی تحصیل کرده‌اند، تدریس می‌شود. اگرچه، پیشنهادهایی از این دست که تمام آموزش ریاضی و علوم در سطح مدارس ابتدایی توسط متخصصان تدریس شود غیر عملی و شاید غیر عاقلانه باشد، با این حال تمام معلمان مدارس ابتدایی باید درک عمیقی از بعضی دیسیپلین‌ها همراه با آمادگی برای محتوای علوم داشته باشند. خبرگان (متخصصان)، در مورد این‌که چه آماده‌سازی محتوایی علوم برای معلمان دوره‌ی ابتدایی مناسب‌ترین است، توافق ندارند. جواب به این سؤال، ممکن است به این امر بستگی داشته باشد که آیا مدارس ابتدایی به شکل دپارتمانی سازمان‌دهی شده‌اند یا این که به صورت کلاس‌های خودکفا[۱۴] هستند، [هم‌چنین]، به نقش متخصصان

نمودار ۲: آماده‌سازی معلمان علوم، ۱۹۹۳



نمودار ۳: معلمان جدیدی که احساس می‌کنند برای تدریس دانش‌آموزانی با زمینه‌های قومی گوناگون، خوب آماده شده‌اند



علوم یا ریاضی از پیش‌دبستانی تا پایه‌ی ششم در مدارس نیز وابسته است. دانشکده‌ها و دانشگاه‌ها می‌توانند به طور تنگاتنگ، با مدارس کار کنند تا برنامه‌هایی در آموزش علوم و ریاضی تهیه نمایند که نیازهای موضوع درسی فارغ‌التحصیلان خود را برآورده سازد. برای مثال، یک ناحیه‌ی شهری یا حومه‌ی شهری، ممکن است برای برنامه‌ای مستعد باشد که به متخصصان پیش‌دبستانی تا پایه‌ی ۱۲ (K-۱۲) یا کسانی که کهادشان در علوم است، اجازه‌ی [عمل] دهد؛ در حالی که یک ناحیه‌ی شهری، ممکن است به دانش علوم وسیع‌تری نیاز داشته باشد.

آماده‌سازی معلمان آینده برای دانش‌آموزان گوناگون

معلمان کارا، دانش‌آموزان خود را به روش‌هایی غیر از روش‌های مورد تأکید برنامه‌های سنتی آموزش معلمان، درک می‌کنند. امروز، معلمان علوم، به طور فزاینده‌ای با جمعیت دانش‌آموزی گوناگون‌تری کار می‌کند و به‌وسیله‌ی طرز تلقی و رفتار دانش‌آموزان- تقلب کردن، قدرت مطلقه برای پرسیدن[15]، و بی‌علاقگی- به چالش خوانده می‌شوند که همگی، بازتاب مسایل اجتماعی بزرگ‌تری می‌باشند. آموزش معلمانی که فقط، معلمان علوم را با مشخصه‌های خلاصه‌شده‌ای از گروه‌های متفاوت و بدون برقراری ارتباط آن‌ها با تدریس کارا معرفی می‌کند، اغلب پیش‌داوری‌ها و قالب‌های نهفته را به جای کاهش، افزایش می‌دهد. بنابراین، معلمان آینده‌ی علوم باید با ادبیاتی آشنا شوند که آن‌ها را در درک مسایل مختلفی که ممکن است در کلاس‌هایشان توسط اقلیت‌های جنسی یا نژادی یا مذهبی، کودکان دارای معلولیت، و دانش‌آموزان کم‌درآمد ایجاد شود، یاری رساند. آن‌ها باید در مدارسی کار کنند که جامعه‌ی دانش‌آموزی آن، بیانگر گوناگونی در حال رشد ملت است، نیز باید با معلمانی همکاری کنند که در کار با دانش‌آموزان با زمینه‌های متنوع، کارا هستند. (نمودار ۳)

آماده‌سازی معلمان آینده برای تدریس

آموزش معلمان علوم باید دانشجو- معلمان را در بحث‌های مربوط به مسایل اساسی یاددهی و یادگیری که در ارتباط نزدیک با کار روزانه‌ی تدریس است، درگیر کند. از آن‌جایی که مدارس پیش‌دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم (K-۱۲)، بهترین مکان برای عمل تدریس علوم هستند، لذا این کار [درگیر شدن با مسایل یاددهی و یادگیری] باید در همین مدارس صورت گیرد. برای کاستن از شکاف میان اصول عمومی تدریس که در کلاس‌های دانشگاه‌ها فراگرفته شده با موقعیت‌های خاص کلاس درس،

برنامه‌های آموزش معلمان باید از مدارس توسعه‌ی حرفه‌ای، اصولی را اتخاذ کنند. این برنامه‌ی سراسری [در سطح کشوری]، کارهای درسی در آموزش معلمان را با فرصت‌هایی برای قبول مسئولیت‌های گوناگون کلاس‌های درس در سرتاسر برنامه‌ی آموزش معلمان، تلفیق می‌کند. این تجارب، نباید [فقط] به‌عنوان یک تکلیف تدریس برای دانشجو ـ معلمان تمام‌وقت و به صورت متمرکز در آخر دوره‌ی آموزشی ارایه شود.

برای تداوم بخشیدن به این برنامه‌ها، هیأت علمی دانشکده‌های علوم و علوم تربیتی، باید ـ از طریق تحقیقات وسیع، مشاهده یا تدریس منظم ـ ارتباط نزدیک خود را با واقعیت‌های مدارس و کلاس‌هایی که دانشجو ـ معلمان در آن‌ها تدریس می‌کنند، حفظ نمایند. هم‌چنین، اعضای هیأت علمی علوم تربیتی باید در مورد استانداردهای حرفه‌ای معلمان برای برنامه‌های آموزش معلمان، به‌روز بمانند.

علاوه بر مفروضات، مقاصد و مباحث علمی، برنامه‌های آموزش معلمان باید دانش‌جویان خود را با نظام‌های باوری فرهنگی، بحث‌های مجادله‌ای در مورد ماهیت علوم، و تشریک مساعی در علوم از دیدگاه فمینیستی، رویارو کند. از این گذشته، دانش‌جویان می‌توانند از طریق دوره‌های طولانی مشاهده، قدردان دانش غیر رسمی توسعه‌یافته به‌وسیله‌ی مردمی باشند که خارج از چارچوب آموزشی، زندگی یا کار می‌کنند. در آخر، معلمان می‌توانند رویکردهای [مختلف] به ایجاد و توسعه و مشروعیت بخشیدن به دانش را مطالعه کنند و یاد بگیرند که چه چیز به‌عنوان یک ایده‌ی خوب به‌حساب می‌آید و برای ساختن دانش با معنی، چه شواهدی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

تجربه‌ی میدانی

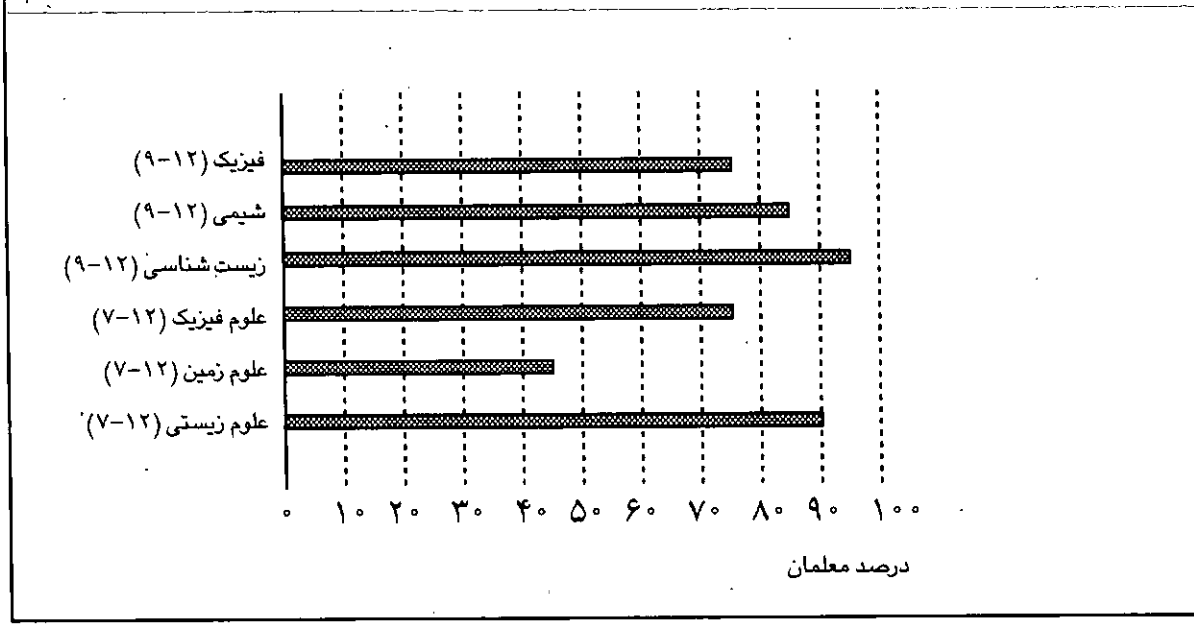
تجارب دست اول در مدارس، تجارب تدریس و معلمی و کار میدانی با دانشمندان باید از همان ابتدا در برنامه‌های آموزش معلمان گنجانده شود. این تجارب، هم معلمان آینده را برای محتوای درس‌های آموزشی خود آماده می‌کنند و هم به عنوان آزمایشگاهی فعال [و پویا] برای درس‌های رسمی، عمل می‌کنند. اگرچه اغلب معلمان آینده، تدریس را چه به صورت رسمی و چه غیررسمی، مشاهده کرده‌اند، اما آن‌ها به‌ندرت شاهد تلاش‌های خارق‌العاده‌ی معلمان [شاغل] برای آموزش خودشان در موضوعات درسی که تدریس می‌کنند؛ توسعه‌ی استراتژی‌های کارا برای پرورش طرز تلقی‌ها، مهارت‌ها و دانش علوم در دانش‌آموزان خود؛ و ارزیابی موفقیت در تدریس خودشان و یادگیری دانش‌آموزانشان هستند. تجارب میدانی اجازه می‌دهد تا معلمان باتجربه، تصویر کاملی از تدریس را با معلمان مبتدی در میان بگذارند تا این «اعمال پنهانی» تدریس برای معلمان آینده، مرئی‌تر شوند. با ایجاد بحث‌های حرفه‌ای و حمایت از آن‌ها، آموزشگران معلمان می‌توانند به معلمان آینده‌ی علوم، بنیانی برای ایجاد عادت‌های تدریس بازتابی در خود، ارایه کنند.

عمل تدریس

معلمان اغلب رابطه‌ای بین وقایعی که در کلاس‌های خود تجربه می‌کنند و تعمیم‌هایی که در مورد تدریس و یادگیری در دانشگاه‌ها به آن‌ها تدریس می‌شود، نمی‌بینند. خیلی از معلمان گزارش می‌کنند که تا زمانی که خودشان شروع به تدریس نکرده‌اند، چیز ارزشمندی در مورد تدریس یاد نگرفته‌اند. این یافته‌ها، برنامه‌های آموزش معلمان را به چالش خوانده است تا راه‌های کاراتری را پیدا کنند که از طریق آن‌ها، معلمان باتجربه و معلمان آینده بتوانند بین اصول عمومی تدریس و یادگیری دانش‌جویان در مورد مسایل و وقایع خاص کلاس‌های درس، ارتباط و اتصال ایجاد کنند.

مدارس باید تدریس تیمی را تشویق کنند و هر یک از معلمان را به عنوان متخصصان در حوزه‌های گوناگون از جمله علوم، درنظر بگیرند. سازمان‌دهی جدول‌های زمانی روزانه به منظور فراهم آوردن زمان مناسب طی ساعت‌های تدریس مدرسه‌ای برای طراحی تیمی و توسعه‌ی حرفه‌ای، حیاتی است. در هر گروه، حداقل یک نفر با آمادگی بالا در علوم، می‌تواند گروه‌های مطالعه و طراحی درس علوم را سرپرستی کند، درس‌ها را شرح دهد و منابع خاص را آماده کند. این فعالیت‌ها، باور نسبت به ارزش افزایش کار تیمی و تعامل حرفه‌ای میان معلمان را ارتقا می‌بخشد. در چنین محیطی، معلمان می‌توانند در یادگیری مستمر علوم و ریاضیات، درگیر شوند. در مدل «متخصص تیمی[16]» هر معلم ممکن است حداقل در یک حوزه، مانند آموزش علوم مقدماتی، و یک موضوع درسی، تخصص داشته باشد. رویکرد تیمی نسبت به خیلی از برنامه‌های غیر تخصصی دوره‌ی ابتدایی که دانش علمی کم

نمودار ۴: معلمانی که شش درس یا بیش‌تر را تدریس کرده‌اند



معلمان را بهتر از نداشتن آن فرض می‌کند و هم‌چنین، نسبت به خیلی از برنامه‌های دوره‌ی متوسطه که به شدت، افتراقی و دپارتمانی هستند، بدعتی بزرگ محسوب می‌شود. (نمودار ۴)

معلمان مبتدی اغلب زیر بار تقاضاهای تدریس، خم می‌شوند. بدون داشتن فرصت‌هایی برای مشاهده کردن و مورد مشاهده قرار گرفتن و بحث و گفت‌وگو با همکاران یا یک مربی[۱۷]، معلمان در کوتاه‌مدت راه‌هایی را برای پاسخ‌گویی به این تقاضاها پیدا می‌کنند. این راه‌ها ممکن است شامل رویکردهایی برای وادار کردن دانش‌آموزان بر انجام «تکلیف» باشد که ممکن است ارتقا بخش نوع یادگیری پیشنهادشده در «معیارها و استانداردها» نباشد. با تشکیل تیم‌های معلمان و دیگر فرصت‌های شبکه‌سازی و رهبری، مدیران مدارس می‌توانند به معلمان کمک کنند تا عادت‌های عمل بازتابی را در خود توسعه دهند، که این کار، منجر به افزایش درک و فهم آن‌ها نسبت به علوم، ریاضی، تکنولوژی و تدریس و یادگیری می‌شود.[۱۸]

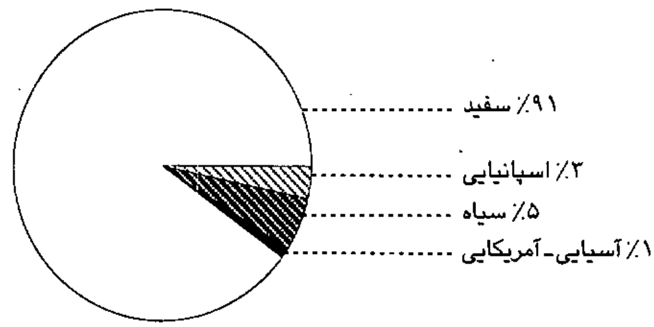
استخدام معلمان جدید

از آن‌جا که تمام سطوح نظام آموزشی در ایالت متحده غیرمتمرکز است، تقریباً غیر ممکن است که شواهد محکمی برای چگونگی روند استخدام جدید معلمان علوم، جمع‌آوری شود. [اما] به هر حال، بعضی الگوهای عمومی، واضح هستند. تعداد معلمان فیزیک عموماً کم است، در حالی که تعداد معلمان علوم زیستی در بعضی مواقع، بیش‌تر از شغل‌های موجود است. تعداد بسیار کمی از دانش‌جویان رنگین‌پوست، گرایش تحصیلی خود را در آموزش علوم و ریاضی انتخاب می‌کنند. معلمان ابتدایی به‌وفور موجود هستند، اما تعداد خیلی کمی از آن‌ها برای تدریس علوم و ریاضی آمادگی تخصصی قوی دارند. عدم قطعیت‌ها در مورد بودجه‌ی مدارس، محیط کاری منفی و حقوق‌های عمدتاً پایین، اغلب باعث می‌شود تا دانش‌جویان موفق علوم را از انتخاب تدریس علوم به‌عنوان یک حرفه، بازدارد.

برای تقویت و گسترش گروه معلمان علوم، لازم است که دانشگاه‌ها به‌طور متهورانه‌ای، دانش‌جویان توانمند و بسیار موفق در میان اقلیت‌ها را استخدام کرده و مورد حمایت قرار دهند تا معلمان علوم، ریاضی و تکنولوژی شوند. متخصصان علوم و افرادی که زمینه‌های قوی در علوم دارند نیز می‌توانند برای تدریس استخدام شوند به شرط آن‌که برنامه‌های دانشگاه‌ها با قابلیت‌ها و تجاربی که این افراد به همراه دارند، سازگار بوده و فرصت‌های تغییر شغلی نوآورانه و محتمل، در دسترس باشد. (نمودار ۵)

می‌توان برای گسترش فرصت‌های یادگیری علوم درون

نمودار ۵: معلمان علوم پایه‌ی هشتم



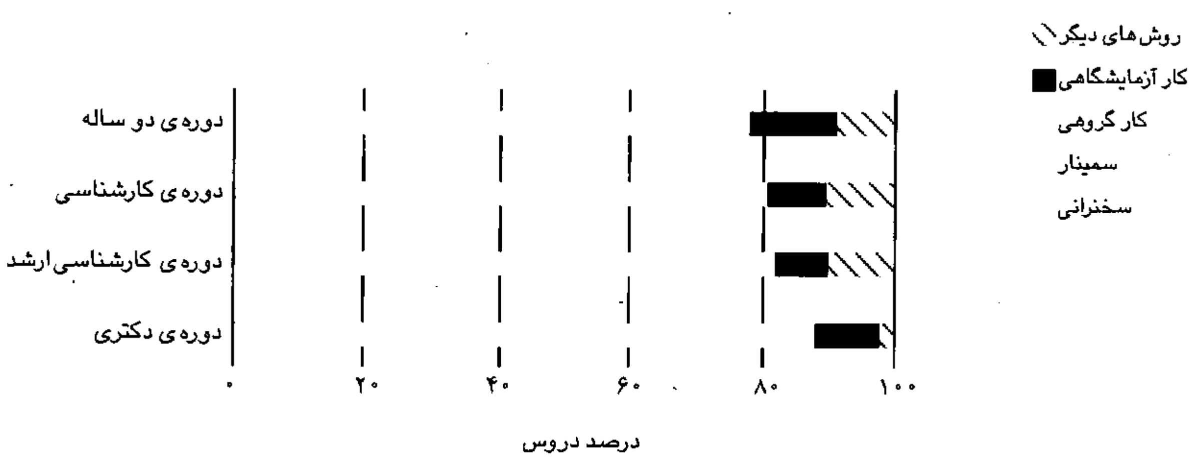
کلاس درس و فراتر از آن، اعضای جوامع علمی را برای مشارکت در آموزش پیش‌دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم (K ـ ۱۲) به‌عنوان مشاهده‌گر، سخنران مدعو، معلم خصوصی[۱۹] و مشاور، استخدام کرد. دانشمندان علوم باید از نیازهای معلمان و دانش‌آموزان آگاه شوند، اما در درازمدت، مشارکت آن‌ها می‌تواند کلاس‌های درسی دانشکده‌ها و دانشگاه‌ها را غنی‌تر سازد و موجب شود که معلمان پیش‌دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم و دانشمندان علوم، یکدیگر را بهتر درک کنند.

لزوم تغییرات در تدریس دانشکده و دانشگاه‌ها

حتی دانش‌جویانی که در رشته‌های علوم تحصیل می‌کنند، اغلب ضعف‌های جدی در ایده‌های اساسی علوم دارند. جای تعجب نیست که خیلی از معلمان علوم، بدون نوع یادگیری پیشنهاد شده توسط «معیارها و استانداردها»، وارد کلاس‌های درس می‌شوند. تدریس دروس علوم دوره‌ی کارشناسی باید نظام‌وارتر تغییر کند و با تأکید بر ایده‌های اساسی و موضوع‌های زیربنایی، به دانش‌جویان از جمله معلمان آینده، کمک کند تا اصول علمی را در حل مسایل واقعی به‌کار بندند. برنامه‌های درسی دانشکده‌ها باید رابطه‌ی میان علوم، ریاضی، تکنولوژی و جامعه را نشان دهد. لازم نیست که تلفیق در هر درس و از طریق برنامه‌ی درسی اتفاق افتد، اما در عین حال، نمی‌تواند کاملاً رها شود و انتظار این باشد که دانش‌جویان، خودشان به آن دست یابند.

معلمان به روش‌های تدریسی که به‌عنوان یادگیرنده تجربه کرده‌اند خیلی بیش‌تر تکیه می‌کنند تا به نظریه یا حتی دانش عملی که در برنامه‌های آموزش معلمان با آن مواجه می‌شوند. از آن‌جا که تدریس ریاضی و علوم به روش سخنرانی، در دانشکده‌ها و دانشگاه‌ها متداول است، آموزش عالی باید به این واقعیت توجه کند. معلمان آینده‌ی دوره‌ی متوسطه که دانش‌جویان موفقی در رشته‌های علوم هستند، در دانشکده‌ها روش‌های سخنرانی را تجربه می‌کنند و به این باور می‌رسند که

نمودار ۶: انواع آموزش در دوره‌های علوم طبیعی



روش سخنرانی برای دانش‌آموزان نیز مؤثر است. آموزشگران معلمان در آماده‌سازی معلمان آینده برای اجرای اصلاحات [آموزشی]، باید این ملاحظه را داشته باشند که آن‌ها را در طول یادگیری رسمی علوم، با روش‌های تدریسی که حامی تغییر است، مواجه نمایند. (نمودار ۶)

تدریس و یادگیری به منظور «فهمیدن»، زمان‌بر است و نیاز به علاقه و توانایی دارد. هیأت علمی و دانشجویان ـ خصوصاً در کلاس‌های بزرگ علوم مقدماتی ـ زیر حجم زیاد محتوا در زمانی محدود، احساس «خُردشدن» می‌کنند. آموزش علوم برای معلمان آینده‌ی دوره‌ی ابتدایی اغلب به همین درس‌های مقدماتی محدود می‌شود و فرصت‌های کمی برای تعامل با هیأت علمی، نوشتن و گفت‌وگو در مورد مفاهیم علمی یا درگیر شدن در فعالیت‌های عملی فراهم می‌کند تا مفاهیم و دانش علوم را توسعه داده و درک کنند. درنتیجه، بعضی اوقات، این دانشجویان، تدریس خود را با طرز تلقی‌های منفی نسبت به علوم و بدون داشتن مهارت‌هایی برای به‌کارگیری هدف‌های یادگیری ـ مانند اهدافی که در «معیارها و استانداردها» به آن‌ها اشاره شده است ـ شروع می‌کنند.

چون بیش‌تر معلمان علوم پیش‌دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم (K-۱۲) تحقیقی انجام نمی‌دهند، ناچار هستند با خواندن مجله‌های علمی و دیگر منابع، دانش علمی جدید را یاد بگیرند و بتوانند داده‌ها را تفسیر و ارزیابی کنند. هم‌چنین، دانشکده‌ها می‌توانند از روش‌های تدریسی استفاده کنند که لازمه‌ی آن‌ها مشارکت تعاملی، کار گروهی و تحقیق باشد ـ خصوصاً در درس‌های مقدماتی علوم که معلمان آینده‌ی دوره‌های ابتدایی و متوسطه، آن‌ها را می‌گذرانند. بالاخره، برای ایجاد دانش بانفوذی که معتقد است درک واقعی هر موضوع درسی از تدریس آن حاصل می‌شود، دانشکده‌ها می‌توانند مطالعه‌ی علوم را با آماده‌سازی دانشجو ـ معلمان برای تدریس، تلفیق کنند.

رویکردهای نویدبخش

در حالی که مثال‌های بی‌نظیری از تدریس دانشگاهی وجود دارد، هم‌چنان در بسیاری از دانشکده‌ها و دانشگاه‌ها، کمبودهای جدی در تدریس علوم و ریاضی وجود دارد. فرهنگ دانشگاهی به هیأت علمی برای تحقیق، امتیاز می‌دهد و انگیزه‌ی ناچیزی برای گسترش منابع ذهنی اغلب محدود روش‌های تدریس و ارزیابی، ارایه می‌کند. تغییرات چندی می‌تواند بر تدریس و یادگیری دوره‌ی کارشناسی متمرکز شود: گروه‌های درسی دانشگاهی می‌توانند به هیأت علمی خود از طریق برگزاری سمینار، بحث و گفت‌وگو در مورد راه‌های بهبود تدریس و ارزیابی خوب کمک کنند؛ می‌توانند کیفیت تدریس اعضای هیأت علمی را یکی از عوامل مؤثر در استخدام رسمی و ارتقای مرتبه‌ی دانشگاهی به‌حساب آورند؛ می‌توانند صلاحیت‌های تدریس دانشجویان تحصیلات تکمیلی را ـ که در بسیاری از دانشگاه‌های بزرگ، بیش‌تر دروس عمومی دوره‌ی کارشناسی توسط آن‌ها تدریس می‌شود ـ ارتقا بخشند و با امتیاز دادن به ابتکارها در تدریس دانشگاهی، به ترغیب تدریس خوب، کمک کنند.

لازم است که دانشگاه‌ها، راه‌هایی را پیدا کنند تا از طریق آن‌ها، مجموعه‌ی گسترده‌ای از تحقیقات مربوط به یاددهی، یادگیری و ارزیابی در علوم و ریاضی، به صف اول مباحث آموزش عالی آورده شود. به اضافه، باید به دانشجویان اجازه داده شود تا تبدیل به یادگیرندگان فعال شوند، تجارب دست‌اولی برای ایجاد پیوند بین ایده‌های خودشان و دانشی که در دروس مختلف کسب می‌کنند داشته باشند و در کلاس‌هایی شرکت کنند که اعضای هیأت علمی، روش تدریسی را در یادگیری فعال مدل‌سازی می‌کنند حتی کلاس‌های بزرگ سخنرانی می‌توانند برای تدریس فعال، سازمان‌دهی شوند. با افزایش تعداد دروس علومی که دانشجویان را به یادگیری فعال ترغیب می‌کنند، درحقیقت احتمال این که معلمان و دانشمندان آینده، شور و شوق و رضایت خاطر بیش‌تری از طراحی تحقیق‌ها و جمع‌آوری و تحلیل داده‌ها برای انجام آن تحقیق‌ها پیدا کنند، افزایش می‌یابد.

تغییرات لازم در توسعه‌ی حرفه‌ای

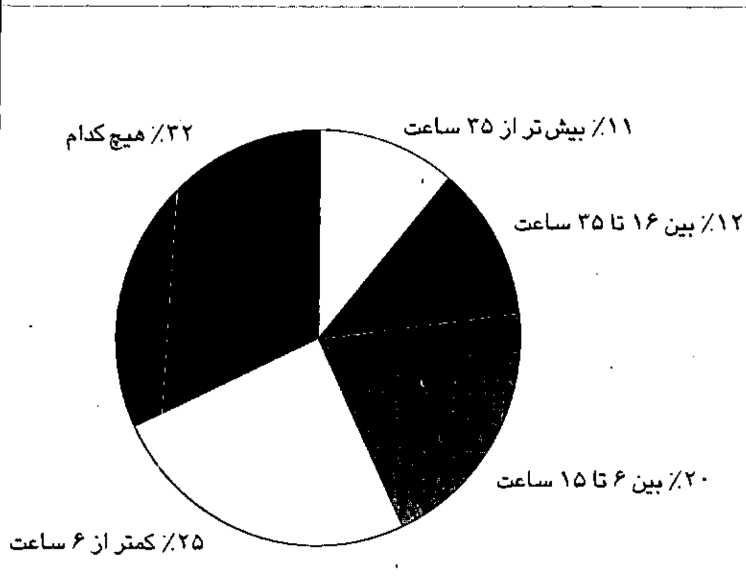
شاید مهم‌ترین دلیل برای آموزش حرفه‌ای مستمر معلمان علوم، ریاضی و تکنولوژی این است که این‌گونه آموزش‌ها، به آن‌ها اجازه می‌دهد که تخصص ویژه‌ی مربوط به کارشان را دریابند. دانش تخصصی، برای تعیین سیاست‌ها و تصمیم‌گیری‌های برنامه‌های درسی به‌عنوان یک منبع قدرت محسوب می‌شود. دومین دلیل این است که آموزش قبل از خدمت معلمان به اندازه‌ی کافی طولانی یا جدی نیست که آن‌ها بتوانند بر تمامی حوزه‌های مهارتی که مورد نیازشان است،

تسلط یابند. سوم این‌که به موازاتی که دانش در زمینه‌های علوم و تدریس در حال گسترش است و هم‌چنان که جامعه و خواسته‌هایش به تغییر ادامه می‌دهند، خود معلمان نیز باید رشد و توسعه یابند. بالاخره، هنگامی که معلمان در توسعه‌ی حرفه‌ای بلندمدت درگیر می‌شوند، با اجتماع وسیع‌تری از همکاران خود، رابطه برقرار می‌سازند که این امر، کیفیت تدریس را بهبود می‌بخشند.

مسأله‌ای اساسی در نظام فعلی انگیزه‌های توسعه‌ی حرفه‌ای این است که معلمان به‌جای تسلط بر یک موضوع درسی و بهترین روش تدریس آن، برای تکمیل واحدهای درسی دانشگاهی امتیاز یا مدرک کسب می‌کنند. برنامه‌های کارشناسی ارشد آموزش [علوم تربیتی] فرصت یک مطالعه‌ی عمیق را ایجاد می‌کند اما فاقد محتوای علمی و پیوندهای قوی با تمرین‌های عملی آموزش است. کارگاه‌های توسعه‌ی حرفه‌ای که یک یا دو روز به طول می‌انجامد، کمک اندکی به بهبود فهم و درک معلمان از موضوعات درسی می‌کند و اغلب به معلمان، چگونگی انجام مجموعه‌ی خاصی از فعالیت‌ها یا دروس یا کار با بسته‌های برنامه درسی انتخاب‌شده به‌وسیله‌ی مدرسه یا ناحیه به شکل «بساز و بگیر[۲۰]» تدریس می‌شود. (نمودار ۷)

هیچ کدام از این رویکردها، قانع‌کننده نیست. مدارس باید

نمودار ۷: توسعه‌ی کارکنان برای معلمان علوم پایه‌ی هشتم در هر سال



به گونه‌ای تغییر کنند که معلمان را افراد روشنفکر [اندیشمند][۲۱] ببینند نه آن‌که معلمان را تکنسین فرض کنند. برای حمایت از آموزش علومی که فعالیت‌های آن با استانداردها و معیارهای خاص گره خورده باشد، برنامه‌های توسعه‌ی حرفه‌ای باید مستقیم‌تر مسایل مربوط به توالی و ارتباط و اتصال برنامه را با «معیارها و استانداردها»، نشان دهند. با تمرکز بر توسعه‌ی حرفه‌ای مبتنی بر استانداردها که دانش تدریسی و علمیِ لازم را برای تغییرات واقعی برنامه‌های درسی و آموزشی می‌سازد، شانس موفقیت اصلاحات [آموزشی] افزایش می‌یابد.

کار جاری برای انجام اصلاحات نظام‌وار، در خیلی از ایالت‌ها، نواحی محلی آموزشی و حوزه‌های شهری و در پروژه‌های مشارکتی آموزش معلمان ریاضی و علوم، آغاز شده است تا مدل‌های بلندمدت و درگیری فعال معلمان ریاضی و علوم در فعالیت‌های توسعه‌ی حرفه‌ای را نتیجه دهد. تأکیدهای مداوم بر توسعه‌ی حرفه‌ای، کاربرد وسیع‌تر این مدل‌ها را تضمین خواهد کرد. در طراحی فعالیت‌های توسعه‌ی حرفه‌ای، مصلحان آموزشی باید بین دانش افزایش یافته در علوم و دغدغه‌های جاری معلمان در رابطه با عمل تدریس، ارتباط برقرار کنند.

اصولی برای تغییر توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان

اصول زیر برای کمک به طراحی دوباره‌ی آموزش مستمر معلمان است که به واسطه‌ی درک ما از چگونگی یادگیری معلمان و فرصت‌هایی برای توسعه‌ی آن، پیشنهاد می‌شود:

- آموزش عالی و اتحادیه‌های حرفه‌ای باید ارتباط‌های خود را با توسعه‌ی حرفه‌ای، قوی‌تر نموده و انسجام بیش‌تری عرضه کنند؛
- تأکید بر یادگیری علوم مرتبط با زمینه‌های محلی مدارس، باید جایگزین تمرکز بر مهارت‌های عمومی تدریس شود؛
- فعالیت‌ها باید مهارت‌های عملی و برنامه‌ای را در معلمان ایجاد کند تا بتوانند استانداردها و معیارها را در یک دنباله‌ی آموزشی، با هم تلفیق کند؛
- کادرهای معلمان، باید مسئولیت‌های

رهبری [اصلاحات] را بر عهده گیرند؛

● فعالیت‌ها باید ترغیب‌کننده‌ی یادگیری برای تمام متخصصان مدارس از جمله کادر اجرایی باشند.

این اصول، نیاز به تفکر دوباره درباره‌ی راه‌های سازمان‌دهی وقت معلمان، چگونگی استفاده از بودجه‌های جاری توسعه‌ی کارکنان و سطح حمایت ضروری از توسعه‌ی کارکنان برای اجرا و تداوم اصلاحات، دارد.

با تقویت پیوندهای میان آموزش عالی و اتحادیه‌های حرفه‌ای، معلمان می‌توانند در نظام منفک فعلی توسعه‌ی حرفه‌ای، انسجام ایجاد کنند. در چنین شرایطی، این سازمان‌ها به اندازه‌ی کافی برای معلمان انعطاف خواهند داشت که از ایجاد یک نظام سطح بالای متمرکز توسعه‌ی حرفه‌ای که پاسخ‌گوی نیازهای محلی نیست، اجتناب کنند. اگر معلمان با محققان تعامل پایداری داشته باشند، می‌توانند استفاده‌ی خود از دانش تحقیقی را افزایش دهند. هم‌چنین، این تعامل به محققان این فرصت را می‌دهد تا کارشان را به شکلی که با شرایط محلی منطبق است، ارایه دهند. به طور مشابه، اتحادیه‌های حرفه‌ای و انجمن‌های معلمان، برای کمک به معلمان برای درمیان گذاشتن دانش خویش با یکدیگر، زیرساخت‌هایی دارند، گرچه تاکنون، در مورد اثرات عضویت در این سازمان‌ها بر توسعه‌ی معلمان، شناخت کمی حاصل شده است.

یادگیری باید هدف اصلی تمام [ارکان] مدرسه باشد ـ نه فقط برای دانش‌آموزان بلکه هم‌چنین برای معلمان و مجریان. توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان باید به‌عنوان یک رویه‌ی عملی استاندارد، دیده شود. یکی از هدف‌های اصلاحات، افزایش توانایی معلمان برای یادگیریِ این است که کدام تمرین‌های عملی، در موقعیت محلی آن‌ها و برای گروهی از دانش‌آموزان، بهتر از همه کار می‌کند. بنابراین، توسعه‌ی حرفه‌ای باید به معلمان کمک کند تا عمل تدریس خودشان را مورد تحقیق قرار داده و آن را با یادگیری خودشان، مرتبط کنند.[۲۲] معلمان مبتدی به فرصت‌هایی برای توسعه‌ی مهارت‌های هنری ـ عملی مانند مدیریت کلاس درس، نیاز دارند. با تجربه و اعتمادبه‌نفس، معلمان علاقه‌ی بیش‌تری نسبت به یادگیری دانش‌آموزان پیدا می‌کنند که نشان‌دهنده‌ی نیاز به توسعه‌ی حرفه‌ای است که بر انتقال استراتژی‌های تدریس و رویکردهای ارزشیابی به یادگیرنده، متمرکز شده است.

هم‌چنین، ممکن است معلمان در روش‌های یادگیری برای تلفیق برنامه‌ی درسی علوم و ارتباط و اتصال آن با تکنولوژی، به کمک‌های ویژه‌ای نیاز داشته باشند. اگرچه یادگیری علوم باید بنا به نیازهای هر واحد کلاسی یا حتی هر فرد طراحی شود، با این حال واضح است که برای معلمان، تدبیر فعالیت‌های جدید برای هر موضوع درسی، امری غیر واقعی است. معلمان به فرصت‌هایی برای یادگیری مهارت‌ها با هدف تلفیق فعالیت‌های یادگیری نیاز دارند که از یادگیری تلفیقی حمایت می‌کند.

برای حفظ تمرکز بر اهداف اصلاحات در آموزش علوم، باید گروه‌های معلمان طوری سازمان‌دهی شوند که در کنار توسعه‌هایی در تدریس و یادگیری علوم، مدل‌های تدریس را نیز عرضه کنند و شبکه‌ای از معلمان را که به طور مستمر تجارب خودشان را گردش می‌دهند، بسازند. بالاخره چون مدیران و سایر کارکنان اجرایی مدارس و نواحی، قدرت بزرگی بر آموزش علوم اعمال می‌کنند، لذا ترغیب یادگیری مستمر آن‌ها، برای این تغییرات، حیاتی است.

توصیه‌های آموزشی برای سازمان‌دهی مدارس

دیدگاه ارایه شده برای تدریس و توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان، به‌طور قابل ملاحظه‌ای بر سازمان‌دهی و مدیریت مدرسه تأثیر می‌گذارد. مدارس باید به گونه‌ای سازمان‌دهی شوند تا وابستگی متقابل افزایش یافته، هماهنگی تخصص‌ها و فرهنگ تکنیکی که حامی ابتکارات و آزمایش‌ها باشد به‌کار گرفته شود. سازمان‌هایی که تعداد زیادی افراد متخصص و مؤسسه‌هایی با تکنولوژی بالا را که بیش‌تر کار غیر معمولی انجام می‌دهند را به‌کار می‌گیرند، شروع به ایجاد این نوع ساختارهای سازمانی کرده‌اند. مدارس ارتقایافته‌ی لوین (۱۹۸۷) جنبه‌های مختلفی از این مدل را نشان می‌دهند.

مدرسه یک سازمان یادگیری است که رشد مستمر را ترغیب می‌کند. مبتدی‌ها از طریق همکاری نزدیک و مسئولیت مشترک با دانشگاه‌ها، با فرهنگ مدرسه آشنا می‌شوند. مدارس می‌توانند فرهنگ‌هایی را که حامی بازتاب‌ها و تحقیقات معلمان هستند، ایجاد کنند و زبان مشترکی برای توضیح و تحلیل عمل تدریس، به‌وجود آورند. مدارس می‌توانند با ایجاد جدول‌های زمان‌بندی که مشوق برنامه‌ریزی مشارکتی و رویکردهای میان‌رشته‌ای به تهیه‌ی برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای باشد و با فراهم کردن فرصت‌های منظمِ مشاهده و بحث معلمان با همکاران

خود درباره‌ی یاددهی و یادگیری، از یادگیری در تمام طول عمر معلمان حمایت کنند.

توصیه‌ها

توصیه‌های زیر دیدگاه جدیدی از اصلاحات را ارایه می‌کند و گام‌های لازم برای اجرای آن دیدگاه را پیشنهاد می‌دهد. گروه‌های هیأت علمی و مجریان، سازمان‌های حرفه‌ای، مؤسسات دولتی و سایرین، نیاز به یافتن استراتژی‌های مناسب برای موقعیت‌های خودشان دارند. استفاده از ایده‌های زیر به عنوان اصول راهنما به این فرآیند کمک خواهد کرد.

● دیدگاهی وسیع از سوادآموزی علمی را معرفی کنید.

آموزش معلمان باید به گونه‌ای طراحی شود تا معلمان علومی تربیت شوند که هم نسبت به افزایش درک و فهم ارتباط و اتصال بین علوم، ریاضی و تکنولوژی متعهد باشند و هم‌زمینه‌های اجتماعی، تاریخی و فلسفی دانش علمی را درک کنند. تمام معلمان باید بتوانند تدریس خودشان را بر ایده‌های اساسی حوزه‌های خودشان متمرکز کنند و برای الزامات تفکر شفاف و ارتباطات مؤثر، استفاده از واژه‌های تکنیکی را محدود کنند.

● بر حرفه‌ی تدریس تأکید کنید.

برنامه‌های آموزشی باید طرز تلقی‌ها، دانش و درک معلمان را توسعه دهد تا معلمان را قادر سازد که بتوانند نظریه‌ها و اصول را برای طراحی استراتژی‌ها و فعالیت‌های کلاس درسی که معرف نیازها و پیشینه‌های دانش‌آموزان خاصی باشد، به‌کار گیرند. این نوع تدریس ـ که عمل بازتابی، اصولی، یا معقول نامیده می‌شود ـ ویژگی‌های تعریف شده‌ی معلمان حرفه‌ای است. استانداردها و برنامه‌های درسی جدید، به معلمانی نیاز دارند که درک عمیقی از موضوعات درسی خود داشته باشند نه آن‌که متخصصان خبره‌ای باشند که تنها از تولیدات آموزشی از پیش‌آماده شده توسط متخصصان برنامه‌ریزی درسی و دیگر «متخصصان» خارج از کلاس درس، استفاده می‌کنند. برای تحقق این هدف، آموزش معلمان باید به‌عنوان یک تلاش حرفه‌ای مستمر، دوباره تعریف شود. برای ایجاد مدارسی که تحقیق و گفت‌وگوی انتقادی در آن‌ها، به عنوان قسمتی از سازمان‌دهی معمولی کار تدریس محسوب می‌شود، برنامه‌های آموزش معلمان باید با نواحی آموزشی کار کنند.

● معلمان را قادر سازید تا علوم را به تمامی دانش‌آموزان، تدریس کنند.

معلمان باید آگاه باشند که علوم، تنها پیکره‌ای از دانش نیست، بلکه پارادایمی است که از طریق آن، می‌توان دنیا را دید. معلمان آینده و معلمان شاغل، باید با معلمان باتجربه، محققان و آموزشگران معلمان که به طور مؤثر علوم را به دانش‌آموزانی با زمینه‌های مختلف تدریس می‌کنند، کار و مطالعه کنند. معلمان جدید باید نسبت به تفاوت‌های دانش‌آموزان حساس باشند و بدانند که چگونه مشخصه‌های فردی و نیازهای خاص، می‌تواند در موفقیت و درگیر شدن با موضوع، تأثیرگذار باشند.

● آموزش دانشگاهی را بهبود بخشید.

دانشکده‌ها و دانشگاه‌ها باید توجه هیأت علمی را به تحقیقات قابل دسترس در تدریس، یادگیری و ارزیابی جلب کنند تا این تحقیقات، بتوانند در توسعه‌ی مؤثرتر تدریس دوره‌های کارشناسی، مورد استفاده قرار گیرند. هیأت علمی که در رابطه با بهبود تدریس تلاش می‌کنند، باید از طرف مؤسسه‌های آموزشی دوره‌های کارشناسی مورد حمایت قرار گیرد. این مؤسسه‌ها باید سمینارها و جلسات بحث و گفت‌وگو در مورد روش‌های بهبود تدریس را برگزار کنند. به‌علاوه، این مؤسسات باید برای ارایه‌ی رهنمون‌های شفاف‌تر در مورد چیستی شالوده‌ی تدریس کارآمد، تلاش کنند و در سیاست‌های استخدامی و ارتقای دانشگاهی، آن‌ها را به‌کار گیرند. دانشگاه‌های بزرگ باید به دانش‌جویان تحصیلات تکمیلی، کمک کنند تا صلاحیت‌های تدریس خود را توسعه دهند و راه‌های بدیلی برای درس‌های عمومی علوم دوره‌های کارشناسی که به‌صورت سخنرانی و در کلاس‌های بزرگ اجرا می‌شود، پیدا کنند.

● یادگیری معلمان را ارتقا دهید.

در برنامه‌ی آموزش معلمان، حیاتی است که برای معلمان آینده، فرصت‌هایی به‌منظور مشاهده، کسب تجربه و شرکت در فعالیت‌های دانش‌آموز ـ محوری و یادگیری واقعی با ابزار آموزشی، فراهم شود. برنامه‌های آموزش معلمان باید پیوند

خود را با مدارس محکم کنند تا معلمان آینده با اندیشه‌های «پشت صحنه» و طراحی‌هایی که به تدریس کارآمد کمک می‌کند، آشنا شوند. معلمان آینده لازم است بتوانند دانش حاصل از تحقیقات آموزشی را برای تجزیه و تحلیل عمل تدریس به طرق جدید، مورد استفاده قرار دهند. هم‌چنین آن‌ها نیازمند فرصت‌هایی هستند تا تجارب کلاس‌های درسی خود را در پرتو دانش رسمی در مورد تدریس و یادگیری، به کار برند.

● **استخدام معلمان را بهبود بخشید.**

برای استخدام متقاضیانی که احتمالاً نسبت به دیگران، معلمان علوم، ریاضی و تکنولوژی بهتری می‌توانند باشند، تلاش‌های زیادی باید صورت گیرد. زنان، افراد رنگین‌پوست و افراد معلول، باید به‌طور متهورانه‌ای، استخدام شوند و برای حرفه‌هایی مانند معلمی علوم مورد حمایت قرار گیرند. دانش‌جویان علاقه‌مند باید زودتر مشخص شوند و به‌وسیله‌ی معلمان جوان، پرورش یافته و نظارت شوند. برای معلمان آینده، برنامه‌های «پل» بین دبیرستان و دانشکده؛ و برای دانش‌جویان مؤسسات آموزشی غیر دانشگاهی که به حرفه‌های تدریس علاقه‌مند هستند و برای بسیاری از دانش‌جویان غیر سنتی و متعلق به اقلیت‌های گروهی، وجود برنامه‌هایی در این خصوص، حیاتی است. بورس تحصیلی و اطلاعات شغلی در مورد تدریس، مهم است. خصوصاً برای دانش‌جویانی که ممکن است اولین فرد خانواده‌ی خود باشند که به آموزش بعد از مدرسه، راه یافته است. به موازات این، استانداردهای مربوط به معلمان ریاضی و علوم باید به‌گونه‌ای ارتقا یابد که تخصص‌گرایی و کیفیت تدریس، در طول زمان افزایش پیدا کند.

● **به اصلاحات بلندمدت، متعهد شوید.**

چون آموزش عالی در شکل‌گیری معلمان آینده نقش حیاتی بازی می‌کند، سازمان‌های حرفه‌ای در علوم و علوم تربیتی در آموزش عالی می‌توانند در حمایت از سمینارها، انتشار مقاله‌ها و سایر حالت‌های توسعه‌ی حرفه‌ای برای مسئولان اجرایی مدارس، پیش‌قدم شوند. مسئولان اجرایی، هم در آموزش عالی و هم در دوره‌های پیش‌دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم (K_۱۲)، کلیدهای موفقیت هر حرکت اصلاحی به‌حساب می‌آیند و باید در توسعه‌ی حرفه‌ای، منظور شوند.

هم‌چنین مسئولان اجرایی و هیأت علمی آموزش عالی، باید تشخیص دهند که حمایت گسترده برای استمرار تحقیقات علوم موجب خواهد شد که درک عمومی و قدردانی از علوم، افزایش یابد. بنابراین، آموزش عالی، به واسطه‌ی کار با آموزشگران دوره‌های متوسطه و ابتدایی برای اجرای اصلاحات، بهره‌مند خواهد شد. اصلاحات جدی، مستلزم قبول تعهد بلندمدت است. آموزشگران باتجربه، شاهد اصلاحات قبلی بوده‌اند که بدون ثبات و تغییر مشخص، آمده‌اند و رفته‌اند. اگر آن‌ها برای انجام اصلاحات به خدمت فراخوانده شوند، باید توجیه شوند که تلاش‌ها نه تنها برای یک سال بلکه برای چندین دهه ادامه خواهد داشت. اصلاحات موفق، سختی رویه‌ی تغییر را تصدیق می‌کند و در تمامی سطوح، پیشرفت می‌نماید، ائتلاف‌ها را برقرار می‌کند و کادری از رهبران آموزشی را به‌وجود می‌آورد که برای تغییر، فشار را ادامه خواهند داد.

زیرنویس‌ها

1. Reform
2. Reformer
3. Holmes Group
4. Science and Mathematics Teacher Education Collaborative Program
5. National Science Foundation (NSF)
6. Dispositions
7. National Science Education Standards
8. National Research Council
9. Benchmarks for Science Literacy
10. American Association for the Advancement of Science
11. Counterintuitive
12. Major
13. Minor

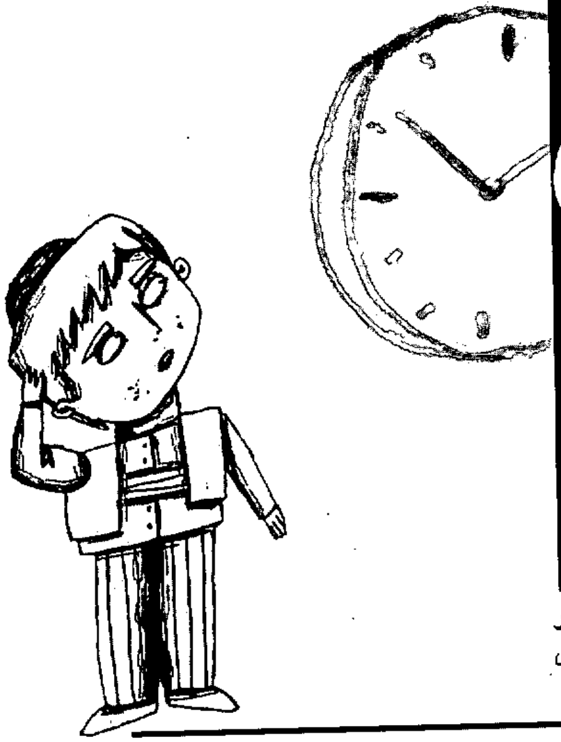
۱۴. Self-Contained Classroom کلاسی که شبیه یک آزمایشگاه کوچک است و مایحتاج خود را دارد (مترجمان).

15. Questioning Authority
16. Team Specialist
17. Mentor

۱۸. بازتاب و شبکه‌سازی، دو جزء اصلی و حیاتی چرخه‌ی تحقیق عمل می‌باشند. برای آشنایی بیش‌تر ر. ک. «نرگس مرتاضی مهربانی؛ آموزش معلمان، یک حوزه‌ی تحقیقی، رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۶۹، سال نوزدهم، صص ۱۹ تا ۳۳».

19. Tutor
20. Make it, Take it
21. Intellectuals

۲۲. در این جا، منظور از تحقیق عمل (اقدام‌پژوهی_Action Research) است. تحقیق عمل، نوعی از تحقیق است که به‌وسیله‌ی افراد درگیر در موقعیت‌های اجتماعی_آموزشی انجام می‌شود و هدف آن بهبود استدلال و اعمال اجتماعی توسط آن‌ها و بالا رفتن فهم و ادراکشان از اوضاع و شرایط است. درنتیجه، بهترین حالت چنین تحقیقی این است که با تشریک مساعی افراد درگیر آن عمل، انجام شود که در این صورت، گروه تحقیق‌کننده، قدرت و اختیار بیش‌تری به‌دست می‌آورد.



نقش زمان و زبان در آموزش ریاضی

علی روزدار
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی استان چهارمحال و بختیاری

چکیده

زمان آموزش دادن یک مفهوم، از لحاظ شرایط سنی یادگیرنده و هم‌چنین زبان آموزش این مفهوم، دوعامل مهم و اساسی در نحوه‌ی آموزش و یادگیری است.

نظر به یافته‌های پیاژه و دیگر روان‌شناسان در باب آموزش مفاهیم، و هم‌چنین به دلیل تغییرات بنیادی در محتوای ریاضیات جدید، لازم است که به این دو عامل مهم، توجه اساسی مبذول شود. نگارنده معتقد است که اگر مفاهیم، در زمان متناسب آن‌ها و با زبان یادگیرنده آموزش داده نشوند، یادگیری ثمربخش نخواهد بود. این موضوع با شدت کمتری، در مورد لهجه‌ی یادگیرندگان نیز ـ مثلاً در میان اقوام ایرانی ـ صادق است.

در این مقاله، اهمیت این دو موضوع در آموزش مفاهیم به دانش‌آموزان و تالیف کتاب‌های درسی ریاضی، با دیدی تلفیق‌گونه از روان‌شناسی و آموزش، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مقدمه

افت تحصیلی در سال‌های اخیر، به‌خصوص در درس ریاضی، برنامه‌ریزان آموزشی و علاقه‌مندان به امر تعلیم و تربیت را به بررسی و نقد کارآیی نظام آموزشی و محتوای دروس ترغیب کرده است. به‌ویژه بعد از روی کارآمدن نظام جدید آموزشی که در نتیجه‌ی آن، تغییرات اساسی در نظام آموزش متوسطه ایجاد شد، شیوه‌ی قدیمی «سالی ـ عنوانی» ابتدا به «ترمی ـ واحدی» و پس از مدتی به «سالی ـ واحدی» تغییر یافت و در محتوای دروس، تحولی اساسی صورت گرفت که کتاب‌های درسی ریاضی نیز از این تغییرات، در امان نماندند. صرف‌نظر از تغییر نظام آموزشی، انتقادهایی به برنامه‌ریزی ریاضی متوسطه وارد است. بعضی از این انتقادها به انتخاب محتوا و سرفصل متون درسی و برخی به شیوه‌ی ارایه‌ی این موضوعات از جنبه‌های زمان و زبان در معرفی مفاهیم، مربوط می‌شوند. مسأله این است که یک مفهوم چه‌وقت، چگونه، و به چه کسی باید آموزش داده شود. به عبارت دیگر، در بررسی کارآیی یک نظام آموزشی، این سؤالات مطرح است که:

ـ آیا برای ارایه‌ی یک مفهوم، مناسب‌ترین زمان در نظر گرفته شده است؟

ـ آیا برای سنین و سطوح مختلف، موضوعات مناسب لحاظ شده است؟ معلمان مجرب و انجمن‌های ریاضی معلمان استان‌ها و شهرستان‌ها، تا چه اندازه در تألیف کتب درسی نقش داشته‌اند؟

ـ معلمان، تا چه اندازه برای پیشبرد اهداف نظام آموزشی

مهارت کسب کرده‌اند؟

این موضوع‌ها جای پژوهش بسیار دارند و در این دوره‌ی بحرانی، به‌خصوص در زمینه‌ی ریاضی، نظام آموزشی، محتاج لطف، عنایت و توجه اربابان نظر و دلسوزان این مرز و بوم است.

چرا ریاضیات؟

آموزش مدرسه‌ای، مهم‌ترین بخش آموزش در هر کشور محسوب می‌شود و به دلیل بنیادی بودن این آموزش، جمعیت انبوه آموزش گیرندگان و شرایط سنی آنان، آموزش در این سطح، شرایط و امکانات خاصی را طلب می‌کند. لذا چنین آموزشی، نیازمند عزم ملی در زمینه‌ی طراحی برنامه‌ای دقیق، منسجم و به‌روز می‌باشد.

یکی از موضوعات مهم در آموزش مدرسه‌ای، ریاضیات است. قرن‌ها ریاضیات به‌عنوان والاترین درس برای تربیت «قدرت استدلال» تلقی می‌شد. در گذشته و حال، متعارف‌ترین پاسخ به این پرسش که: «چرا این همه ریاضیات در مدرسه هست؟» این بوده است که «ریاضیات به انسان فکر کردن بهتر را می‌آموزد» یکی دیگر از دلایل ماندگاری جایگاه ویژه‌ی ریاضی در برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای، استفاده از آن به عنوان یک غربال یا «صافی» برای ورود به بسیاری از رشته‌ها و مشاغل بوده است.

در بیان اهداف مهم ریاضی می‌توان گفت که مطالعه‌ی ریاضی و آگاهی از مفاهیم آن، به توانایی‌ها و مهارت‌های زیر منجر می‌شود:

- دانش الگوهای ریاضی و امکان‌پذیری دست‌کاری و درک محیط یادگیرنده هم از نظر عینی و هم از نظر ذهنی؛
- زبانی که مفاهیم دقیق مربوط به الگوهای ریاضی را که هم در محیط عینی و هم در حوزه‌ی فکری یادگیرنده هستند، به گونه‌ای صریح و روشن می‌سازد؛
- کشف روابط جدید یا استنتاج از روابط تازه در یک الگوی ریاضی موجود و آزمایش درستی آن از راه استدلال منطقی؛
- توسعه‌ی هوش و نقش آن در اختراع و اکتشاف روابطی که کاربرد آن‌ها به یادگیرنده اجازه می‌دهد روی محیط خویش اثر بگذارد و به آن نظم و ترتیب دهد؛
- لذّتی که می‌توان از طریق دنبال کردن فعالیت‌های ذهنی و عشق ورزیدن به دانش، به‌دست آورد؛
- ریاضیات و فعالیت ریاضی به عنوان جزیی واقعی از میراث فرهنگی نسل آدمی که شایسته‌ی پشتیبانی و تشویق اجتماع است.

در پرتو مقاصد تعریف شده برای آموزش ریاضی، به جهت نقش غیرقابل انکار آن در توسعه‌ی علمی، فرهنگی و صنعتی کشور، لازم است که برنامه‌ریزان درسی و آموزشگران ریاضی شیوه‌های نوین و ثمربخش را برای ارایه‌ی هرچه بهتر این علم به افراد به‌کار بندند. هم‌چنین، جهت تحقق شعار «ریاضیات برای همه»، باید ریاضیات مورد نیاز هر شخص را با توجه به استعداد و شغل آینده‌اش در اختیار او قرار داد. این امر تحقق نخواهد یافت مگر آن‌که شناخت کافی و وافی از شرایط و نیازهای جامعه و افراد، مطالعه‌ی همه‌جانبه‌ی یادگیرندگان صورت گیرد و از تحقیقات و مطالعات آموزشگران و روان‌شناسان استفاده شود.

راه طی شده

ریاضیات و آموزش ریاضی در ادوار گذشته، چه در ایران و چه در کشورهای دیگر مسیری پرفراز و نشیب، لیکن رو به ترقی را پیموده است. در کشور ما، شاید بتوان گفت امیرکبیر با ایجاد دارالفنون و اقدامات دیگرش در زمینه‌ی آموزش، اولین تحول چشم‌گیر را باعث شد که به واسطه‌ی آن، برنامه‌ریزی مدارس ایران با اقتباس از کشورهای پیشرفته و انطباق آن با شرایط جامعه، تحولی اساسی یافت. در دوره‌های بعد نیز تغییراتی ایجاد شد تا این‌که در آغاز دهه‌ی ۱۳۷۰، انقلابی در نظام آموزشی کشور، و به‌خصوص در آموزش ریاضیات مدرسه‌ای صورت گرفت. با وجودی که بر نفس تغییر انتقادی وارد نیست، ولی به نظر می‌رسد ایجاد این تحول و برنامه‌ریزی‌های بعد از آن، با نوعی شتاب‌زدگی همراه بوده و پژوهش گسترده و دامنه‌داری برای آن، صورت نگرفته است. به‌عنوان نمونه، در نظام قدیم آموزشی، یک معلم به‌ویژه در سطح متوسطه و در رشته‌ی ریاضی-فیزیک در گرایشی خاص مهارت می‌یافت. حال آن‌که در نظام تغییر یافته، از این معلم انتظار می‌رود که مطالب متفاوتی را به دانش‌آموز تدریس کند.

ما از جامعه‌ی جهانی جدا نیستیم و طبیعتاً، تحولات جهانی و پیشرفت‌های صورت گرفته در جهان توسعه‌یافته، نظام آموزشی ما را نیز تحت تأثیر قرار می‌دهد. از این رو، باید تلاش کنیم تا «فاصله‌ی» خود با کشورهای توسعه یافته را به حداقل برسانیم که یکی از عواملی که به این امر کمک می‌کند، تحول

در نظام آموزشی و نزدیک کردن آن به نظام‌های پیشرفته است. این امر، بدیهی بوده و از نیازهای حتمی و ضروریات اولیه در پیشرفت و توسعه است. اما بحث بر سر این است که شرایط، ساختار و بافت جامعه‌ی ایران با جوامع غربی تفاوت‌های اساسی و غیرقابل انکاری دارد که این تفاوت‌ها، در ایجاد هرگونه تغییری، باید مورد توجه قرار گیرند.

زمان، زبان، و آموزش ریاضی

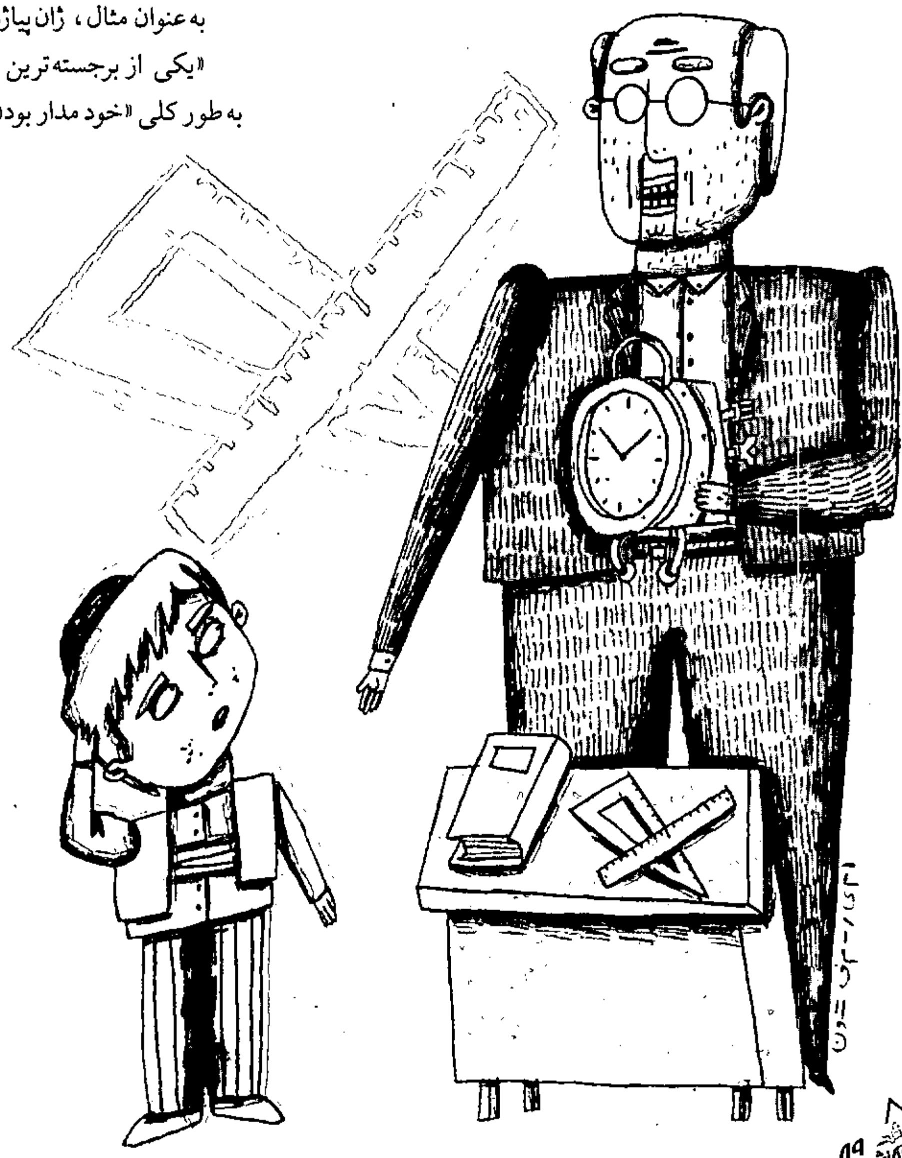
آموزش «ریاضیات» فقط برای کاربرد آن در دیگر علوم و بالا بردن توان فکری افراد نیست. ریاضیات انبوه متراکمی از دانسته‌ها را گردآورده است که بخش مهمی از فرهنگ بشری را تشکیل می‌دهد. بنابراین، یک وظیفه‌ی آموزش این است که این گنجینه‌ی عظیم را از طریق آموزش مدرسه‌ای، به نسل آینده انتقال دهد. نکته‌ی مهم این است که «آموزش ریاضی» نیز یک دانش است. «آموزش ریاضی» با تکمیل و پیاده کردن برنامه‌های درسی مناسب ریاضی و مسایل و موضوعاتی که در ارتباط با یادگیری و یاددهی ریاضی هستند، مرتبط است. بنابراین، «آموزش ریاضی» با دو دانش سروکار دارد که یکی «ریاضی» و دیگری «آموزش آن» است. نکته‌ی مهم دیگر، داشتن درک درستی از ماهیت ریاضیات است.

این که «چه زمانی می‌توان یک مفهوم ریاضی را به شخصی آموخت؟» و «نحوه‌ی بیان آن مفهوم چگونه باید باشد؟» دو مسأله‌ی اساسی در آموزش مفاهیم ریاضی به یادگیرندگان است. روان‌شناسان زیادی روی این موضوعات کار کرده‌اند که نتایج تحقیقات و مطالعات آن‌ها، تأثیر به‌سزایی در نظام آموزشی، تدوین متون درسی و روش‌های آموزشی به‌ویژه در سطوح ابتدایی و راهنمایی داشته است.

به عنوان مثال، ژان پیاژه عقیده داشت که:

«یکی از برجسته‌ترین مشخصات تفکر و تکلم کودکان، به طور کلی «خود مدار بودن» آنان است. یعنی کودک نمی‌تواند به دیدگاه شخص دیگری توجه کند. او لغات را بر اساس تجارب خود تفسیر می‌کند و به‌کار می‌برد، و هنوز به این امکان پی نبرده که کودکان و نوجوانان دیگر که تجارب متفاوتی دارند، احتمالاً می‌توانند [نسبت به او] تصورات متفاوتی داشته باشند.»

اما این واقعیت، معمولاً از سوی معلمان ابتدایی نادیده گرفته می‌شود و هنوز به همان شیوه‌ی سنتی، مفاهیم از سوی معلم به دانش‌آموزان منتقل می‌شود و دانش‌آموز موظف است همان‌گونه یاد بگیرد که معلم از او انتظار دارد. در این شیوه، تجارب اولیه‌ی کودک که نظریه‌پردازان از آن به‌عنوان مؤلفه‌ای بسیار مهم در یادگیری مفاهیم یاد می‌کنند، مورد عنایت قرار نمی‌گیرد. زمان یادگیری ثمربخش



این مفاهیم نیز موضوعی است که باید توجه کافی بدان مبذول شود. در مورد آموزش مفاهیم ریاضی به کودکان، پیاژه معتقد بود:

«اگر فکر کنیم که کودک مفهوم عدد و سایر مفاهیم ریاضی را فقط از طریق آموزش یاد می‌گیرد، اشتباه کرده‌ایم. وقتی بزرگ‌ترها سعی می‌کنند مفاهیم ریاضی را قبل از موعد به کودک بیاموزند، یادگیری او سطحی خواهد بود. درک واقعی این مفاهیم، فقط از طریق رشد ذهنی کودک امکان‌پذیر می‌شود.»

پیرس، فیلسوف پراگماتیست آمریکایی نیز نظرات مطرحی را در زمینه‌ی شناخت و کاربرد آن دارد. او در شناخت، سه مؤلفه را مهم و قابل بیان می‌داند که این سه مؤلفه، تفسیر عاطفی و تجربی، تفسیر فعالانه و شخصی، و تفسیر منطقی هستند.

به عنوان نمونه در ریاضی، کودک در مرحله‌ی نخستین، از وجود اعداد (در تجارب روزمره) آگاه می‌شود. در مرحله‌ی دوم، برای ساختار بخشیدن به آن‌ها تلاش می‌کند و در مرحله‌ی سوم، عدد به صورت یک نماد شناخته می‌شود که هریک از این مراحل، زبان خاص خود را دارند که می‌توان آن‌ها را زبان فعال، زبان کارکردی، و زبان علمی نامید.

مثال دیگر، درک مفهوم بردار در دوره‌ی متوسطه است که ابتدا به صورت تصویری در زندگی روزمره، سپس به صورت شاخص یک نیرو که قابل افزایش و کاهش است و سوم به صورت عنصری از یک فضای برداری که براساس پیش‌پذیرفته‌ها تعریف می‌شود، ارایه می‌گردد.

در سطوح متوسطه و راهنمایی نیز بافت فکری و روحی دانش‌آموزان، روش‌های متفاوتی را برای آموزش، طلب می‌کند. از نظر اریکسون، «این مراحل از رشد (مرحله‌ی ۱۲ تا ۱۸ سالگی) مرحله‌ی هویت‌یابی در مقابل آشفتگی نقش است». دانش‌آموز در این سنین، دوران سریع و پرتلاطمی را می‌گذراند. او با هر شکلی از قدرت، عقیده و مقررات محدود کننده‌ی پیرامون زندگانی خود به مبارزه برمی‌خیزد و در مقابل آن مقاومت می‌کند؛ می‌خواهد در کنترل اعمال خود آزاد باشد و مجری دستورات دیگران نباشد. چنین دانش‌آموزی ممکن است که در یک کلاس ریاضی، خیلی زود به یک فرد عاصی و عاطل بدل شود. یعنی وقتی ریاضیات به صورت ساخته و پرداخته عرضه می‌شود که در آن برای هر سؤالی، جوابی صریح و متکی بر دلیل وجود دارد؛ دانش‌آموز هرگاه که چون‌وچرا کند، شکست می‌خورد. لذا ممکن است احساس ضعف کرده، روی خوش به این درس نشان ندهد. با این وجود، این گونه خصوصیات روحی و فکری دانش‌آموزان در سنین راهنمایی و دبیرستان، کمتر مورد توجه دبیران ریاضیات قرار می‌گیرد و بیش‌تر براساس شناخت سطحی از آموزش و در قالب شیوه‌ی سنتی، به آموزش ریاضیات می‌پردازند. فهم و درک معلم از مفاهیم ریاضی، آگاهانه یا ناآگاهانه بر تبیین هدف‌های او، نحوه‌ی توضیح دادنش، پاسخ‌هایش به سؤالات دانش‌آموزان و مسایلی که برای امتحان انتخاب می‌کند، تأثیر دارد؛ و اگر این ادراک ضعیف باشد، می‌تواند عامل تدریس ناکارآمد وی شود.

هم‌چنین، شرایط و نیازها از کشوری به کشور دیگر تغییر می‌کند. در بعضی کشورها هم‌چون ایران نیز تنوع شرایط، امکانات و موقعیت‌ها موجب می‌شود که نتوان یک نگرش و یک شیوه‌ی آموزشی را بر همه‌ی مناطق حاکم کرد. تدریس مفید مفاهیم ریاضیات مستلزم آگاهی از این شرایط، ملاحظه‌ی موقعیت زمانی و مکانی یادگیرندگان و نحوه‌ی ایجاد ارتباط یعنی زبان آموزش مفاهیم است. یکی از عمده‌ترین مشکلات دانش‌آموزان در درک مفاهیم ریاضی، اختلاف زبانی آن‌ها با زبانی است که این مفاهیم به‌وسیله‌ی آن بیان می‌شوند. برداشت‌های نادرست دانش‌آموزان از ریاضی، گاه ناشی از وجود فاصله‌ای بین معنای کلمات و مفاهیم در ریاضی و معنای آن‌ها در زندگی روزمره است که این، یک مشکل معناشناختی است و امروزه در آموزش ریاضی، بدان توجه فراوان مبذول می‌شود. مثلاً، مفهوم مجموعه در کاربرد روزمره عبارت است از چندچیز که به علت شباهت یا مکمل هم بودن، همراه هم در نظر گرفته می‌شوند. به طور نمونه، «هنرمندان مشهور» در کاربرد روزمره یک مجموعه است، اما «قلم، پرنده، ماه» مجموعه نیست؛ حال آن‌که در ریاضی، دقیقاً برعکس است. هم‌چنین، در زبان روزمره، مجموعه‌ی بدون عضو معنا ندارد؛ در صورتی‌که در ریاضی، مجموعه‌ی بدون عضو هم داریم. یا مثلاً، تفاوت مفاهیم «پایه» و «توان» با معنای آن‌ها در زندگی روزمره، ممکن است برای کودک ایجاد اشتباه بکند و این تفاوت را می‌توان در بسیاری دیگر از مفاهیم ریاضی مانند «جذر»، «عدد گویا»، «عدد گنگ»، «حلقه» و نظایر آن‌ها مشاهده کرد.

به همین دلیل، تحلیل اشتباهات دانش‌آموزان در درک مفاهیم ریاضی می‌تواند سوءتفاهم‌های مشترکی را که ناشی از کاربرد زبان در ریاضی است، نشان دهد. هم‌چنین، بسیاری

از دانش‌آموزان، نشانه‌های ریاضی را به صورت یک رمز شخصی یا برداشتی شخصی به‌کار می‌برند و عبارات ریاضی را نیز مانند عبارات زبان محاوره‌ای، کلی و نادقیق می‌پندارند و آن‌ها را بر حسب زمینه‌ی مطلب، تفسیر می‌کنند. در نتیجه نمی‌توانند به‌درستی، از زبان و نشانه‌گذاری ریاضی برای استدلال و حل مسأله استفاده کنند.

زبان ریاضی به‌عنوان یک سازوکار انتقال اطلاعات، هم دارای جنبه‌ی عمومی و هم دارای جنبه‌ی خاص است و برای آن‌که اطلاعات به طور صحیح انتقال یابد، توازن بین این دو جنبه، اهمیت اساسی دارد. این موازنه در سال‌های مختلف و در رشته‌های تحصیلی مختلف، متفاوت است و لذا، برای آموزش صحیح، باید به‌دنبال ایجاد موازنه‌ای صحیح بود. این امر به‌خصوص، در مسایل کلامی که در آن‌ها، دانش‌آموز ابتدا مسأله را به زبان ریاضی ترجمه کرده و سپس آن را حل می‌کند و سرانجام، جواب را به زبان اصلی بیان می‌کند، اهمیت فراوان دارد. در این‌گونه مسایل، باید ارتباط بین ساختار ریاضی مسأله و ساخت منطقی زبانی مسأله را دریافت. با توجه به این تفاوت، می‌توان بسیاری از شیوه‌هایی را که دانش‌آموزان در حل مسأله پیش می‌گیرند و اشتباهات آن‌ها را درک کرد. به‌طور کلی، باید توجه داشت که ساخت منطقی و زبانی هم به اندازه‌ی ساخت ریاضی، بر حل مسأله و حتی بر ساخت ریاضی آن حل، اثر می‌گذارد. ضروری است که برای درک عملکرد دانش‌آموز، این دو به‌صورت یک کل در نظر گرفته شوند.

دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه، برای فهم ریاضیات، پاره‌ای دشواری‌های زبانی و منطقی دارند که ناشی از ساخت زبان آن‌ها و نارسایی آن برای تبیین مفاهیم ریاضی است؛ و این امر، تدریس ریاضیات به زبان بومی را با مشکلاتی مواجه می‌سازد. نکته‌ی دیگر آن‌که ریاضیات مدرسه‌ای، اغلب گرایش به استفاده از زبان نمادین به جای زبان طبیعی و روزمره را دارد و این امر، ناشی از تمرکز بر عملیات و محاسبات تکراری و توجه به مسایل بدون توجه به مفاهیم و قضایا و نظریه‌ها و نادیده گرفتن انگیزه‌ها، سابقه‌ی تاریخی، شرح و توضیح اندیشه‌ها، استنتاج‌ها و حدس‌ها بوده است که البته، ناتوانی در بیان مسایل به زبان طبیعیِ جهان واقعی نیز، جای خود را دارد.

مسیر آینده

تجربیات نشان داده است که دانش‌آموزان، فعالیت‌های ذهنی برای حل مسایلی را که هدفی عمیق‌تر از تمرین‌های یک مرحله‌ای دارند، ترجیح می‌دهند. غرابت شناختی این‌گونه مسایل اکتشافی، خود می‌تواند یک عامل انگیزه‌بخش باشد و داشتن انگیزه‌ای قوی به یادگیری پایدارتر و اساسی‌تر می‌انجامد. برای نمونه، در آموزش ریاضی راهنمایی و ریاضیات سال اول دبیرستان، هنگامی که تبدیل کسر متعارفی به عدد اعشاری تمرین می‌شود، می‌توان از دانش‌آموزان خواست تحقیق کنند چه کسرهایی نمایش اعشاری متناهی دارند. یا در حل معادله‌های درجه دوم از آن‌ها خواسته شود که معادلاتی با ضرایب فرد پیدا کنند که جواب داشته باشد. یا در حل دستگاه‌های دو معادله و دو مجهول، می‌توان از آن‌ها خواست که با توجه به نمودار هر معادله در دستگاه مختصات قائم، در مورد شرایط وجود جواب، بحث کنند.

هم‌چنین، تجربیات معلمی نشان داده است که دانش‌آموزان، ریاضیات را بر اساس فعالیت‌های خود خیلی بهتر درک می‌کنند تا با گوش دادن به معلم. اما بسیاری از معلمان، فقط با کتاب و براساس کتاب درس می‌دهند و به فرایند یادگیری و فنونی که باید برای کمک به این فرایند به‌کار برد، کمتر توجه دارند. حال آن‌که بسیاری از آن‌چه خود آن‌ها طی دوران تحصیل آموخته‌اند، بر اساس همین فنون بوده است. در همین راستا، ژان‌ژاک روسو در اثر معروف خود، «امیل»، به جنبه‌های یادگیری رسمی عصر خود انتقاد می‌کند و تعلیم و تربیت کاملاً طبیعی و خودجوش را پیشنهاد می‌کند. چند سال پس از وی، لئوتولستوی نیز از همین دیدگاه حمایت نموده و قریب به ۱۰ سال کوشید تا تعلیم و تربیتی را برنامه‌ریزی کند که «عمل اجباری و قهری یک فرد بر دیگری» نباشد. جان دیویی نیز تعلیم‌وتربیت پیشرفت‌گرا را به عنوان بدیلی برای آموزش «معلم ـ محور» پیشنهاد می‌کند که بر یادگیری از طریق تجربه‌ی فردی و تأکید بر لحظه‌ی حاضر، توجه می‌کند.

هم‌چنین، روش اکتشافی که اولین‌بار نظریه‌پردازان میدانی از آن حمایت کردند، بر فرض‌های انسان‌گرایانه بنا شده است. فرض بر این است که به کودکان باید اجازه داده شود که به روش خود یاد بگیرند تا ماهیت درونی آن‌ها سرکوب نشود. به عقیده‌ی دیویی، «هدف آرمانی تعلیم‌وتربیت، ایجاد توانایی خویشتن‌داری است». علاوه بر این، از اهداف تعلیم‌وتربیت، پرورش تفکر انتقادی و رشد وجوه تفکر در دانش‌آموز است. لذا تدریس مفاهیم ریاضی باید به‌گونه‌ای باشد که زمینه‌ساز

تحقق این اهداف شود.

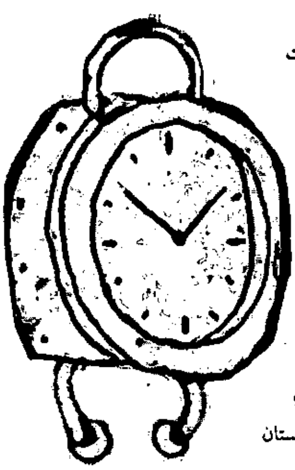
از این‌ها گذشته، در عصر حاضر، ماشین‌های محاسبه‌گر و میکروها و کامپیوترها بر آموزش ریاضی تأثیر فراوان گذاشته است. اگر در گذشته، زمان بسیار زیادی صرف این می‌شد که دانش‌آموز محاسبات معمولی را بیاموزد؛ اکنون با کمی سواد خواندن و نوشتن، می‌تواند بسیاری محاسبات مورد نیاز را با استفاده از ماشین‌های محاسبه‌گر، به راحتی و سریع‌تر انجام دهد. چه بسا این گونه حسابگرها، به افزایش توان دانش‌آموزان برای کسب درک و فهم ریاضی کمک شایانی بکنند. مثلاً، کامپیوتر دامنه‌ی وسیعی از امکانات و چالش‌ها را پیش‌روی آموزشگران ریاضی قرار داده است؛ هم از طریق تأثیری که میکروها بر کار ریاضی گذارده‌اند، هم از لحاظ امکان دست‌یابی به نرم‌افزارها برای انجام گونه‌های وسیعی از کارهای ریاضی که ضرورت ارزیابی دوباره‌ی تمام برنامه‌های درسی ریاضی را ایجاب می‌کند. از کامپیوتر به عنوان یاور آموزش و یادگیری، می‌توان به راه‌های گوناگون بهره گرفت؛ از جمله به عنوان:

- یک تخته‌ی الکترونیکی یا دست‌یاری برای معلم؛
- کمک مربی برای دانش‌آموز، که با یاری گرفتن از نرم‌افزارهای کامپیوتری، یادگیری مفاهیم تازه را برای وی تسهیل می‌کند؛
- ابزاری برای یادگیری فردی دانش‌آموزان از طریق تمرین و خودآزمایی؛
- ابزاری که محاسبات را انجام می‌دهد؛ مقادیر تابع را می‌دهد و تابع را رسم می‌کند؛
- ابزاری برای آزمایش و اکتشاف؛ مثلاً کسب اطلاعات بیش‌تر در مورد رفتارهای مفاهیم ریاضی با استفاده از کامپیوتر برای شبیه‌سازی آن‌ها.

بالاخره، برای اعتلای «آموزش ریاضیات» لازم است که آموزشگران و معلمان ریاضی به فنون و روش‌های آموزشی آگاه باشند و برای این کار، نیازمند طراحی برنامه‌های مؤثری برای آموزش و بازآموزی آن‌ها هستیم. به گفته‌ی هاوسون و ویلسون، «معلم» را می‌توان به «یاقوت» تشبیه کرد؛ هر دو کمیاب، هر دو دارای استعدادی در بدو امر ناشناخته، هر دو دارای رگه‌های درخشندگی و ناخالصی، و هر دو محتاج پردازش برای تلألو یافتن و نیازمند مراقبت برای از دست ندادن درخشش و جلای خود هستند. باید آموزگار را آماده ساخت تا روش تدریس خود را با نیازها و شرایط و خصوصیات دانش‌آموز و با محیط خاص کلاس خود وفق دهد؛ تفاوت‌های فردی دانش‌آموزان را مدّنظر قرار دهد، سعی در فراهم نمودن شرایط مطلوب یادگیری نماید، و با پژوهش در اشتباهات دانش‌آموزان، در جهت رفع خطاهایشان به نحو مطلوب اقدام کند. با اشتباهات دانش‌آموز نباید برخورد منفی کرد، بلکه باید به دنبال کشف چرایی این اشتباه‌ها بود.

و در پایان، یادگیری ریاضیات زمانی آسان می‌شود که یادگیرنده:

- مطلب را سودمند و قابل به کار بستن احساس کند؛
- پیشنیاز لازم برای بروز رفتار خاص ذهنی را قبلاً کسب کرده باشد؛
- در انجام کاری که مربوط به یادگیری وی است، فعالانه شرکت کند، نه این که با حالت تسلیم، اطلاعاتی درباره‌ی آن دریافت کند؛
- هدف از مطالبی که باید یاد بگیرد برای وی معلوم باشد؛
- هدف یادگیری با دیدگاه او نسبت به جهان و نسبت به خودش و نقش او در جهان، سازگار باشد؛
- فرصت بررسی روابط بین رفتار جدید و رفتارهای قدیم را داشته باشد.



منابع

جفری هاوسون، برایان ویلسون؛ **ریاضیات مدرسه‌ای در دهه‌ی ۱۹۹۰**؛ ترجمه‌ی ناهید ملکی، نشر مرکز، چاپ اول، ۱۳۶۸.

آنو س. بسلر، جان ر. کولب؛ **آموزش تدریس ریاضیات دبیرستانی**؛ ترجمه‌ی جواد همدانی‌زاده، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.

رابرت بیلر؛ **کاربرد روان‌شناسی در آموزش**؛ ترجمه‌ی پروین کدیور.

بی. آر. هرگنهان، ماتئو اچ. اُلسون؛ **نظریه‌های یادگیری (جلد اول)**؛ ترجمه‌ی علی‌اکبر سیف، نشر دوران، ۱۳۷۴.

ژاک آدامار، **روان‌شناسی ابداع در ریاضیات**؛ ترجمه‌ی عباس مخبر، انتشارات دنا، ۱۳۶۷.

رالف و. تایلر؛ **اصول اساسی برنامه‌ریزی درسی و آموزش**؛ ترجمه‌ی علی نقی پور ظهیر، نشر آگاه، چاپ دوم، زمستان ۱۳۷۷.

جرج پولیا؛ **چگونه مسأله را حل کنیم**؛ ترجمه‌ی احمد آرام، انتشارات کیهان، چاپ چهارم، ۱۳۷۷.

Jozeph Newmark, Frandes Lake; **Mathematics as a Second Language**; Addison Wesly, 1978.

Dennis G.Zill, Jacqueline M.Dewar; **Algebra and Trigonometry** (Second Edition); McGraw Hill, 1990.

M.A.Clements, Nerida F. Ellerton; (1996). **Matematics Education Research, Past, Present and Future,** UNESCO, Bangkok.

محققین تازه‌کار در حوزه‌ی آموزش ریاضی

نویسندگان: کیت جونز، دانشگاه ساوت هامپتون، و **سو پوپ**، کالج سنت مارتین
مترجم: سپیده چمن‌آرا، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و معلم ریاضی مدارس راهنمایی تهران

چکیده

این مقاله، مروری دارد بر برخی از موضوعات مرتبط با افرادی که تحقیق در آموزش ریاضی را آغاز می‌کنند. در این مقاله، به تعدادی از مشکلات این افراد و آن‌چه که به آن‌ها کمک می‌کند، نگاهی می‌اندازیم. یکی از موضوعات کلیدی در این خصوص، نقش بازتاب[1] در پیشرفت به عنوان یک محقق است- یعنی بازتاب بر این که چگونه پیش‌زمینه‌های شما، ارزش‌هایتان، توقعاتتان و رفتارتان می‌تواند بر تحقیقی که شما انجام می‌دهید، تاثیرگذار باشد. اخبار و داستان‌های روایت‌گونه نیز می‌توانند برای کسانی که تازه با تحقیق آموزش ریاضی آشنا می‌شوند، مفید باشند؛ به ویژه برای کسانی که تازه در سال‌های اول رشته‌ی دبیری مشغول به تدریس شده‌اند.

مقدمه

تحقیق در آموزش ریاضی، به اعتقاد سیمپسون (۲۰۰۰، ص ۷) با پرسش‌هایی آغاز می‌شود:

«هر زمان که یک معلم، به دلایلی تصمیم به استفاده از کتاب درسی جدیدی می‌گیرد، در جرگه‌ی کسانی قرار می‌گیرد که تحقیقات آموزشی را آغاز کرده‌اند. زمانی که از خود سؤال می‌کنید چرا کاری را انجام داده‌اید، می‌توانید با صراحت ابراز کنید که به اعتقاد شما، مسایل [تحقیقی]، چه چیزهایی هستند. سپس می‌توانید بررسی کنید که کدام یک، پاسخ‌های ممکن و عملی دارند.»

پرسش، تازه شروع کار است. اکنون باید دید این محقق جدید، چگونه می‌تواند سؤال‌های خود را بیان کند و چگونه می‌توان این سؤال‌ها را مورد بررسی قرار داد؟ البته، کتاب‌های زیادی درباره‌ی روش‌های تحقیق، در دسترس است، هم برای علوم اجتماعی در حالت کلی و هم برای تحقیقات آموزشی در حالت خاص، که برخی از آن‌ها برای کسانی که می‌خواهند تحقیق را شروع کنند، مفید هستند. هدف این مقاله، این نیست که چیزی بیش از خطوط اصلی که در این منابع توصیه شده است، به‌طور خلاصه و فشرده بیان کند؛ چرا که چنین خلاصه‌سازی، جز در فضایی که این مقاله در اختیار شما قرار می‌دهد، قابل حصول نیست. بلکه مقصود از این مقاله، این است که بر بازتاب‌هایی که تعدادی از محققین با تجربه بر کار خود داشته‌اند، نگاهی بیندازیم؛ محققینی که با نگاهی بر آن‌چه آن‌ها را تشویق به تحقیق کرد، ایده‌هایی را مطرح می‌کنند که می‌تواند به کسانی که قصد دارند تازه کار تحقیقی را آغاز کنند، کمک کند. این مقاله، نخست با بررسی این‌که تحقیق در آموزش ریاضی چه می‌تواند باشد، و البته چه چیزهایی نباید باشد، آغاز می‌شود.

تحقیق در آموزش ریاضی چیست؟

ممکن است برای کسی که تازه تحقیق را شروع کرده است، تحقیق آموزش ریاضی، هم‌چون کارهایی که دیگران انجام می‌دهند، به نظر برسد. پس باید اولین مانع را برداریم تا متوجه

شویم که چنین تحقیقی چیست (و مهم‌تر از آن، چه چیزی نیست). سلدن (۲۰۰۲، ص ۲) به این پرسش، با در نظر گرفتن این که تحقیق در آموزش ریاضی چه چیزی نیست، نگاه می‌کند. او ابراز می‌دارد که تحقیق در آموزش ریاضی، موارد زیر نیست:

- توسعه‌ی برنامه‌ی درسی؛
- توصیف تجارب جالب در تدریس (هر چند، تحقیق آموزش ریاضی، می‌تواند چنین توصیفاتی را نیز در بر بگیرد)؛

- نوشتن یک کتاب درسی جدید، طراحی یک درس آن لاین[2]، یا پیشنهاد یک روش تدریس جدید؛
- توسعه‌ی فرآیندهای بدیع در ارزیابی؛
- مطالعات ارزشیابی در سطح محلی برای پاسخ گویی به پرسش‌هایی مانند: آیا درس جدیدی که در جبر ارایه دادیم، واقعاً موفق بوده است؟
- ریاضیات جالبی که معلم می‌تواند به دانش‌آموزان بگوید- اگر فرصت اضافه در کلاس داشته باشد.

سلدن می‌گوید که هر چند همه‌ی این فعالیت‌ها مفید و حتی محققانه هستند، «تحقیق آموزش ریاضی نیستند.» در عوض، سلدن خاطرنشان می‌کند که تحقیق در آموزش ریاضی، «بررسی منضبط[3] یاددهی و یادگیری ریاضی» است (نقل شده در کرونباخ و ساپس، ۱۹۶۹)، که اغلب شامل مشاهده‌ی نزدیک دانش‌آموزانی است که درگیر تکالیف ریاضی هستند. تحقیق آموزش ریاضی، با استفاده از انواع روش‌شناسی‌ها، هدایت می‌شود و زمینه- مدار[4] است- یعنی درباره‌ی ریاضی است. مشابهاً، نیس (۱۹۹۲، ص ۵)، تحقیق در آموزش ریاضی را چنین توصیف می‌کند:

> «حوزه‌ی علمی و آکادمیک، تحقیق و توسعه، که به تشخیص، رده‌بندی، و فهم پدیده‌ها و فرآیندهایی که بالقوه و بالفعل به یاددهی و یادگیری ریاضی در کلیه‌ی سطوح مرتبط می‌شوند.»

سلدن (۲۰۰۲، ص ۳) معتقد است که برای تحقیق آموزش ریاضی، شخص نیازمند درک بی کم و کاستی از ریاضیات- در سطحی که دانش‌آموزان مورد مشاهده روی آن کار می‌کنند و در سطح بالاتر از آن- می‌باشد. به‌علاوه، وی ادامه می‌دهد که محققین آموزش ریاضی، درست مثل ریاضی‌دان‌ها، برای انتخاب پرسش‌های تحقیقی خود، فکر زیادی صرف می‌کنند. سلدن پیشنهاد می‌کند که این پرسش‌ها، باید «جدید، غیربدیهی، غیر واضح بوده و پاسخ(های) بالقوه‌ی آن‌ها جالب باشند.» بد نیست نظر شونفلد (1999a) را در این جا بیاوریم:

> «دشواری ریاضی‌دان بودن، حل کردن مسأله نیست؛ بالاخره یک مسأله که بتوانیم آن را حل کنیم و جامعه‌ی ریاضی، جواب آن را به اندازه‌ی کافی مهم بداند که یک پیشرفت محسوب شود، پیدا می‌شود. گلوگاه هر تحقیق واقعی (به‌ویژه، تحقیق آموزشی)، تشخیص مسأله است- توانایی تمرکز بر مسایلی که مشکل و معنادار هستند ولیکن می‌توان در آن‌ها پیشرفت کرد.»

پس تحقیق، اول با پرسش شروع می‌شود، ولیکن انتخاب این که به کدام یک از پرسش‌ها بپردازیم، حساس‌تر است. بعد از این که این پرسش‌ها به‌دقت صورت‌بندی شدند، نوبت انتخاب روش‌های مناسب جمع‌آوری داده‌ها و تجزیه و تحلیل آن‌ها می‌رسد (که در این زمان، کتاب‌های مرتبط با روش تحقیق، اهمیت پیدا می‌کنند). با وجود این که محققان به‌ندرت درباره‌ی این که چگونه پرسش تحقیق خود را انتخاب کردند،

می‌نویسند؛ در عوض می‌توان در مقالاتی که چاپ می‌شوند، مطالب بسیاری درباره‌ی چگونگی انتخاب روش‌های جمع‌آوری و تجزیه و تحلیل داده‌ها آموخت. در بخش بعد، به نکاتی که محققان باتجربه با بازتاب بر آن‌چه که انگیزه‌بخش آن‌ها برای شروع تحقیق بوده است، اشاره کرده‌اند، می‌پردازیم.

تاملاتی بر شروع به عنوان یک محقق

شونفیلد (1999b، ص ۴) ابراز می‌دارد که:

«هر چند خیلی بدیهی است، با این وجود، این یک حقیقت است که اغلب آن‌چه ما، چه به صورت فردی و چه به صورت گروهی، انجام می‌دهیم، توسط تاریخ شخصی ما شکل گرفته است.»

این امر، در نوشته‌های کسانی ـ نه الزاماً محققین آموزش ریاضی، بلکه عموماً محققین علوم اجتماعی ـ که تأمل و بازتاب خود را بر این که چگونه به عنوان یک محقق آغاز کرده‌اند، مشاهده می‌شود. بیایید با اندیشه‌های پیتر تاون سند[5]، آغاز کنیم. او (۲۰۰۴) می‌نویسد:

«این روزها، من درباره‌ی تک‌فرزندی و معانی آن، بسیار می‌اندیشم. این مسأله، من را به موضوع فوق‌العاده مورد علاقه‌ی من در روابط خانوادگی و زندگی ایلیاتی و ساختار خانواده‌ها، هدایت کرد. چرا که اطمینان دارم تک‌فرزند، دارای نیازهای بسیار متفاوت بوده، تجربیات بسیار متفاوتی دارد، و البته به دلیل نداشتن خواهر یا برادر، ناپخته‌تر و نابالغ‌تر است...»

و ادامه می‌دهد:

«من، چه در زمانی که یک دانشجو بودم، و چه اکنون، نوعی احساس عشق/ نفرت به کمبریج داشته و دارم... تصور می‌کنم که در آن‌جا مطالب زیادی درباره‌ی جبرگرایی جامعه‌شناختی[6] آموختم، و این که چگونه ساختار جوامع، به افکار، و حتی استخوان‌های مردم، نفوذ می‌کنند و به دلیل این همه تنوع در دنیا، نابود می‌شوند. و این برای من، کشف بزرگی بود، چرا که مرا وادار کرد به این که مثلاً چگونه انگلستان در زمان جنگ، جامعه‌ی متفاوتی را به وجود آورد، یا چگونه انگلیس پس از جنگ، پیشرفت کرد، فکر کنم. و به این ترتیب قطاری از افکار ساخته شد که برای همیشه همراه من خواهد بود...»

در این‌جا، تاون‌سند نشان می‌دهد که چگونه تجربه‌های حتی بسیار اولیه در زندگی، و بازتاب بر آن‌ها، می‌توانند تحقیق یک شخص را شکل دهند. استفان بیلت[7] (نقل شده در بلومر، هادکینسُن و بیلت (۲۰۰۴)) اشاره می‌کند:

«انگیزه‌ای که مسیر جستجوی من برای یادگیری را در مکان‌های کاری و کارهای مشارکتی هدایت می‌کند، نشأت گرفته از حوادث تاریخ زندگی من است.» مارتین بلومر[8] (نقل شده در بلومر، هادکینسُن و بیلت، (۲۰۰۴)) نیز سخن مشابهی دارد:

«واضح است که بخشی از حرفه‌ی تحقیق من، طی آموزش رسمی و با افراد خاصی که به آن اهمیت ویژه می‌دهند، شکل گرفته است. لیکن، آن آموزش رسمی، تنها مسبب جزئی از آن محققی است که من شده‌ام! تغییرات زیادی که در زندگی من بوده است و تأثیر درس‌هایی که تاکنون گرفته‌ام، متقابلاً به هم متصل شده‌اند: آن‌چه یاد گرفته‌ام، بر رخ‌دادهای زندگیم مؤثر بوده است، از سوی دیگر، این تغییرات و رخ‌دادها که اغلب به نظر می‌رسد از جای دیگری نشأت گرفته‌اند، دانسته‌های من را شکل داده‌اند. من، توسط رشته‌هایی از زندگی خود، این‌جا کشیده شده‌ام: جهت‌گیری من نسبت به دانش و یادگیری، موسیقی و سیاست من. می‌توانم به چیزهای دیگری هم اشاره کنم، چیزهایی که بسیار پیچیده‌تر بوده و دربرگیرنده‌ی فرآیندهای مرموزی هستند که طی آن‌ها من یک همسر، یک پدر، و یک معلم شدم. نکته این است که محقق شدن من، به طور تفکیک‌ناپذیری به جنبه‌های دیگر شخصیت من، پیوند خورده است. محقق بودن، شغلی است که توأم با یادگیری است.»

در مجموع، بلومر، هادکینسون و بیلت (۲۰۰۴)، اظهار می‌کنند که؛

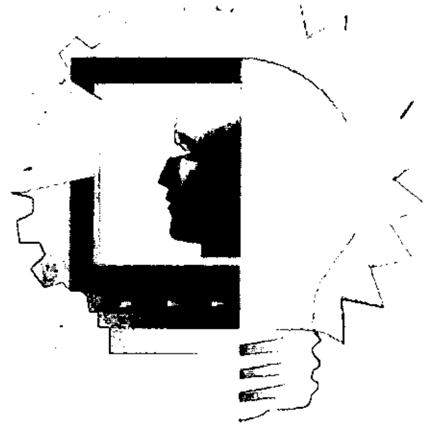
«روایت‌های مربوط به هریک از ما نشان می‌دهند که هر کدام از ما، از موقعیت‌های پیچیده‌ای به شغل تحقیق روآورده‌ایم؛ موقعیت‌هایی که ریشه در زندگی ما دارند ـ به‌ویژه زندگی گذشته‌ی ما. طی زندگی، در هریک از ما به‌عنوان بخشی از عادات شخصی، باورهایی نسبت‌به زندگی، آموزش و بالاخره تحقیق، شکل گرفته است. آن‌چه در داستان‌های هر سه نفر ما درخور توجه است، این است که چگونه پیش‌زمینه‌ی اجتماعی ما، تجربه‌های پیشین ما در آموزش، و اعتقادات عمیق شخصی ما درباره‌ی ظلم و بی‌عدالتی، بر تفکر امروزی ما تأثیرگذار بوده است. وابستگی پیشین ما به یک نظریه یا دیدگاه خاص نیز در این که الآن که هستیم، نقش داشته و موضوعات مورد علاقه‌ی ما در تحقیق را شکل داده است؛ هر چند این عامل، نمی‌تواند تنها منشأ آن‌چه که هستیم، باشد.»

نیس (۱۹۹۲)، تحقیق در آموزش ریاضی را چنین توصیف می‌کند: حوزه‌ی علمی و آکادمیک، تحقیق و توسعه، که به تشخیص، رده‌بندی، و فهم پدیده‌ها و فرآیندهایی که بالقوه و بالفعل به یاددهی و یادگیری ریاضی در کلیه‌ی سطوح مرتبط می‌شوند

این «وابستگی اولیه»، در بازتاب نظریه‌پرداز معروف زالتون دینیز[9] بر محقق بودن خودش نیز مشاهده می‌شود. او (دینیز، ۱۹۹۹، صص ۲۳۷_۲۳۸) می‌نویسد:

«من می‌دانستم که اغلب مردم، با ریاضی مشکل دارند. در بیش‌تر قسمت‌ها، ریاضی یک موضوع ناخوشایند در مدارس بود و چرا من با چنین مشکلات بزرگی، مواجه نشده بودم؟ من مطمئن بودم که مشکلات وجود داشتند، لیکن این مشکلات، بخشی از چالش مربوط به ریاضی ورزیدن را تشکیل می‌دادند. مردم از چالش‌های دیگری لذت می‌بردند، و چرا از ریاضی نه؟!... همین‌طور که سال‌ها می‌گذشت، من به دنبال دلایل محتمل بودم. من اعتقاد داشتم که شاید بعضی از مردم، باور بسته و محدودی نسبت به ریاضی دارند در حالی که دیگران ترجیح می‌دهند نگاه بازی نسبت به آن داشته باشند.... من به قدری مجذوب این مسأله شدم که مقاله‌ای درباره‌ی آن نوشتم...»

این نشان می‌دهد که چگونه دینیز، یک موضوع را شناخت و به دنبال [دلایل] محتمل آن گشت. سپس آن را بررسی کرده و



دشواری ریاضی دان بودن، حل کردن مسأله نیست؛ بالاخره یک مسأله که بتوانیم آن را حل کنیم و جامعه ی ریاضی، جواب آن را به اندازه ی کافی مهم بداند که یک پیشرفت محسوب شود، پیدا می شود. گلوگاه هر تحقیق واقعی (به ویژه، تحقیق آموزشی)، تشخیص مسأله است ـ توانایی تمرکز بر مسایلی که مشکل و معنادار هستند ولیکن می توان در آن ها پیشرفت کرد

درباره‌ی آن نوشت. نمونه‌های بیش‌تری از بازتاب بر فرآیند تحقیق در اترینگتون(۲۰۰۴) و مک کاتر (۲۰۰۱) یافت می‌شود که در آن‌ها، محققین، تأثیر تاریخ زندگی شخصی، تجربیات، باورها و فرهنگ را بر فرآیندها و نتایج تحقیق خود، به رسمیت شناخته‌اند.

اندرباب یافتن (و پالایش) ایده‌ی تحقیق

گزیده‌هایی که در بخش قبل توضیح دادیم، به ما در مورد این‌که چگونه مردم نسبت به سفر تحقیق خویش، احساس معناداری کسب می‌کنند، شناخت می‌دهد. برای این‌که این مقاله را به اتمام برسانیم، نگاهی می‌اندازیم به برخی از روش‌های عملی به منظور توسعه‌ی ایده‌های اولیه‌ی برخی از حوزه‌های تحقیقی. همان‌طور که پیش از این گفتیم، این فرآیند بیان پرسش‌ها، و تفکر درباره‌ی چگونگی بررسی آن پرسش‌ها است. یک روش، این است که شروع کنیم به این که یک خواننده و شنونده‌ی فعال باشیم. این ایجاب می‌کند که از رویکرد منفعل، به یک حالت فعال‌تر و حساس‌تر تبدیل شویم به طوری که هر وقت مقاله‌ای می‌خوانیم یا به یک سخنرانی تحقیقی گوش می‌دهیم، سؤال‌هایی نظیر زیر را از خود بپرسیم:

- نویسنده (یا نویسندگان) از کجا ایده‌های خود را کسب کرده‌اند؟
- دقیقاً چه چیزی توسط این کار، به دست آمده است؟
- این کار، به سایر کارهای انجام شده در این حوزه، چه ارتباطی پیدا می‌کند؟
- قدم منطقی بعدی برای ادامه‌ی این کار چه می‌تواند باشد؟
- چه ایده‌هایی از سایر حوزه‌ها را می‌توان در کنار این موضوع آورد؟

یکی از تکنیک‌هایی که می‌تواند مفید باشد این است که گزارشی مکتوب از تحقیق‌هایی که خوانده یا شنیده‌ایم، تهیه کنیم. چنین گزارشی را می‌توان به صورت دوره‌ای، مرور کرد تا ببینیم کدام یک از موضوعات با یکدیگر جور می‌شوند.

هنگامی که سخنرانی‌های تحقیقی را می‌شنوید یا می‌خوانید، خودتان را در معرض یک تحقیق قرار می‌دهید. در این حال، ممکن است شما به صورت دوره‌ای زمانی را به تلاش برای ایجاد ایده‌های تحقیق، اختصاص دهید. چند عامل تسریع‌کننده در این زمینه عبارتند از:

- به صورت منظم، به یک کتابخانه‌ی مناسب سری بزنید و حداقل، چکیده‌های مقالات برخی از مجلات راهبردی (مانند ESM[10] و JRME[11]) را مطالعه کنید. ممکن است یک یا دو مقاله را برای مطالعه‌ی دقیق‌تر و عمیق‌تر انتخاب کنید.
- برای شنیدن و نقد کردن، توجه خود را به حوادث تحقیقی مناسب جلب کنید. کنفرانس‌های روزانه‌ی BSRLM[12]، برای پشتیبانی از محققین تازه‌کار طراحی شده است تا به شیوه‌های مختلف، از گروه‌های کاری بسیار غیر رسمی گرفته تا ارایه کارهای کوتاه (و بلند)، به آن‌ها کمک کند.

هنگامی که موضوعی که به نظر بسیار متناسب می‌رسد، بهتر است که نسبت به ادبیات آن حوزه، اطلاعاتی کسب کنیم. این، یعنی مطالعه و شنیدن و در ذهن خود جدا کردن تفاوت‌های میان دیدگاه‌های شما و دیگران.

خطری که باید از آن دوری کرد این است که تقریباً تمام زمان خود را به مرور ادبیات و پیشینه‌ی موضوع و شرکت در سمینارها اختصاص دهید. با این کار، خیلی ساده ممکن است به نظر برسد که شما دارید سخت کار می‌کنید و چیزی را به نتیجه می‌رسانید! درحقیقت ممکن است چیز زیادی از این همه فعالیت کسب نکنید مگر این‌که یک خواننده و شنونده‌ی فعال باشید و زمانی را برای توسعه‌ی ایده‌های شخصی خویش،

اختصاص دهید. این که «تمام پیشینه‌ی یک موضوع را مطالعه و تمام کنیم و سپس تحقیق را شروع کنیم»، امری محال است! همیشه ادبیات جدیدی در آن حوزه در حال تولید است، و در آن زمان که مهارت و دانش شما رشد می‌کند، به‌طور پیوسته، حوزه‌های مرتبطی با موضوع خود را می‌بینید که شما را به کار بیش‌تر ترغیب می‌کنند.[13] باید به «خواندن و شنیدن فعال نه»، به‌عنوان یک «آموزش مستمر» نگاه کرد که شما را در ادامه‌ی حرفه‌ی تحقیقتان قرار می‌دهد.

خطر دیگر این است که فکر کنید تمام مطالعات و شنیده‌های شما، پیش از این که شما تحقیق خود را شروع کنید، باید تمام شوند. سعی کنید فهرستی از مسایل باز و پروژه‌های محتمل را که مورد علاقه‌ی شما هستند، تهیه کنید و آن‌ها را با همکاران خود و افرادی که در رخ‌دادهای تحقیقی[14] می‌بینید، در میان بگذارید. حتی پس از این که در مورد نخستین نقطه‌ی تمرکز خود تصمیم‌گیری کردید، مهم است که مطالعه‌ی عادی مجله‌های جدید و گزارش‌های تخصصی[15] و شرکت در سمینارها را به‌طور پیوسته ادامه دهید. تمام این منابع، می‌توانند در توسعه‌ی ایده‌های شما، مفید و مؤثر باشند.

تذکرات نهایی

شروع به عنوان یک محقق، می‌تواند کاری دلهره‌آور باشد. این مقاله قصد دارد نشان دهد که برای این شروع، ابزارها و پشتیبان‌هایی وجود دارند. کودکان، مستحق تدریس خوب هستند. تحقیق، جزئی از این [تدریس خوب] است، و، همان‌طور که پاپ، هاگارتی و جونز (۲۰۰۳) بیان کرده‌اند، فرصت‌های فراوانی برای درگیر شدن در آن و مشارکت در آن، وجود دارد.

زیرنویس‌ها

* هیأت تحریریه از جناب آقای دکتر ریحانی، استاد آموزش ریاضی دانشگاه شهید رجایی که این مقاله را برای ترجمه به آن‌ها معرفی کردند، سپاسگزاری می‌نماید.

1. Reflexivity
2. Online Course
3. Disciplined
4. Domain - Specific
5. Peter, Townsend (Professor of International Social Policy at the London School of Economics)
6. Sociological Determinism
7. Stephen Billet
8. Martin Bloomer
9. Zoltan Dienes

دینز، به دلیل بلوک‌های دینز و دیگر مواد کمک‌آموزشی که برای آموزش ریاضی ابداع کرده است، مشهور است.

10. Educational studies in Mathematics
11. Journal of Research in Mathematics Education
12. British Society for Research into Learning Mathematics

این انجمن، یک گروه کاری است که نگارندگان این مقاله، برگزارکنندگان جلسات آن هستند.

۱۳. درواقع منظور این است که ممکن است حوزه‌های مرتبط با موضوع مورد مطالعه‌ی شما، به‌قدری وسیع باشد که وسواس در وارد شدن در همه‌ی آن حوزه‌ها، شما را از موضوع اصلی تحقیقتان، منحرف کند! (م.)

۱۴. منظور از رخ‌دادهای تحقیقی (Research Events)، سمینارها، کنفرانس‌ها، سخنرانی‌ها، کتابخانه‌ها و خلاصه هر مکان یا اتفاقی است که به تحقیق مربوط می‌باشد. (م.)

15. Technical Reports

مراجع

Bloomer, M., Hodkinson, P. and Billett, S.: 2004, The Significance of Ontogeny and Habitus in Constructing Theories of Learning, *Studies in Continuing Education*, **26**(1), 19-43.

Cronbach, L. and Suppes, P: 1969, *Research for Tomorrow's Schools: Disciplined Inquiry in Education*. Macmillan, New York.

Dienes, Z. P. (1999), *Memoirs of a Maverick Mathematician*. London: Minerva Books.

Etherington, K.: 2004, *Becoming a Reflexive Researcher: using ourselves in research*. London: Jessica Kingsley.

McCotter, S. S. (2001), The journey of a beginning researcher, *The Qualitative Report*, 6(2) [online journal]. Retrieved 17December. 2004, from http://www.nova.edu/ssss/QR.QR6-2/mccotter.html.

Niss, M.: 1999, Aspects of the nature and state of research in mathematics education, *Educational Studies in Mathematics*, **40**(1), 1-24.

Pope, S., Haggarty, L. and Jones, K. (2003), Induction for Secondary Mathematics ITE Tutors, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, **23**(3), 115-120.

Schoenfeld, A. H.: 1999a, The core, the canon, and the development of research skills: Issues in the preparation of education researchers. *In:* E. Lagemann and L. Shulman (Eds.), *Issues in Education Research: Problems and possibilities* (pp. 166-202). New York: Jossey-Bass.

Schoenfeld, A. H.: 1999b, Looking toward the 21st century: Challenges of educational theory and practice, *Educational Researcher*, **28**(7), 4-14.

Selden, A.: 2002, *Two Research Traditions Separated by a Common Subject: Mathematics and Mathematics Education*. Tennessee Technological University Mathematics Department Technical Report No. 2002-2, August 2002.

Simpson, A.: 2000, What use are mathematics education researchers? *Maths, Stats and O. R. Cnnections*, **0**(1), 5-8.

Townsend, P.: 2004, Reflections on Becoming a Researcher, *International Journal of Social Research Methodology*, **71**(1), 87-89.

موضوعات مطالعاتی در آموزش ریاضی ایران

سهیلا غلام آزاد
دکترای آموزش ریاضی- مؤسسه ی پژوهشی برنامه ریزی درسی و نوآوری های آموزشی

گسترش آموزش ریاضی به عنوان یک حوزه‌ی مطالعاتی و یک رشته ی تحصیلی دانشگاهی ، بستر مناسبی برای تحقیقات گسترده در این زمینه را فراهم کرده است . آن‌چه در پیش رو دارید گردآیه ای از برخی عناوین پژوهشی و موضوعات مطرح در آموزش ریاضی ایران حول چند محور اساسی است . امید است طرح این حوزه‌ها و عنوان‌ها ، فتح بابی باشد در حوزه ی تحقیقات آموزش ریاضی .

روان شناسی

یکی از حوزه‌های علمی که تأثیر زیادی بر آموزش ریاضی داشته است ، روان‌شناسی است . با توسعه ی رویکرد علمی به بررسی رفتار انسانی در نیمه ی دوم قرن ۱۹ و جدا شدن روان‌شناسی از فلسفه به عنوان یک حوزه ی تخصصی ، مطالعه ی چگونگی یادگیری به طور عام و یادگیری ریاضی به طور خاص ، به‌عنوان بخشی از تحقیقات روان‌شناسی قرار گرفت . مرور تاریخی آموزش ریاضی در غرب نشان می دهد که تحقیقات آموزش ریاضی ، و پیرو آن محتوای برنامه ی درسی و رویکردهای یاددهی یادگیری ریاضی ، تحت تأثیر نظریه های روان‌شناسیِ مطرح در زمان خود ، تغییرات رادیکالی را در یک قرن گذشته تجربه کرده است .

برنامه های درسی ریاضی در ایران نیز از این تغییرات مستثنی نبود ، با این تفاوت که تحولات برنامه ای در ایران ، عموماً متأثر از یافته های کشورهای غربی و بدون توجه لازم به زیرساخت های روان‌شناسی آن صورت گرفته است . نتیجه آن‌که با وجود تأکید سیاست گذاران در نظام آموزشی فعلی بر توسعه ی یادگیری فعال همراه با درک و فهم ، هنوز هم چارچوب اصلی بسیاری از برنامه ها و کتاب های درسی ریاضی متأثر از نظریه های یادگیری رفتاری است . از این رو ، بررسی دیدگاه های روان‌شناسی و علوم شناختی به منظور تبیین دیدگاه های مناسب ، عملی و هماهنگ با سیاست های کلان آموزش ریاضی در ایران ، ضروری به نظر می‌رسد . به طور نمونه ؛ دو تحقیق زیر می توانند یافته های ارزشمندی برای تبیین چنین دیدگاه هایی فراهم کنند :

۱ . *بررسی نقش/ تأثیر دیدگاه های روان‌شناسی و علوم شناختی در تحقیقات آموزش ریاضی و برنامه ی درسی ریاضی*

مشکلات یادگیری ریاضی از جمله دغدغه های اصلی روان‌شناسی آموزش ریاضی است و بر این اساس ، یادگیری و شناخت در ریاضی زمینه ی تحقیقات بنیادی در آموزش ریاضی را فراهم ساخته است .

۲ . بررسی چگونگی *شکل‌گیری مفاهیم، ایده‌ها، باورها و راهبردهای ریاضی در ذهن دانش‌آموزان ابتدایی، راهنمایی* و متوسطه .

ماهیت ریاضی

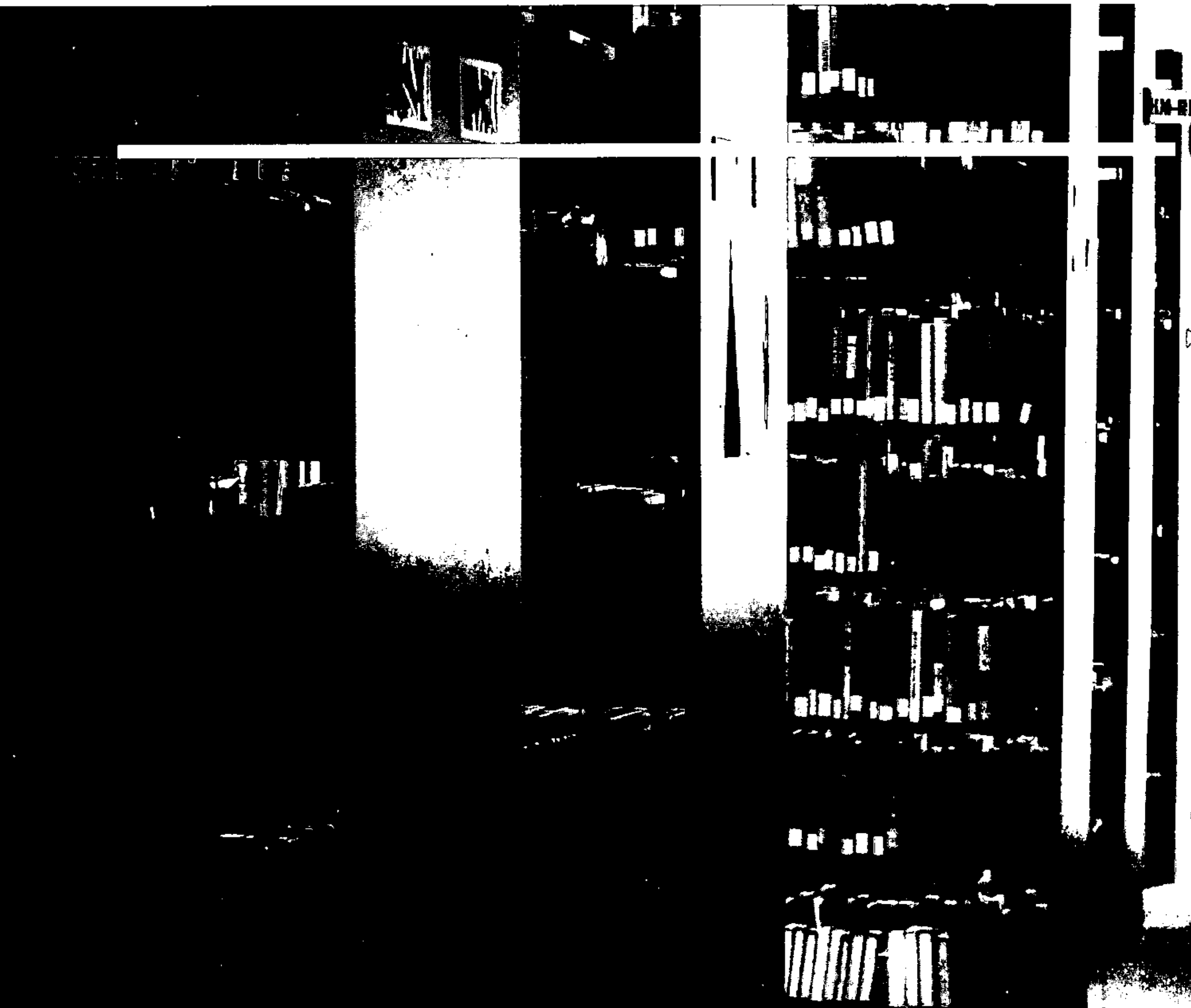
صورت‌بندی هدف‌ها، تولید برنامه‌ی درسی ریاضی و اجرای موفقیت‌آمیز آن برنامه، نیازمند درک ماهیت ریاضی است . مطالعات تاریخی نشان می‌دهد که چگونگی درنظر گرفتن ریاضی توسط جامعه‌ی ریاضی، تأثیر عمیقی بر برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای داشته است . به عنوان مثال می‌توان به تأثیر دیدگاه‌های فلسفی و اهداف مکتب منطقی راسل، شهودگرایی براوئر و صورت‌گرایی هیلبرت در جهت‌گیری تحقیقات ریاضی و برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای در قرن گذشته اشاره کرد . از این رو بررسی چیستی ریاضی و تجزیه و تحلیل فلسفی آن، از جمله تحقیقات بنیادی در حوزه‌ی آموزش ریاضی به حساب آمده و می‌توان آن را به عنوان پیش‌نیاز طراحی یا توسعه‌ی برنامه درسی ریاضی درنظر گرفت .

۳ . *تصریح نقش فلسفه‌ی ریاضی در آموزش ریاضی ایران* .

۴ . *بررسی نقش/ تأثیر دیدگاه‌های فلسفی در تحقیقات آموزش ریاضی و برنامه‌ی درسی ریاضی* .

جامعه‌شناسی

عوامل جامعه‌شناسانه جزو عواملی هستند که بر برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای تأثیر دارند و زمینه‌ساز تحقیقات در حوزه‌ی آموزش ریاضی هستند . از جمله عمده‌ترین این عوامل، وضعیت مدارس است . تدریس و یادگیری در مدارسی انجام می‌شود که وزارت آموزش و پرورش یا به عبارتی نظام حکومتی هر جامعه آن‌ها را به طور صریح و به قصد تولید معانی مشترک

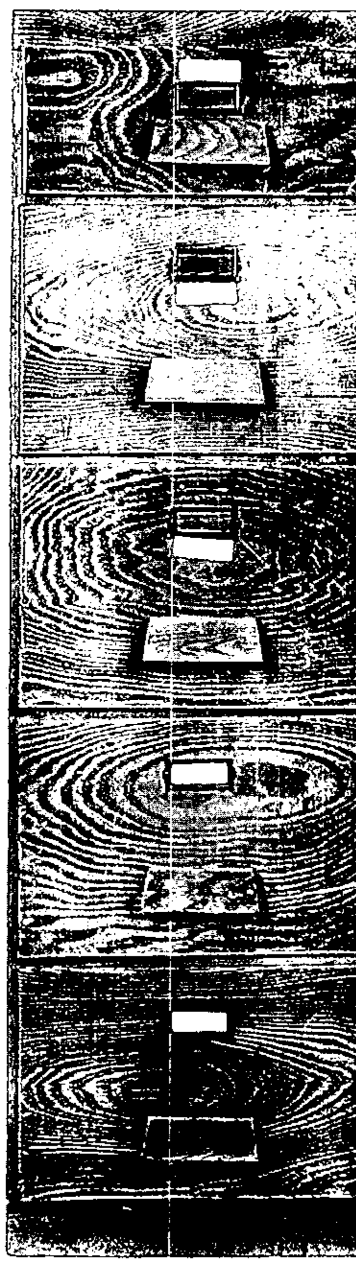


در بین اعضایش برپا داشته است.

هنجارها و قوانین مدارس، عموماً تأثیرات ویژه‌ای نه تنها بر تعامل‌های انسانی درون مدارس، بلکه بر نحوه‌ی آموزش و اجرای برنامه‌های درسی دارند. باور معلمان و دیدگاه‌های آن‌ها که عموماً برخاسته از گرایشات عمومی جامعه است نیز نقش به‌سزایی در برنامه‌ی درسی می‌توانند داشته باشند. درنتیجه، عدم‌باور معلمان نسبت به نوآوری‌های برنامه‌های درسی و آموزشی می‌تواند منجر به شکست آن برنامه در عمل شود. از این‌رو منطقی به‌نظر می‌آید که فرض کنیم نوع عملکرد نظام سیاسی و اجتماعی نه‌تنها بر نظام آموزشی به‌طور عمومی بلکه بر برنامه‌ی درسی و آموزش ریاضی به طور خاص نیز تأثیر می‌گذارد. از جمله سایر عوامل جامعه شناسانه می‌توان به بافت جمعیتی، تنوع فرهنگی و قومی، امکانات فیزیکی، تقاضاهای اجتماعی، اشتغال، سیاست‌های کلان دولت، نیروی انسانی، مساوات آموزشی، رقابت‌ها، و نقش خانواده اشاره کرد.

۵. *بررسی نقش/ تأثیر دیدگاه‌های جامعه‌شناسی و مردم‌شناسی در تحقیقات آموزش ریاضی و برنامه‌ی درسی ریاضی.*

یکی از عمده‌ترین هدف‌های آموزش ریاضی مدرسه‌ای، تربیت شهروندان باسواد از نظر ریاضی است. علاوه بر این، در کنار ایجاد فرصت‌های لازم جهت رشد توانایی‌های ریاضی شهروندی، آماده‌سازی دانش‌آموزان برای ادامه‌ی تحصیل و ورود به رشته‌های تخصصی دانشگاهی نیز از جمله دغدغه‌های برنامه‌ریزان درسی ریاضی در سطح جهانی و بومی، بوده و هست.



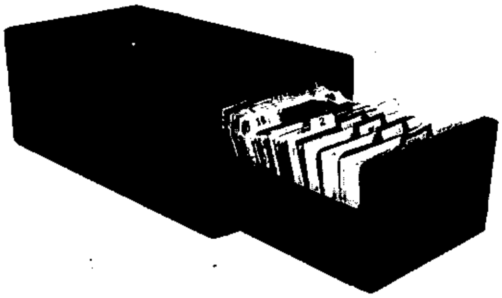
سیر تاریخی

بررسی تاریخچه‌ی آموزش ریاضی در نیم قرن گذشته، گواه آن است که نادیده گرفتن یا کم‌توجهی به هریک از دو وجه «آموزش ریاضی برای همه» و «آموزش ریاضی برای فعالیت‌های ریاضی سطح بالا»، منجر به عدم‌موفقیت برنامه‌ی درسی ریاضی هم در ایران و هم در سطح بین‌المللی بوده است. از این رو، تبیین ماهیت متفاوت این دو وجه در برنامه‌ی درسی ریاضی از اهمیت زیادی برخوردار است. با توجه به تاریخ برنامه‌ی درسی ریاضی در ایران، بررسی این مسأله از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌شود، زیرا در بسیاری مواقع با کم کردن یا تضعیف ریاضی مورد نیاز برای فعالیت‌های سطح بالای ریاضی انتظار می‌رفته که اهداف «ریاضی برای همه»، یا سواد ریاضی، محقق شود و گاهی با تحمیل یک برنامه‌ی درسی ریاضی مبتنی بر فعالیت‌های سطح بالای ریاضی، اهداف «ریاضی برای همه» نادیده گرفته شده است. به همین دلیل، ضرورت دارد در پی شناسایی ویژگی‌های هریک از این دو وجه برنامه‌ی درسی ریاضی، نسبت توجه به آن‌ها در دوره‌های مختلف ابتدایی، راهنمایی و متوسطه تبیین شود.

۶. *بررسی نقش و جایگاه سواد ریاضی در آموزش عمومی.*

۷. *بررسی چگونگی ایجاد تعادل بین «آموزش ریاضی برای همه» و «آموزش ریاضی برای فعالیت‌های ریاضی سطح بالا» در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای.*

برای رسیدن به موقعیت مطلوب در برنامه‌ی درسی، آگاهی از این‌که در چه موقعیتی هستیم و قبلاً چه شرایطی را پشت سر گذاشته‌ایم، اهمیت زیادی دارد، تا به امروز کتاب درسی، نماد برنامه‌ی درسی ریاضی در ایران بوده است. با نگاهی اجمالی به آموزش ریاضی مدرسه‌ای در یک قرن گذشته، شاهد تغییر و تحولات بسیاری در محتوا و حتی عناوین کتاب‌های درسی ریاضی بوده‌ایم که اغلب تغییرات ایجاد شده، متأثر از تحولات اجتماعی زمان خود بوده است. تحولاتی چون سقوط سلسله‌ی قاجار و ظهور پهلوی، تأکید بر دانش و تمدن غرب در نظام



پهلوی، جنگ سرد، انقلاب اسلامی، جنگ ایران و عراق، انقلاب فرهنگی، تغییر در بافت جمعیتی معلمان و دانش‌آموزان، ورود به قرن ۲۱، ویژگی‌های عصر دانایی و عصر تکنولوژی و نظایر آن‌ها. بررسی سیر تحول برنامه‌های درسی ریاضی در ایران این فرصت را ایجاد می‌کند که از گذشته، چراغ راهی برای تصمیم‌گیری‌های آینده و بروز رفتارهای سنجیده در مقابل تحولات پیش رو بسازیم.

۸. *مطالعه‌ی سیر تحول برنامه‌ها و کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای ایران در یک قرن گذشته.*

۹. *نقش تحولات اجتماعی در اصلاح و تغییر خط‌مشی برنامه‌ی درسی ریاضی در یک قرن گذشته.*

۱۰. *مطالعه‌ی پیشینه‌ی تدریس ریاضی در مدارس ایران.*

از دیرباز، ریاضی یکی از مؤلفه‌های مهم برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای بوده و هست، ضمن این‌که عموماً یکی از مباحث سخت و مشکل‌آفرین در آموزش مدرسه‌ای نیز به‌حساب آمده است. این ویژگی‌ها باعث حساسیت جامعه‌ی درگیر آموزش ریاضی از جمله دانش‌آموزان، معلمان، والدین، ریاضی‌دانان، متخصصان تعلیم‌وتربیت و سیاست‌گذاران آموزش و پرورش نسبت به این امر شده است. در نتیجه برای حل مشکلات یاددهی و یادگیری ریاضی، داشتن یک تصویر جامع و روشن از وضعیت آموزش ریاضی، ضروری است. تصویری که در آن مؤلفه‌های مربوطه و ارتباطات آن‌ها باهم دیده شوند. دسترسی به این دید جامع امکان‌پذیر نیست مگر از طریق تحقیقاتی که به‌وسیله‌ی آن‌ها وضعیت موجود آموزش ریاضی ایران از جهات مختلف مورد بررسی قرار گرفته، مشکلات و چالش‌ها شناسایی و دسته‌بندی شوند. چالش‌هایی چون آموزش ریاضی مناطق دوزبانه، آموزش ریاضی دیریادگیرندگان، آموزش ریاضی نخبگان، کاهش انگیزه‌ی عمومی برای یادگیری ریاضی، افت تحصیلی، توسعه‌ی تکنولوژی اطلاعات و ارتباطات در سطح عام، مسابقات ریاضی و المپیادها، ضرورت آموزش ریاضی در طول عمر و...

۱۱. *شناسایی مسایل جاری و چالش‌های پیش‌رو در آموزش ریاضی ایران در سطوح مختلف ابتدایی، راهنمایی و متوسطه.*

۱۲. *بررسی تأثیر پیشرفت‌های جدید در حوزه‌ی تکنولوژی اطلاعات و ارتباطات (ICT) بر آموزش ریاضی و برنامه‌ی درسی ریاضی.*

۱۳. *مطالعه‌ی ریاضیات قومی و نقش آن در برنامه‌ی درسی ریاضی و کتاب‌های درسی ریاضی در ایران.*

۱۴. *بررسی نقش فرهنگ در آموزش ریاضی.*

۱۵. *بررسی نقش زبان و ارتباطات در آموزش ریاضی.*

۱۶. *نقش مسابقات و المپیادهای ریاضی در ایجاد انگیزه و جهت‌گیری آموزش ریاضی مدرسه‌ای.*

۱۷. *ضرورت و ویژگی‌های برنامه‌ی درسی ریاضی برای دانش‌آموزان با نیازهای خاص: نخبگان و دیریادگیرندگان.*

۱۸. *بررسی نقش تکنولوژی در تدریس و یادگیری ریاضی از راه دور.*

با درنظر گرفتن تجسم و تخیل به عنوان توانایی فکر کردن در مورد هرآن‌چه ممکن است و نه فقط آن‌چه واقعی است، می‌توان آن را سرچشمه‌ی نوآوری و ظرفیتی برای غنی‌سازی تفکر عقلانی به‌حساب آورد. اخیراً توجه به تجسم و تخیل در امر آموزش، زمینه‌ی انجام تحقیقات اصیلی را در این حوزه فراهم کرده است. به‌طور مشخص در این زمینه می‌توان به گروه مطالعاتی آموزش تجسم‌مدار (IERG)[1] اشاره کرد که به منظور بررسی نقش تجسم و تخیل در شکل‌گیری دانش در ذهن یادگیرندگان و استفاده از ابزار شناختی مطرح در کارهای ویگوتسکی پایه‌گذاری شد. نظر به مجرد بودن اکثر مفاهیم ریاضی، انتظار می‌رود که این رویکرد جدید آموزشی بتواند منشأ تحولاتی در امر ریاضی مدرسه‌ای باشد.

۱۹. *بررسی نقش تجسم و تخیل در درک مفاهیم مجرد ریاضی.*

ارزش‌ها

یک باور عمومی نسبت به ریاضی وجود دارد که ریاضیات علمی خنثی از لحاظ ارزش‌هاست[2]. به عبارت دیگر بسیاری معتقدند ریاضی یکی از موضوعات درسی است که مستقل از ارزش‌ها بوده و در همه‌جا به صورت یکسان قابل تدریس می‌باشد. در حالی که پژوهش‌های اخیر خلاف این باور را نشان

می‌دهد و نشان می‌دهد که تدریس و یادگیری ریاضی، بستر مناسبی برای ایجاد ارزش‌ها در دانش‌آموزان است. به همین جهت بحث ارزش‌ها به یکی از چالش‌های حوزه‌ی آموزش ریاضی تبدیل شده است و بعضی از محققان آموزش ریاضی معتقدند که درگیر شدن فرایند یاددهی و یادگیری ریاضی با ارزش‌ها در هر کلاس درس ریاضی، امری اجتناب‌ناپذیر است. به این دلایل، نگرانی عمده‌ی محققان این است که فرایند ایجاد ارزش‌ها، عموماً ضمنی است و در واقع جلوه‌ای از برنامه‌های درسی پنهان است. لذا معلم‌ها درک و کنترل محدودی روی ارزش‌هایی که ناخودآگاه و به‌صورت ضمنی ایجاد یا ترغیب می‌کنند خواهند داشت.

۲۰. *بررسی و شناسایی ارزش‌هایی که از طریق آموزش ریاضی قابل ایجاد و توسعه هستند.*

در دهه‌ی اخیر رویکرد تلفیقی به برنامه‌ریزی درسی مورد توجه نظریه‌پردازان برنامه‌ی درسی قرار گرفته است و این توجه منجر به نتایج نظری گوناگونی در این حوزه شده است. هم‌چنین مطالعه‌ی تاریخی نشان می‌دهد که برنامه‌ی درسی تلفیقی در ایران به شکل‌های مختلف و در سطوح گوناگون تجربه شده است (به‌طور نمونه می‌توان به کتاب درسی دوم ابتدایی دهه‌ی ۱۳۱۰ اشاره نمود که در آن، در یک کتاب درسی، اکثر موضوعات مدرسه‌ای باهم به گونه‌ای تلفیق شده بودند). از جمله حوزه‌هایی که به‌نظر می‌رسد قابلیت ویژه‌ای برای تلفیق شدن با ریاضی دارند، هنر و علوم هستند. هنر و ریاضی به‌دلیل تجریدشان، اشتراکات زیادی باهم دارند و این درحالی است که ریاضی، زبان و بستر علوم است و ابزار استدلالی ریاضی تجربی همان استدلال استقرایی تجربی است. به‌همین دلیل به‌نظر می‌رسد که امکان استفاده از رویکرد تلفیقی به برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای از طریق هنر و علوم وجود داشته باشد.

برنامه‌ی درسی

۲۱. *بررسی رابطه‌ی بین ریاضی و سایر موضوعات مدرسه‌ای مانند هنر و علوم.*

در حالی که در بسیاری از کشورها استفاده از ماشین‌حساب و کامپیوتر در مدارس عمومیت پیدا کرده است، تأثیر این دو تکنولوژی بر برنامه‌ی درسی ریاضی در ایران مشخص می‌کند که از ۲۴ کتاب موجود ریاضی دوره‌های ابتدایی و راهنمایی تحصیلی و کتاب‌های متوسطه‌ی نظری و پیش دانشگاهی، تنها در چهار کتاب، استفاده از ماشین‌حساب و برنامه‌های کامپیوتری مورد تأکید قرار گرفته است. در رابطه با اجرای برنامه‌ی این چهار کتاب نیز، با وجود توصیه‌های انجام شده، تجربه نشان داده است که مقاومت‌های بسیاری از جانب مجریان برای به‌کارگیری ماشین‌حساب و نرم‌افزارهای پیشنهادی وجود دارد.

اما امروزه با توجه به وجود ماشین حساب‌های ارزان‌قیمت و پرقدرت که به سادگی در دسترس همه قرار دارند، سیاست‌گذاران آموزشی با یک چالش جدی مواجه هستند که با وجود این امکان جدید، تا چه میزان می‌توان وقت برنامه را به توسعه‌ی توانایی‌های محاسباتی قلم ـ کاغذی دانش‌آموزان اختصاص داد که از نظر اقتصادی و آموزشی قابل توجیه باشد. انتقال از برنامه‌ی درسی محاسبه محور به برنامه‌ی درسی مفهومی با استفاده از ماشین‌حساب به عنوان یک وسیله‌ی مناسب و بستر مناسب حذف محاسبات پیچیده، خصوصاً در دوره‌های ابتدایی و راهنمایی تا چه اندازه منطقی می‌باشد؟ چگونه استفاده از ماشین‌حساب و برنامه‌های کامپیوتری می‌تواند بر شکل گیری مفاهیم ریاضی در سطوح مختلف تأثیرگذار باشد؟

۲۲. *بررسی و نقش و کاربرد ماشین‌حساب و کامپیوتر در تدریس و یادگیری ریاضی مدرسه‌ای در دوره‌های ابتدایی، راهنمایی و متوسطه.*

مطالعات بین‌المللی

لازمه‌ی حفظ هویت علمی در قرن ۲۱، مشارکت مؤثر در فعالیت‌های علمی در سطح بین‌المللی است. یک چنین همکاری و مشارکت، زمانی به نحو شایسته امکان‌پذیر خواهد بود که ما ضمن آگاهی از شرایط و ظرفیت‌های علمی خود، تصویر روشنی از آن‌چه در کشورهای دیگر دنیا می‌گذرد نیز داشته باشیم. از آنجا که آموزش و پرورش عموماً و آموزش ریاضی به‌طور خاص، امری است فرهنگی ـ طبیعی، به‌نظر می‌رسد که دست‌آوردهای علمی در این زمینه در سراسر دنیا کارایی یکسان نداشته باشند. لذا شناسایی فعالیت‌ها و برنامه‌های جاری در زمینه‌ی آموزش ریاضی در سطح جهانی و در سطح منطقه می‌تواند به ما کمک کند تا با آگاهی بیش‌تر به جبران ضعف‌های احتمالی خود پرداخته و جایگاه شایسته‌ی خود را تعریف و جهت رسیدن و عرضه‌ی آن به جهانیان تلاش کنیم.

۲۳. *شناسایی بستر مناسب برای همکاری ایران با مجامع بین‌المللی آموزش ریاضی.*

۲۴. *مطالعه‌ی تطبیقی برنامه‌ی درسی ریاضی ایران با کشورهای توسعه‌یافته دارای نظام متمرکز و دارای برنامه‌ی درسی ملی.*

۲۵. *مطالعه‌ی تطبیقی برنامه‌ی درسی ریاضی ایران با کشورهای منطقه که دارای بافت فرهنگی، اجتماعی، مذهبی مشابه ایران هستند.*

۲۶. *مطالعه‌ی تطبیقی برنامه‌ی درسی ریاضی ایران با کشورهای موفق در سومین مطالعه‌ی بین‌المللی ریاضی و علوم (TIMSS).*

با تأملی در اجرای برنامه‌های درسی خواهیم دید که سنت آموزشی بسیاری از کلاس‌های درس ریاضی هنوز هم از توالی زیر پیروی می‌کنند: توضیح مطلب درسی جدید به‌همراه چند مثال توسط معلم، ارائه‌ی چند مسأله‌ی مشابه به‌منظور حل در کلاس توسط دانش‌آموزان و تعیین تکلیف برای جلسه‌ی آینده توسط معلم. این توالی متأثر از نظراتی شکل گرفته که سال‌ها پیش توسط آموزشگران و نظریه‌پردازان آموزش ریاضی مورد نقد جدی و تجدیدنظر قرار گرفته است.

یکی از اهداف عمده‌ی آموزش ریاضی به‌عنوان یک حوزه‌ی مطالعاتی، تحقیق به‌منظور ارتقای کیفی روش‌های تدریس و یادگیری ریاضی در سطوح مختلف است. روش‌های پیشنهادی از سوی متخصصان، متأثر از رویکردهای مطرح نسبت به شناخت و یادگیری، تغییرات رادیکالی در نیم قرن گذشته داشته است؛ از روش سنتی ارائه‌ی مطالب توسط معلم و تکرار آن‌ها توسط دانش‌آموزان به سمت گفت‌وگو، جست‌وجو، آزمایش، استدلال، اثبات ادعاها و بازتاب بر روی آن‌ها. آن‌چه مسلم است تحول در نظام آموزش ریاضی مدرسه‌ای، نیازمند تحول در روش‌های تدریس و یادگیری است و تحول در روش‌های تدریس و یادگیری نیازمند مطالعه و تحقیق با تأکید بر موضوعات و زمینه‌های گوناگون در این حوزه است.

۲۷. *بررسی نقش تاریخ ریاضی در تدریس و یادگیری ریاضی.*

۲۸. *امکان‌سنجی آموزش ریاضی از طریق حل مسأله در آموزش ریاضی مدرسه‌ای.*

۲۹. *نقش مدل‌سازی و کاربردهای ریاضی در تدریس و یادگیری ریاضی.*

۳۰. *نقش استدلال و اثبات در فرایند تدریس و یادگیری ریاضی.*

۳۱. *تحقیق در مورد چگونگی توسعه‌ی روش‌های تدریس و یادگیری حساب، جبر، هندسه، حسابان، آمار و احتمال، ریاضی گسسته و موضوعات پیشرفته‌ی ریاضی.*

آموزش معلمان

یکی از ارکان اصلی نظام آموزش ریاضی، معلم ریاضی است. تجربه نشان داده است که هر قدر هم که برنامه‌ریزی درسی دقیق و علمی انجام شود و روش‌های پیشنهادی تدریس مبتنی بر تحقیق و یافته‌های پژوهشی باشد، در صورت عدم استقبال معلمان ریاضی از آن‌ها، چه به دلیل نداشتن باور به آن برنامه یا روش و چه به دلیل نداشتن دانش لازم، آن برنامه‌ریزی محکوم به شکست خواهد بود. از این‌رو می‌توان ادعا کرد که شناسایی ظرفیت‌های موجود در جامعه‌ی معلمان ریاضی و برنامه‌ریزی برای آموزش قبل و ضمن خدمت آن‌ها، جزو اولین قدم‌ها در جهت ایجاد تحول در نظام آموزش ریاضی است.

۳۲. *بررسی دانش موضوعی معلمان ریاضی ایران در سطوح ابتدایی، راهنمایی و متوسطه.*

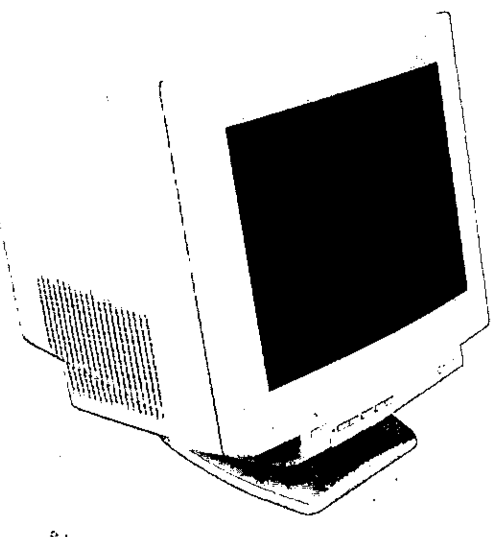
۳۳. *تبیین صلاحیت‌های حرفه‌ای مورد نیاز معلمان ریاضی.*

۳۴. *بررسی برنامه‌ی درسی ریاضی مراکز تربیت معلم.*

۳۵. *بررسی کیفی آموزش‌های ضمن‌خدمت معلمان ریاضی در ایران و ارائه‌ی راهکارهایی جهت رفع نقایص موجود.*

زیرنویس‌ها

1. Imaginative Education Research Group (IERG)
2. Value Free



یک تجربه‌ی کلاسی در معرفی مفهوم حد

فرحناز حیاتی
دبیر ریاضی ایلام

به‌دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به‌تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به‌عمل در می‌آیند و مجدداً عمل به‌نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به‌اهمیّت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به‌غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

مقدمه

در این مقاله‌ی آموزشی، تدریس حد را بررسی کرده و به تحلیل مفهوم آن می‌پردازیم. به جرأت می‌توان گفت که حد یکی از مفاهیمی است که فهم آن برای دانش‌آموزان دبیرستان، خصوصاً دانش‌آموزان سوم تجربی، بسیار دشوار است و در این مقطع اصولاً دانش‌آموزان قضیه‌های حد را فقط حفظ کرده و حتی به‌وسیله‌ی آن حد تابع‌ها را محاسبه می‌کنند لیکن اکثراً مفهوم واقعی حد را درک نمی‌کنند. این در حالی است که حد تقریباً در تمام رشته‌های مختلف بشری کاربرد دارد تا جایی که می‌توان گفت از حد گریزی نیست. از طرفی، مفهوم حد در قلب حساب دیفرانسیل و انتگرال جای دارد و اساس و زیربنای مفهوم مشتق و انتگرال است.

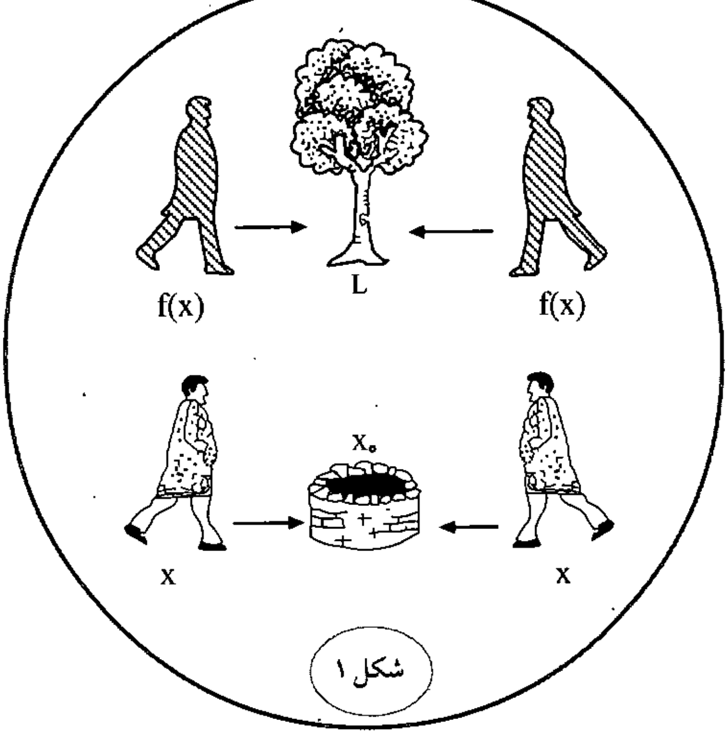
حد تابع

قبل از این‌که به تعریف مفهوم حد بپردازم، تجربه خود را در معرفی مفهوم آن به دانش‌آموزان در کلاس درس بیان می‌کنم.

مرحله‌ی اول. ابتدا تصویر دو فرد و یک درخت و یک چاه را پای تابلو کشیدم (شکل ۱) و درباره‌ی تصویر به دانش‌آموزان چنین توضیح دادم که دو فرد را در نظر بگیرید که به سمت چاه در حرکت هستند و با حرکت این دو نفر به سمت چاه، سایه‌های آن‌ها نیز در حال حرکت هستند. در تصویر مشاهده می‌شود که وقتی این دو نفر به طرف چاه حرکت می‌کنند، سایه‌های آن‌ها به طرف درخت نزدیک می‌شود، پس می‌توان با حرکت فرد به سمت چاه، رفتار سایه‌ی او را نیز بررسی کرد. پس از توضیح این مثال برای دانش‌آموزان، چاه را به نقطه‌ی x_0 و فرد را به نقطه‌ی x و سایه‌ی فرد را به تابع $f(x)$ تشبیه کردم و درخت، در واقع مقدار حد تابع، یعنی L بود. در ضمن به دانش‌آموزان توضیح دادم که فرد در اطراف چاه می‌تواند حرکت کند تا به لبه‌ی چاه برسد اما هیچ‌گاه خود را درون آن نمی‌اندازد و در مفهوم حد هم x تا نزدیکی x_0 می‌رود، ولی با آن برابر نمی‌شود. (شکل ۱)

پس از توضیح این مثال و ایجاد یک تصویر ذهنی از مفهوم حد برای دانش‌آموزان، مفهوم مقدار تابع در یک نقطه را یادآوری کرده و توسط جدول و مفهوم میل کردن، حد را توضیح دادم.

مرحله‌ی دوم. در این مرحله، با یک مثال شروع کردم.



شکل ۱

مثال. تابع $f(x) = ۲x^۲ + ۱$ مفروض است. وقتی x به سمت عدد ۳ میل می‌کند، تابع به سمت چه عددی میل می‌کند؟

x	۲/۷۵	۲/۹	۲/۹۹	۳	۳/۱	۳/۱	۳/۲۵
f(x)	۱۶/۱۲	۱۷/۸۲	۱۸/۸۸	?	۱۹/۱۱	۲۰/۲۲	۲۲/۱۲

از دانش‌آموزان خواستم، با استفاده از جدول، نتیجه‌گیری کنند که با میل کردن x به سمت عدد ۳، تابع به چه عددی میل می‌کند، که خود دانش‌آموزان به‌راحتی عدد ۱۹ را حدس زدند.

سپس همین نتیجه‌گیری را به زبان ریاضی بیان کردم و گفتم که برای بیان این مفهوم به زبان ریاضی، از کلمه‌ی حد یا Lim که مخفف کلمه‌ی انگلیسی Limit (به معنای حد) می‌باشد، استفاده می‌کنیم و چنین می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to ۳} f(x) = ۱۹$$

و توضیح دادم که از کلمه‌ی حد، زمانی استفاده می‌کنیم که بخواهیم رفتار یک تابع را زمانی که متغیر مستقل x به سمت عدد معینی میل می‌کند، بررسی کنیم؛ یعنی عبارت زیر را بررسی کنیم

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

و مثال زیر را ارایه کردم:

مثال. فرض کنید $f(x) = \frac{x^۳ - ۱}{x - ۱}$. توجه کنید که در این مثال، تابع برای $x = ۱$ تعریف نشده زیرا به‌ازای $x = ۱$، مخرج کسر صفر می‌شود. اما این سؤال مطرح است که رفتار تابع f(x) وقتی x به سمت عدد ۱ نزدیک می‌شود (ولی خود عدد ۱ نیست) چگونه است؟ برای این منظور جدولی تشکیل داده و در آن مقادیر کوچک‌تر و بزرگ‌تر از ۱ را درون تابع گذاشته و نتایج آن را نیز در جدول درج کردیم:

x	۰/۹	۰/۹۹	۱	۱/۰۱	۱/۱
f(x)	۱/۳	۱/۴۹	?	۱/۵۱	۱/۵۷

و از آن‌جا، دانش‌آموزان نتیجه گرفتند که

$$\lim_{x \to ۱} f(x) = ۱/۵۰$$

حد چپ و راست تابع. در تعریف حد یک تابع در نقطه‌ای مانند x_0، فرض بر آن است که تابع روی فاصله‌ی بازی شامل x_0 تعریف شده باشد (مگر احتمالاً در نقطه‌ی x_0 تعریف نشده باشد). بدین معنی که مقادیر تابع به‌ازای تمام x های نزدیک به x_0 ($x > x_0$ یا $x < x_0$)، مشخص باشد.

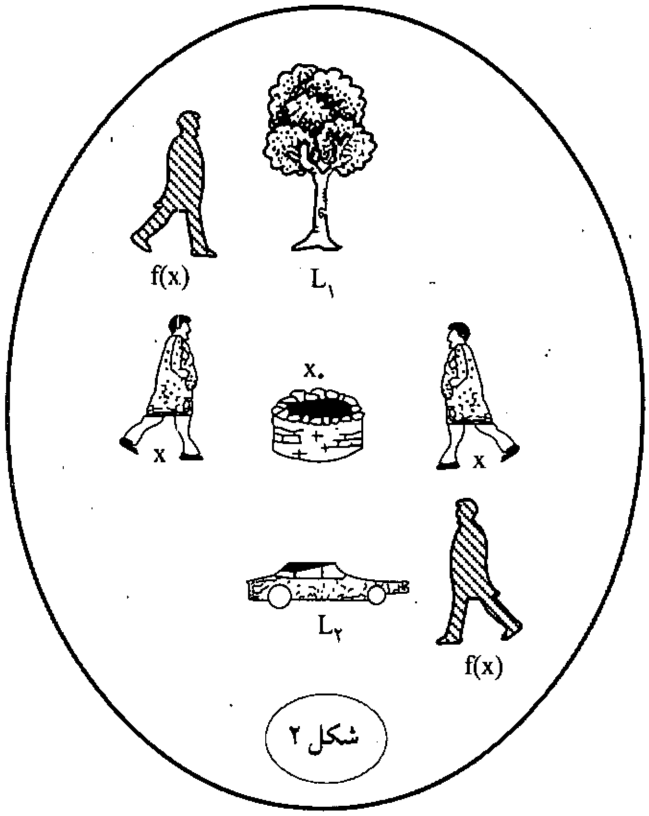
با دانش‌آموزان تعریف حد را در حالتی بررسی کردیم که x از سمت راست به x_0 نزدیک شود؛ به عبارتی، از مقادیر بیش‌تر از x_0 به سمت x_0 نزدیک شود (یا مشابهاً از طرف چپ به x_0 نزدیک شود، یعنی از طرف مقادیر کم‌تر از x_0 به سمت x_0 نزدیک شود) که آن‌ها به صورت‌های زیر می‌نویسند:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_۱ \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_۲$$

قضیه. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع فوق موجود و با هم برابر باشند یعنی $L_۱ = L_۲$.

از این قضیه می‌توانیم چنین نتیجه‌گیری کنیم اگر مقدار حد راست در نقطه‌ی x_0 با مقدار حد چپ در همان نقطه، برابر نباشد، تابع f در نقطه‌ی x_0 حد ندارد که من سعی کردم این مفهوم را با تصویر شکل ۲، برای دانش‌آموزان ملموس‌تر کنم.

در این تصویر، فرض کنید که نور از سمت راست و از سمت چپ در دو جهت مختلف بتابد و سایه‌ی دو فرد در جهات مختلف قرار گیرند. در این صورت می‌گوییم تابع، حد ندارد. (شکل ۲)



شکل ۲

مرحله‌ی سوم. در این مرحله، به‌منظور تفهیم بهتر مفهوم حد، به تمرین‌هایی درباره‌ی نشان دادن مقدار حد از روی نمودار پرداختم و دانش‌آموزان را توسط نمودار با مفهوم حد آشنا کردم. از این‌رو برای دانش‌آموزان نمودارهایی رسم کرده و از آن‌ها خواستم که از روی نمودار تشخیص دهند که وقتی x به سمت عدد معینی میل می‌کند، تابع f(x) به سمت چه عددی میل می‌کند.

مثال ۱. اگر

$$f(x)=\begin{cases} x+۳; & x\le -۲ \\ ۳-x; & x>-۲ \end{cases}$$

آن‌گاه نمودار آن به شکل زیر است و داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۵ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۲^-} f(x)=۱$$

(به شکل ۳ مراجعه کنید.)

مثال ۲. اگر

$$f(x)=\begin{cases} ۳+x^۲ & x<-۲ \\ \cdot & x=-۲ \\ ۱۱-x^۲ & x>-۲ \end{cases}$$

آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x\to -۲^+} f(x)=۷ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to -۲^-} f(x)=۷$$

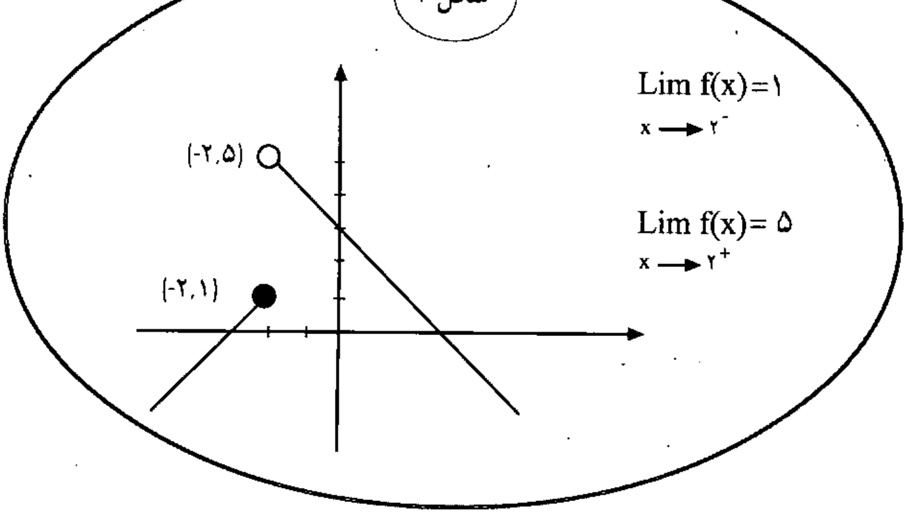
(به شکل ۴ مراجعه کنید.)

دانش‌آموزان، توسط نمودار هم مفهوم حد را بهتر درک می‌کنند و هم مفهوم حد چپ و راست را.

در این زمان، دانش‌آموزی این سؤال را مطرح کرد که چه مواقعی از حدچپ یا حد راست استفاده می‌کنیم؟

در پاسخ به او گفتم که عموماً در موارد زیر حد چپ و راست

شکل ۳



را به‌طور جداگانه حساب می‌کنیم:

(الف) تابع f فقط در یک طرف نقطه‌ی x_0 تعریف شده باشد و مثال زیر را زدم:

مثال. حد تابع $f(x)=\sqrt{1-x}$ را در نقطه‌ی $x=1$ به‌دست آورید. چون دامنه‌ی این تابع $(-\infty,1]$ است، پس تابع f فقط در سمت چپ ۱ تعریف شده است و

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}=0$$

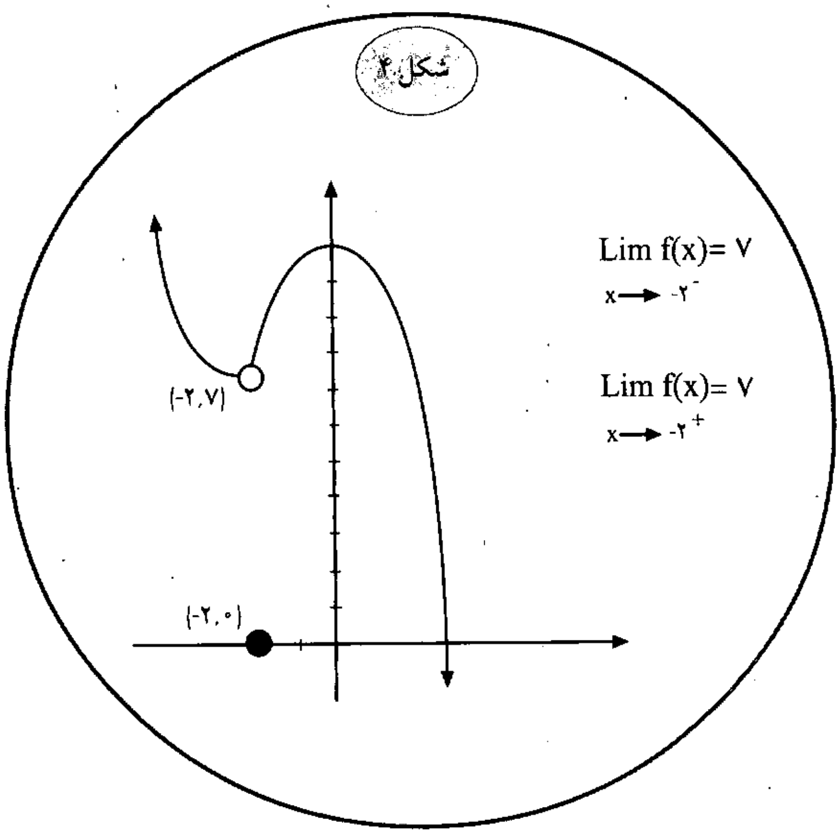
(ب) تابع f در دو طرف x_0 با ضابطه‌های مختلف تعریف شده باشد، یعنی قانون تابع f در یک طرف x_0 با قانون آن در طرف دیگر، متفاوت باشد. برای این مورد، مثال زیر را زدم:

مثال. حد تابع f را که به صورت زیر تعریف شده در نقطه‌ی $x=2$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}2x-5 & x<2\\ 2x^3-7x-3 & x\geq 2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} 2x-5=-1$$

$$\lim_{x\to 2^+} 2x^3-7x-3=-1$$



(ج) اگر در ضابطه‌ی تابع، قدر مطلق یا جزء صحیح وجود داشته باشد (که در واقع حالت خاصی از حالت دوم است).

مثال. حد تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را در نقطه‌ی $x=0$ به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$$

مثال. حد تابع $f(x)=[x]$ را در نقطه‌ی $x=0$ بیابید.

$$\lim_{x\to 0^+}[x]=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}[x]=-1$$

(د) اگر در تابع، برخی عبارت‌های مثلثاتی وجود داشته باشد.

مثال. حد تابع $f(x)=\tan(x)$ را در نقطه‌ی $x=\pi/2$ بیابید.

$$\lim_{x\to \frac{\pi^-}{2}}\tan(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi^+}{2}}\tan(x)=-\infty$$

جمع بندی

با استفاده از مثال‌های عینی، می‌توانیم مفهوم حد را برای دانش‌آموزان، ملموس‌تر کنیم که به نظر من اگر به این روش، مرحله به مرحله مفهوم حد را تفهیم نماییم، دانش‌آموز راحت‌تر آن را می‌پذیرد. در ضمن، می‌توان ساختن وسایل کمک‌آموزشی در زمینه‌ی حد را به دانش‌آموزان پیشنهاد کرد تا مطلب حد برای آن‌ها جاذبه‌ی بیش‌تری پیدا کند.

منبع
۱. مسعود نیکوکار، بهمن عربزاده، حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد اول)، انتشارات نور تهران، ۱۳۶۸.

اشاره

خانم خاکباز، در صحبت با یکی از معلمان ریاضی باتجربه، خاطراتی از آن‌ها شنیده‌اند که یکی از آن‌ها را برای مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، ارسال کرده‌اند. این خاطره، بسیار شبیه به یکی از خاطره‌ایی است که استاد پرویز شهریاری نیز در نوشته‌های خود، در مورد تدریس هندسه نقل کرده‌اند. جالب است که دو معلم ریاضی در دو زمان و دو مکان متفاوت، تجربه‌هایی بسیار شبیه به‌هم داشته‌اند. به‌همین دلیل، تجربه‌ی این معلم ریاضی را از قول خانم خاکباز در ستون روایت معلمان می‌آوریم.

روایتی از زبان یک معلم ریاضی

امیدی که خودم به آن امیدوار نبودم!

عظیمه سادات خاکباز
دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید باهنر کرمان

یک سال تصمیم گرفتم برای تدریس ریاضی در سال اول دبیرستان، دانش‌آموزان را گروه‌بندی کنم. از این رو به بچه‌ها گفتم که سه‌نفر سه‌نفر گروه بندی شوند و با هرکسی که دوست دارند هم گروه باشند. اما بدانند که اگر نمره‌ی مثبت یا بالاتر از ۱۵ در حل مسأله‌ای بگیرند برای خود شخص است و اگر نمره ی کمتر از ۱۵ یا منفی بگیرند، برای هرسه نفر هم گروهی، این نمره درج خواهد شد. در این کلاس ۲۶ دانش‌آموز داشتم. به سرعت، ۸ گروه سه‌نفری تشکیل شد و دو نفر باقی ماندند که یکی شاگرد اول کلاس بود و دیگری شاگرد ضعیفی که با ارفاق، نمره‌ی ریاضی‌اش از ۵ یا ۶ تجاوز نمی‌کرد. گفتم دوتا از گروه‌ها ۴ نفری شوند. بلوایی در کلاس شروع شد. هیچ گروهی حاضر نبودند این دو نفر را در خود جای دهند. آن‌ها می‌گفتند اگر شاگرد ضعیف هم گروه ما شود، همه‌ی منفی‌ها و نمرات کم او برای ما هم درج می‌شود و اگر شاگرد اول در گروه ما بیاید که همه‌ی نمراتش بالاست و اصلاً تأثیری روی پیشرفت گروه ندارد. به‌ناچار مجبور شدم آن دو را با هم در یک گروه قرار دهم اگرچه ابتدا شاگرد اول کلاس خیلی اعتراض کرد؛ اما مجبور بود تحمل کند. تقریباً دو هفته گذشته بود و درس ما به اتحادها رسیده بود. در دفتر مدرسه نشسته بودم و از پنجره بیرون کلاس را نگاه می‌کردم. زنگ تفریح بود در میان شلوغی بچه‌ها دو نفر روی نیمکت نشسته بودند و کتاب ریاضی در دستشان بود و با هم درس می‌خواندند بی‌اختیار جلوی پنجره رفتم. غرق تماشای آن دو بودم که ناگهان ناظم مدرسه نزدیکم آمد و گفت: کار جالبی بود که آن‌ها را با هم در یک گروه قراردادی. همه‌ی زنگ‌های تفریح و بی‌کاری را با هم درس می‌خوانند. دفتر یادداشتم را نگاه کردم. جالب بود که در این دو هفته کلی منفی و نمره‌ی کم به هردو داده بودم. ولی چیزی که برایم جالب‌تر بود سیر صعودی نمرات بود. زنگ تفریح تمام شد و من سر کلاس رفتم. آن روز با کلاس همان دانش‌آموزان، درس داشتم. پس از اتمام کلاس، شاگرد اول پیش من آمد و گفت: «خانم اون خیلی درسش بَده! همه‌ی نمره‌منفی‌ها و نمرات کمش مال من میشه، اون‌وقت معدلم پایین می‌یاد.»

به او لبخندی زدم و گفتم: «کارت را ادامه بده، بالاخره نتیجه می گیری!» آن روز من به یکی از بزرگ ترین معلمان ریاضی امید دادم. امیدی که خودم به آن امیدوار نبودم!

هفته ی بعد، وقتی به کلاس آن ها رفتم، تصمیم گرفتم چند تمرین از اتحادها برایشان بگویم. ناگهان تمرینی به ذهنم آمد که تا به حال در کلاس مطرح نکرده بودم. تمرین را روی تخته نوشتم و به بچه ها فرصت دادم تا حل کنند. در میان تمام دانش آموزان، یک دست از آخر کلاس بالا رفت. بله همان شاگرد ضعیف یک ماه قبل بود. او را به پای تخته دعوت کردم. بغل دستی او که همان شاگرد اول کلاس بود، به وی گفت: «نرو! دوباره منفی تو رو من هم می گیرم!» ولی او با شجاعت تمام، پای تخته آمد و با اطمینان کامل، شروع به نوشتن کرد. من به سمت آخر کلاس به راه افتادم که ناگهان گفت: «تمام شد خانم.» برگشتم، مطمئن بودم که...

اما با کمال تعجب دیدم که تمرین، درست حل شده بود! با هیجان گفتم: «آفرین» و به سمت تخته رفتم تا راه حل را توضیح دهم. (البته در آن لحظه دوست داشتم بالا بپرم و بگویم هورا!!!)

ناگهان صدای دست زدن یک نفر و بعد همه ی کلاس بلند شد. دانش آموزی که پای تخته بود، گفت: «قابلی نداشت خانم، من تا حالا بلد نبودم که چه طوری ریاضی بخوانم امّا حالا می دونم چی کار کنم!»

وقتی کلاس تمام شد، دوباره شاگرد اول کلاس، نزد من آمد و گفت: «خانم اصلاً امکان نداشت، آخه چه طوری؟»

گفتم: «دیدی تونستی. بهت گفتم که حالا یه معلم شدی.»

گفت: «آخه خانم، خودم هم بلد نبودم اون سؤال رو حل کنم.»

گفتم: «لازم نیست به شاگردهات فقط جمع و ضرب یادبدی بلکه باید یه چیز بیش تر و بهتر به اونا یاد بدی.» گفت: «چی خانم؟» لبخندی زدم و رفتم و تمام مدت فکر می کردم که این معلم کوچک به من یک درس بزرگ داد.

پیوستگی و مشتق‌پذیری توابع بدرفتار

مرتضی بیات، زهرا خاتمی
مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان ـ گاوه زنگ

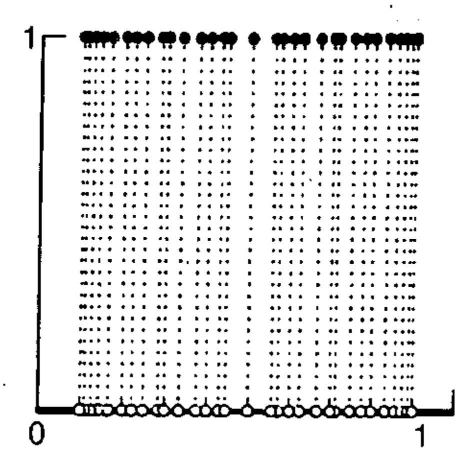
اولین بار در سال ۱۸۲۹، ریاضی‌دانی به نام دیریکله، تابعی به صورت زیر را معرفی کرد:

$$D(x)=\begin{cases}1 & (\text{x گویا})\\ 0 & (\text{x گنگ})\end{cases}$$

امروزه، تابع $D(x)$ به تابع دیریکله معروف است. این تابع از حدود چندگانه‌ی زیر نیز به دست می‌آید:

$$D(x)=\lim_{m\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty}\cos^{n}(\pi m!x)\right\}$$

تابع $D(x)$ نسبت به تابع‌های دیگر رفتار کاملاً خودسر دارد؛ اولاً این تابع را نمی‌توان به صورت دقیق و کامل رسم کرد، این بدین جهت است که بی‌شمار عدد گویا و گنگ در دامنه‌ی تابع در لابه‌لای همدیگر قرار گرفته‌اند که این امر تعیین موقعیت دقیق هر کدام از آن‌ها را امکان‌پذیر نمی‌سازد. شکل تقریبی از آن بر بازه‌ی $[0,1]$ در شکل ۱ نشان داده شده است. (شکل ۱)



شکل ۱. تابع دیریکله

این تابع مشخصه‌ی دیگری هم دارد که در هیچ نقطه‌ی گویا و هیچ نقطه‌ی گنگ، حد ندارد. برای اثبات این ادعا فرض کنیم $D(x)$ در نقطه a حدی برابر L داشته باشد (یا $\lim_{x\to a}D(x)=L$).

در این صورت با اختیار کردن $\varepsilon=\frac{1}{2}$ می‌توان δ ی یافت که $0<|x-a|<\delta$ به طوری که نامساوی

$$|D(x)-L|<\frac{1}{2} \qquad (1)$$

را ایجاد کند. اما همسایگی $0<|x-a|<\delta$ شامل نقطه‌ی گویایی مثل x_1 و نقطه‌ی گنگی چون x_2 است (در واقع، بی‌نهایت از هر کدام). از (۱) نتیجه می‌شود که

$$|D(x_1)-L|=|1-L|<\frac{1}{2}$$

$$|D(x_2)-L|=|0-L|<\frac{1}{2}$$

و درنتیجه داریم:

$$1=|1-L+L|\le|1-L|+|L|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

که این غیرممکن است، بنابراین $D(x)$ در هیچ نقطه‌ای مانند a حد ندارد.

این عدم‌وجود حد در هیچ نقطه از دامنه‌ی تابع $D(x)$، موجب شگفتی دیریکله و ریاضی‌دانان بعد از وی شد و بعدها ریاضی‌دانان به کمک این تابع، توابع جالب با خاصیت‌های

عجیب و غریب ساختند که در ادامه، به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

سؤال: آیا می‌توان تابعی ساخت که تنها در یک نقطه پیوسته باشد و در بقیه‌ی نقاط حد نداشته باشد؟

پاسخ. تابع زیر را درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases} x & (\text{x گویا}) \\ 1-x & (\text{x گنگ}) \end{cases}.$$

این تابع را براساس تابع دیریکله می‌نویسیم:

$$f(x)=x\times\begin{cases} 1 & (\text{x گویا}) \\ 0 & (\text{x گنگ}) \end{cases}+(1-x)\times\begin{cases} 0 & (\text{x گویا}) \\ 1 & (\text{x گنگ}) \end{cases}$$

$$=xD(x)+(1-x)\times\left(\begin{cases} -1 & (\text{x گویا}) \\ 0 & (\text{x گنگ}) \end{cases}+1\right)$$

$$=xD(x)+(1-x)(-D(x)+1)$$
$$=(2x-1)D(x)+(1-x)$$

بنابراین

$$\boxed{f(x)=(2x-1)D(x)+(1-x)}$$

برای $x_0=\frac{1}{2}$ داریم $f(x_0)=\frac{1}{2}$ و هم‌چنین

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}(2x-1)D(x)+\lim_{x\to x_0}(1-x)$$

$$=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=f(x_0).$$

در ضمن برای $x\neq\frac{1}{2}$ داریم:

$$\frac{f(x)-(1-x)}{2x-1}=D(x)$$

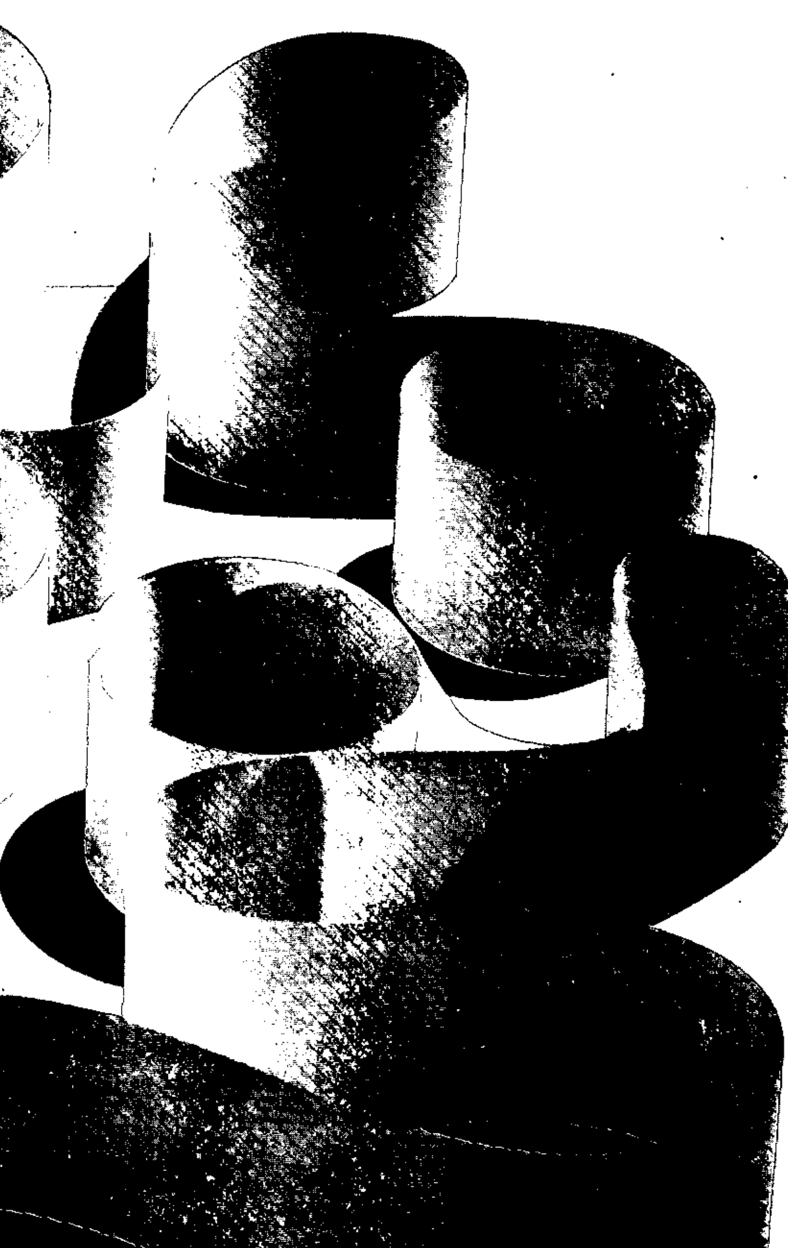
از آن‌جا که تابع D(x) در هیچ نقطه‌ای حد ندارد، پس طرف چپ هم در هیچ نقطه حد ندارد؛ یعنی f(x) نیز در $x\neq\frac{1}{2}$ حد ندارد.

اینک حالت کلی‌تری از مثال فوق را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱. فرض کنیم f و g دو تابع پیوسته بر بازه‌ی (a,b) باشند؛ یعنی f و g در هر نقطه‌ی $x_0\in(a,b)$ پیوسته باشند و هم‌چنین f و g متمایز باشند؛ یعنی $x\in(a,b)$ موجود باشد که $f(x)\neq g(x)$. اگر تابع $h:(a,b)\to R$ را با ضابطه‌ی

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (\text{x گویا}) \\ g(x) & (\text{x گنگ}) \end{cases}\qquad (2)$$

تعریف کنیم در آن صورت h در $x_0\in(a,b)$ پیوسته است اگر و تنها اگر $f(x_0)=g(x_0)$.



برهان. مشابه بالا تابع $h(x)$ را برحسب تابع دیریکله به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\boxed{h(x)=(f(x)-g(x))D(x)+g(x)} \qquad (۳)$$

فرض کنیم $f(x_0)=g(x_0)$. به وضوح $h(x_0)=g(x_0)$. از آن‌جا که $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=0$ و $D(x)$ تابع کراندار است، داریم:

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-g(x)\big)D(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$=g(x_0)=h(x_0).$$

برعکس. فرض کنیم h در x_0 پیوسته باشد و نیز $f(x_0)\neq g(x_0)$ (فرض خلف). از آن‌جا که $f(x)-g(x)$ تابع پیوسته بوده و در x_0، غیرصفر می‌باشد، پس همسایگی از x_0 مانند (c,d) (که $(c,d)\subset(a,b)$) وجود دارد که برای هر $x\in(c,d)$، $f(x)-g(x)\neq 0$. اینک برای $x\in(c,d)$ داریم

$$\frac{h(x)-g(x)}{f(x)-g(x)}=D(x)$$

حال طرف اول در x_0 پیوسته است. پس $D(x)$ نیز پیوسته می‌باشد که امکان ندارد.

نتیجه ۱. مجموعه نقاط پیوستگی تابع h در قضیه ۱، برابر مجموعه جواب‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ در (a,b) است.

نتیجه ۲. اگر $A\subseteq R$ مجموعه‌ای متناهی به صورت $A=\{x_1,\dots,x_n\}$ باشد، آن‌گاه تابعی وجود دارد که مجموعه نقاط پیوستگی آن، مجموعه‌ی A باشد.

برهان. تابع $h:(a,b)\to R$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$h(x)=\begin{cases}(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) & (\text{x گویا})\\ 0 & (\text{x گنگ})\end{cases}$$

مجموعه نقاط پیوستگی h برابر A است.

اینک مشابه قضیه ۱، قضیه‌ای ارایه می‌دهیم و به کمک آن توابعی معرفی می‌کنیم که مجموعه نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق‌پذیر است برابر مجموعه‌ی متناهی مفروض A باشد.

قضیه ۲. فرض کنیم f و g دو تابع متمایز و مشتق‌پذیر روی (a,b) باشند؛ یعنی در هر نقطه‌ی $x_0\in(a,b)$، مشتق‌پذیر باشند) و $h:(a,b)\to R$ را با ضابطه‌ی (۲) تعریف کنید. در آن صورت h در x_0 مشتق‌پذیر است اگر و فقط اگر $f(x_0)=g(x_0)$ و $f'(x_0)=g'(x_0)$.

برهان. فرض کنیم $f(x_0)=g(x_0)$ و $f'(x_0)=g'(x_0)$، نشان می‌دهیم h در x_0 مشتق‌پذیر است. طبق رابطه‌ی (۳) داریم:

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\Big(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\Big)D(x)$$
$$+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \qquad (۴)$$

از طرفین رابطه، حد می‌گیریم:

$$h'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\Big(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\Big)D(x)+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=0+g'(x_0)=g'(x_0)$$

توجه کنید که در حد بالا، از آن‌جا که $D(x)$ تابع کراندار است و $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\Big)=0$ پس

$$\lim_{x\to x_0}\Big(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\Big)D(x)=0$$

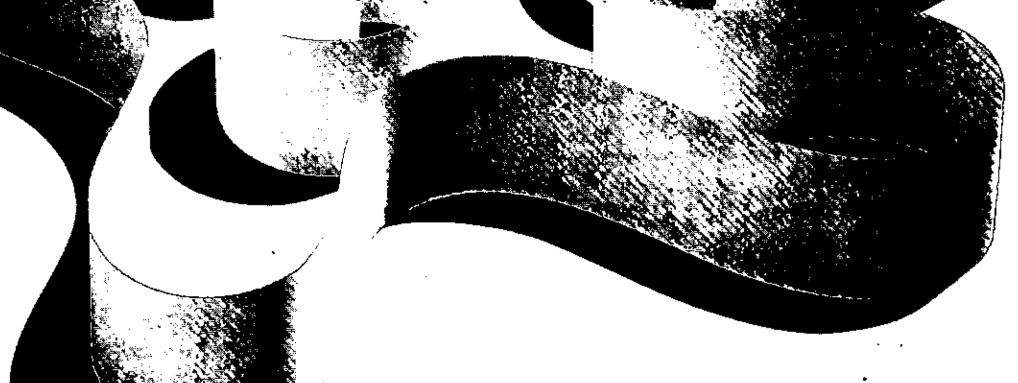
برعکس. فرض کنیم h در x_0 مشتق‌پذیر است. بنابراین h در x_0 پیوسته است و درنتیجه طبق قضیه ۱، $h(x_0)=f(x_0)=g(x_0)$. حال کافی است نشان دهیم $f'(x_0)=g'(x_0)$. فرض کنیم $f'(x_0)\neq g'(x_0)$ (فرض خلف). طبق رابطه‌ی (۴) داریم:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\Big(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\Big)D(x)$$
$$+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$\Rightarrow h'(x_0)-g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\Big(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\Big)D(x)$$

این تساوی با توجه به این که $f'(x_0)\neq g'(x_0)$ و نیز این‌که $D(x)$ در هیچ نقطه حد ندارد، امکان‌پذیر نیست. درنتیجه $f'(x_0)=g'(x_0)$.

نتیجه ۱. مجموعه نقاطی که تابع h مشتق‌پذیر است برابر است با اشتراک مجموعه جواب معادله‌های $f(x)=g(x)$ و $f'(x)=g'(x)$ در (a,b).



نتیجه ۲. برای یک مجموعه‌ی متناهی و مفروض $A \subseteq (a,b)$ مانند $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$، تابعی موجود است که مجموعه نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر است، برابر با مجموعه‌ی A می‌باشد.

برهان. تابع $h:(a,b) \to R$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$h(x) = \begin{cases} (x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_n)^2 & (\text{x گویا}) \\ 0 & (\text{x گنگ}) \end{cases}$$

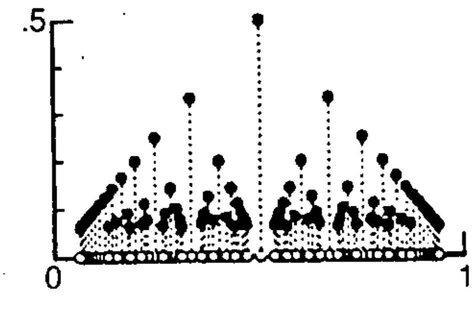
تابع h در نقاط A مشتق‌پذیر است.

تذکر: شرط پیوستگی f و g در قضایای ۱ و ۲ ضروری است. فرض کنیم $f:(0,1) \to R$ با ضابطه‌ی $f(x) = xD(x)$ و تابع $g:(0,1) \to R$ با ضابطه $g(x) = -xD(x) + x$ تعریف شود در آن صورت f و g مطابق قضیه ۱، فقط در $x = 0$ پیوسته هستند و مطابق قضیه ۲، در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیستند. در حالی که تابع $h:(0,1) \to R$ با ضابطه (۲) به صورت $h(x) = x$ است که این تابع بر $(0,1)$ مشتق‌پذیر است.

چند مسأله برای علاقه‌مندان

۱. نقاط پیوستگی و ناپیوستگی تابع زیر را بیابید

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & (\text{x گویا}) \\ \cos(x) & (\text{x گنگ}) \end{cases}$$



شکل ۲. تابع ریمان

۲. تابع زیر در چه نقاطی مشتق‌پذیر است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (\text{x گویا}) \\ 0 & (\text{x گنگ}) \end{cases}$$

۳. آیا می‌توان تعریف مشتق را با تعریف زیر عوض کرد؟

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

(راهنمایی: تابع $f(x) = D(x)$ را درنظر بگیرید.)

۴. آیا تابعی مانند f وجود دارد که در هیچ نقطه‌ای حد نداشته باشد. ولی $|f|$ در هر نقطه مشتق‌پذیر باشد؟ (راهنمایی: تابع $f(x) = -D(x) + 1$ را درنظر بگیرید.)

۵. (**تابع ریمان**). نشان دهید تابع زیر در نقاط گنگ پیوسته و در نقاط گویا ناپیوسته است (شکل ۲ را ببینید)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{گنگ } x \in (0,1) \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in (0,1)\ ,\ (p,q) = 1\ ,\ q > 0 \end{cases}$$

۶. نشان دهید تابع زیر در نقاط گنگ پیوسته و در نقاط گویا ناپیوسته است

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{گنگ} \quad x \in (0,1) \\ p\sin(\frac{1}{q}) & x = \frac{p}{q} \in (0,1)\ ,\ (p,q) = 1\ ,\ q > 0 \end{cases}$$

منابع

[۱] قدیر مهاجری مینایی، مباحثی پیرامون پیوستگی و مشتق، **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، سال چهاردهم، شماره ۵۵ (۱۳۷۸). صص ۴۶-۴۹، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

[۲] ایساک مارون، **ریاضیات عمومی ۱ و ۲**، ترجمه‌ی خلیل پاریاب، انتشارات پاریاب، ۱۳۷۵.

[3] *E. Hairer and G. Wanner,* **Analysis by Its History**, Springer – Verlag, 1997.

کاربرد فرکتال‌ها

جمع‌آوری: زهره شمس نجف‌آبادی
دبیر ریاضی شهرستان نجف‌آباد

هندسه‌ی فرکتالی در دهه‌های اخیر، کاربردهای زیادی در علوم پیدا کرده است زیرا بسیاری از وضعیت‌هایی که هندسه‌ی کلاسیک (اقلیدسی) از توضیح آن‌ها عاجز است، توسط فرکتال‌ها به راحتی بیان می‌شود.

فرکتال‌ها در طبقه‌بندی و تحلیل سیستم‌های دینامیکی، مدل‌سازی فرایند توزیع در مکانیک آماری، دسته‌بندی ناهمواری‌های سطوح، انتشار تَرَک در جامدات، مطالعه‌ی گسترش آتش‌سوزی در جنگل‌ها، سرایت بیماری‌های عفونی، هواشناسی، بیولوژی مولکولی، پزشکی و فیزیک و شیمی مورد استفاده قرار گرفته است.

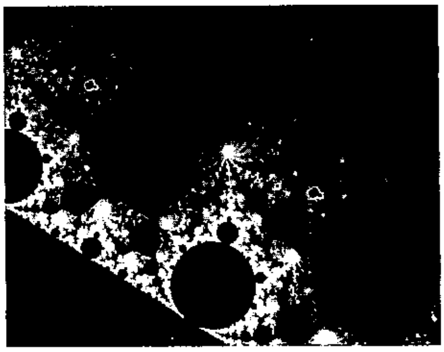
فرکتال‌ها تصویری از یک زندگی واقعی دارند. کامپیوترها می‌توانند یک شکل واقعی را بگیرند و با انجام تکرار زیاد، به آن شکلِ تخیلی دهند. این روزها از فرکتال‌ها به عنوان یکی از ابزارهای مهم در گرافیک رایانه‌ای می‌توان نام برد. آن‌ها بیش‌ترین نقش را در فشرده‌سازی فایل‌های تصویری ایفا می‌کنند.

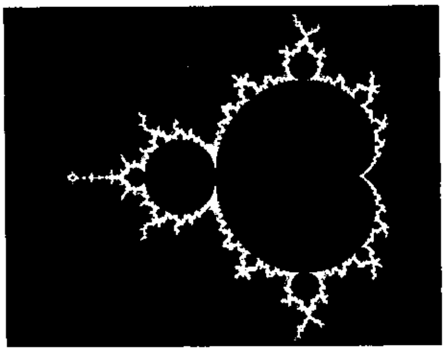
کاربرد فرکتال‌ها در گرافیک رایانه‌ای

فرکتال‌ها با داشتنِ بُعد کسری می‌توانند روشی برای ذخیره‌سازی تصاویر ارایه دهند. معمولاً زمانی که یک تصویر گرافیکی قرار است به شکل یک فایل تصویر ذخیره شود، باید مشخصات هر نقطه از آن، شامل محل قرار گرفتن پیکسل و رنگ آن، به صورت داده‌های عددی ذخیره شود.

زمانی که یک مرورگر بخواهد این فایل را برای شما به تصویر بکشد و نمایش دهد باید بتواند این کدهای عددی را به ویژگی‌های گرافیکی تبدیل کند و آن را به نمایش بگذارد. مشکلی که در این کار وجود دارد، حجم بالایی از داده‌هاست که باید از سوی نرم‌افزار ضبط کننده و تولیدکننده، بررسی شود.

اگر بخواهیم تصویر نهایی ما، کیفیتی عالی داشته باشد، نیازمند آنیم که اطلاعات





هریک از نقاط تشکیل دهنده‌ی تصاویر را با دقت بالایی مشخص و ثبت کنیم و این، حجم بسیار بالایی از حافظه را به خود اختصاص می‌دهد. به همین دلیل روش‌هایی برای فشرده‌سازی تصویر ارایه می‌شود.

در واقع در این فشرده‌سازی‌ها براساس برخی الگوریتم‌های کارآمد سعی می‌شود به جای ضبط تمام داده‌های یک پیکسل، مشخصات اساسی از ناحیه‌ای ذخیره شود که هنگام بازسازی تصویر نقش اساسی‌تر ایفا می‌کنند. در اینجاست که روش فرکتالی اهمیت خود را نشان می‌دهد. یکی از روش‌هایی که در این ارتباط مطرح شده و با استقبال بسیار خوبی از سوی طراحان مواجه شد، روش استفاده از خاصیت الگوهای فرکتالی بود.

در این روش از این ویژگی اصلی فرکتالی استفاده می‌شود که جزئی از یک تصویر، در کل آن تکرار می‌شود. برای درک بهتر به مثال زیر توجه کنید.

فرض کنید تصویری از یک برگ سرخس تهیه کرده‌اید و قصد ذخیره کردن آن را دارید. این برگ ساختار کاملاً فرکتالی دارد؛ یعنی اجزای کوچک تشکیل دهنده در ساختار بزرگ، تکرار می‌شود. بخشی از یک برگ کوچک، برگ را می‌سازند و کنار هم قرار گرفتن برگ‌ها، ساقه‌ی اصلی را تشکیل می‌دهند. اگر بخواهیم تصویر این برگ را به روش عادی ذخیره کنیم باید مشخصات میلیون‌ها نقطه‌ی این برگ را دانه به دانه ثبت کنیم. اما راه دیگری هم وجود دارد. اگر مشخصات تنها یکی از دانه‌های اصلی را ضبط کنیم، در این هنگام با اضافه کردن چند عملگر ریاضی ساده، بقیه‌ی برگ را می‌توانید تولید کنید.

در واقع با داشتن این بلوک ساختمانی و اعمال عملگرهایی چون دوران حول محورهای مختصات، بزرگ کردن یا کوچک کردن و انتقال، می‌توان حجم تصویر ذخیره شده را به طور قابل توجهی کاهش داد.

تقویم ذهنی سال ۱۳۸۶

علیرضا حافظی نسب
دبیر ریاضی بیرجند

چنان‌چه مایل باشید تعیین کنید که یک روز خاص در سال ۱۳۸۶، چند شنبه است، با محاسبه‌ی بسیار ساده ذهنی، که در ادامه معرفی می‌کنیم، پاسخ خود را می‌یابید.

فرض کنید قصد داریم بدانیم پنجم شهریور ۱۳۸۶ (۸۶/۶/۵)، چندشنبه است؟

توجه کنید که هر مورخه‌ی مفروض در یک سال، شامل دو جزء می‌باشد.

(الف) ـ روز (عدد روز را با d نمایش می‌دهیم. بنابراین در مثال فوق، $d = ۵$)؛

(ب) ـ ماه (عدد ماه را با m نمایش می‌دهیم. لذا در مثال فوق، $m = ۶$).

اگر ماه مورد نظر، یکی از هفت ماه اول سال باشد، یعنی $m \leq ۷$، عبارت جبری $۳m$ و اگر ماه مورد نظر، یکی از پنج ماه آخر سال باشد، یعنی $۷ < m \leq ۱۲$، عبارت جبری $۲m$ را به ازای m مورد نظر، محاسبه می‌کنیم و حاصل به‌دست آمده را با d جمع می‌کنیم. سپس جواب حاصل را بر هفت تقسیم می‌کنیم. باقیمانده‌ی این تقسیم عددی صحیح و کمتر از هفت می‌باشد.

اگر باقی‌مانده، ۰ باشد؛ آن روز **شنبه** است.
اگر باقی‌مانده، ۱ باشد؛ آن روز **یکشنبه** است.
اگر باقی‌مانده، ۲ باشد؛ آن روز **دوشنبه** است.
اگر باقی‌مانده، ۳ باشد؛ آن روز **سه‌شنبه** است.
اگر باقی‌مانده، ۴ باشد؛ آن روز **چهارشنبه** است.
اگر باقی‌مانده، ۵ باشد؛ آن روز **پنج‌شنبه** است.
اگر باقی‌مانده، ۶ باشد؛ آن روز **جمعه** است.

حال ببینیم پنجم شهریور ۸۶ (۸۶/۶/۵) چندشنبه است؟ طبق توضیحات گفته شده، $d = ۵$ و $m = ۶$ و از آن‌جا که $m \leq ۷$، ابتدا $۳m$ را به ازای $m = ۶$ محاسبه می‌کنیم:

$$۳m = ۳(۶) = ۱۸$$

حاصل را با d، یعنی ۵ جمع می‌کنیم:

$$۱۸ + ۵ = ۲۳$$

و باقی‌مانده‌ی تقسیم ۲۳ بر هفت عدد را می‌یابیم:

$$۲۳ \overset{۷}{\equiv} ۲$$

بنابراین آن روز، دوشنبه است.

حال بیایید ببینیم ۲۵ اسفندماه ۸۶ (۸۶/۱۲/۲۵) چندشنبه است؟

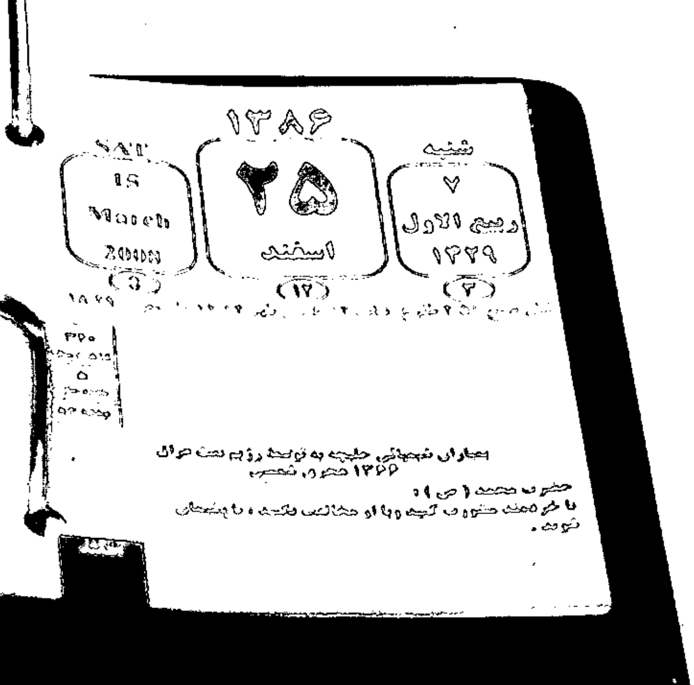
در این مثال، $d = ۲۵$ و $m = ۱۲$ و $m > ۷$.

لذا عبارت $۲m$ را به ازای $m = ۱۲$ محاسبه می‌کنیم:

$$۲m = ۲(۱۲) = ۲۴$$

و جواب حاصل را با $d = ۲۵$ جمع می‌کنیم:

$$۲۴ + ۲۵ = ۴۹$$



و باقی‌مانده‌ی تقسیم ۴۹ بر هفت، صفر می‌باشد:

$$49 \overset{7}{\equiv} 0$$

در نتیجه، آن روز، شنبه است.

تعمیم رابطه

با توجه به این‌که هر چهار سال یک‌بار، سال کبیسه می‌باشد، می‌توان از رابطه‌ی زیر برای تعیین ایام هفته‌ی یک تاریخ مفروض (تا حدود ۱۵ سال بعد و ۱۵ سال قبل از سال ۱۳۸۶) استفاده کرد:

اگر y، نماد تعداد سال‌هایی که سال مورد نظر، قبل یا بعد از سال ۱۳۸۶ است، باشد؛ و m نماد ماه و d نماد روز مورد نظر، در این صورت

به ازای $m \le 7$؛ عبارت

$$(1)\quad 3m + \left(y + \left[\frac{y-4}{4}\right] + 1\right) + d$$

و به ازای $m > 7$؛ عبارت

$$(2)\quad 2m + \left(y + \left[\frac{y-4}{4}\right] + 1\right) + d$$

را محاسبه می‌کنیم و حاصل آن را بر ۷ تقسیم می‌کنیم. براساس قراردادی که در قسمت قبل بیان شد، این باقی‌مانده، روز هفته را تعیین می‌کند. توجه کنید که در عبارت‌های فوق، منظور از $\left[\frac{y-4}{4}\right]$، جزء صحیح $\frac{y-4}{4}$ است. هم‌چنین اگر سال مورد نظر، قبل از سال ۱۳۸۶ باشد، $y < 0$ خواهد بود و البته اگر سال مورد نظر، بعد از سال ۱۳۸۶ باشد، $y > 0$ است.

به این نکته نیز توجه کنید که اگر باقی‌مانده‌ی حاصل عبارت‌های فوق بر ۷، عددی منفی درآمد، آن را با ۷ جمع می‌کنیم تا معادل مثبت آن را به‌دست آوریم.

اینک چند مثال:

شانزدهم آذرماه سال ۱۳۸۸ (۱۳۸۸/۹/۱۶)، چندشنبه خواهد بود؟

در این مثال، $y = 2$ و $d = 16$ و $m = 9$. با توجه به این‌که آذرماه، یکی از پنج ماه آخر سال است، رابطه‌ی(۲) را به ازای $y = 2$ و $d = 16$ و $m = 9$ محاسبه می‌کنیم:

$$2m + \left(y + \left[\frac{y-4}{4}\right] + 1\right) + d$$

$$= 2(9) + \left(2 + \left[\frac{2-4}{4}\right] + 1\right) + 16$$

$$= 18 + (2 - 1 + 1) + 16$$

$$= 36$$

و باقی‌مانده‌ی تقسیم ۳۶ بر هفت، عدد ۱ می‌باشد. پس آن روز، یکشنبه است.

ششمین روز فروردین ماه سال ۷۳ (۱۳۷۳/۱/۶)، چندشنبه بوده است؟

تاریخ مذکور، مربوط به ۱۳ سال قبل است. پس $y = -13$ و $d = 6$ و $m = 1$. فروردین‌ماه، یکی از هفت ماه اول سال است. بنابراین رابطه‌ی (۱) را به ازای $y = -13$ و $d = 6$ و $m = 1$ محاسبه می‌کنیم؛

$$3m + \left(y + \left[\frac{y-4}{4}\right] + 1\right) + d$$

$$= 3(1) + \left(-13 + \left[\frac{-13-4}{4}\right] + 1\right) + 6$$

$$= 3 + (-13 - 5 + 1) + 6$$

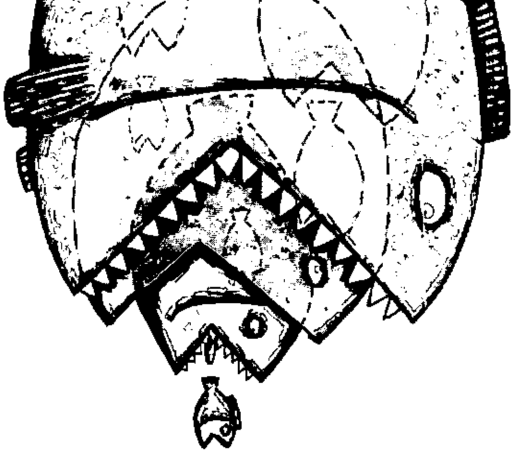
$$= -8$$

و باقی‌مانده‌ی تقسیم ۸- بر هفت عدد ۱- است.

به دلیل این‌که باقی‌مانده منفی است، آن را با هفت جمع می‌کنیم:

$$-1 + 7 = 6$$

در نتیجه ششمین روز فروردین‌ماه سال ۷۳، جمعه بوده است.



درباره‌ی واگرایی سری توافقی

علی‌اکبر جاویدمهر

دبیر دبیرستان‌های ساوه

در صفحه‌ی ۱۴ مجله‌ی رشد آموزش ریاضی شماره‌ی ۶۴، اثباتی بسیار کوتاه برای واگرایی سری توافقی به شرح زیر ارایه شده است:

اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ همگرا باشد، آن‌گاه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

که این یک تناقض است. پس این سری واگراست.

گرچه این اثبات بسیار کوتاه و جالب به‌نظر می‌رسد ولی اندکی به توضیح، نیاز دارد. فرض کنیم سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ همگرا باشد؛ پس مجاز هستیم در سری، تجدید آرایش ایجاد کنیم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)>\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

حال اگر فرض کنیم $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=L$، آن‌گاه $L>L$ که یک تناقض است.

اثباتی دیگر برای واگرایی سری توافقی

برهان خلف: فرض کنیم این سری، همگرا باشد. پس مجاز هستیم در سری تجدید آرایش ایجاد کنیم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\\&=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)\\&>\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\end{aligned}$$

پس

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}>\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

درنتیجه

$$L\geq\frac{1}{2}+L>L$$

این تناقض آشکار، نشان می‌دهد که سری واگراست.

اثبات واگرایی سری توافقی به کمک معیارکوشی

برهان خلف. فرض کنیم سری، همگرا باشد. پس با استفاده از معیارکوشی، داریم:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n, p (n \geq n_0, p \in N \Rightarrow |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon)$$

حال اگر $\varepsilon < \frac{1}{2}$ را انتخاب کنیم، n_0 ی وجود دارد که اگر $n \geq n_0$ و $p \in N$، آن‌گاه

$$\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} < \varepsilon$$

چون این نامساوی به ازای هر p دلخواه برقرار است، بنابراین به‌ازای $p = n$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{2} = \frac{n}{2n} < \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} < \varepsilon$$

و این یک تناقض است؛ زیرا ε را کوچک‌تر از $\frac{1}{2}$ اختیار کرده بودیم. پس فرض خلف، باطل بوده و سری مورد نظر، واگراست.

منابع

[۱] یک اثبات کوتاه برای واگرایی سری توافقی، جمال روئین، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۶۴، ص۱۴، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

[۲] آنالیز ریاضی، ب ـ پ ـ دمیدوویچ، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف.

[۳] آنالیز ریاضی، تام. ام. آپوستل، ترجمه‌ی دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف.

پی‌گیری یک سؤال، بازپروری آن

یوسف احمدی، دبیر ریاضی شهرستان بابل

مقاله‌ی ارایه شده در هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران
شهرکرد ـ مرداد ۱۳۸۵

چکیده

حدس و الگویابی از موضوعات بسیار مهم در آموزش ریاضی است زیرا سبب می‌شود که یادگیرنده با انگیزه و اشتیاق بیش‌تری به یادگیری و پژوهش بپردازد. این موضوع در بعضی از شاخه‌های ریاضی نظیر نظریه‌ی اعداد بیش‌تر به چشم می‌خورد ولیکن در حیطه‌ی حسابان، کمی پیچیده و ناملموس است. آن‌چه در ادامه می‌آید، تجربه‌ای است که در یکی از کلاس‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال پیش‌دانشگاهی، ضمن درس «مشتق» با دانش‌آموزان داشتیم. این تجربه نشان می‌دهد که حتی در حوزه‌ی حسابان نیز، با وجود ظاهر پیچیده‌ی برخی مباحث آن، حدس و الگویابی و تفکر نظام‌مند می‌تواند انگیزه‌بخش و محرک یادگیرندگان در یک یادگیری فعال و پویا باشد.

حدس و الگویابی در کلاس حساب دیفرانسیل و انتگرال

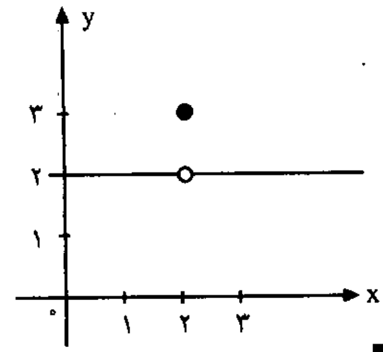
روزی مشغول تدریس درس «تابع مشتق» از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال پیش‌دانشگاهی بودم، که دانش‌آموزی، سؤال زیر را مطرح کرد:

آیا تابعی مانند f وجود دارد که نمودار f'، یعنی تابع مشتق آن، به صورت شکل(۱) باشد؟

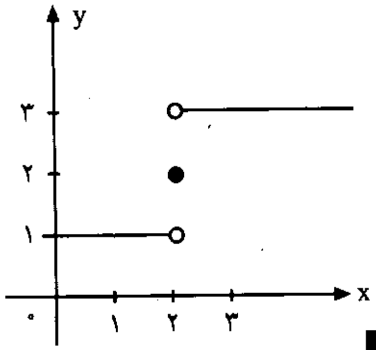
اگرچه این سؤال ظاهراً کمی ساده به‌نظر می‌رسید، ولی ذهن بسیاری از دانش‌آموزان کلاس را به خود مشغول کرد و پس از این‌که ضابطه‌ی تابع f' را به‌صورت

$$f'(x)=\begin{cases}2 & x\neq 2\\ 3 & x=2\end{cases}$$

نوشتیم، تعدادی از دانش‌آموزان به‌دنبال حدس‌زدن



شکل۱



شکل۲

ضابطه‌ی f رفتند و اظهار داشتند با توجه به این‌که مشتق تابع f، مساوی ۲ است (باستثناء نقطه‌ی $x = 2$)، پس ضابطه‌ی تابع f باید به‌صورت زیر باشد

$$f(x)=\begin{cases}2x+c & ;x\neq 2\\ a & ;x=2\end{cases}$$

که با توجه به مشتق‌پذیری f (با توجه به شکل، f' همه‌جا وجود دارد) و در نتیجه پیوستگی آن در همه‌ی نقاط، بالاخص در $x = 2$، باید $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$ یعنی $a = 4 + c$. بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}2x+c & ;x\neq 2\\ 4+c & ;x=2\end{cases}$$

که همه‌جا همان تابع $f(x) = 2x + c$ است و مشتق آن، تابع پیوسته‌ی $f'(x) = 2$ می‌باشد، در حالی که مطابق شکل(۱)، f' پیوسته نیست. پس وجود تابعی مانند f که نمودار مشتق آن مطابق شکل(۱) باشد غیرممکن است.

بلافاصله، از جانب دانش‌آموزان، این سؤال مطرح شد که **آیا ممکن است تابعی مانند f موجود باشد به قسمی که نمودار تابع f' مطابق شکل(۲) باشد؟**

باز هم دانش‌آموزان سعی کردند ضابطه‌ی f را حدس بزنند. آن‌ها استدلال کردند که f' همه‌جا وجود دارد، پس f همه‌جا پیوسته و مشتق‌پذیر است؛ سپس نوشتند:

$$f'(x)=\begin{cases}3 & ;x>2\\ 2 & ;x=2\\ 1 & ;x<2\end{cases}$$

در نتیجه

$$f(x)=\begin{cases}3x+c & ;x>2\\ a & ;x=2\\ x+b & ;x<2\end{cases}$$

که با توجه به پیوستگی و مشتق‌پذیری f در $x = 2$ باید داشته باشیم

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$$

$$\Rightarrow a=6+c=2+b \Rightarrow b=4+c \text{ و } a=6+c$$

یعنی

$$f(x)=\begin{cases}3x+c & ;x>2\\ 6+c & ;x=2\\ x+4+c & ;x<2\end{cases}$$

که این تابع، اصلاً در $x = 2$ مشتق‌پذیر نیست زیرا $f'_+(2)\neq f'_-(2)$ در حالی که بنا به شکل(۲)، باید $f'(2) = 2$.

وحدس های دانش آموزان

پس وجود تابعی مانند f که نمودار تابع مشتق آن مطابق شکل (۲) باشد غیرممکن است.

در این جا بود که تعدادی از دانش‌آموزان، حدس زیر را مطرح کردند:

اگر f' (یعنی تابع مشتق f) همه جا وجود داشته باشد اما پیوسته نباشد آن گاه f وجود ندارد.

به عبارت دقیق‌تر، **اگر تابعی همه جا موجود ولی ناپیوسته باشد، نمی‌تواند مشتق هیچ تابعی باشد**. البته من به عنوان معلم آن کلاس، در آن جلسه درباره‌ی درستی یا نادرستی حدس فوق اصلاً نظری ندادم و فقط گفتم که برای درستی یا نادرستی حدس فوق باید کمی صبر کنیم، زیرا مطمئن بودم در جلسات بعد، حدس فوق با اشکالاتی مواجه خواهد شد.

جلسه‌ی بعد به سراغ تمرین‌ها رفتیم و اتفاقاً به این مسئله برخورد کردیم که هرگاه

$$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & ; \; x\neq 0 \\ 0 & ; \; x=0 \end{cases}$$

آیا g در $x=0$ پیوسته است؟ مشتق‌پذیر چطور؟

بلافاصله دانش‌آموزان با استفاده از تعریف مشتق، یعنی $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$، مشتق‌پذیری g را در $x=0$ بررسی کردند و ثابت شد که $g'(0)=0$.

سپس از آن‌ها خواستم که تابع مشتق g را به دست آورند. آن‌ها g' را چنین به دست آوردند

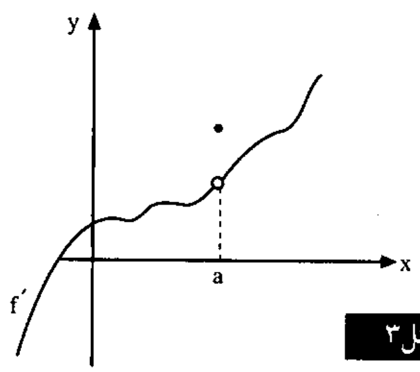
$$g'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

سپس این سؤال را مطرح کردم که

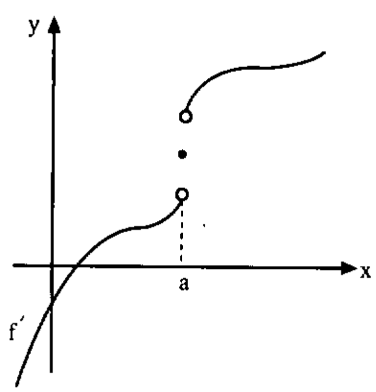
الف) آیا تابع g همه جا پیوسته و مشتق‌پذیر است؟

ب) آیا g' همه جا پیوسته است؟

در مورد سؤال (الف) همگی بر این که g همه جا پیوسته و مشتق‌پذیر است، اتفاق نظر داشتند، اما در مورد سؤال (ب)، تعداد کمتری، جوابی ارایه دادند و آن عده متوجه شدند که $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)$ وجود ندارد، در حالی که $g'(x)$ همه جا وجود دارد (یعنی g' پیوسته نیست). این مثال موجب شد که به نادرستی حدس جلسه‌ی قبل خود پی ببرند. البته این موضوع وظیفه‌ی من را کمی سنگین‌تر کرد چرا که این پرسش برای دانش‌آموزان مطرح شد که چرا تابعی مانند g' که ناپیوسته است می‌تواند مشتق تابعی مانند g باشد، در حالی که نمودارهای ناپیوسته‌ی شکل‌های (۱) و (۲) نتوانستند مشتق هیچ تابعی باشند. هم‌چنین اگر نمودارهای f' مانند شکل‌های (۳) و (۴) باشند که نتوانیم با به دست آوردن ضابطه‌ی f، وجود یا عدم وجود آن را بررسی کنیم، باید چه کرد؟



شکل ۳



شکل ۴

در این زمان، تعدادی از دانش‌آموزان، تمام فکر و ذهن خود را به رفتار تابع مشتق در همسایگی $x=a$ مشغول کردند. من نیز سعی کردم با استفاده از مطالب کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال پیش دانشگاهی و منابع موجود به این سؤال، پاسخ دهم.

به این منظور، چند تعریف و قضیه را که در کتاب درسی به صورت همان قضیه یا حتی به صورت مسأله بودند، مطرح کردم و این نتیجه را به دست آوردیم که

هرگاه تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f' نمی‌تواند بر $[a,b]$ ناپیوستگی ساده یا نوع اول داشته باشد.

اما f' ممکن است ناپیوستگی نوع دوم داشته باشد و در نتیجه وجود تابعی مانند f که نمودار تابع مشتق آن مانند شکل‌های (۱) یا (۲) باشد (نوع ناپیوستگی در این شکل‌ها نوع اول یا ساده است) غیرممکن است و البته، ناپیوستگی تابع g' از نوع اول نیست.

در ادامه، تعاریف و قضایایی که با این موضوع مرتبط هستند، برای علاقه‌مندان، به تفصیل آمده است.

تعریف. هرگاه تابع f در $x=a$ ناپیوسته بوده و $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ وجود داشته باشند، می‌گوییم f در $x=a$ **ناپیوستگی نوع اول یا ناپیوستگی ساده** دارد یعنی $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ یا $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)= \lim\limits_{x\to a^-} f(x)\neq f(a)$.

در غیر این صورت گوییم که تابع f در $x=a$ **ناپیوستگی نوع دوم** دارد.

مثال. توابع $f(x)=[x]$ در $x=۱$ و $g(x)=[x]+[-x]$ نیز در $x=۲$ ناپیوستگی نوع اول دارند. اما تابع

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{۱}{x} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$$

در $x=۰$ ناپیوستگی نوع دوم دارد.

تعریف. هرگاه $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)= \lim\limits_{x\to a^-} f(x)\neq f(a)$ در این صورت ناپیوستگی f را در $x=a$ **رفع شدنی** گویند، در غیر این صورت ناپیوستگی را **رفع نشدنی** گویند.

مثال. ناپیوستگی تابع $f(x)=\left[-x^۲\right]$ در $x=۰$ رفع شدنی است. اما ناپیوستگی $f(x)=\left[x^۲\right]$ در $x=۱$ رفع ناشدنی است.

نتیجه. اگر ناپیوستگی f در $x=a$ رفع شدنی باشد، آن‌گاه ناپیوستگی f در $x=a$ از نوع اول است. اگرچه عکس آن کلیت ندارد مانند $f(x)=[x]$ در $x=۱$.

قضیه۱. (قضیه مقدار میانی در توابع پیوسته). هرگاه تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته و k عددی حقیقی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آن‌گاه عددی حقیقی مانند c بین a و b وجود دارد به قسمی که $f(c)=k$.

قضیه۲. اگر تابع f در بازه‌ی بسته $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه f، اکسترمم‌های مطلق خود را در این بازه می‌گیرد و اگر اکسترمم‌های مطلق در a و b نباشند، آن‌گاه این اکسترمم‌ها، نسبی نیز هستند.

قضیه۳. اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر بوده و اکسترمم نسبی داشته باشد، آن‌گاه $f'(a)=۰$.

قضیه۴. اگر حد تابعی در $x=a$ مثبت (منفی) شود، آن تابع در یک همسایگی محذوف از $x=a$، مثبت (منفی) است. این مطلب برای حد راست (چپ) نیز صادق است که وجود همسایگی راست(چپ) را به همراه دارد.

حال با توجه به تعاریف و قضایای قبل، قضیه‌ی زیر را که به **قضیه‌ی مقدار میانی برای مشتق‌ها** (مشابه با قضیه‌ی مقدار میانی در توابع پیوسته) معروف است، بیان می‌کنیم.

قضیه۵. (قضیه‌ی مقدار میانی برای مشتق‌ها) هرگاه تابع حقیقی f بر بازه‌ی $[a,b]$ مشتق‌پذیر بوده و k عددی حقیقی بین $f'(a)$ و $f'(b)$ باشد، در این صورت عددی حقیقی مانند c بین a و b وجود دارد به قسمی که $f'(c)=k$.

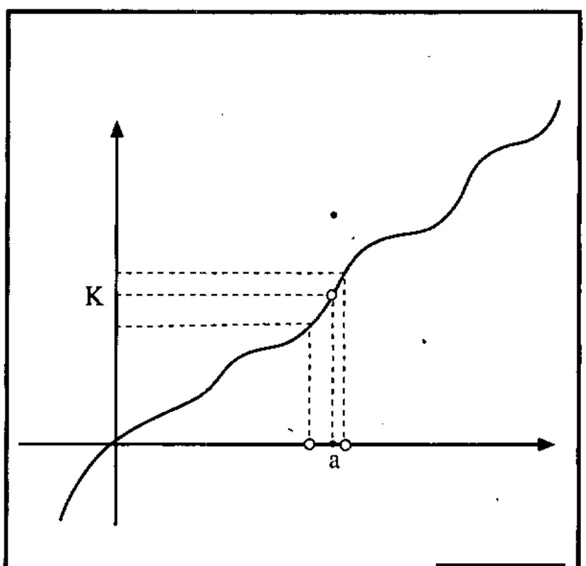
اثبات. فرض کنیم $f'(a)<f'(b)$ (حالتی که $f'(a)>f'(b)$ مشابه است). پس $f'(a)<k<f'(b)$. یعنی $f'(b)-k>۰$ و $f'(a)-k<۰$.

حال تابع کمکی $g(x)=f(x)-kx$ را در نظر می‌گیریم که با توجه به مشتق‌پذیری f، تابع g نیز مشتق‌پذیر بوده و $g'(x)=f'(x)-k$. پس $g'(a)=f'(a)-k<۰$ و

$g'(b)=f'(b)-k>0$. در نتیجه $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<0$.

بنابه قضیه‌ی(۴)، در یک همسایگی راست از $x=a$ یعنی در بازه‌ی $(a,a+\varepsilon)$ که $(a,a+\varepsilon)\subset(a,b)$، $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<0$ و چون $x>a$ پس $g(x)-g(a)<0$. در نتیجه اگر $t_1\in(a,a+\varepsilon)\subset(a,b)$، آن‌گاه $g(t_1)<g(a)$ و چون $g'(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}=f'(b)-k>0$، پس مشابهاً در یک همسایگی چپ از $x=b$ یعنی در بازه‌ی $(b-\varepsilon',b)$ که $(b-\varepsilon',b)\subset(a,b)$، $\frac{g(x)-g(b)}{x-b}>0$ پس $g(x)-g(b)<0$ و اگر $t_2\in(b-\varepsilon',b)\subset(a,b)$، آن‌گاه $g(t_2)-g(b)<0$. یعنی $g_{(t_2)}<g_{(b)}$. در نتیجه g در بازه‌ی $[a,b]$ عرض‌هایی کوچک‌تر از عرض‌های ابتدا و انتها (یعنی $g_{(t_1)}$ و $g_{(t_2)}$)دارد. یعنی حداقل یکی از اکسترمم‌های مطلق، در ابتدا و انتها نیست. پس $a<c<b$ وجود دارد که g در $x=c$ اکسترمم مطلق و در عین حال اکسترمم نسبی است (بنا به قضیه(۲)) و با توجه به قضیه‌ی (۳)، $g'(c)=0$ یعنی $f'(c)-k=0$ یعنی $f'(c)=k$.

نتیجه. هرگاه تابع f بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f' نمی‌تواند بر $[a,b]$ ناپیوستگی ساده یا نوع اول داشته باشد، اما f' ممکن است ناپیوستگی نوع دوم داشته باشد.



شکل۵

اثبات. (برهان خلف) فرض کنیم f' ناپیوستگی نـ (ساده) داشته باشد یعنی نقطه‌ای چون $t\in(a,b)$ وجود باشد که در آن $f'(t^+)$ و $f'(t^-)$ وجود دارند ولی $f'(t)\neq f'(t^-)$ یا $f'(t)\neq f'(t^+)$.

فرض کنید $f'(t)<f'(t^+)$ و فرض کنیم $(k\in R)f'(t)<k<f'(t^+)$. بنا به قضیه‌ی(۴)، $\delta>0$ وجود دارد به قسمی که برای هر $x\in(t,t+\delta)$ داریم $f'(t)<k<f'(x)$ و این با قضیه‌ی(۵)، مغایر است، زیرا باید $x_0\in(t,t+\delta)$ موجود باشد به قسمی که $f'(x_0)=k$.

پس با توجه به قضیه‌ی قبل، تابعی مانند f وجود ندارد که نمودار f' به صورت یکی شکل‌های (۱)، (۲)، (۳) یا (۴) باشد (نوع ناپیوستگی در این شکل‌ها، نوع اول است) و در حالت خاص، f' نمی‌تواند ناپیوستگی رفع شدنی داشته باشد.

به طور شهودی اگر نمودار تابع f'، مطابق شکل (۵) باشد، می‌توانیم یک همسایگی از $x=a$ را طوری در نظر بگیریم که f' در این همسایگی همه جا موجود باشد ولی بعضی از خط‌های افقی $y=k$، نمودار f' را قطع نکنند. یعنی حکم قضیه‌ی قبل برقرار نباشد. یا خاصیتی شبیه به خواص قضیه مقدار میانی در توابع پیوسته برای f' برقرار نباشد.

مثال. توابعی مانند f و g وجود ندارند که در آن‌ها

$$f'(x)=\begin{cases}x^2\sin x & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

و

$$g'(x)=\begin{cases}x^2+5x & x>0\\ 1 & x=0\\ \dfrac{1}{x^2+2} & x<0\end{cases}$$

منابع

[۱] حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲ پیش‌دانشگاهی، مؤلفان: تلگینی، خردپژوه، رجالی و قیاسیان، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی.

[۲] اصول آنالیز ریاضی، تألیف: والتر رودین، ترجمه‌ی دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات علمی و فنی، ۱۳۷۱.

منابع مربوط به مقاله‌ی
«چرخه‌ی بنیادین ساخت مفهوم: زیربنای چارچوب‌های نظری گوناگون»

خوانندگان محترم،

در شماره‌ی گذشته‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی (شماره‌ی ۸۸ـ تابستان سال ۸۶)، ترجمه‌ی مقاله‌ی «چرخه‌ی بنیادین ساخت مفهوم: زیربنای چارچوب‌های نظری گوناگون»، نوشته‌ی جان پگ و دیوید تال، در صفحات ۴ تا ۱۵، به چاپ رسید. منابع این مقاله از قلم افتاده بود که ضمن پوزش از خوانندگان، آن‌ها را در این شماره می‌آوریم:

Biggs, J. & Collis, K. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: the SOLO Taxonomy*. New York: Academic Press.

Biggs, J. & Collis, K. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behaviour. In H. Rowe (Ed.), *Intelligence, Reconceptualization and Measurement* (pp. 57-76). New Jersey: Laurence Erlbaum Assoc.

Bruner, J. S. (1966). *Towards a Theory of Instruction*, New York: Norton.

Case, R. (1992). *The Mind's Staircase: Exploring the conceptual underpinnings of children's thought and knowledge*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Crick. F. (1994). *The Astonishing Hypothesis*. London: Simon & Schuster.

Czarnocha. B., Dubinsky, E., Prabhu. V., & Vidakovic. D. (1999). One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research. *Proceedings of the 23rd Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1 pp. 95-110).

Davis, R. B. (1984). *Learning Mathematics: The cognitive science approach to mathematics education*. Norwood. NJ: Ablex.

Dienes, Z.P. (1960). *Building Up Mathematics*. London: Hutchinson.

Dubinsky, Ed (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In David O. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Kluwer: Dordrecht.

Edelman, G.M. & Tononi, G. (2000). *Consciousness: How Matter Becomes Imagination*. New York: Basic Books.

Fischer, K.W., & Knight, C.C. (1990). Cognitive development in real children: Levels and variations. In B. Presseisen (Ed.). *Learning and thinking styles: Classroom interaction*. Washington: National Education Association.

Gray, E. M., Pitta, D., Pinto, M. M. F. & Tall, D. O. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics. 38*, 1-3, 111-133.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1991). Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. In Fulvia Furinghetti, (Ed.), *Proceedings of PME XIII* (vol. 2. pp. 72-79). Assisi, Italy.

Gray, E. M. & Tall. D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 2, 115-141.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. In Marja van den Heuvel-Panhuizen (Ed.) *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 3*, 65-72. Utrecht, The Netherlands.

Greeno. James (1983). Conceptual Entities. In Dedre Gentner, Albert L. Stevens (Eds.), *Mental Models*. (pp. 227-252). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gruber, H. e. & Voneche, J. J. (1977). *The Essential Piaget* New York: Basic Books, Inc., Publishers.

Halford, G.S. (1993). *Children's understanding: The development of mental models*. Hillsdale: NJ: Lawrence Erlbaum.

Lakoff, G. & Nunez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From*. New York: Basic Books.

Lave, J. & Wenger E. (1991). *Situated Learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: CUP.

Pegg, J. (1992). Assessing students' understanding at the primary and secondary level in the mathematical sciences. In J. Izard and M. Stephens (Eds.), *Reshaping Assessment Practice: Assessment in the Mathematical Sciences under Challenge* (pp. 368-385). Melbourne: Australian Council of Educational Research.

Pegg, J. (2003). Assessment in Mathematics: a developmental approach. In J.M. Royer (Ed.) *Advances in Cognition and Instruction* (pp. 227-259). New York: Information Age Publishing Inc.

Pegg, J. & Davey, G. (1998). A synthesis of Two Models: Interpreting Student Understanding in Geometry. In R. Lehrer & C. Chazan, (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Spac.* (pp. 109-135). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Piaget, J. & Garcia, R. (1983). *Psychogenèse et Histoire des Sciences*. Paris: Flammarion.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Poynter, A. (2004). Effect as a pivot between actions and symbols: the case of vector. Unpublished PhD thesis. University of Warwick.

Tall, D.O., Gray, E., M. Ali, M., Crowley, L., DeMarois. P. McGowen, M., Pitta. D., Pinto, M., Thomas, M., & Yusof. Y. (2000). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, *The Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1, 80-104.

Tall, D. O. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. Proceedings of the 28th Conference of PME, Bergen, Norway, 158-161.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight: a theory of mathematics education*. New York: Academic Press.

اشاره

مجله ی رشد آموزش ریاضی، تداوم معنادار خود را مدیون تعامل و تبادل‌نظر دائمی با مخاطبان اصلی خود که معلمان ریاضی و دست‌اندرکاران آموزش معلمان ریاضی هستند، می‌داند. به همین دلیل، بیش‌ترین تلاش اعضای هیأت تحریریه ی مجله، جست و جو برای پیدا کردن راه‌های گوناگون ایجاد چنین تعامل و تبادل‌نظری بوده است. خوشبختانه از سال ۱۳۸۱ که به همت مسئولان محترم دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، تولید و توزیع مجله، نظم بیش‌تری یافته و تیراژ آن نیز بالاتر رفته است، معلمان محترم ارتباط بیش‌تری با مجله ی خودشان برقرار کرده‌اند و بیش‌تر از گذشته، دیدگاه‌های خود را برای چاپ، ارسال می‌دارند. به همین دلیل، آرزوی دیرینه ی دفتر انتشارات کمک‌آموزشی و هیأت تحریریه ی مجله ی رشد آموزش ریاضی می رود تا تحقق یابد. درنتیجه، با نظر هیأت تحریریه ی مجله، قرار شد تا دیدگاه‌های ارسالی عیناً و بدون ویرایش چاپ شوند. در ضمن، از خوانندگان محترم استدعا داریم که پاسخ گو و منتقد دیدگاه‌ها باشند و تعامل و تبادل‌نظر را از طریق بازتاب بر آن‌ها، معنادارتر و کارآتر کنند.

البته لازم به توضیح است که دیدگاه‌های مطرح شده، الزاماً هم‌سو با سیاست‌ها و دیدگاه‌های دفتر انتشارات کمک‌آموزشی و هیأت تحریریه ی مجله ی رشد آموزش ریاضی نیستند.

سردبیر

تضاد و اشکال در کجاست؟

میرزا جلیلی
عضو هیأت تحریریه ی رشد آموزش ریاضی

سال‌هاست که امتحان کنکور و بازار گرم آموزشگاه‌ها بر محور «تست» استوار شده است. سازمان سنجش با استفاده از تجارب گذشته، سعی دارد هر سال وضع سؤالات را بهتر کند و کار را به طرف تکامل و رضایت عمومی سوق دهد. مرتب تغییراتی در طرح سؤالات و تست‌ها روی می‌دهد؛ گاهی تأکید بر دروس اختصاصی است و زمانی به سؤالات دروس عمومی توجه بیش‌تری می‌شود. یک سال تست‌های ریاضی مشکل است و سال بعد سؤالات فیزیک. تغییرات به هر صورت و شکل که باشد باز «تست»، ثابت و سر جای خودش است. برگزارکنندگان از شیوه‌ی تستی و کار خود راضی هستند و معتقدند در این روش امتحان، حتی‌المقدور حق به حق‌دار می‌رسد و تبعیض، اجحاف یا ظلم وجود ندارد یا تصادفی و ضعیف است. و بعضی از آن‌ها معتقدند که فعلاً راه‌حل دیگری غیر از آزمون تستی، برای انتخاب و گزینش دانشجو وجود دارد.

مؤسسات و آموزشگاه‌های علمی نیز معتقدند که آزمون به شیوه‌ی تستی، مشکلی ندارد و می‌گویند: ما در این راستا زحمت می‌کشیم تا دانش‌آموزان را برای ورود به دانشگاه آماده سازیم و کارت دانش‌آموزی آن‌ها را به کارت دانشجویی تبدیل کنیم!

پای صحبت یک خانواده نشستم؛ آن‌ها می‌گفتند: فرزند ما نسبتاً مستعد است و سال گذشته با پرداخت مبلغ بالایی، وی را در یک دبیرستان صاحب‌نام در تهران ثبت‌نام کردیم. در ضمن بعدازظهرها نیز در آموزشگاه‌ها، به طور خصوصی پای درس اساتید خوب نشست. تمام کتاب‌های کنکور و تست را نیز در دسترس او قرار دادیم و او با شور و حرارت تمام خود را برای کنکور آماده کرد. اما پس از همه‌ی تلاش‌ها، وقتی کارنامه‌ی خود را دریافت کرد متوجه شد که از سؤالات فیزیک و ریاضی آزمون تنها حدود ۴۰ تا ۵۰ درصد درست پاسخ داده است؛ در صورتی که قبل از انقلاب، دانش‌آموزی با این روش کار کردن، ۸۰٪ سؤالات آزمون را پاسخ می‌داد و در هر جا که مایل بود قبول و پذیرفته می‌شد! اشکال در کجاست نمی‌دانم!

وقتی پای صحبت یک دبیر کارکُشته می‌نشینید، می‌گوید: دانش‌آموزان پیش‌دانشگاهی بعضی از تست‌های بسیار آسان را اشتباه می‌زنند در حالی که بعضی از سؤالات مشکل را درست جواب می‌دهند. و این حکایت از این دارد که آن‌ها مفاهیم کلیدی درس‌های اول و دوم دبیرستان را عمیق نفهمیده‌اند.

چندی پیش یک مسئول بلندپایه‌ی آموزشی، ضمن تجزیه و تحلیل مشکلات کنکور اظهار داشت که هر سال تعداد زیادی کتاب‌های تستی منتشر می‌شود که ارزش علمی ـ آموزشی ندارند.

مشکل کار در کجاست و راه‌حل چیست؟ در این راستا آیا می‌توان راهی یافت و طرحی نو درانداخت که همه‌ی نظرات، هم‌جهت شوند و نتیجه، مطلوب‌ترین گردد؟

وقتی به سؤالاتی مانند سؤالات زیر، از میان سؤالات کنکور نظر می‌اندازید؛

$$\lim_{x\to -1}\frac{[x]}{\sqrt{1+x}} \;؛\; \lim_{x\to -1}\frac{x}{1+\sqrt{[-x]}} \;؛\; \lim_{x\to +1}\frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

متوجه می‌شوید که برای پاسخ‌گویی به این‌ها، نیازمند دانستن رادیکال‌ها، قدرمطلق، جزء صحیح و مقدار تقریب هستید که هر کدام دارای صد و یک نکته‌ی ریز است! چند درصد دانش‌آموزان پیش‌دانشگاهی قادر به محاسباتی از این قبیل‌اند؟

$$-|-x| \;؛\; \sqrt{|-x|} \;؛\; -\sqrt{-x} \;؛\; -\sqrt{x^2} \;؛\; \sqrt{-x^2}$$

یا می‌توانند در بازه‌ی $[-2,2)$ مقادیر توابع زیر را به‌درستی بیابند؟

$$|[x]| \;؛\; [|x|] \;؛\; \left[\frac{1}{x}\right] \;؛\; [-x] \;؛\; \left[\frac{1}{2}x\right] \;؛\; [2x] \;؛\; [x^2]$$

حتی بعضی از دانش‌آموزان در مفاهیم ساده‌ای مانند مفاهیم زیر، اشکال دارند:

$$x^2 \geq 0 \;,\; -x^2 \leq 0 \;,\; (x-a)^2 \geq 0$$

به عبارت دیگر، مفاهیم مربوط به نامساوی‌ها و نامعادلات را به‌خوبی درک نکرده‌اند.

یکی دیگر از مفاهیم مقدماتی که هنوز دانش‌آموزان در سال‌های آخر تحصیل، آن را به خوبی یاد نگرفته و عمیق درک نکرده‌اند، مفهوم «تابع» است که کلیه‌ی مطالب «حسابان» و «حساب دیفرانسیل و انتگرال» روی آن بنا می‌شود. به عبارت دیگر، آن‌ها هنوز تابع را نیاموخته می‌خواهند رفتار آن را در یک نقطه یا بازه مورد مطالعه قرار دهند و حد و پیوستگی را حساب کنند.

معمولاً مطالب مربوط به تابع در کتاب و در کلاس کم‌کم و با زبانی ساده شروع شده، ادامه پیدا می‌کند؛ لذا به نظر شاگردان مفهوم تابع، ساده و پیش‌پا افتاده است و با آن به طور سطحی برخورد می‌کنند و این منشاء همه‌ی نارسایی‌های بعدی می‌شود. دانش‌آموزان حتی در یادگیری جبر خطی و ریاضیات گسسته و احتمال نیز نیازمند درک دقیق مفهوم تابع هستند.

به طور کلی، در کتاب‌های ریاضی سال‌های اول و دوم

دبیرستان، تأکید زیادی روی مفاهیم کلیدی و پایه‌ای نشده، به‌طور ساده و مختصر از کنار آن‌ها گذشته است. اما در کتاب‌های سال‌های آخر، ناگهان مفاهیم متعدد و جدیدی ارایه می‌شود که مؤلف، آن‌ها را براساس مطالب کتاب‌های قبلی قرار داده است و چون دانش‌آموزان این مفاهیم را در کلاس‌های پایین‌تر، عمیق یاد نگرفته‌اند، ناگزیر با مطالب جدید نیز سطحی و حافظه‌ای برخورد می‌کنند و درک عمیقی از مطالب پیدا نمی‌کنند.

خلاصه‌ی بحث این که یک ناهم‌آهنگی بین کتاب‌های سال‌های اول و دوم و سال آخر دبیرستان و پیش‌دانشگاهی وجود دارد، یعنی شیب مطالب دو سال آخر، هم از نظر کمیّت و هم از نظر پیچیدگی، بسیار تند می‌شود به طوری که دانش‌آموز باید $\frac{۴}{۵}$ مطالب ریاضی متوسطه را در دو سال آخر فرا بگیرد و این برای اغلب آن‌ها، کاری مشکل است. همین است که هرچه بیش‌تر می‌خوانند و تست می‌زنند، سطح نمرات کارنامه‌ی کنکور آن‌ها بالاتر نمی‌رود.

***

در سال ۱۳۵۲، دانشگاه مُومپلیه فرانسه به مسئولین اعزام دانشجو به خارج، نامه‌ای نوشت که دانشجویان ایرانی مشغول به تحصیل در این دانشگاه در ریاضی و علوم بسیار ضعیف هستند. شجاع‌الدین شفا، مسئول اعزام دانشجو به خارج، آن را جهت بررسی به وزارت آموزش و پرورش فرستاد. وزارتخانه نیز از یک عده از کارشناسان و اساتید فرانسوی دعوت کرد به تهران بیایند و از نزدیک مسئولین را در جریان امر، قرار بدهند. این جانب در آن جلسه که با حضور معاون آموزشی، مدیرکل دفتر برنامه‌ریزی، رئیس سازمان کتاب‌های درسی و کارشناسان برنامه‌ریزی و تألیف تشکیل شده بود، مشارکت داشتم. ضمن بحث‌های مختلف، مطلب به این جا رسید که متخصصین فرانسوی اظهار داشتند لازم است شما بهترین و قوی‌ترین دبیران خود را به تدریس در سال‌های اول و دوم بگمارید تا آن‌ها مفاهیم اساسی، کلیدی و پایه‌ای ریاضی، مثل نامساوی، نامعادله، قدرمطلق، جزء صحیح، رادیکال، لگاریتم و... را به خوبی به دانش‌آموزان یاد دهند. وقتی دانش‌آموز مفاهیم اولیه را خوب یاد گرفت، در سال‌های بالاتر مشکلی نخواهد داشت.

در حال حاضر، تمام نیروهای خوب و قوی ما در کلاس‌های پیش‌دانشگاهی مشغول به کار هستند و شاید توجه لازم به دبیران سال‌های اول و دوم دبیرستان نشود.

در این راستا، متأسفانه والدین هم توجه ندارند و تصورشان این است که فرزند آن‌ها تنها در سال پیش‌دانشگاهی باید برای ورود به دانشگاه آماده شود. با این طرز تفکر، فرزندان خود را در سال‌های اول و دوم به حال خود رها کرده، چندان توجهی به فعالیت درسی او ندارند و وقتی اقدام می‌کنند که در واقع دیگر خیلی دیر شده است.

یکی از کارشناسان دفتر نقل می‌کرد به اصرار یکی از دوستانش که استاد دانشگاه بوده، مجبور می‌شود چند جلسه، قبل از برگزاری امتحانات سراسری به فرزند او درس بدهد. او ضمن کار متوجه می‌شود که این دانش‌آموز حتی در بعضی از مفاهیم ریاضی دوره‌ی راهنمایی نیز مشکل دارد ولی حالا چون اسمش دانش‌آموز پیش‌دانشگاهی است باید حد و پیوستگی حساب کنند یا مشتق و انتگرال بگیرد!

مشکل دیگر کار با «تست»، عدم‌انتقال فکر پشت یک تست و تبیین هدف آموزشی آن به دانش‌آموز است. وقتی شما پای صحبت یک طراح تست سازمان سنجش می‌نشینید، او می‌گوید ما در هر تست به یک مطلب توجه داریم؛ یک تست، هوش عمومی و دقت شاگرد را می‌سنجد؛ دیگری مربوط به اطلاعات پایه در آن درس است، سومی دقت محاسبه را تعیین می‌کند و چهارمی درک یک مفهوم ریاضی را به آزمایش می‌گذارد. هیچ تستی بی‌هدف نیست؛ اگر در تدریس و کار کردن با تست‌ها نیز این نکات به دانش‌آموز یادآوری شود و او درک کند در حل این تست با چه مفهوم یا تعریف یا نحوه‌ی محاسبه‌ای روبه‌رو است، به مرور که در تست‌ها پیش می‌رود، تمام مطالب خوانده شده و مفاهیم را بررسی می‌کند و به یاد می‌آورد. در ادامه، چند مثال آورده شده است:

۱. هوش عمومی

هرگاه a، b و c سه ضلع یک مثلث باشند، کدام گزینه درست است؟

الف) $a+b<\frac{۲a+۲b+c}{۳}$ ب) $a+c<\frac{۲a+۲c+b}{۳}$

ج) $b+c<\frac{۲b+۲a+c}{۳}$ د) $a+c<\frac{۲a+۲c+۲b}{۳}$

در حل این تست، دانش‌آموز کم‌توجه، درگیر محاسبه می‌شود و وقت تلف می‌کند اما فرد باهوش، با دقت به گزینه‌ها

نگاه می‌کند می‌بیند ۳ تای نخست متشابه است و اگر یکی درست باشد دوتای دیگر هم، به همان دلیل، درست است و این نمی‌تواند جواب باشد لذا گزینه‌ی (د) را انتخاب می‌کند.

۲. اطلاعات اولیه

با فرض آن‌که انتهای قوس x، در ربع چهارم باشد؛ معادله‌ی $\sqrt{1+\sin x} - 3\sin x = 0$ دارای چند ریشه است؟

الف) یکی؛ ب) دوتا؛
ج) ۳ تا؛ د) ریشه ندارد.

در حل این تست نیز دانش‌آموز کم‌دقت دست به محاسبه می‌شود اما کسی که مفهوم سینوس و کسینوس را درک کرده باشد، بلافاصله گزینه‌ی (د) را انتخاب می‌کند چه رادیکال همیشه مثبت است و چون x در ربع چهارم است sin منفی است که با منفی بین دو جمله، مثبت می‌شود، لذا مجموع دو عدد مثبت هیچ‌وقت صفر نمی‌شود.

۳. تعریف، مفهوم و محاسبه

تابع f با ضابطه‌ی $y = -\left[-\sqrt{-x}\right]$، در $\mathbb{R}$ تعریف شده است $f(-5)$ کدام است؟ (نماد [] به معنای کوچک‌ترین جزء صحیح است)

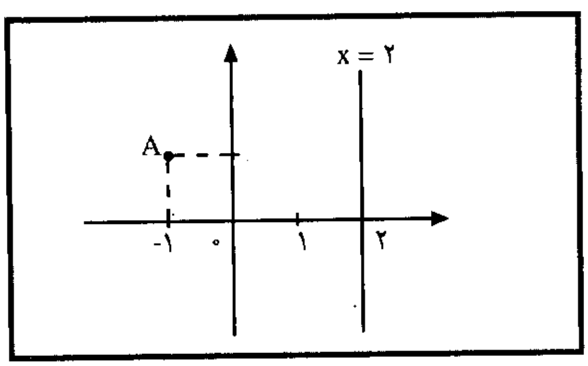
الف) ۳-؛ ب) ۲-؛ ج) ۲؛ د) ۳.

برای حل این تست دانش‌آموز باید مفاهیم «عدد منفی»، «ریشه‌ی دوم» و «جزء صحیح» را بداند. $y = -\left[-\sqrt{5}\right]$ و $\sqrt{5} \simeq 2/2$، لذا $-[-2/2] = -3$ و جواب، گزینه‌ی د است.

۴. توجه به رسم شکل

فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-1,1)$ از خط $x = 2$ کدام است؟

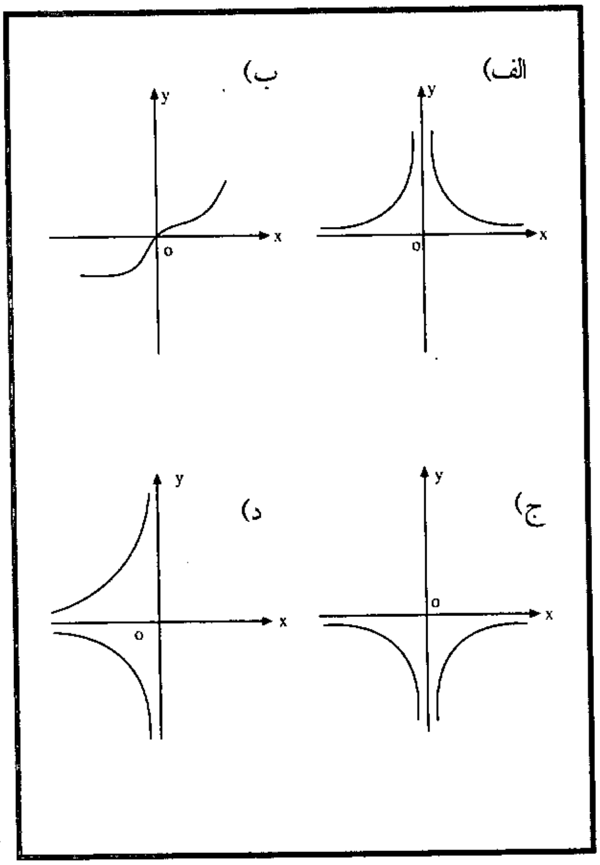
الف) ۱-؛ ب) ۱؛ ج) ۲؛ د) ۳



گاهی رسم شکل، در حل تست معجزه می‌کند. با یک نظر به شکل دانش‌آموز گزینه‌ی د را انتخاب می‌کند.

۵. دقت در شکل و مفهوم

کدام شکل نمودار **تابع نیست** (دامنه‌ی تابع، $\mathbb{R}$ است)



اگر دانش‌آموز به مفهوم تابع توجه کند، بلافاصله گزینه‌ی د را انتخاب خواهد کرد.

(این تست‌ها، از سؤالات کنکور سال‌های قبل انتخاب شده‌اند.)

اما این که آن مقام آموزشی فرمود هر سال کتاب‌های تستی فراوانی منتشر می‌شود که بی‌ارزش هستند، این گفته تام نیست. اگر کتاب همراه با مفاهیم و تعاریف دقیق ریاضی و توجیه کافی همراه باشد حتماً مفید خواهد بود.

خلاصه‌ی کلام این که به نظر می‌رسد بازار تست و کنکور، به صورت کاذب داغ است، چرا که آموزش مفهومی و عمیق ریاضی از همان سال اول دبیرستان، توانایی حل تست و فهم دروس در سال‌های بالاتر را نیز به دانش‌آموز می‌دهد!

معرفی کتاب

سپیده چمن‌آرا

تاریخ حسابان
نویسنده: کارل بنجامین بویر
مترجم: عبدالحسین مصحفی
ناشر: شرکت انتشارات علمی و فرهنگی
بهاء: ۱۵۰۰۰ ریال
تهران، ۱۳۸۴

شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، مجموعه‌ای با عنوان «مجموعه‌ی کتاب‌های تاریخ ریاضیات دبیرستانی» را به چاپ رسانده است که «تاریخ حسابان»، یکی از کتب این مجموعه می‌باشد.

«در این کتاب، در این زمینه کنکاش می‌شود که آیا حسابان، یک سره از پدیده‌های دوره‌ی نوزایی علم در کشورهای اروپایی است یا این که آن هم ریشه در ریاضیات دوران کهن دارد؟ و در دوره‌ی نوزایی هم، آیا جهشی سر درآورده یا رویشی و گام به گام پا گرفته و گسترش یافته است؟ در ریاضیات تمدن‌های باستانی مصر، بین‌النهرین و یونان، سرنخ‌هایی به‌دست می‌آید؛ قاعده‌ی افناء ائودوکسوس و روش مساحت‌یابیِ ارشمیدس، سرچشمه و پایه‌ی کار شناخته می‌شوند. در دوره‌ی نوزایی و پسامد آن هم، گام‌های بنیادی که در راستای پیشرفت‌های حسابان و در زمینه‌ی گسترش آن به شاخه‌های جدید برداشته شده‌اند گوشزد می‌شوند. کتاب، نُه عنوان اصلی و بیست و سه پیوست آموزنده‌تر را در بر دارد؛ پیوست‌ها را ریاضی‌دانانی غیر از مؤلف نگاشته‌اند.»

نویسنده، بررسی تاریخ حسابان را، در پیشگفتار کتاب، چنین آغاز می‌کند:

«در زبان انگلیسی، سه فعل با مصدرهای to calculate، (to compute (=to count و to reckon معنی‌هایی همسان دارند و هر سه، مفهومی مربوط به پردازش‌هایی، عددی را می‌رسانند. با توجه به ریشه و معنی معمولی این سه فعل، دو تای آخری ارتباطی تنگاتنگ با پردازش‌های ذهنی دارند. در برابر اولی نشانه از پردازش‌هایی دارد که نه با به کار انداختن اندیشه، بلکه با به کار بردن دست انجام می‌گرفته‌اند، چنان که «to calculate» در دورانی اصطلاحی بوده است برای «محاسبه‌ی به کمک سنگریزه‌ها». واژه‌ی «calculus» هم برگرفته از واژه‌ی لاتینی «cals» به معنی «سنگ» است و در نوشتارهای پزشکی هنوز هم آن را به همان معنی تحت‌اللفظی سنگ به‌کار می‌برند؛ نمونه‌اش این که از بیمار گرفتار سنگ کلیه با اصطلاح «a calculus person» یاد می‌کنند.

از رویدادهای ریشخندآمیز تاریخ این که واژه‌ی «calculus» به معنی سنگ، یک‌باره ارتقای معنی یافت و برچسبی پابرجا شد برای بخشی از ریاضیات که تفکر و اندیشه‌گری همه‌سویه‌ای در حد عالی‌ترین درجه از دقت و توان‌مندی ذهنی را لازم دارد. برای آنان که «calculus» را به همان مفهوم برآوردن نیازهای محاسبه‌ای به کمک سنگریزه‌ها می‌شناخته‌اند عکس‌العملی طبیعی بوده است که آن را در موضع جدید نابجا و بی‌مورد بدانند و اهمیت موضوع برایشان پرسش‌برانگیز باشد.»

پس از مروری بر ریشه‌ی واژه، «ایده‌های اولیه در دوره‌ی باستان» را در نخستین بخش کتاب، چنین می‌خوانیم:

«حسابان، به صورت رسمی، در سده‌ی هفدهم میلادی پا گرفته و به‌کار رفته است. اما مسأله‌هایی که خاستگاه و باعث رشد حسابان بوده‌اند به بیش از هفده سده‌ی پیش از میلاد متعلقند. کهن‌ترین مدرک‌ها مربوط به کشورهای باستانی مصر و بابل است. در دست‌نوشته‌های به‌خط هیروگلیف و در لوح‌های به خط میخی بر‌جای مانده از گذشته‌های این دو کشور، مسأله‌هایی در زمینه‌ی اندازه‌گیری مساحت و محیط شکل‌هایی مستقیم‌الخط و منحنی‌الخط به چشم می‌خورد که روش‌های به‌کار رفته در آن‌ها با حوزه‌ی عمل حسابان سازگاری دارد. اما از دیدگاه یونانیان باستان (= پیش‌هلنی‌ها)، این مسأله‌ها به دو دلیل عمده نمایانگر ریاضیاتی‌اند که به جوجه‌ای تازه سر از تخم درآورده می‌ماند و تا رسیدن به رشد کامل راهی دراز در پیش دارد: یکی این که وجه تمایز جواب‌های دقیق و

جواب‌های تقریبی در آن‌ها مشخص نیست و دیگری این که بدون استنتاج‌های منطق قیاسی بیان شده‌اند.

پاپیروس ریند در حدود ۱۶۵۰ سال پیش از میلاد به دست کاهنی به نام «احمس» یا «احموس» نگاشته شده است. بنابر آن‌چه در این پاپیروس آمده، مصری‌ها به درستی دریافته بودند که حجم هرم قائم با قاعده‌ی مربع برابر است با یک سوم حجم منشور قائمی که در قاعده و در ارتفاع با آن هرم برابر باشد. در این باره هیچ گونه برهانی بیان نشده است، و بنابر آن‌چه در سده‌ی کنونی ثابت کرده‌اند، مقایسه‌ای است که مگر با بهره‌گیری از حساب بی‌نهایت کوچک‌ها، یعنی بدون به‌کار بردن حسابان، اثبات کاملاً دقیق آن ممکن نیست. از پیش‌هلنی‌ها، که برای شکل‌های ساده‌ی مستقیم‌الخط چنین مقایسه‌ای را به علت نامستدل بودن نمی‌پذیرفته‌اند، نمی‌توان انتظار داشت برای شکل‌های منحنی‌الخط روشی غیر از این داشته باشند. برای نمونه، احمس مساحت دایره را برابر با مساحت مربعی می‌دانسته است که نسبت ضلع آن به قطره دایره برابر با نسبت ۸ به ۹ باشد. از این تناسب، مقدار تقریبی ۳/۱۶ برای عدد π به دست می‌آید که برای محاسبه‌ها تقریب نامناسبی نیست. با این همه، عددی ده‌دهی که به یکی از رقم‌ها گرد شده و مقداری تقریبی از π را نشان دهد، حتی اگر سازه‌ی شایسته و کارآمدی برای به نتیجه رساندن محاسبه‌های عددی شناخته شود، در ریاضیات سطح بالای یک تمدن، اندازه‌ای معتبر و پذیرفتنی به شمار نمی‌آید. اگر مصری‌ها توانسته بودند ثابت کنند از دو روشی که برای محاسبه‌ی مساحت دایره و برای محاسبه‌ی حجم هرم به دست داده‌اند یکمی دقیق نیست و دومی کاملاً دقیق است، یکی از مهم‌ترین کارها را انجام داده بودند.

تمدن کهن دیگر، تمدن بابلی، در دره‌ی میان‌دورود (= بین‌النهرین) پا گرفته و ریاضیات آن در سطحی عالی‌تر از ریاضیات مصری‌ها بوده است، اما دو ایراد پیش‌تر گفته‌شده‌ی وارد بر ریاضیات مصری‌ها بر ریاضیات بابلی‌ها هم وارد بود. در سده‌ی هفدهم پیش از میلاد، و زودتر از آن، بابلی‌ها برای حل مسأله‌های کاربردی در زمینه‌های گوناگون، از جمله در زمینه‌ی رابطه‌های اندازه‌ای شکل‌ها، جبری و ویژه و برآورنده‌ی خواست‌های خود را به‌کار می‌برده‌اند. آنان قضیه‌ی *فیثاغورس* را می‌دانسته‌اند و اندازه‌ی قطر مربع به ضلع یک را برابر با عددی به‌دست آورده بودند که عدد ده‌دهی معادل آن تا رقم ششم پس از ممیز دقیق بوده است. آن‌ها مساحت دایره را عموماً سه برابر توان دوم شعاع می‌پذیرفته‌اند، اما دست‌کم در یک مورد، مقدار تقریبی بهتر $3\frac{1}{8}$ را به جای π به‌کار برده‌اند. اما حتی بابلی‌ها هم برای بازشناسی جواب دقیق و جواب تقریبی از یکدیگر معیاری نداشته‌اند.

بابلی‌ها برای به‌دست آوردن ریشه‌ی دوم یک عدد (گویا و مثبت) گونه‌ای الگوریتم از سرگیری (= روش تکرار) را به‌کار می‌برده‌اند و می‌توان گفت که این شیوه‌ی عمل، سروکار بسیار نزدیکی با حسابان داشته‌اند.

بابلی‌ها، اگر به طریقی دانسته بودند یا نشان داده بودند که این فرایند پایان ندارد، شایسته‌ی این افتخار بودند که ارائه‌دهنده‌ی مفهوم دنباله‌های نامتناهی شناخته شوند، مفهومی که بخشی بنیادی از حسابان جدید را تشکیل می‌دهد. اما مهارت بابلی‌ها در جبر، تنها جنبه‌ی کاربردی داشت و از جور کردن منطقی رابطه‌ها برکنار بود. از این رو، زمینه فراهم آمده بود تا افتخار طرح‌ریزی حسابان به آن ملت از دوران کهن تعلق گیرد که منطقی کردن بحث در هر زمینه‌ای برایشان شور و شوقی واقعی در پی داشت.»

مطالعه‌ی این کتاب را به همه‌ی معلمان ریاضی، به ویژه معلمانی که دروس «حسابان» و «حساب دیفرانسیل و انتگرال» را تدریس می‌کنند، توصیه می‌کنیم.

راه‌حل‌های ارایه شده برای مسایل چالش برانگیز شماره‌ی ۸۶

پس از چاپ مسایل چالش برانگیز در شماره‌ی ۸۶ مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، تعداد زیادی از خوانندگان مجله، پاسخ‌هایی را برای این مسایل به دفتر مجله ارسال کردند.

در میان پاسخ‌های ارایه شده برای مسأله‌ی (۱)، راه‌حل آقای یوسف احمدی از بابل، بهترین راه‌حل بود. آقایان علی‌اکبر جاویدمهر، از ساوه؛ بهروز عرب‌فیروزجائی، از خورش رستم خلخال؛ رضا محمدزاده‌ی خانی، از بجنورد؛ و یعقوب نعمتی، از هشتجین نیز درست است. به غیر از آقای محمدزاده‌ی خانی، دیگر دوستان از دستور هورنر (البته بدون اثبات) استفاده کرده بودند.

در پاسخ‌های ارایه شده برای مسأله‌ی (۲) نیز راه‌حل آقای یوسف احمدی، بهترین راه‌حل تشخیص داده شد. راه‌حل آقای بهروز عرب‌فیروزجائی نیز بسیار شبیه به راه‌حل ایشان است. خانم مریم فرزانفرد، از استان تهران؛ و آقای رضا محمدزاده‌ی خانی، از بجنورد نیز راه‌حل‌های درستی ارایه داده بودند.

برای مسأله‌ی (۳) هنوز هیچ پاسخی ارسال نشده است و مسأله‌ی (۴) را تنها خانم لیلا بهاءالدینی، از سیرجان، حل کرده‌اند که پاسخ ایشان، ناقص به نظر می‌رسد.

ضمن تشکر از همه‌ی خوانندگانی که برای ما این پاسخ‌ها را ارسال کرده‌اند، پاسخ مسایل (۱) و (۲) را به قلم آقای یوسف احمدی در زیر می‌خوانیم:

حل مسأله ۱: فرض کنیم عدد گویای $r=\frac{a}{b}$ که در آن $b\in Z$ و a و $(a,b)=1$ و $b\neq 0$، صفر چندجمله‌ای $p(x)$ باشد یعنی $p(r)=0$ در نتیجه

$$c_n\frac{a^n}{b^n}+c_{n-1}\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}+\cdots+c_1\frac{a}{b}+c_0=0$$

$$\xrightarrow{b^n}\underbrace{c_na^n+c_{n-1}a^{n-1}b+\cdots+c_{n-k-1}a^{n-k+1}b^{k-1}}_{A_k}$$

$$+\underbrace{c_{n-k}a^{n-k}b^k+\cdots+c_1ab^{n-1}+c_0b^n}_{B_k}=0$$

$$\begin{matrix}b^k|B_k\\ b^k|0=A_k+B_k\end{matrix}\Rightarrow b^k|A_k=a^{n-k}(c_na^k+c_{n-1}a^{k-1}b+\cdots+c_{n-k+1}ab^{k-1})$$

(اگر $(a,b)=1$ آن‌گاه $(a^n,b^m)=1$ و اگر $a|b\times c$ و $(a,b)=1$ آن‌گاه $a|c$)

$$\Rightarrow b^k\left|c_na^k+c_{n-1}a^{k-1}b+\cdots+c_{n-k+1}ab^{k-1}\right.$$

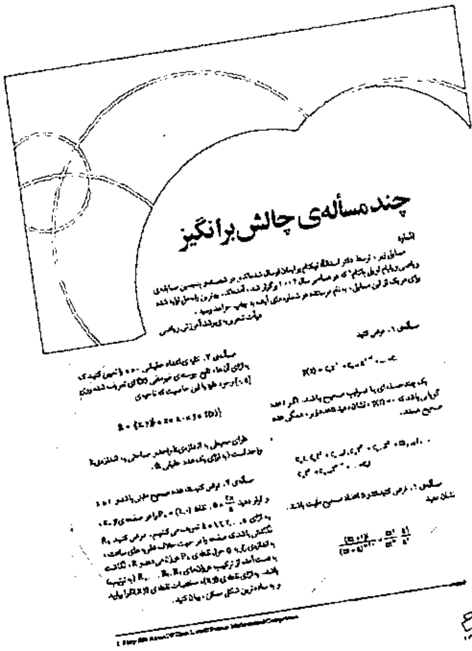
$$\Rightarrow \frac{c_na^k+c_{n-1}a^{k-1}b+\cdots+c_{n-k+1}ab^{k-1}}{b^k}\in Z$$

پس از تفکیک

$$\Rightarrow \underbrace{c_nr^k+c_{n-1}r^{k-1}+\cdots+c_{n-k+1}r}\in Z$$

که این همان kامین عدد داده شده در حکم است.

$(1\leq k\leq n)$



حل مسأله ۲ :

$$\frac{(m+1)!}{(m+n)^{m+n}} < \frac{m!}{m^m} \times \frac{n!}{n^n} \Leftrightarrow (m+1) < n!(\frac{(m+n)^{m+n}}{m^m \times n^n})$$

$$\Leftrightarrow m+1 < n!(\frac{(m+n)^m}{m^m} \times \frac{(m+n)^n}{n^n})$$

$$\Leftrightarrow m+1 < n!\left((1+\frac{n}{m})^m \times (1+\frac{m}{n})^n\right)$$

اما بنابه نامساوی برنولی که : $(1+a)^n \geq 1+na$ $(1+a \geq 0)$ داریم

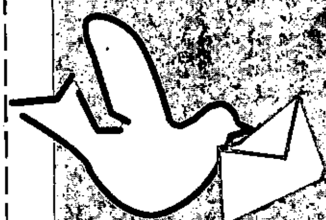
$$\text{طرف دوم} = n!(1+\frac{n}{m})^m \times (1+\frac{m}{n})^n \geq n!$$

$$\times (1+\frac{n}{m} \times m)(1+\frac{m}{n} \times n)$$

$$= (n+1)!(m+1)$$

پس کافی است $(n+1)!(m+1) > m+1$ که با توجه به طبیعی بودن m و n بدیهی است .

نامه های رسیده



... [illegible]

محمد آزاد عبدالله پور، از مهاباد؛
سید اسماعیل میرکاظمی؛
... کاظمی و زهره نوربخش ، از اصفهان؛
محمد هادی حجازی، از ایلام؛
... گیوه چی ، از باوه؛
بهنام رزاق منشی ، از تالش ؛
علی اکبر جاوید مهر، از قم ؛
لیلا قاسمی ، از آمل ؛
دکتر محمدرضا درفشه ، از تهران .

IN THE NAME OF GOD
Ministry of Education
Organization of Research& Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office
Roshd
Mathematics Education Journal 89
Vol. 25 No. 1 2007 ISSN: 1606 - 9188

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585
E-mail: info@roshdmag.ir
roshd_riazi@yahoo.com


نهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران
9th Iranian Mathematics Education Conference
8-10 September 2007
زاهدان ۱۷ الی ۱۹ شهریور ۸۶
برگزار کنندگان :
دفتر آموزش و ارتقای مهارتهای حرفه ای تربیت معلم وزارت آموزش و پرورش
سازمان آموزش و پرورش استان سیستان و بلوچستان
دانشگاه سیستان و بلوچستان
انجمن علمی و آموزشی معلمان ریاضی استان سیستان و بلوچستان
با همکاری :
استانداری استان سیستان و بلوچستان
انجمن ریاضی ایران
انجمن آمار ایران
اتحادیه انجمن های علمی آموزشی معلمان ریاضی ایران
شورای خانه های ریاضیات ایران
محل برگزاری :
زاهدان - دانشگاه سیستان و بلوچستان - تالار فردوسی
Web Site: Http://www.imec9sb.com
E-mail: imec9@imec9sb.com


2007, THE 800th
ANNIVERSARY OF JALAL EDIN RUMI (MOWLANA)
هشتصدمین
سال تولد
مولانا
EDIN RUMI (MOWLANA)