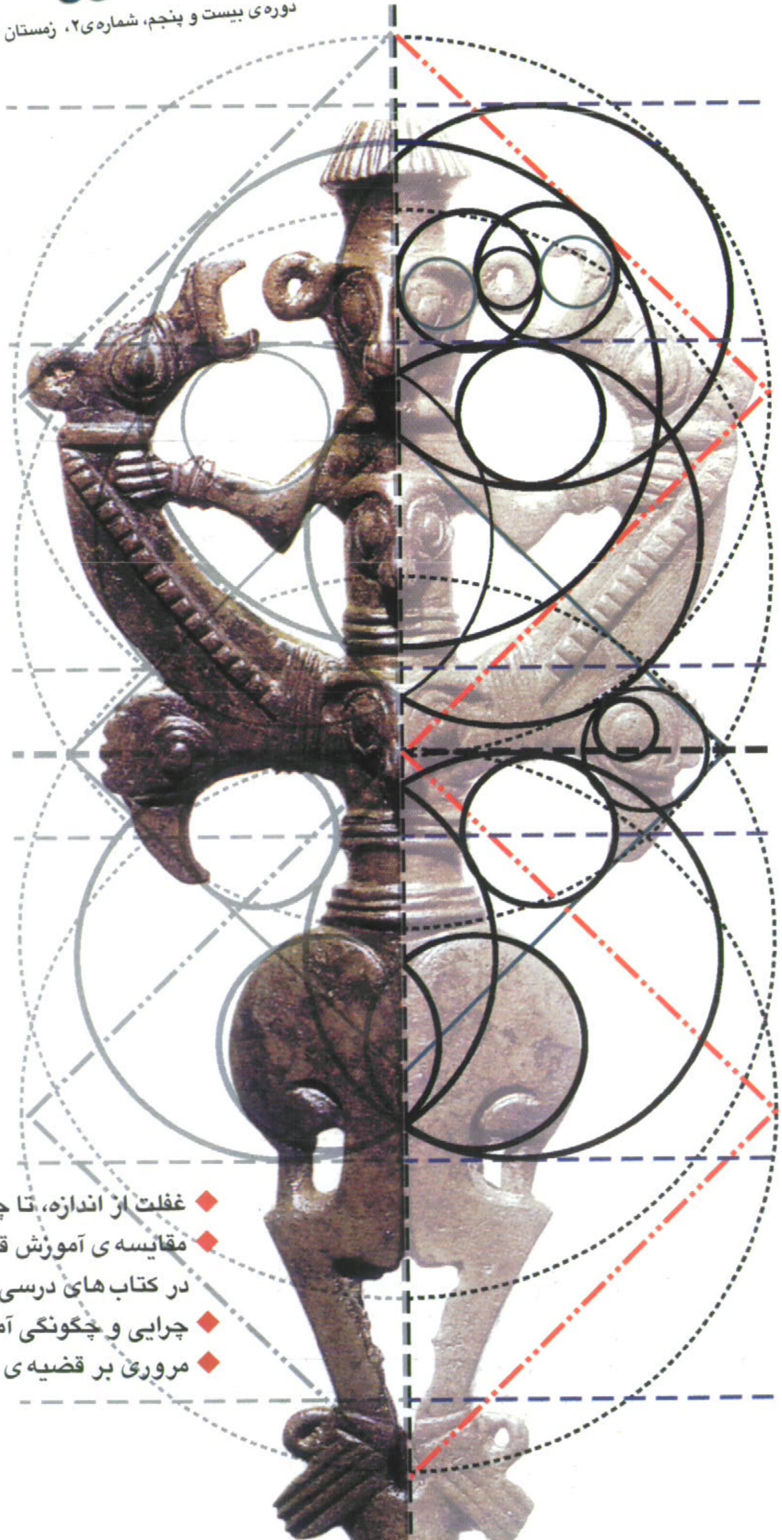
ویژه‌نامه‌ی هندسه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.ir

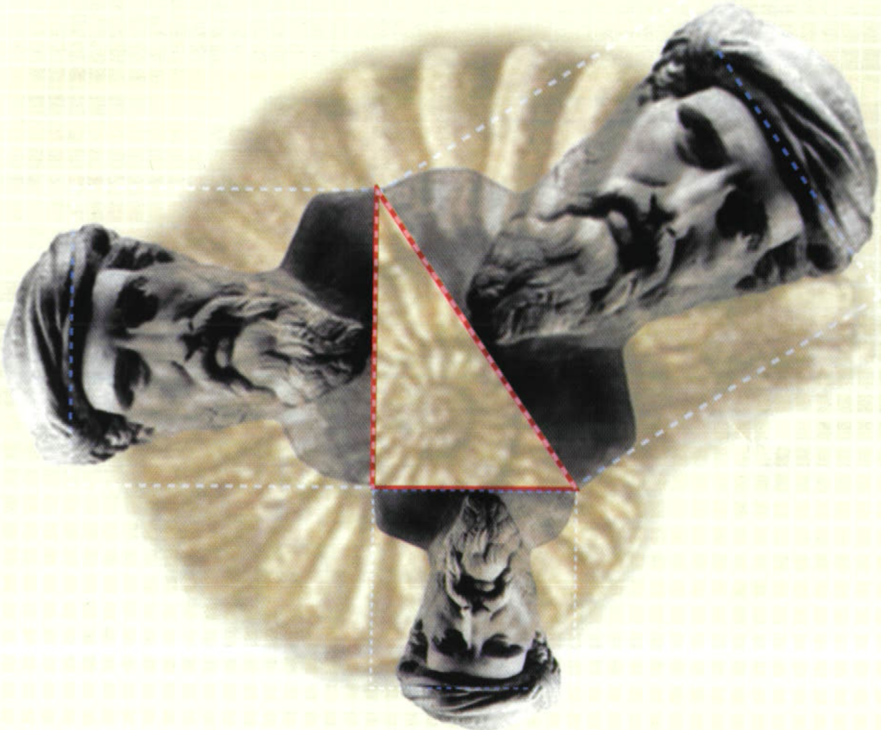
آموزشی-تحلیلی-اطلاع رسانی

رشد آموزش ریاضی ۹۰

دوره‌ی بیست و پنجم، شماره‌ی۲، زمستان ۱۳۸۶، بها: ۳۵۰۰ ریال



- غفلت از اندازه، تا چه اندازه؟!
- مقایسه‌ی آموزش قضیه‌ی تالس در کتاب‌های درسی ریاضی ایران و فرانسه
- چرایی و چگونگی آموزش هندسه
- مروری بر قضیه‌ی فیثاغورس



مجسمه ی فیثاغورس در زادگاهش جزیره ی ساموس

بسم الله الرحمن الرحیم

آموزشی - تحلیلی - اطلاع رسانی
www.roshdmag.ir

رشد آموزش ریاضی ۹۰

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

دوره ی بیست و پنجم، شماره ی ۲، زمستان ۱۳۸۶

مجله ی رشد آموزش ریاضی نوشته ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم وتربیت، به ویژه معلمان دوره های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه ی مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیأت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می تواند سفارش ترجمه ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویس ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره ی صفحه ی مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از موضوع مطلب ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.

هم چنین:

- مطالب مندرج در مجله، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسئولیت پاسخگویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است.
- مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی شود.

مدیر مسئول: علیرضا حاجیان زاده
سردبیر: زهرا گویا
مدیر داخلی: سپیده چمن آرا
اعضای هیات تحریریه: اسماعیل بابلیان، میرزا جلیلی، سپیده چمن آرا، مهدی رجبعلی پور، مانی رضائی، شیوا زمانی، بیژن ظهوری زنگنه، سهیلا غلام آزاد و محمد رضا فدائی
طراح گرافیک: مهسا قبایی

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن دفتر مجله: ۹ - ۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۲۷۰ - ۲۷۴)
E-mail:info@roshdmag.ir
پیام گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲-۸۸۸۳۹۲۳۲
مدیر مسئول: ۱۰۲
دفتر مجله: ۱۱۳
امور مشترکین: ۱۱۴

چاپ: شرکت افست (سهامی عام)
شمارگان: ۲۵۰۰۰

یادداشت سردبیر

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی در خدمت

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، نشریه‌ای است که اهداف اصلی آن، ارتقای آموزش ریاضی مدرسه‌ای از طریق بسترسازی برای توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان ریاضی، زمینه‌سازی برای اجرای بهتر برنامه‌ی درسی ریاضی موجود و ترسیم چشم‌انداز برای تغییرات مطلوب در برنامه‌ی درسی ریاضی است.

مباحث برنامه‌ی درسی بر روی طیف گسترده‌ای قرار دارد. از یک سو این مباحث، برنامه‌ی درسی را عمدتاً موضوع و محتوای درسی می‌بیند و عناصر برنامه را محدود به هدف و محتوا و روش و ارزشیابی می‌داند. هرچه روی این طیف گسترده حرکت می‌کنیم، عناصر تشکیل دهنده‌ی برنامه‌ی درسی بیش‌تر می‌شوند. به طور نمونه، از نظر کلاین برنامه‌ی درسی از نُه عنصر هدف‌ها، محتوا، فعالیت‌های یادگیری، روش‌های تدریس، مواد و منابع یادگیری، ارزشیابی، زمان، فضا و گروه‌بندی تشکیل می‌یابد. این حرکت تا جایی ادامه دارد که آموزش معلمان، آموزش‌های فوق‌برنامه، عوامل انگیزشی، عوامل فرهنگی و اجتماعی، آموزش والدین و هرچه و هرچه که به نوعی بر جریان یاددهی ـ یادگیری و کسب تجارب یادگیری توسط یادگیرنده تأثیر می‌گذارد نیز، از اجزای تشکیل دهنده‌ی برنامه‌ی درسی به حساب می‌آیند.

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، با درنظر گرفتن طیف وسیع تعبیرها و تفسیرهای مختلف برنامه‌ی درسی، تلاش نموده تا با پرهیز از افتادن در دام افراط و تفریط، تعبیر منطقی از برنامه‌ی درسی را به عنوان یک چارچوب عملی، راهنمای کار خود قرار دهد. چارچوبی که با برداشت‌های شهودی جامعه‌ی آموزشی سازگار باشد و نگاه متعادل‌تر و واقع بینانه‌تری نسبت به برنامه‌ی درسی داشته باشد. در این راستا، هیأت تحریریه‌ی مجله تلاش نموده است تا علاوه بر ارایه‌ی راهکارهای متکی بر یافته‌های پژوهشی و تجربیات ارزشمند معلمان ریاضی برای اجرای بهتر برنامه‌ی درسی موجود، افق‌هایی را ترسیم نماید تا امکان دوباره‌نگری‌های ضروری و جرح و تعدیل‌های به‌جا و به‌موقع و حتی تغییرات احتمالی ضروری را نیز فراهم کند. به همین دلیل، برای تنظیم محتوای هر شماره‌ی مجله، چند نکته مورد توجه قرار می‌گیرند که رعایت آن‌ها به نوعی، تعیین‌کننده‌ی حدود و ثغور محتوای مجله است. مهم‌ترین این نکات، به قرار زیرند که برای هریک، از محتوای چهار شماره‌ی مجله در سال ۱۳۸۶ مثال آورده می‌شود و در واقع این مثال‌ها، به نوعی تحلیل محتوای این چهار شماره محسوب می‌شوند:

۱. **تعمیق مبانی نظری**: توجه به مبانی نظری هر حوزه، یک ضرورت است. به طور مثال، طرح سؤالاتی مربوط به چیستی ریاضی (آیا دانش ریاضی ذاتی است)، چگونگی ساخت و ساز مفاهیم ریاضی (چرخه‌ی بنیادین ساخت مفهوم)، آموزش معلمان (ویژگی‌های آموزش معلمان ریاضی) و مبانی برنامه ریزی درسی (اصول و استانداردهای NCTM) از جمله مباحثی هستند که در حوزه‌ی نظری آموزش ریاضی، می‌توانند مورد توجه قرار گیرند.

۲. **رفع نیازهای موضوعی معلمان ریاضی**: معلمان برای تدریس روزانه‌ی خود، نیازمند حمایت می‌باشند تا با آرامش بیش‌تر، هدایت‌گر جریان یاددهی ـ یادگیری در کلاس درس باشند. طبیعی است که موضوعات ریاضی مطرح شده در مجله با محتوای برنامه درسی ریاضی موجود سازگار است که به طور مثال، می‌توان به مقاله‌های «قواعد بخش‌پذیری»، «اثبات بدون کلام»، «پیوستگی و مشتق‌پذیری توابع بدرفتار» اشاره کرد.

۳. **رفع نیازهای روشی معلمان ریاضی**: معلمان، مجریان

برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای

اصلی برنامه / کتاب درسی هستند و با توجه به تنوع مخاطبی که دارند، نیازمند آشنایی با روش‌های تدریس مختلف می‌باشند؛ به‌خصوص، روش‌هایی که حاصل تحقیقات انجام شده در رابطه با چگونگی تدریس مباحث و موضوع‌های ریاضی موجود در برنامه‌ی درسی است. برای مثال، مقاله‌های «کارگاه‌های ریاضی در دبستان»، «قضیه‌ی فیثاغورس»، «یک تجربه‌ی موفق در تدریس مفهوم حد»، «رابطه‌ی محیط دایره در پنجم ابتدایی»، و «تفکر نقادانه، استدلال و...» از این مقوله‌اند.

۴. ایجاد نگاه محققانه در معلمان: از طریق آشنا کردن آن‌ها با تحقیقات انجام شده در حوزه‌ی آموزش ریاضی و شناخت مباحث تحقیق‌پذیر در آن. برای این منظور، مقاله‌هایی مانند «آموزش حسابان...»، «ریاضیات اصل موضوعی...»، «محققین تازه‌کار...» و «موضوعات مطالعاتی...» در اختیار علاقه‌مندان قرار گرفته‌اند.

۵. تبادل تجربه‌های معلمان و اشاعه‌ی تفکر معلم‌پژوهنده: ستون «روایت معلمان» به این قصد طراحی شده تا امکان تبادل تجارب ارزشمند معلمان ریاضی را فراهم آورد. این تجارب، از واقعیت کلاس درس کسب شده‌اند و با سهیم کردن سایر معلمان، این تجارب، قابلیت نقد پیدا کرده و شانس تبدیل شدن به یک تحقیق را پیدا می‌کنند.

۶. ایجاد بستری مناسب برای طرح نظرات معلمان: هدف از ایجاد ستون «دیدگاه»، شنیدن نظرات معلمان و فراهم آوردن فرصت مناسب برای بازتاب بر آن‌ها و نقد آن نظرات توسط خوانندگان آن‌هاست.

۷. اطلاع‌رسانی: این بخش، شامل «گزارش»، «خبر»، «معرفی کتاب» و اعلام «نامه‌های رسیده» است که هر یک، هدف خاصی را دنبال می‌کنند. مثلاً، «گزارش»ها نشان می‌دهند که کنفرانس‌ها و گردهمایی‌های برگزار شده چه کمیت و کیفیتی داشته‌اند و مخاطب خواننده از طریق آن‌ها، ممکن است که کنجکاو و یا علاقه‌مند شود تا **گزارش** مربوط به مقالات آن کنفرانس‌ها را مطالعه کند و ترغیب شود که در سال‌های آتی، خود نیز، یکی از شرکت‌کنندگان فعال آن کنفرانس‌ها شود. هم‌چنین، شنیدن «خبر»های مربوط به حوزه به چند طریق، می‌توانند مفید واقع شوند؛ یکی این که باعث بالا رفتن سطح انتظارات علمی ـ آموزشی معلمان از خود می‌شوند، دوم، احساس تعلق به یک جامعه‌ی حرفه‌ای را در معلمان تقویت می‌کنند، سوم سطح آگاهی معلمان را نسبت به گوناگونی و ویژگی‌های جامعه‌ی آموزشی، ارتقا می‌بخشند. علاوه بر خبر، «معرفی کتاب» نیز می‌تواند معلمان را با تازه‌های نشر مرتبط با حوزه‌ی تدریسی خود آشنا کند. بالاخره، «نامه‌های رسیده»، یک پل ارتباطی بین خوانندگان مجله با هیأت تحریریه است که نشان‌دهنده‌ی گسترش کمّی و کیفی خوانندگان نیز هست. این بخش نشان می‌دهد که مجله، مخاطبان خود را در دورترین نقاط این سرزمین پهناور یافته و توانسته با آن‌ها رابطه‌ی علمی برقرار کند.

همان‌طور که اشاره شد، این‌ها تنها نمونه‌ای از ترکیب محتوا در چهار شماره‌ی مجله بود. بدیهی است که بررسی دقیق‌تر و تحلیل عمیق‌تر محتوای مجلات نیازمند یک پژوهش جدی است که آثار و برکات ارزشمندی برای جامعه‌ی آموزشی خواهد داشت. در هر صورت، توجه به آن‌چه که هست و بسترسازی برای حرکت به سمت افق‌های روشن‌تر، از جمله اصول موضوع مجله‌ی رشد آموزش ریاضی هستند و امید است که با همکاری بیش‌تر خوانندگان عزیز، بتوان گام‌های بلندتری در راستای اعتلای آموزش ریاضی در ایران برداشت.

غفلت از اندازه تا چه اندازه؟!

زهرا گویا، دانشکده ی ریاضی دانشگاه شهید بهشتی
لیلا قدکساز خسروشاهی، کارشناسی ارشد آموزش ریاضی و معلم ریاضی شهرری

«اندازه گیری، سومین فعالیت جهانی و مهم برای توسعه ی ایده های ریاضی است و با مقایسه کردن، مرتب کردن و کمّی کردن کیفیت ها سروکار دارد که همگی، ارزشمند و مهم هستند» (بیشاپ[1]، ۱۹۹۸). در این مقاله، به طور خلاصه، به اهمیت اندازه گیری و دلایل لزوم وجود آن در برنامه ی درسی ریاضی مدرسه ای می پردازیم.

کاربرد اندازه گیری در زندگی روزمره

بیش تر اعدادی که در زندگی روزمره ی خود با آن ها مواجه می شویم، اندازه ها هستند. فاصله ی بین دو شهر، دمای محیط اطراف، گنجایش ظرف، جرم مواد خوراکی، سرعت اتومبیل، زمانی که برای رفتن از خانه به محل کار لازم است و نظایر این ها، همگی مثال هایی از «اندازه»های متنوعی هستند که روزانه با آن ها سروکار داریم.

به گفته ی بایز و دمور[2] (۲۰۰۵)، اندازه گیری، مرتب کردن جهان اطراف با استفاده از اعداد است و به وسیله ی آن، می توان جهان اطراف را بهتر کنترل کرد. شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا[3] (NCTM, 2000) نیز در استانداردهای ریاضیات مدرسه ای خود، اندازه گیری را نسبت دادن یک مقدار عددی به یک خصیصه مانند طول یک مداد، فاصله ی زمین تا ماه، جرم یک دانه ی لوبیا و مانند این ها می داند.

با این حال، اندازه گیری، محدود به کمّی کردن کیفیت های فیزیکی نمی شود. طبق اظهار بایز و دمور (۲۰۰۵)، شورای ملی معلمان ریاضی امریکا (NCTM, 2000) و فی[4] (۱۹۹۰)، از شروع قرن گذشته، اندازه گیری از پدیده های علوم طبیعی فراتر رفت و به تدریج، دانشمندان علوم اجتماعی و سیاسی، روان شناسان، اقتصاددانان، آموزشگران، آماردانان و جامعه شناسان، اندازه های متنوع و روش های اندازه گیری مختلفی را برای توصیف ویژگی های رخ دادها و موقعیت های مختلف ابداع کردند که در نتیجه، این علوم قابلیت تحقیق پذیری و امکان توسعه ی بیش تر را یافتند. برخی از این اندازه ها، آن قدر در زندگی روزمره نفوذ کرده اند که داشتن فهمی صحیح از آن ها، برای هر شهروند آگاه و مسئول، لازم است. نمره های بهره ی هوشی (IQ)، میزان آلودگی هوا، میزان فقر و نرخ سود بانکی، همگی نمونه هایی از این اندازه ها هستند. به گفته ی فی (۱۹۹۰) و شورای ملی معلمان ریاضی امریکا (NCTM, 2000)، مفاهیم و روش های اندازه گیری، یکی از مؤلفه های اصلی سواد عددی[5] و سواد شهروندی بوده و به این ترتیب، لازم است که در برنامه های رسمی آموزش عمومی ریاضی ـ از پیش دبستانی تا پایان دبیرستان ـ لحاظ شود. فی (۱۹۹۰) در توضیح این مطلب، ابراز می دارد که اندازه گیری مانند محاسبات، آن قدر در ریاضیات مدرسه ای آشنا و دارای سابقه ی طولانی است که درباره ی لزوم وجود آن، به سختی می توان شک کرد. یکی از علت های این آشنایی و سابقه ی طولانی این است که کودکان، حتی در سنین پیش از دبستان، با وجود این که چیزی راجع به واحدهای استاندارد نمی دانند، دانشی غیر رسمی از اندازه دارند.

زیرا با استناد به تعریف پیاژه (نقل شده در کمپبل[۶]، ۱۹۹۰)، که اندازه گرفتن را بیرون کشیدن یک جزء به نام واحد از یک کل و سپس جابه‌جا کردن این واحد بر باقیمانده‌ی آن کل می‌داند، درمی‌یابیم که کودکان در زندگی واقعی خود، دارای تجارب اندازه‌گیری متعدد و متنوعی هستند.

در «چارچوبی برای آموزش سواد عددی به بزرگ‌سالان» نیز آمده است که چون اندازه‌گیری، معمولاً در بسیاری زمینه‌ها به کار می‌رود، بسیاری از یادگیرندگان، اعتماد به نفس زیادی در مهارت‌های اندازه‌گیری دارند. بنابراین بهتر است که آموزش اندازه‌گیری از نقاط قوت یادگیرندگان شروع شود و برای آن‌ها فرصت‌هایی را به منظور ایجاد ارتباط بین تدریس و موقعیت‌های زندگی روزمره ایجاد کند (باکستر[۷] و همکاران، ۲۰۰۶).

مفهوم‌سازی عدد در دوران کودکی

به اعتقاد کمپبل (۱۹۹۰)، علاوه بر اهمیت کاربردهایی که اندازه‌گیری در زندگی روزمره دارد، یکی دیگر از ضرورت‌های تأکید بر آموزش اندازه‌گیری در سنین کودکی، اهمیت مفهوم‌سازی عدد[۸] در دوران کودکی است. زیرا مفهوم عدد، با مفهوم اندازه گره خورده است. بایز و دمور (۲۰۰۵) نیز با تأیید این جنبه از اندازه‌گیری، ایجاد بصیرت نسبت به اعداد، نسبت به جایگاه اعداد روی محور و نسبت به محیطی که اعداد در آن قرار دارند را مستلزم به دست آوردن بینش صحیحی از اندازه‌گیری در افراد می‌دانند. از این گذشته، آن‌ها اندازه‌گیری را برای شاخه‌های دیگر ریاضی نیز مفید می‌دانند. مثلاً دانش اندازه‌گیری باعث می‌شود کودکان، محاسبات را بهتر تخمین زده و اعداد اعشاری را بهتر درک کنند.

علاوه بر این، یکی از روش‌های آموزش مفاهیم ریاضی، استفاده از اندازه‌گیری به جای استفاده از مجموعه‌ها است؛ مثلاً به جای این که اعداد را با شمردن مقادیر گسسته آموزش دهیم، با اندازه‌های پیوسته متناظر کنیم. واگنر[۹] و همکاران (۱۹۷۶)، در مطالعه‌ای مقایسه‌ای که روی دو گروه از دانش‌آموزان پایه‌ی اول ابتدایی انجام دادند، نشان دادند کودکانی که ریاضی را با رویکرد اندازه‌گیری یاد گرفتند، در مباحث استاندارد ریاضی، عملکردی مشابه با کودکانی داشتند که ریاضی را به شکل استاندارد آن یعنی با رویکرد نظریه مجموعه‌ها آموختند. این در حالی است که آموزش با رویکرد اندازه‌گیری، منجر به عملکرد بهتر کودکان در زمینه‌ی اندازه‌گیری نیز شد.

ارتباط با بخش‌های دیگر درون و بیرون از ریاضی

مطالعه‌ی اندازه‌گیری، فرصتی برای یادگیری و به کاربردن بخش‌های دیگر ریاضی مانند اعمال روی اعداد، کسرها، ایده‌های هندسی، مفاهیم آماری و مفهوم تابع ایجاد می‌کند. از این گذشته، اندازه‌گیری حوزه‌ای است که هم ارتباط درونی بخش‌های مختلف ریاضی و هم ارتباط بین ریاضی و حوزه‌های خارج از آن را مانند مطالعات اجتماعی، علوم، هنر و تربیت‌بدنی، به طور شفاف بیان می‌کند (NCTM, 2000).

با چنین بصیرتی نسبت به اندازه‌گیری، شورای ملی معلمان ریاضی امریکا (NCTM, 2000) در استانداردهای ریاضی مدرسه‌ای خود، بر لزوم آموزش اندازه‌گیری در دوره‌های ابتدایی، راهنمایی و دبیرستان تأکید کرده و ابراز داشته است که «برنامه‌های آموزشی از پیش‌دبستانی تا پایه‌ی ۱۲ باید دانش‌آموزان را قادر سازد تا ویژگی‌های اندازه‌پذیر اشیا، واحدها و سیستم‌ها و فرآیندهای اندازه‌گیری را درک کرده و روش‌ها، ابزار و فرمول‌های مناسب را برای اندازه‌گیری به کار برند» (ص ۴۴).

◆ چارچوبی برای آموزش اندازه‌گیری در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای

بررسی پیشینه‌ی پژوهشی موضوع اندازه‌گیری در برنامه‌ی درسی نشان می‌دهد که موارد زیادی وجود دارند که توجه به آن‌ها، جزء جدانشدنی یک برنامه‌ی درسی مؤثر درباره‌ی اندازه‌گیری است و باید در تدوین برنامه، در نظر گرفته شوند. این موارد عبارتند از:

✓ دانش موضوعی ریاضی مربوط به اندازه‌گیری؛
✓ فعالیت‌های واقعی اندازه‌گیری؛
✓ ابزارهای رسمی اندازه‌گیری؛
✓ واحدهای غیراستاندارد[10]؛
✓ واحدهای استاندارد؛
✓ معیارهای مورد استناد[11] شخصی؛
✓ تخمین[12] زدن؛
✓ تکنولوژی؛
✓ توجه به زمینه‌های فرهنگی و نیازسنجی فرهنگی.

تمام این موارد، چارچوبی برای آموزش اندازه‌گیری ارایه می‌دهند که در این بخش، به تفکیک به هریک می‌پردازیم.

■ دانش موضوعی ریاضی مربوط به اندازه‌گیری

دانش ریاضی مربوط به اندازه‌گیری که شامل فرمول‌های محاسبه‌ی اندازه‌های مختلف از قبیل محیط، مساحت، حجم و سرعت و هم‌چنین محاسبات مربوط به تبدیل واحدهای اندازه‌گیری است، بدون شک یکی از اجزای مهم آموزش اندازه‌گیری می‌باشد، تا جایی که شاید اولین چیزهایی که با شنیدن واژه‌ی اندازه‌گیری به ذهن ما می‌رسد، همین فرمول‌ها و محاسبات باشند. در واقع، بررسی برنامه‌های درسی کشورهای مختلف نشان می‌دهد که در بسیاری از آن‌ها، موضوع اندازه‌گیری محدود به معرفی چند کمیت، ارایه‌ی فرمول‌هایی برای محاسبه‌ی محیط و مساحت و حجم برخی اشکال و احجام هندسی، معرفی واحدهای استاندارد اندازه‌گیری و روش تبدیل واحدهاست. علاوه بر این، شواهد پژوهشی و تجربیات آموزشی نشان می‌دهند که با وجود این که اندازه‌گیری یک موضوع کاربردی است، معمولاً بر روی کاغذها آموخته می‌شود و بیش‌ترین تأکید مدرسه، بر روی انجام تمرین‌های محاسباتی با استفاده از فرمول‌های اندازه‌گیری است. اما به اعتقاد فی (۱۹۹۰)، دانش‌آموزانی که با چنین رویکردی آموزش می‌بینند، فهم محدودی از مفاهیم طول، مساحت و حجم پیدا می‌کنند. آن‌ها حتی نمی‌دانند که برای حل برخی مسایل واقعی اندازه‌گیری، باید برای به‌دست آوردن محیط اقدام کنند یا مساحت را به‌دست بیاورند. فیگراس و والداج (۱۹۸۴) ابراز می‌دارند که کودکان فهم صحیحی از فرمول‌های محاسبه‌ی مساحت و حجم ندارند. در واقع، دانش‌آموزان، مساحت و حجم را به‌جای استفاده از فرمول‌هایی که تجربه‌ی آن‌ها را در گذشته دارند، با شمردن واحدهای دیداری پیدا می‌کنند، حتی اگر شمردن، کاری سخت یا پیچیده باشد (نقل شده در برگسون و همکاران، ۲۰۰۰). به گفته‌ی فی (۱۹۹۰)، تأکید بر فرمول‌ها باعث می‌شود که کودکان، از ماهیت تقریبی بودن اندازه‌های واقعی آگاه نشده و قادر به تعمیم دادن اندازه‌ها به شکل‌های نامنظم ـ مانند طول خم‌ها یا مساحت‌های نامنظم ـ که در حسابان بسیار مهم و اساسی هستند، نشوند. جورام و همکاران (۱۹۹۸) نیز دریافتند که با وجود آمادگی شناختی کودکان برای یادگیری مفاهیم اندازه‌گیری، آن‌ها مشکلات قابل توجهی در رابطه با این مفاهیم دارند.

پیشنهاد بایز و دمور (۲۰۰۵) برای برطرف کردن این مشکل، این است که به کودکان یاد بدهیم چگونه با یک اندازه‌ی مناسب، اندازه بگیرند؛ چگونه زبان ریاضی مناسب را به کار ببرند و چگونه مسایل ساده‌ی اندازه‌گیری درباره‌ی طول، محیط، مساحت، جرم، سرعت و دما را حل کنند. آن‌ها در ادامه، هدف اساسی‌تر آموزش اندازه‌گیری را، ایجاد و توسعه‌ی درک‌اندازه‌ای[13] در کودکان عنوان نموده و توضیح می‌دهند که با توسعه‌ی درک اندازه‌ای، کودکان از انواع موقعیت‌هایی که در آن‌ها می‌توان از اندازه‌گیری به عنوان یک رویکرد استفاده کرد، آگاهی می‌یابند؛ می‌توانند با برخی از پدیده‌هایی که در زندگی روزمره با آن‌ها مواجه می‌شوند، به‌طور کمّی برخورد کنند؛ یک زبان اندازه‌گیری مناسب را توسعه دهند؛ توانایی تمیز قایل شدن بین کمیت‌های فیزیکی مختلف و تعیین این که کدام اندازه‌گیری در کدام موقعیت مناسب است را پیدا کنند؛ و بالاخره، می‌توانند در ذهن خود، انواع مختلف اندازه‌ها را با کمیت‌های فیزیکی، متناظر کنند.

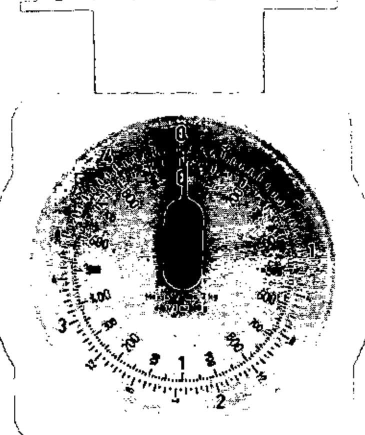
به این ترتیب، می‌توان گفت که لازم است در وهله‌ی اول، فعالیت‌های پیش‌بینی شده در برنامه‌ی درسی، به ایجاد درک

اندازه‌ای در کودکان کمک کند. استفاده از ریاضیات مربوط به اندازه‌گیری، یعنی آموزش فرمول‌ها و انجام تمرین‌های محاسباتی، پس از ایجاد چنین درکی در کودکان، معنادارتر و مؤثرتر خواهند بود.

■ فعالیت‌های واقعی اندازه‌گیری

منظور از فعالیت‌های واقعی اندازه‌گیری، فعالیت‌هایی است که دانش‌آموز را با مفاهیم و روش‌های اندازه‌گیری درگیر کند. خواه این فعالیت‌ها، به ایجاد مفاهیم مربوط به اندازه‌گیری مانند مفهوم اندازه‌پذیری، مفهوم واحد اندازه‌گیری یا مفهوم دقت اندازه‌گیری کمک کند؛ و خواه کودک طی آن فعالیت، درگیر اندازه‌گیری کمیت‌ها با استفاده از ابزارهای رسمی یا غیررسمی یا تخمین زدن باشد. شاید بتوان گفت که در اندازه‌گیری، اهمیت کشف‌های خود کودک و بصیرت‌هایی که خودش به‌دست آورده است، بیش از سایر مباحث ریاضی نمایان می‌شود؛ زیرا وقتی یک فعالیت واقعی اندازه‌گیری توسط دانش‌آموزان در کلاس درس انجام شده و به بحث گذاشته می‌شود، تمام آن‌ها با یک مسأله‌ی جذاب و واقعی درگیر می‌شوند و با استفاده از ابزار گوناگون، به انجام آن می‌پردازند. مزیت فعالیت واقعی اندازه‌گیری در این است که کودکان، خود انجام‌دهنده‌ی آن‌ها هستند و هر کشفی توسط خودشان صورت می‌پذیرد. به همین دلیل، کودکان بصیرت‌های جدید کسب می‌کنند و مثلاً قدرشناس دقت ابزار، دقت عمل، واحدهای اندازه‌گیری و توانایی تخمین زدن خویش می‌شوند. اما طبیعی است که انجام فعالیت‌های واقعی اندازه‌گیری در کلاس، نظم سنتی آن را برهم می‌ریزد. به همین دلیل، گاهی معلمان و مؤلفان کتاب‌های درسی، ترجیح می‌دهند که راه ساده‌تر را انتخاب کنند. به همین منظور، فعالیت‌های واقعی اندازه‌گیری را نادیده گرفته و خود را به معرفی کوتاهی از اندازه‌های استاندارد اصلی، فرمول‌های محاسباتی و همراه با آن، فعالیت‌هایی صوری و مکتوب محدود می‌کنند. در چنین حالتی، سؤالاتی از قبیل «سه متر، چند سانتی‌متر است؟»، «دو هزار گرم، چند کیلوگرم است؟» و «مساحت این مستطیل چند سانتی‌متر مربع است؟»، در آموزش اندازه‌گیری، نقش محوری ایفا می‌کنند. یک برنامه‌ی درسی با این نگاه به اندازه‌گیری، در راستای خواسته‌ی معلمانی است که می‌خواهند کلاس را کنترل کنند و به همین دلیل، معمولاً یک راه ساده برای انجام فعالیت‌ها انتخاب می‌شود و آن، انجام ندادن فعالیت است! اما انجام ندادن فعالیت‌های اندازه‌گیری، امکان کسب تجارب ارزنده‌ی یادگیری را که کودکان می‌توانند از طریق اندازه‌گیری به‌دست بیاورند، کاهش می‌دهد. بایز و دمور (۲۰۰۵) بیان می‌کنند که نکته‌ی اساسی این نیست که این گونه فعالیت‌ها زیاد تکرار شوند، بلکه مهم این است که انجام این نوع فعالیت‌ها توسط کودکان، فرصت کسب بصیرت بیش‌تری را نسبت به اندازه‌گیری به آن‌ها می‌دهد و امکان توسعه‌ی تصور صحیحی از اندازه‌گیری را در کودکان، ایجاد می‌کند. به همین دلیل، طرح سؤال‌هایی که باعث شود دانش‌آموزان، بازتاب بیش‌تری بر عمل اندازه‌گیری داشته باشند، فعالیت‌های اندازه‌گیری را ارزشمندتر می‌کند؛ سؤال‌هایی مانند «در این موقعیت، یک راهبرد مناسب برای اندازه‌گیری چیست؟»، «من این اندازه‌گیری را چگونه انجام دادم؟»، «چگونه می‌توانم نتیجه‌ی این اندازه‌گیری را بیان کنم؟» و «آیا می‌توانم این اندازه‌گیری را با روش دم‌دست‌تر و سریع‌تری انجام دهم؟»

سامیو[۱۴] (۱۹۹۰) بهترین راه آموزش ریاضی به خردسالان را این می‌داند که به آن‌ها کمک شود خواص ریاضی را در فعالیت‌ها و بازی‌هایشان ببینند. به همین دلیل، از نظر او، ریاضیاتی که توسط کودکان مختلف پایه‌ریزی می‌شود، به تناسب تجارب شخصی آن‌ها، متفاوت خواهد بود. به اعتقاد



«اندازه گیری، مرتب کردن جهان اطراف با استفاده از اعداد است و به وسیله‌ی آن، می‌توان جهان اطراف را بهتر کنترل کرد.»
بایز و دمور (۲۰۰۵)

سامیو (۱۹۹۰)، بچه‌ها باید خواص ریاضی را خودشان کشف کنند نه این‌که به آن‌ها یاد دهند که بزرگ‌ترها چه چیزی را تفکر ریاضی می‌دانند. به همین دلیل نباید انتظار داشت که سؤال‌ها و کتاب‌های مشترک، جواب‌ها و نتایج یکسانی را به بار آورند. در واقع، معلم خوب، خواهان پیشرفت یکسان دانش‌آموزان نیست. چرا که سرعت پیشرفت کودکان، به تجارب شخصی آن‌ها بستگی دارد. معلم نباید بازی و درس را از هم جدا کند و هنگام بازی، خود را کنار بکشد. بلکه باید در هنگام بازی و فعالیت‌های کودکان، منتظر فرصت‌هایی برای بیرون کشیدن مفاهیم ریاضی باشد.

کلمنتس[15] (۱۹۹۹) ابراز می‌کند که لازم است برای طراحی فعالیت‌هایی که کودکان، علاقه‌مند به انجام دادن آن‌ها بوده و می‌توانند از طریق آن‌ها، تجارب متنوع اندازه‌گیری را کسب کنند، تلاش نمود. به طور مثال، حتی پیش از رفتن به مدرسه، کودکان می‌توانند اشیا را از نظر طول با هم مقایسه کنند. پیدا کردن تمام اشیای موجود در اتاق که به اندازه‌ی ساعد دست آن‌هاست، فعالیتی ابتدایی است که به کودکان فرصت می‌دهد با مفاهیم ابتدایی اندازه‌گیری، دست‌ورزی کنند. به اعتقاد بایز و دمور (۲۰۰۵)، ابتدایی‌ترین نوع اندازه‌گیری، مقایسه کردن مستقیم اشیا است. در این نوع اندازه‌گیری، که بیش‌تر مختص کودکان کم‌سن و سال است، هیچ عددی مطرح نمی‌شود و نتیجه‌ی اندازه‌گیری، توسط کلمات بزرگ‌تر، کوتاه‌تر، سنگین‌تر و مانند این‌ها بیان می‌شود.

■ ابزارهای رسمی اندازه‌گیری

فعالیت‌ها و روش‌های اندازه‌گیری، به مقایسه کردن و مرتب کردن اشیا محدود نمی‌شوند. بایز و دمور (۲۰۰۵)، دو روش دیگر را برای اندازه‌گیری در سال‌های اولیه‌ی ابتدایی مناسب می‌دانند که یکی استفاده از واحدهای استاندارد و غیراستاندارد، و دیگری استفاده از ابزار اندازه‌گیری مانند خط‌کش، متر و ترازو است. در واقع، یکی از اجزای مهم آموزش اندازه‌گیری، استفاده از ابزارهای رسمی اندازه‌گیری مانند خط‌کش، متر، انواع ترازو، انواع ساعت و نظایر آن‌ها است؛ چرا که وقتی می‌خواهیم در زندگی روزمره و یا در فعالیت‌های علمی، بر مبنای اندازه‌های نسبتاً دقیق، تصمیم بگیریم، ناگزیر به استفاده از ابزار رسمی اندازه‌گیری هستیم. این اهمیت تا جایی است که تحقیقات نشان می‌دهند که رابطه‌ی معناداری بین میزان استفاده‌ی کودکان از ابزارهای اندازه‌گیری و عملکرد آن‌ها در درس علوم وجود دارد. طبق مطالعه‌ای روی نتایج ارزشیابی ملی[16] (NAEP) و دیگر تحقیقات انجام شده، تجهیزات بیش‌تر در کلاس‌های علوم، به نتایج بهتر دانش‌آموزان می‌انجامد.

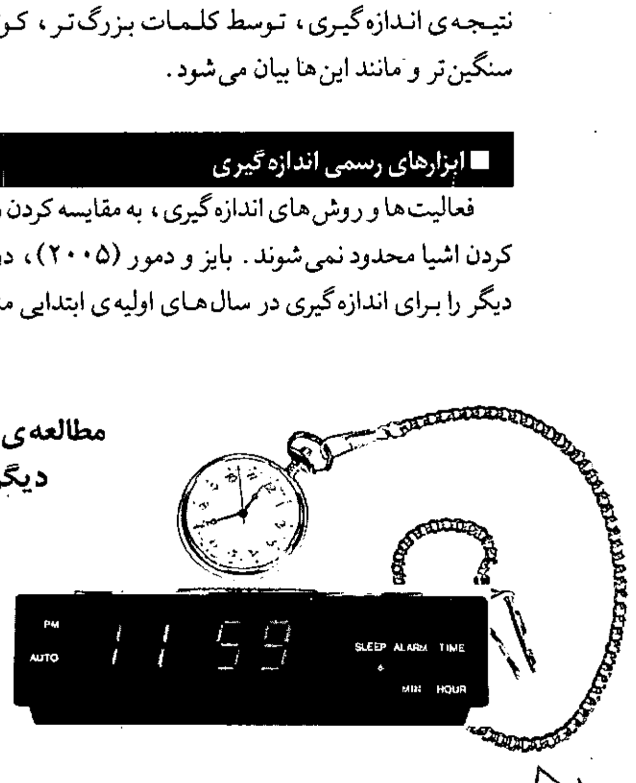
با درنظر گرفتن چنین درجه‌ی اهمیتی از ابزار اندازه‌گیری، در استانداردهای ملی آموزش علوم[17] (۱۹۹۶) نیز تأکید ویژه‌ای بر استفاده از این ابزار شده است. در این استانداردها، در زمینه‌ی اندازه‌گیری آمده است:

(۱) استفاده از ابزارهایی مانند دماسنج، خط‌کش یا ترازو، اطلاعات بیش‌تری را نسبت به حالتی که از این ابزارها استفاده نکرده و پدیده‌ها را فقط مشاهده کنیم، به‌دست می‌دهند؛

(۲) ابزارهای اندازه‌گیری را می‌توان برای جمع‌آوری اطلاعات دقیق به منظور مقایسه‌های علمی اشیا و حوادث و به‌منظور طراحی و ساخت اشیایی که درست کار کنند، به‌کار برد؛

(۳) خواندن عددهای دیجیتال و آنالوگ روی ابزار، برای اندازه‌گیری مستقیم طول، حجم، جرم، زمان، سرعت و دما لازم است و انتخاب واحدهای مناسب برای گزارش کردن بزرگی‌های مختلف، ضروری است.

مطالعه‌ی اندازه‌گیری، فرصتی برای یادگیری و به کاربردن بخش‌های دیگر ریاضی مانند اعمال روی اعداد، کسرها، ایده‌های هندسی، مفاهیم آماری و مفهوم تابع ایجاد می‌کند. از این گذشته، اندازه‌گیری حوزه‌ای است که هم ارتباط درونی بخش‌های مختلف ریاضی و هم ارتباط بین ریاضی و حوزه‌های خارج از آن را مانند مطالعات اجتماعی، علوم، هنر و تربیت‌بدنی، به‌طور شفاف بیان می‌کند (NCTM, 2000)



علاوه بر این، توانایی به‌کارگیری ابزار اندازه‌گیری، بر روش‌های دیگر اندازه‌گیری نیز تأثیرگذار است. به عنوان مثال، تحقیقات نشان می‌دهند که اگر دانش‌آموزان قادر به به‌کارگیری ابزار مناسب برای اندازه‌گیری دقیق شیئ نباشند، در تخمین زدن اندازه نیز دچار مشکلات بسیاری خواهند شد (کورل، ۱۹۶۰؛ نقل شده در برگسون و همکاران، ۲۰۰۰). با این حال، پژوهش‌های انجام شده، حاکی از این است که دانش‌آموزان در استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری، عملکرد مطلوبی ندارند. فیگراس و والداج (۱۹۸۴) نشان دادند که دانش‌آموزان در به‌کار بردن ابزار اندازه‌گیری و شمردن تعداد تکرارهای بازه‌های مساوی، بسیار مکانیکی عمل می‌کنند (نقل شده در برگسون و همکاران، ۲۰۰۰).

■ واحدهای غیراستاندارد

اگرچه در دوره‌ی ابتدایی، برای اندازه‌گیری معمولاً از ابزار اندازه‌گیری مانند ترازو، خط‌کش و نظایر آن‌ها استفاده می‌شود، اما به اعتقاد بایز و دمور (۲۰۰۵)، این تنها و ابتدایی‌ترین روشی نیست که در آموزش مطرح می‌شود، زیرا اندازه‌گیری شامل چیزهای بیش‌تری است و به طور مثال، اندازه گرفتن یک فاصله از طریق قدم زدن با گام‌های بزرگ، در نظر گرفتن یک پیمانه برنج برای هر نفر در هنگام غذا پختن و اندازه‌گیری زمان با استفاده از شمردن از ۱ تا ۱۰ در بازی قایم‌باشک، همگی، انواع مختلفی از اندازه‌گیری هستند و با وجودی که این روش‌ها، دقت کم‌تری نسبت به اندازه‌گیری با استفاده از ابزار دارند، گاهی اوقات مؤثرترند. این در حالی است که به گزارش جورام و همکاران (۱۹۹۸)، متأسفانه این تجربیات برای کودکان مدرسه‌ای کمتر ایجاد می‌شود و مثلاً، فقط ۵۰ درصد دانش‌آموزان پایه‌ی چهارم ابتدایی قادر به اندازه‌گیری طول یک پاره خط از طریق پوشاندن آن با گیره‌ی کاغذ هستند. هم‌چنین، کودکان معمولاً فهم پایه‌ای صحیحی از مفهوم واحد اندازه ندارند. آن‌ها اغلب نمی‌دانند که یک واحد، ممکن است از اجزای کوچک‌تر تشکیل شده باشد و به صورت یک کل نباشد؛ مانند استفاده از دو مداد به عنوان واحد (گالپرین[18] و جورجیو[19]، ۱۹۶۹؛ نقل شده در برگسون و همکاران، ۲۰۰۰).

استفاده از واحدهای غیراستاندارد از جهات مختلفی مفید هستند که بایز و دمور (۲۰۰۵) به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنند. استفاده از واحدهای غیراستاندارد اندازه‌گیری سبب می‌شود کودکان، اندازه‌گیری را به عنوان یک فرآیند درک کنند. به طور مثال، وقتی از کودکان خواسته می‌شود که طول یک طناب را با استفاده از گیره‌ی کاغذ اندازه بگیرند، تجربه نشان می‌دهد که اغلب آن‌ها، با حرکت دادن گیره‌ی کاغذ روی طناب، به شکلی که ابتدای آن هر بار منطبق بر انتهای آن در مرحله‌ی قبل باشد، و با طی این فرآیند، به‌درستی، تعداد دفعاتی را که گیره‌ی کاغذ روی طناب قرار می‌گیرد تا تمام طناب پوشانده شود، به‌عنوان طول طناب گزارش می‌کنند. در صورتی که اگر کودکان از یک ابزار اندازه‌گیری مانند خط‌کش استفاده کنند، این فرآیند درک نخواهد شد. فرآیندی که قابل تعمیم به موقعیت‌های اندازه‌گیری دیگر نیز هست، زیرا که بیش‌تر انواع اندازه‌گیری، شامل تکرار کردن یک واحد به منظور ساختن کل اندازه هستند. علاوه بر این، استفاده از واحدهای غیراستاندارد باعث می‌شود کودکان مفهوم واحد اندازه‌گیری را درک نموده و بر لزوم وجود واحدهای استاندارد واقف شوند. در واقع وقتی از دانش‌آموزان خواسته می‌شود یک کمیت ثابت را با استفاده از واحدهای مختلف اندازه بگیرند، آن‌ها با عددهای متفاوتی به‌عنوان اندازه‌ی یک کمیت مشخص مواجه می‌شوند و از این طریق، نسبت به ابداع واحدهای استاندارد، احساس قدرشناسی پیدا می‌کنند.

■ واحدهای استاندارد

هیچ شکی در ضرورت آموزش واحدهای استاندارد اندازه‌گیری مانند متر، کیلوگرم، لیتر و نظایر آن‌ها به کودکان وجود ندارد. بایز و دمور (۲۰۰۵) نیز کسب دانش سیستم‌های اندازه‌گیری مختلف و رابطه‌ی بین واحدهای مختلف را به‌دلیل کاربردهای فراوان روزمره‌ی آن‌ها لازم می‌دانند. دانش‌آموزان باید قادر شوند که به راحتی در موقعیت‌های مختلف، از سیستم‌های اندازه‌گیری مختلف استفاده کنند؛ مثلاً در کارهای علمی از سیستم متریک استفاده کنند در حالی که در زندگی روزمره ممکن است از واحدهای رایج محلی استفاده کنند. این در حالی است که به گزارش فیگراس[20] و والدج[21] (۱۹۸۴)، بیش از نیمی از دانش‌آموزان، واحدهای اندازه‌گیری را به شکل اشتباه به کار می‌برند. این محققان اشاره می‌کنند که یک سیستم اندازه‌گیری استاندارد، خیلی زود در برنامه‌ی درسی دوره‌ی ابتدایی مطرح می‌شود و بنابراین جلوی فهم کامل مفهوم واحد را می‌گیرد. بنابراین درک مفهوم واحد اندازه‌گیری، یک پیش‌نیاز برای درک واحدهای استاندارد است (نقل شده در برگسون و همکاران، ۲۰۰۰).

کلمنتس (۱۹۹۹) با بیان این نکته که نظمی در تدریس اندازه‌گیری مبتنی بر نظریه‌ی پیاژه ـ که در مورد مراحل رشد کودک است ـ به وجود آمده است که عبارت است از: شروع با واحدهای غیراستاندارد، واحد استاندارد و سپس اندازه‌گیری با استفاده از ابزار. وی با طرح این سؤال که آیا این ترتیب، بهترین روش ممکن است، به مطالعه‌ای در مورد آموزش طول پرداخت و درنتیجه، به یک ترتیب دیگر دست یافت. کلمنتس (۱۹۹۹)، برای پایه‌ی پیش‌دبستانی مقایسه‌ی مستقیم را پیشنهاد می‌کند. سپس برای پایه‌ی اول دبستان، استفاده‌ی هم‌زمان از خط‌کش، واحدهای استاندارد و واحدهای غیراستاندارد را توصیه می‌کند. کلمنتس (۱۹۹۹) ابراز می‌دارد که شروع با واحد غیراستاندارد مضر نیست، اما اگر استفاده از واحد غیراستاندارد در پایه‌ی اول دبستان با این هدف صورت گیرد که کودک، نیاز به استانداردسازی را درک کند، کاری پیش از موقع انجام شده است. وی برای پایه‌های دوم و سوم دبستان، آموزش رابطه‌ی بین واحدها، لزوم وجود واحدهای استاندارد، رابطه‌ی معکوس بین اندازه‌ی واحد و تعداد واحدها و استفاده از ابزارهای دیگر اندازه‌گیری را مناسب می‌داند.

علاوه بر این، بایز و دمور (۲۰۰۵)، کسب دانش سیستم‌های اندازه‌گیری مختلف و رابطه‌ی بین واحدهای مختلف را به‌دلیل کاربردهای فراوان روزمره‌ی آن‌ها لازم می‌دانند. آن‌ها بیان می‌کنند که در این راستا، داشتن معیارهای مورد استناد شخصی که از واقعیات روزمره به‌دست آمده و در تخمین و تصور اندازه‌های استاندارد به‌کار می‌روند، بسیار مفیدند.

■ معیارهای مورد استناد شخصی

منظور از معیار مورد استناد شخصی، یک کمیت مشخص برای فرد است که اندازه‌ی متناظر با آن را می‌داند. این معیارها می‌توانند ذهنی یا فیزیکی باشند. منظور از معیار مورد استناد ذهنی، تصویری است که افراد از بعضی از اندازه‌های خاص مانند ۱ متر، ۵ سانتی‌متر یا یک متر مربع در ذهن خود دارند. منظور از معیار مورد استناد فیزیکی هم، کمیت‌های دم‌دستی است که اندازه‌های آن‌ها را می‌داند و برای اندازه‌گیری کمیت‌های دیگر، از آن‌ها استفاده می‌کند. به‌عنوان نمونه، عرض انگشت می‌تواند معیاری برای سانتی‌متر، یک گام بزرگ معیاری برای متر، بطری شیر معیاری برای لیتر و یک پاکت شکر معیاری برای کیلوگرم باشد. در سیستم اندازه‌گیری سنتی ایران نیز از این اندازه‌ها به میزان وسیعی استفاده می‌شود، به‌طوری که برخی از این اندازه‌ها دارای اسامی رایج نیز هستند؛ مانند بند انگشت، وجب و نظایر آن‌ها.

یکی از مهارت‌هایی که کودکان باید در زمینه‌ی اندازه‌گیری کسب کنند، مهارت اندازه‌گیری توسط ابزارهای ذهنی است. کلمنتس (۱۹۹۹)، ابراز می‌دارد با وجودی که اندازه‌گیری با استفاده از ابزار، مهم است، اما ایجاد توانایی‌هایی مانند ایجاد خط‌کش ذهنی[۲۲] یا خط‌کش مفهومی[۲۳] هم از اهمیت ویژه‌ای

با وجود این که اندازه‌گیری یک موضوع کاربردی است، معمولاً بر روی کاغذها آموخته می‌شود و بیش‌ترین تأکید مدرسه، بر روی انجام تمرین‌های محاسباتی با استفاده از فرمول‌های اندازه‌گیری است. اما به اعتقاد فی (۱۹۹۰)، دانش‌آموزانی که با چنین رویکردی آموزش می‌بینند، فهم محدودی از مفاهیم طول، مساحت و حجم پیدا می‌کنند

برخوردار است. به‌طور مثال، در بسیاری از مسأله‌های اندازه‌گیری، از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا طول خطوط را حدس زده یا محاسبه کنند، یا خطی را با طول داده شده، رسم کنند. برای حل این نوع مسایل، دانش‌آموزان از روش‌های مختلفی استفاده می‌کنند؛ بعضی از آن‌ها بدون ساختن هیچ واحدی، حدس می‌زنند، برخی از آن‌ها با تقسیم‌بندی طول، واحدهای دیداری[24] می‌سازند و آن‌ها را می‌شمارند. البته گاهی اوقات، کودکان این تقسیم‌بندی را به‌طور مساوی انجام نمی‌دهند و عمل تقسیم‌بندی را در ذهن خویش انجام می‌دهند. در تمام این حالت‌ها، دانش‌آموزان یک ابزار ذهنی درونی دارند و این ابزار، یک تصویر ثابت نیست، بلکه یک فرآیند ذهنی است که طی آن، کودکان با حرکت کردن ذهنی روی یک شیء، آن را تقسیم‌بندی کرده و تعداد قسمت‌ها را می‌شمارند. به بیان کلمنتس (۱۹۹۹)، این کودکان از یک خط‌کش ذهنی استفاده می‌کنند. استفاده از این ابزار ذهنی، مرحله‌ای مهم در توسعه‌ی درک اندازه‌ای کودکان است.

■ تخمین زدن

باکستر و همکاران (۲۰۰۶) به نقل از گروهی از بزرگسالان درباره‌ی فواید تخمین زدن گفته‌اند: تخمین زدن، باعث صرفه‌جویی در وقت می‌شود؛ به این که درستی ابزار و روش‌های اندازه‌گیری را تعیین کنیم کمک می‌کند؛ در برخی موقعیت‌ها، اندازه‌گیری دقیق، ممکن نیست و تخمین، به‌کار می‌آید؛ گاهی اوقات، ماهیت شغل، تخمین زدن را می‌طلبد؛ و بالاخره این که تخمین زدن، لذت‌بخش است.

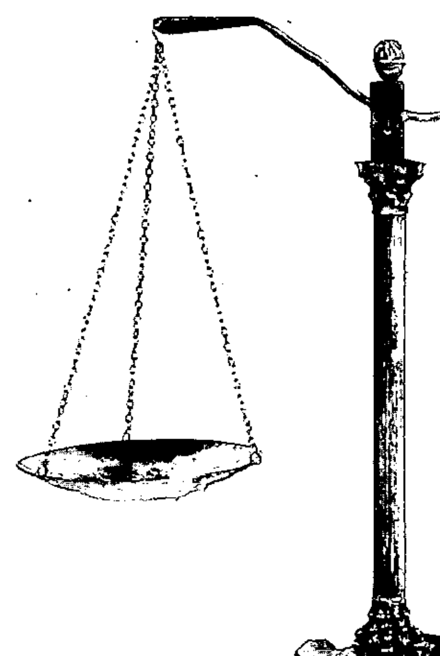
بایز و دمور (۲۰۰۵)، علاوه بر پیشنهاد استفاده از روش‌های مقایسه و مرتب کردن، واحدهای استاندارد و غیراستاندارد و ابزار اندازه‌گیری برای آموزش اندازه‌گیری در دوره‌های پیش‌دبستانی و سال‌های اولیه‌ی ابتدایی، برای سال‌های بالاتر ابتدایی نیز روش‌های دیگری را توصیه می‌کنند که از آن جمله می‌توان به اندازه‌گیری از طریق استدلال و محاسبه اشاره کرد. با این روش، کودکان به مسأله‌هایی پاسخ می‌دهند که بعضی از اطلاعات لازم برای حل، در آن‌ها نیامده است و دانش‌آموزان باید خودشان از طریق استدلال و تخمین زدن، آن اطلاعات را به‌دست آورده و مسأله را حل کنند. سؤالاتی مانند این که «یک ساختمان ۶ طبقه تقریباً چه قدر بلندی دارد؟» یا «در روزنامه آمده است که در شهر ما، در ۲۴ ساعت گذشته ۵۰ میلی‌متر باران باریده است. در کل شهر ما، چند متر مکعب باران باریده است؟» نمونه‌هایی از اندازه‌گیری از طریق استدلال و محاسبه هستند که کودکان برای حل آن‌ها، به تخمین ارتفاع یک طبقه‌ی ساختمان و مساحت شهر نیاز دارند. برخی مثال‌های ساده‌تر از این نوع، حتی در سال‌های اول ابتدایی هم قابل طرح هستند.

در واقع، تخمین زدن هم که به عنوان بخشی از سواد شهروندی برای پیش‌بینی کردن، قضاوت کردن و تصمیم گرفتن لازم است، در مقوله‌ی اندازه‌گیری از طریق استدلال می‌گنجد. جورام و همکاران (۱۹۹۸)، تخمین اندازه‌گیری را یک مهارت مهم برای سواد عددی، و پایه‌ای برای فهم اندازه‌گیری فیزیکی می‌دانند. این در حالی است که به گزارش آن‌ها، اکثر تحقیقاتی که در زمینه‌ی توانایی تخمین اندازه‌گیری انجام شده‌اند، نشان می‌دهند که هم کودکان و هم بزرگ‌سالان، در این زمینه ضعیف عمل می‌کنند و به گفته‌ی جورام و همکاران (۱۹۹۸، به نقل از یوسیسکین[25]، ۱۹۸۶)، «اگرچه تخمین معمولاً به‌عنوان "خواهر کوچک‌تر" محاسبات تلقی می‌شود، در زندگی واقعی، "خواهر بزرگ‌تر" و حتی "تنها فرزند" است!» (ص۴۱۴). در حقیقت آن‌ها از بحثی که مطرح می‌کنند، این نتیجه را می‌گیرند که داشتن توانایی تخمین اندازه، نیازمند فهم واقعی مفاهیم اندازه‌گیری است. مثلاً ممکن است حل مسایل معمولی اندازه‌گیری، با استفاده از فرمول و بدون وجود فهم صحیحی از اندازه‌گیری صورت پذیرد، در حالی که هنگام تخمین زدن، کودکان نمی‌توانند از رویه‌هایی که بدون دلیل حفظ کرده‌اند، استفاده کنند، زیرا برای تخمین زدن اندازه‌ها، از استراتژی‌هایی استفاده می‌شود که نیازمند فهم عمیق فرد از فرآیند اندازه‌گیری است.

جورام و همکاران (۱۹۹۸) ابراز می‌دارند که در زمینه‌ی آموزش تخمین اندازه‌گیری، حداقل می‌توان از دو روش مختلف، یکی *حدس و آزمایش*[26] یا *تمرین با بازخورد*[27]، و دیگری *آموزش استراتژی‌های تخمین زدن* استفاده کرد. در روش اول، شخص ابتدا اندازه‌ی مورد نظر را تخمین می‌زند، سپس اندازه‌ی واقعی را توسط ابزار اندازه‌گیری به‌دست می‌آورد و یا اندازه‌ی واقعی به او گفته می‌شود. با این روش، بدون این که استراتژی‌های خاصی به دانش‌آموز آموخته شود، دقت تخمین زدن او بالا می‌رود. هم‌چنین با این روش، افراد برای خود *مقیاس مفهومی*[28] متناظر با واحدهای خاص را ایجاد کرده

و محور ذهنی *اعداد*[۲۹] را ایجاد می‌کنند. علاوه بر این، اگر آزمایش حدس، با استفاده از اندازه‌گیری مستقیم صورت پذیرد، فرد، توانایی اندازه‌گیری فیزیکی را نیز در خود ایجاد می‌کند. به اعتقاد جورام و همکاران (۱۹۹۸)، نکته‌ی کلیدی در تسهیل تخمین اندازه، ساختن یک محور ذهنی اعداد است که طول‌های فیزیکی را با اندازه‌های عددی متناظر با آن‌ها بازنمایی می‌کند و از این طریق، تخمین‌زننده، طول را به عدد و برعکس، تبدیل می‌کند. نکته‌ی دیگر، فهم رابطه‌ی بین واحدهای مختلف است که برای این کار، لازم است که چگونگی ایجاد معیارهای مورد استناد ذهنی برای واحدهای خاص (مانند متر، سانتی‌متر، لیتر و نظایر آن) و تصور کردن اندازه‌ها بر روی محور اعداد، مورد مطالعه قرار گیرد و حرکت بین محورهای مختلف به منظور تبدیل واحدها به طور ذهنی آموزش داده شود. بنابراین، ایجاد معیارهای مورد استناد شخصی، خواه معیارهای ذهنی و خواه معیارهای فیزیکی، یکی از ارکان اصلی آموزش تخمین اندازه است. علاوه بر این‌ها، برای توسعه‌ی توانایی تخمین اندازه، رابطه‌ی بین موقعیت و محدودیت‌های اندازه‌گیری نیز باید آموزش داده شود. مثلاً ممکن است کسی از ۱۲ سانتی‌متر، تصور ذهنی درستی داشته باشد، اما برای اندازه‌گیری در موقعیتی خاص، ۱۲ سانتی‌متر، خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشد. مثلاً برای تخمین ارتفاع یک ساختمان، نمی‌توان از معیار ۱۲ سانتی‌متر استفاده کرد.

کریتس[۳۰] (۱۹۹۲) اذعان می‌دارد برای این که کودکان در تخمین زدن مهارت کسب کنند، باید تجارب عملی در زمینه‌ی تخمین زدن داشته باشند تا معیارهای مورد استناد خود را برای انواع مختلف اندازه مانند تعداد، زمان و طول ایجاد کنند. هم‌چنین، توضیح دادن روش تخمین و بررسی معقول بودن پاسخ‌ها، دو جنبه‌ای هستند که باید در کلاس‌های ریاضی مورد توجه قرار بگیرند.



عوامل دیگری نیز بر توانایی تخمین اندازه مؤثر شناخته شده‌اند. سوان و جونز (۱۹۸۰) پس از تحقیقی درباره‌ی توانایی‌های تخمین اندازه روی بزرگ‌ترها و دانش‌آموزان، به این نتایج دست یافتند: اول این که توانایی‌های تخمین اندازه، همراه با سن رشد می‌کند. دیگر این که جنسیت افراد، در توانایی تخمین جرم یا دما تأثیری ندارد. اما مردها، فاصله و طول را بهتر تخمین می‌زنند (نقل شده در برگسون و همکاران، ۲۰۰۰). علاوه بر این، باکستر و همکاران (۲۰۰۶) بیان می‌کنند که تجربه، در توانایی تخمین زدن، مهم است. مطالعه‌ای توسط نونز[۳۱]، شولمن[۳۲] و همکاران(۱۹۹۳) نشان می‌دهد که در یک گروه از نجارها، کسانی که تجربه‌ی کار بیش‌تری داشتند، در انجام محاسبات مبتنی بر اندازه‌گیری، بهتر از کسانی عمل کردند که تجربه‌ی مدرسه‌ای داشتند (نقل شده در باکستر و همکاران، ۲۰۰۶). شاید دلیل این موضوع، این باشد که مهارت در تخمین اندازه‌گیری، به تمرین مداوم احتیاج دارد و در غیر این صورت، فراموش خواهد شد (استیک و ایزلی، ۱۹۷۸؛ نقل شده در برگسون و همکاران، ۲۰۰۰). این در حالی است که بیش از ۹۰ درصد معلمان اعتقاد دارند که تخمین زدن در موقعیت‌های اندازه‌گیری یک مهارت مهم است، اما دانش‌آموزان کمی فعالیت‌های تخمین را تجربه می‌کنند (اوزبورن، ۱۹۸۰؛ نقل شده در برگسون و همکاران، ۲۰۰۰).

■ تکنولوژی

استفاده از تکنولوژی، یکی از راه‌هایی است که برای آموزش مفاهیم اندازه‌گیری توصیه شده است. کلمنتس (۱۹۹۹) ابراز می‌کند که یکی از راه‌های توسعه‌ی درک اندازه‌ای این است که دانش‌آموزان را تشویق کنیم بین عدد و هندسه، رابطه‌هایی ایجاد کنند؛ مانند محیطی که نرم‌افزار گرافیکی لوگو[۳۳] برای کودکان فراهم می‌کند. لوگو یک محیط برنامه‌نویسی گرافیکی است که در آن، دانش‌آموز حرکات یک لاک‌پشت را با اندازه‌ها و جهت‌هایی که خودش تعیین می‌کند، هدایت می‌کند. کمپبل (۱۹۹۰) معتقد است که کودکان در محیط لوگو می‌توانند با واحدهای مختلف دست‌ورزی کنند، واحدهای خودشان را بسازند و با استفاده از واحد خویش، طول‌های مختلف را تخمین بزنند. بنابراین، در این محیط به کودکان اجازه داده می‌شود که فهم و درک خود را از فاصله، واحد اندازه‌گیری و رابطه‌ی معکوس بین اندازه‌ی واحد و تعداد واحدهایی که طول مورد نظر را می‌پوشاند، توسعه دهند. مطالعه‌ای که کمپبل (۱۹۹۰) انجام

داده است، نشان می‌دهد که کودکان پس از کار در این محیط، رشد قابل توجهی در زمینه‌ی تخمین فاصله پیدا می‌کنند.

■ توجه به زمینه‌های فرهنگی و نیازسنجی فرهنگی

به اعتقاد جورام و همکاران (۱۹۹۸)، لازم است که زمینه‌ی فرهنگی تخمین اندازه، شناسایی شود. تحقیقات نشان می‌دهند که کارکرد تخمین اندازه‌گیری در یک فرهنگ و این که چقدر از تخمین آن نوع اندازه، در زندگی روزمره استفاده شود، میزان یادگیری افراد را در زمینه‌ی تخمین اندازه پیش‌بینی می‌کند. آن‌ها اشاره می‌کنند که عجیب نیست که افراد در تخمین دما، بهتر از بقیه‌ی موارد عمل می‌کنند، چون هر روز راجع به دما چیزهایی را می‌شنوند و بر مبنای این اعداد تصمیم‌گیری می‌کنند؛ تصمیم‌هایی مثل این که چه لباسی بپوشند یا از چه وسیله‌ی نقلیه‌ای استفاده کنند. این همان ایده‌ی ریاضیات قومی[۳۴] است که بیشاپ (۱۳۷۶) با ارجاع به آن، به آموزشگران ریاضی توصیه می‌کند که با در نظر گرفتن فرهنگ در تحقیقات آموزشی خود، درباره‌ی ایده‌های مهم زیر فکر کنند:

تعامل‌های انسانی، یعنی در نظر گرفتن آن فعالیت‌های ریاضی که به‌طور وسیع در جامعه‌ی خارج از مدرسه اتفاق می‌افتند و توجه به نقش افرادی غیر از معلم‌ها و یادگیرنده‌ها در آموزش ریاضی؛ **مردم و ارزش‌ها**، یعنی تشخیص این که فعالیت‌های ریاضی با ارزش‌ها، باورها و انتخاب‌های شخصی گره خورده است؛ **تعامل‌های بین ریاضی و زبان**، چرا که زبان به عنوان حامل اصلی بسیاری از ایده‌های ریاضی عمل می‌کند؛ **تاریخ‌های ریاضی**، یعنی توجه به این که چه کسانی ایده‌های ریاضی را در جامعه‌های مختلف توسعه داده‌اند؛ و **ریشه‌های فرهنگی**، یعنی توجه نسبت به نقطه‌های شروع فرهنگی و اجتماعی توسعه‌ی ریاضی.

بیشاپ(۱۳۷۶) سپس بیان می‌کند که اگر بخواهیم با موفقیت از عهده‌ی ارایه‌ی یک آموزش ریاضی با معنا برآییم، باید نسبت به توسعه‌ی یک برنامه‌ی درسی در این راستا تلاش بیش‌تری کنیم. به‌طور مشخص، لازم است که ملاحظات بیش‌تری برای ساختار کلی برنامه‌ی درسی ریاضی در نظر گرفته شود. وی در ادامه، یک برنامه‌ی درسی فرهنگ‌ـ مدار[۳۵] را پیشنهاد می‌دهد که بر مبنای شش فعالیت اساسی **شمردن، چگونگی قرار دادن، اندازه گرفتن، طراحی کردن، بازی کردن و توضیح دادن** است و این شش فعالیت، توسط تمام جوامع و فرهنگ‌ها توسعه یافته است. بیشاپ(۱۳۷۶) توضیح می‌دهد که مثلاً «چه قدر؟» سؤالی است که در هر جامعه‌ای مطرح و پاسخ داده می‌شود، خواه آن مقدار، پارچه، غذا، زمین، پول یا زمان باشد. طبیعی است که با پیچیده‌تر شدن جوامع، تکنیک‌های اندازه‌گیری نیز با تمامی واحدهایی که در آن اندازه‌گیری‌ها دخیل هستند، پیچیده‌تر می‌شوند. اندازه‌گیری علاوه بر این که شامل توانایی‌های ذهنی شمارش است، توانایی‌های دیگری از قبیل تخمین زدن، تقریب زدن و ارزشیابی کردن را نیز شامل می‌شود. بیشاپ (۱۳۷۶) اعتقاد دارد که اگر آزمایش‌های بیش‌تری در یک برنامه‌ی درسی که از نظر اجتماعی و فرهنگی به جامعه مربوط است انجام بگیرد، آن‌گاه معلمان بیش‌تری قادر می‌شوند تا از فعالیت‌های ریاضی فرهنگ‌ـ مدار در کلاس‌های درس خود استفاده کنند و دانش‌آموزان بیش‌تری احساس خواهند کرد که مشغول مطالعه‌ی یک آموزش ریاضی با معنا هستند.

علاوه بر این، یک برنامه‌ی درسی که فرهنگ و جامعه را مورد توجه قرار می‌دهد، باید نیازهای جامعه را نیز در نظر بگیرد. به عنوان مثال، در جامعه‌ای که افراد به راحتی وقت خود را هدر می‌دهند و برای زمان، ارزشی قایل نیستند، توانایی تخمین زمان، توسعه نیافته است. برای آن‌ها مهم نیست که یک سفر درون‌شهری خاص، چه‌قدر طول می‌کشد و بهتر است چه زمانی از منزل خارج شوند یا از چه مسیر و از چه وسیله‌ی نقلیه‌ای استفاده کنند. در چنین جامعه‌ای، آموزش تخمین زمان، یک نیاز فرهنگی ـ اجتماعی است. هم‌چنین در جامعه‌ای که افراد، تخمین درستی از میزان مصرف منابع طبیعی خود ندارند، نمی‌توان انتظار داشت که در مصرف آب، برق، گاز و نظایر آن صرفه‌جویی کنند. به‌طور مثال، شخصی که شیر آب خانه‌اش چکه می‌کند، اگر تخمین خوبی از هزینه‌ی آب هدر رفته و هزینه‌ی تعمیر شیر آب داشته باشد، نسبت به تعمیر کردن یا تعمیر نکردن شیر آب خانه‌ی خود تصمیم آگاهانه‌تری خواهد گرفت. بنابراین برای طراحی یک برنامه‌ی درسی درباره‌ی اندازه‌گیری، نیازسنجی فرهنگی، با هدف فرهنگ‌سازی در جامعه، لازم و ضروری است.

◆ اندازه‌گیری؛ موضوع غفلت شده در برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای ایران

به گزارش کیامنش(۱۳۷۹)، دانش‌آموزان ایرانی در بین ۳۸

کشور شرکت کننده در اجرای مجدد سومین مطالعه‌ی بین‌المللی ریاضیات و علوم[۳۶]، در مجموعه‌ی سؤالات مربوط به اندازه‌گیری، رتبه‌ی ۳۴ام را کسب کردند. با توجه به اهمیت زیادی که موضوع اندازه‌گیری به عنوان یک موضوع درسی در برنامه‌های درسی ریاضی دوره‌های آموزش عمومی در دنیا دارد، و با عنایت به تحقیقات گسترده‌ی جهانی در رابطه با سواد اندازه‌گیری به عنوان یک سواد کمّی و سواد عددی، و هم‌چنین با استفاده از چارچوب ارایه شده توسط نویسندگان برای آموزش اندازه‌گیری، بررسی کتاب‌های درسی دوره‌ی آموزش عمومی در ایران از این منظر، از اهمیت بالایی برخوردار است.

برای این منظور با استفاده از چارچوب ارایه شده، به بررسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی ابتدایی و راهنمایی در ایران پرداخته‌ایم. در پیوست(۱) جداول مربوط به این بررسی آمده‌اند.

جدول زیر، با توجه به تحلیل محتوای مربوط به اندازه‌گیری در کتاب‌های ریاضی دوره‌های ابتدایی و راهنمایی در ایران و با استفاده از چارچوب ارایه شده برای آموزش اندازه‌گیری، فراوانی استفاده از هر یک از موارد مطرح شده در چارچوب را بیان می‌کند. این فراوانی، از شمردن تعداد صفحاتی حاصل شده است که در آن‌ها به نوعی، به موضوع مورد نظر پرداخته شده است که حتی ممکن بوده است موضوع مورد نظر، فقط حجم کوچکی از صفحه‌ی کتاب را به خود اختصاص داده باشد. شایان ذکر است که این فراوانی‌ها، هم شامل آموزش مفاهیم و هم دربرگیرنده‌ی تمرین‌ها هستند. (جدول ۱)

تحلیل محتوای مربوط به اندازه‌گیری در کتاب‌های درسی ریاضی دوره‌ی ابتدایی در ایران، نشان می‌دهد که:

● در کتاب‌های ریاضی دوره‌های ابتدایی و راهنمایی، طرح موضوع اندازه‌گیری به معرفی چند کمیت، ارایه‌ی فرمول‌هایی برای محاسبه‌ی محیط و مساحت و حجم برخی اشکال و احجام هندسی، معرفی واحدهای استاندارد اندازه‌گیری و روش تبدیل واحدها و تمرین‌های محاسباتی در این زمینه، محدود می‌شود.

● فقط تعداد محدودی از فعالیت‌هایی که در کتاب آمده است را می‌توان به عنوان فعالیت‌های واقعی اندازه‌گیری به شمار آورد. بیش‌تر فعالیت‌های شمارش شده در جدول فوق، با یک نگاه خوش‌بینانه، به عنوان فعالیت در نظر گرفته شده‌اند و در حقیقت، فعالیت‌های واقعی اندازه‌گیری نیستند. به عنوان مثال تعداد تمام صفحاتی که در آن‌ها از دانش‌آموزان خواسته شده است طول یک پاره‌خط را با خط‌کش اندازه بگیرند، در فراوانی مربوط به فعالیت‌های واقعی در کتاب‌ها، انگشت‌شمار بوده و آن‌ها هم با توجه به روح کلی حاکم بر کتاب، به سادگی توسط معلمان قابل چشم‌پوشی هستند.

● همانند فعالیت‌های اندازه‌گیری، شمارش فراوانی استفاده از واحدهای غیراستاندارد نیز بسیار خوش‌بینانه بوده است. واحدهای غیراستاندارد به کار گرفته شده در کتاب، بسیار شبیه به واحدهای استاندارد می‌باشند. مثلاً برای پوشاندن سطح اشکال و به دست آوردن مساحت آن‌ها، همه جا از شکل مربع به عنوان واحد، استفاده شده است. استفاده‌ی کتاب از واحدهای غیر استاندارد برای معرفی واحدهای استاندارد، در مفهوم طول چشم‌گیرتر از مفاهیم دیگر است. اما حتی در این مورد نیز، دانش‌آموزان، محدود به استفاده از نوارهای مدرجی هستند که مشخصات آن‌ها دقیقاً در کتاب آمده است. در حالی که شاید استفاده از واحدهای متنوع دیگر مانند طول گیره‌ی کاغذ، طول مداد، طول وجب و نظایر آن‌ها، مفهوم واحد اندازه‌گیری غیراستاندارد در مقابل واحد اندازه‌گیری استاندارد را ملموس‌تر و قابل فهم‌تر کند.

جدول (۱)

موضوع	فراوانی	موضوع	فراوانی	موضوع	فراوانی
ریاضیات مربوط به اندازه گیری	۳۸	واحدهای استاندارد	۱۴	تخمین اندازه	۹
فعالیت‌های اندازه‌گیری	۲۸	واحدهای غیر استناندارد	۱۶	تکنولوژی	۰
ابزارهای رسمی اندازه‌گیری	۲۵	معیارهای مورد استناد شخصی	۶	زمینه‌های فرهنگی اندازه‌گیری و نیازسنجی فرهنگی	۶

● استفاده از واحدهای غیراستاندارد که در صورت به کارگیری صحیح، می توانند به معیارهای مورد استناد شخصی تبدیل شوند، محدود به چند داستان می شود:

«رضا در کلاس دوم درس می خواند. برادرش احمد کلاس پنجم است. روزی رضا و احمد تصمیم گرفتند که عرض خیابان را اندازه بگیرند. اول رضا خیابان را قدم کرد. عرض خیابان ۱۵ قدم بود. بعد احمد اندازه گرفت. اما اندازه ی آن ۱۱ قدم بود. می دانید چرا اندازه هایی که رضا و احمد به دست آوردند با هم مساوی نیستند؟» (ریاضی دوم دبستان، ص۸۷). این در حالی است که انجام دادن چنین فعالیت هایی، فواید آموزشی فراوانی را به دنبال خواهد داشت.

● در این کتاب ها، به کودکان، فرصت کافی برای ساختن معیارهای مورد استناد شخصی داده نشده است.

● هیچ مسأله ی مربوط به تخمین هایی که در زندگی روزمره کاربرد دارند، در کتاب ها مطرح نشده است.

● تکنولوژی، که ابزاری مفید در زمینه ی تقویت توانایی های اندازه گیری شناخته شده است، هیچ جایگاهی در کتاب های درسی ریاضی و علوم دوره های ابتدایی و راهنمایی ندارد.

● زمینه های فرهنگی و واحدهای بومی در کتاب ها نادیده گرفته شده اند.

از آن جایی که اندازه گیری، بین علوم مختلف ارتباط برقرار کرده و کاربردهای فراوانی در زندگی روزمره دارد، لازم است که با تأملی دوباره در آموزش اندازه گیری در برنامه ی درسی ریاضی مدرسه ای در ایران، به این موضوع توجه ویژه ای شود. به همین منظور، در بخش بعدی به ارایه ی راهکارهایی برای بهبود آموزش اندازه گیری در ریاضیات مدرسه ای می پردازیم.

توصیه هایی برای آموزش اندازه گیری در برنامه ی درسی ریاضی مدرسه ای در ایران

● استفاده از دانش موضوعی ریاضی، برای اندازه گیری لازم است. اما نباید تأکید اصلی برنامه ی درسی ریاضی دوره های ابتدایی بر آن باشد.

● استفاده از فعالیت های واقعی اندازه گیری در یک برنامه ی درسی مؤثر برای اندازه گیری، لازم است. باید به کودکان فرصت داد تجارب عملی کافی در این زمینه کسب کرده و با بازتاب بر فعالیت های اندازه گیری خود، به یک فهم و درک واقعی نسبت به مفاهیم و فرآیندهای اندازه گیری دست یابند.

● استفاده از واحدهای غیراستاندارد برای درک مفهوم واحد اندازه گیری و ایجاد قدرشناسی نسبت به واحدهای استاندارد ضروری است.

● ایجاد معیارهای مورد استناد ذهنی، مانند معیارهایی آشنا برای یک متر، یک کیلوگرم، صدکیلومتر و نظایر آن، و استفاده از ابزارهای ذهنی دیگر مانند محور ذهنی اعداد، به کودکان در درک مفاهیم اندازه گیری و توسعه ی توانایی تخمین زدن کمک می کند.

● تخمین زدن اندازه ها، یکی از مهارت های سواد عددی و سواد شهروندی است که باید توجه خاصی را در برنامه ی درسی دوره های ابتدایی به آن مبذول داشت.

● از تکنولوژی می توان برای توسعه ی توانایی های مربوط به اندازه گیری و تخمین زدن استفاده کرد.

● استفاده از زمینه های فرهنگی و ارجاع به واحدهای بومی، زمینه ی مناسبی برای آشنایی کودکان با واحدهای استاندارد و توسعه ی توانایی تخمین زدن در آن ها فراهم می کند.

پیوست (۱)

در این بررسی که به تفکیک پایه ی تحصیلی انجام شده است، به کمیت هایی که در کتاب های درسی ریاضی ابتدایی و راهنمایی در ایران، معرفی شده اند، در جدول زیر کدهایی را نسبت داده ایم تا دنبال کردن روند آموزش یک کمیت خاص، در طول پنج سال ابتدایی و سه سال راهنمایی، آسان شود.

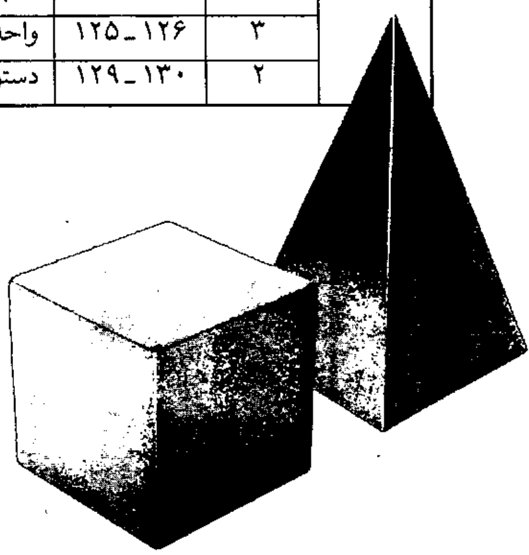
این بررسی بر اساس کتب درسی ریاضی دبستان و راهنمایی در سال تحصیلی ۸۶-۱۳۸۵ و کتب علوم تجربی دوره ی راهنمایی منتشر شده در سال تحصیلی ۸۲-۱۳۸۱ می باشد.

مفهوم	طول و محیط	مساحت	گنجایش و حجم	جرم	زمان
کد	۱	۲	۳	۴	۵

کتاب‌های ریاضی دوره ی ابتدایی

کتاب	کد مفهوم	شماره صفحه در کتاب	محتوای ارایه شده
ریاضی اول ابتدایی	۱	۱۳۶-۱۳۳	مقایسه‌ی طول : استفاده از کلمات کوتاه‌ترین، بلندترین، کوتاه‌تر، بلندتر و هم‌اندازه .
	۴	۱۴۵	مقایسه‌ی جرم : استفاده از کلمات سنگین‌تر و سبک تر (از کودکان خواسته شده تا جرم اشیا را با دیدن شکل آن‌ها مقایسه کنند) .
ریاضی دوم ابتدایی	۵	۷۲-۷۰	خواندن ساعت : آموزش خواندن ساعت با دقیقه‌های مضرب۵ (بدون این‌که به مفاهیم ابتدایی‌تر مربوط به آن، مثلاً مقایسه کردن، پرداخته شود) .
	۱	۸۵-۸۳	اندازه‌گیری طول : ساختن نوار مدرج با استفاده از یک واحد فرضی که در کتاب مشخص شده است؛ اندازه‌گیری طول‌های مختلف با استفاده از آن .
	۱	۸۸-۸۶	ایجاد آمادگی برای درک مفهوم واحد طول : بیان سه مثال مختلف درباره‌ی این که استفاده از واحدهای مختلف، اندازه‌های متفاوت را پدید می‌آورد .
	۱	۹۱-۸۹	معرفی سانتی‌متر و متر : معرفی واحدهای استاندارد .
	۶	۱۰۹-۱۰۸	پول : سکه‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰، ۲۰، ۵۰ و ۲۵۰ ریالی و اسکناس‌های ۲۰۰، ۱۰۰۰، ۵۰۰۰، ۱۰۰۰۰، ۲۰۰۰۰ریالی .
ریاضی سوم ابتدایی	۱	۳۲	معرفی کیلومتر : تبدیل واحدهای متر و کیلومتر .
	۵	۵۹	خواندن ساعت : تمرین مطالب سال گذشته .
	۴	۶۱-۶۰	یادآوری مفهوم جرم : مقایسه‌ی جرم‌ها با گرفتن آن‌ها در دست .
	۴	۶۲	ترازو : مقایسه‌ی جرم‌ها با استفاده از ترازو .
	۴	۶۴-۶۳	اندازه‌گیری جرم : معرفی وزنه‌ی ترازو و کیلوگرم و گرم (بیان شده است که جرم ده‌دانه عدس، تقریباً یک گرم است)؛ از بچه‌ها خواسته شده است جرم‌های مختلف را با ترازو اندازه بگیرند .
	۱	۷۲	اندازه‌گیری طول و مقایسه‌ی پاره‌خط‌ها .
	۱	۷۴-۷۳	تخمین و اندازه‌گیری : حدس زدن طول پاره‌خط‌ها (۲تا۸سانتی‌متر) و سپس اندازه‌گیری آن‌ها .
	۱	۷۶	معرفی محیط .
	۱	۷۸-۷۷	تعیین محیط چند ضلعی‌ها : تمرین .
	۲	۱۲۱ـ۱۱۸	معرفی واحد اندازه‌گیری مساحت : اندازه‌گیری مساحت یک مستطیل با دو مربع مختلف و به دست آوردن عددهای مختلف . معرفی واحد استاندارد مساحت (یک سانتی‌متر مربع) و تمرین آن .
	۲	۱۲۳ـ۱۲۲	معرفی طول و عرض و دستور مساحت مستطیل و تمرین آن .
	۵	۱۴۲ـ۱۴۱	خواندن دقیقه‌های ساعت : تمرین خواندن ساعت (با دقیقه‌هایی که مضرب ۵ نیستند) .
	۵	۱۶۱ـ۱۶۰	خواندن ساعت در بعدازظهر .
	۱	۱۶۴ـ۱۶۳	معرفی میلی‌متر : اندازه‌گیری تقریبی پاره‌خط‌ها با واحد سانتی‌متر؛ معرفی میلی‌متر برحسب سانتی‌متر؛ تمرین تبدیل واحدها و استفاده از خط‌کش .
	۵	۱۸۶	ساعت : استفاده از کلمات ربع و نیم .

ریاضی چهارم ابتدایی	۳	۱۱۰_۱۱۱	مفهوم گنجایش : خالی کردن مایع از ظرف بزرگ در ظرف‌های مشابه کوچک‌تر (گنجایش ظرف بزرگ ، چند برابر گنجایش ظرف کوچک است؟) .
	۳	۱۱۲	معرفی واحد گنجایش : بیان داستانی درباره‌ی این که نداشتن واحد استاندارد ، مشکل‌ساز است ؛ معرفی واحد استاندارد لیتر .
	۱	۱۳۱	مفهوم محیط .
	۱	۱۳۴_۱۳۵	محیط چندضلعی‌ها .
	۱	۱۳۶_۱۳۸	دستور محیط چندضلعی‌های منتظم .
	۲	۱۶۷_۱۶۸	مساحت : مشابه سال سوم .
	۲	۱۶۹	واحد مساحت : مشابه سال سوم .
	۲	۱۷۰_۱۷۱	دستور مساحت مستطیل و مربع .
	۲	۱۷۵_۱۷۷	دستور مساحت متوازی‌الاضلاع و مثلث .
	۲	۱۷۹	حل مسأله .
ریاضی پنجم ابتدایی	۱	۳۴	مساحت : معرفی هکتار .
	۲	۳۵	معرفی کیلومتر و کیلومتر مربع .
	۵	۴۲	معرفی ثانیه .
	۵	۴۳	خواندن ساعت با ثانیه ؛ معرفی اعداد مرکب (ثانیه ، دقیقه ، ساعت) .
	۵	۴۴_۴۶	مقایسه و جمع و تفریق اعداد مرکب .
	۲	۵۳_۵۲	دستور مساحت لوزی و ذوزنقه .
	۱	۸۶_۸۸	تمرین تبدیل واحدهای طول .
	۳	۹۳_۹۵	معرفی حجم و واحد اندازه‌گیری استاندارد سانتی‌متر مکعب .
	۳	۹۶_۹۷	به دست آوردن دستور حجم مکعب مستطیل و مکعب .
	۴	۱۰۷_۱۰۹	تبدیل واحدهای جرم : گرم و کیلوگرم ؛ استفاده از اعداد اعشاری .
	۲	۱۱۳_۱۱۴	بازی و ریاضی : مساحت تقریبی شکل‌های نامنظم که بر صفحه‌ای شطرنجی رسم شده‌اند .
	۱	۱۱۵_۱۱۷	اندازه‌گیری محیط دایره : نسبت محیط به قطر ؛ معرفی عدد پی ؛ دستور محیط دایره ؛ تبدیل دایره به چندضلعی‌های منتظم و مقایسه‌ی محیط‌ها .
	۳	۱۲۴	گنجایش : معرفی لیتر .
	۳	۱۲۵_۱۲۶	واحد گنجایش : رابطه‌ی بین لیتر ، سی‌سی ، متر معکب ، سانتی‌متر مکعب .
	۲	۱۲۹_۱۳۰	دستور مساحت دایره .



کتاب‌های ریاضی دوره ی راهنمایی

کتاب	کد مفهوم	شماره صفحه در کتاب	محتوای ارایه شده
ریاضی اول راهنمایی	۱ و ۳ و ۴	۶۸	تبدیل واحدها (تمرین در زمینه‌ی اعداد اعشاری) .
	۱	۸۲	مقایسه‌ی طول پاره‌خط‌ها و اندازه‌ی یک پاره‌خط : واحد قرار دادن طول یک پاره‌خط و محاسبه‌ی طول پاره‌خط‌های دیگر بر حسب آن .
	۱	۸۳	بیان رابطه‌ی بین واحدهای میکرون ، میلی‌متر ، سانتی‌متر ، متر و کیلومتر .
	۱	۸۳	تخمین طول پاره‌خط و سپس اندازه‌گیری آن .
	۱	۸۴ـ۸۳	به دست آوردن فاصله‌ی نقاط با خط‌کش .
	۱	۸۵ـ۸۴	تمرین در زمینه‌ی این‌که استفاده از چه واحدی ، در موارد مختلف ، مناسب است .
	۱	۸۵	آشنایی با ابعاد قطع وزیری .
	۱ و ۳	۱۲۳	استفاده از اندازه‌های اعشاردار در مسایل کلامی مربوط به مبحث اعداد اعشاری .
	۱ و ۵	۱۲۹ـ۱۲۵	دمای هوا ، زمان و ارتفاع از سطح دریا : برای معرفی اعداد مثبت و منفی .
ریاضی دوم راهنمایی	۱	۱۵۸ـ۱۵۶	معرفی مختصات و طول و عرض جغرافیایی .
	۲	۱۷۲ـ۱۷۱	مفهوم مساحت : تقسیم شکل‌های منظم به مربع‌های واحد ؛ تمرینی در این زمینه که : مساحت شکل ، با جابه‌جا کردن اجزای آن ثابت می‌ماند .
	۲	۱۸۰ـ۱۷۳	دستور مساحت مستطیل ، مربع ، متوازی‌الاضلاع ، مثلث ، لوزی ، ذوزنقه و دایره ؛ تمرین آن‌ها .
	۳	۱۸۹	معرفی واحد حجم : سانتی‌متر مکعب .
	۲ و ۳	۱۹۷ـ۱۹۰	دستور محاسبه‌ی حجم منشور و حجم استوانه ؛ تمرین درباره‌ی آن‌ها ؛ دستور محاسبه‌ی مساحت جانبی منشور و مساحت جانبی استوانه ؛ تمرین درباره‌ی آن‌ها .
ریاضی سوم راهنمایی	۲ و ۳	۱۴۹ـ۱۴۶	دستور حجم هرم ، حجم مخروط و حجم و سطح کره ؛ تمرین درباره‌ی آن‌ها .

زیرنویس‌ها

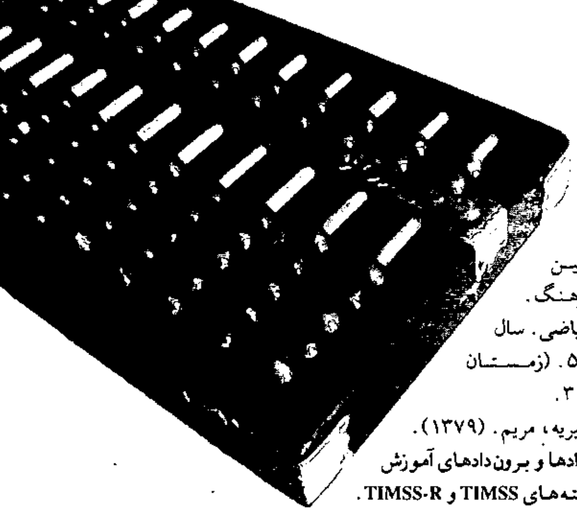
1. Bishop
2. Buys and De Moor
3. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
4. Fey
5. Numeracy
6. Campbell
7. Baxter
8. Conceptualization of Number
9. Wagenen
10. Nonstandard Units

۱۱ . این لغت ، ترجمه‌ی مفهومی است که در متون مختلف با عناوین متفاوت زیر به کار رفته است :
Benchmark & Individual Frame of Reference & Reference Point

12. Estimation
13. Measure Sense
14. Sumio
15. Clements
16. National Assessment of Educational Progress
17. National Science Education Standards (NSES)
18. Gal'I perin
19. Georgiev
20. Figueras
21. Waldegg
22. Mental Ruler
23. Conceptual Ruler
24. Visible Units
25. Usiskin
26. Guess and Check
27. Practice with Feedback
28. Conceptual Scale
29. Mental Number Line
30. Crites
31. Nunes
32. Schliemann

۳۳ . LOGO توسط سیمون پیرت ابداع شده است .

34. Ethnomathematics
35. Culturally-based
36. TIMSS-R



منابع

Baxter, M., Leddy, E., Richards, L., Tomlin, A., Coben, D. (April 2006). Research Report: Measurement wasn't taught when they built the pyramids, Was it?. National Research and Development Centre for adult literacy and numeracy. *http:..www.nrdc.org.uk*

Bergeson, T., Fitton, R., Bylsma, P., (2000). Teaching and Learning Mathematics: using research to shift from the 'yesterday' mind to the 'tomorrow' mind. *http://www.k12.wa.us*

Bishop, Alan. J. (1988). *Mathematical enculturation.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic, pp. 175-203.

Buys K. & De Moor E. (2005): Domain Description Measurement. In M. v. d.H. Panhuizen & K. Buys (Eds.); *Young Children Learn Measurement and Geometry.* pp 15-36, FI & SLO.

Campbell P. F. (1990). Young Children's Concept of Measure. In H. P. Steffe & T. Wood (Eds.); *Transforming Children's Mathematics Education: International Perspectives.* pp. 92-99, Lawtence Erlbaum associates, publishers. Hillsdale, New *Jersey.*

Clements, Douglas H. (1999). Teaching Length Measurement: Research Challenges. *School Science and Mathematics*, Vol. 99, No. 1. (January 1999), pp. 5-11.

Crites, Terry. (1992). Skilled and Less Skilled Estimators' Strategies for Estimating Discrete Quantities. *The Elementary School Journal*, Vol. 92, No. 5. (May, 1992), pp. 601-619.

Fey J. T. (1990): Quantity. in L. A. Steen (Ed); *On The Shoulders Of Giants: new approaches to numeracy.* pp 89-91, National Academy Press. Washington, D. C. 1990.

Joram, E., Subrahmanyam, K., Gelman, R. (1998). Measurement Estimation: Learning to Map the Route from Number to Quantity and Back. *Review of Educational Research*, Vol. 68, No. 4. (Winter, 1998), pp. 413-449.

Kordaki, M., Potari, D. (1998). Children's Approaches to Area Measurement through Different Contexts. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 17, No. 3, pp. 303-316.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va: NCTM, 2000.

National Research Council. (1996). National science education standards. Washington, DC: National Academy Press. [Available online at: *http://www.nap.edu/readingroom/books/nses/html]*

Sumio, M. (1990). Notes on Early Mathematical Experiences. In H. P. Steffe & T. Wood (Eds.); *Transforming Children's Mathematics Education: International Perspectives.* pp. 377-382, Lawtence Erlbaum associates, publishers. Hillsdale, New *Jersey.*

Wagenen, R. K. V., Flora, J. A., Walker, A. A. (1976). The introduction of Mathematics through Measurement or through Set Theory: A Comparison. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 7, No. 5, (Nov., 1967), pp. 299-307.

بیشاپ، آلن. جی. (۱۳۷۶). رابطه‌ی بین آموزش ریاضی و فرهنگ. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**. سال دوازدهم، شماره ۵۰. (زمستان ۱۳۷۶). صص ۱۱ ـ ۳.

کیامنش، علیرضا و خیریه، مریم. (۱۳۷۹). **روند تغییرات درون‌دادها و برون‌دادهای آموزش ریاضی براساس یافته‌های TIMSS و TIMSS-R.** پژوهشکده تعلیم و تربیت، انجمن بین‌المللی ارزشیابی پیشرفت تحصیلی.

رستمی، محمدهاشم و کریم‌پور، رحیم و للهی، کاظم. (چاپ ۱۳۸۴). **ریاضی اول دبستان.** سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

دیبایی، محمدتقی و فرزان، مسعود. (چاپ ۱۳۸۴). **ریاضی دوم دبستان.** سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

بابلیان، اسماعیل و بیژن‌زاده، محمدحسن و باهمت شیروانه‌ده، صفر. (چاپ ۱۳۸۴). **ریاضی سوم دبستان.** سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

شیدفر، عبدالله و فرزان، مسعود و فرهودی‌مقدم، پرویز و کریم‌پور، رحیم. (چاپ ۱۳۸۵). **ریاضی چهارم دبستان.** سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

بابلیان، اسماعیل و دیبایی، محمدتقی. (چاپ ۱۳۸۴). **ریاضی پنجم دبستان.** سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

فرزان، مسعود و باهمت شیروانه‌ده، صفر و دیبایی، محمدتقی و فرهودی‌مقدم، پرویز. (چاپ ۱۳۸۵). **ریاضی اول راهنمایی.** سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

فرزان، مسعود و باهمت شیروانه‌ده، صفر و دیبایی، محمدتقی و فرهودی‌مقدم، پرویز. (چاپ ۱۳۸۵). **ریاضی دوم راهنمایی.** سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

فرزان، مسعود و باهمت شیروانه‌ده، صفر و دیبایی، محمدتقی و فرهودی‌مقدم، پرویز. (چاپ ۱۳۸۵). **ریاضی سوم راهنمایی.** سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

دانش‌فر، حسین و امانی، محمود و محمودزاده، غلامعلی و ارشدی، نعمت‌الله و حسینی، احمد. (چاپ ۱۳۸۱). **علوم تجربی اول راهنمایی.** سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

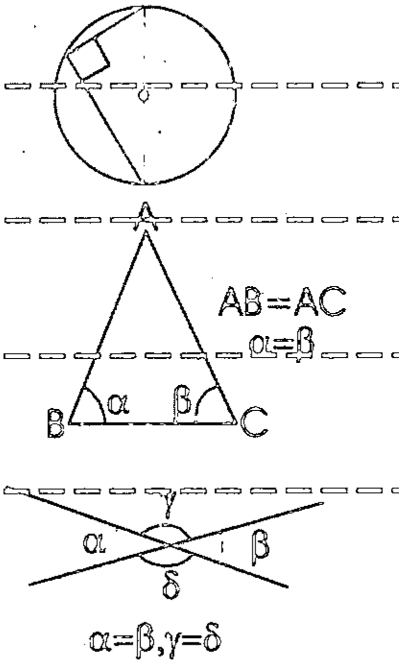
دانش‌فر، حسین و امانی، محمود و محمودزاده، غلامعلی و ارشدی، نعمت‌الله و حسینی، احمد. (چاپ ۱۳۸۱). **علوم تجربی دوم راهنمایی.** سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

دانش‌فر، حسین و امانی، محمود و محمودزاده، غلامعلی و ارشدی، نعمت‌الله و حسینی، احمد و کرام‌الدینی، محمد. (چاپ ۱۳۸۱). **علوم تجربی سوم راهنمایی.** سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

توضیحات

نسخه‌ی ابتدایی و محدودتر چارچوب حاضر در این مقاله، در ششمین همایش انجمن برنامه‌ریزی درسی ایران (۱۶ و ۱۷ اسفندماه ۱۳۸۵، شیراز) ارائه شد. در این مقاله تحلیل محتوای کتاب‌های درسی، بر مبنای چارچوب توسعه یافته انجام شده است.

مقایسه‌ی آموزش قضیه‌ی تالس در کتاب‌های درسی ریاضی ایران و فرانسه



مهشید ترابی

کارشناس ارشد ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان دامغان

از آنجا که تدریس ریاضی، به ویژه هندسه، با مشکلات فراوانی روبه‌رو است، به آموزش قضیه‌ی تالس به عنوان بخشی از هندسه در کتاب‌های درسی ریاضی در ایران و فرانسه پرداختیم. یکی از انگیزه‌های ما برای این تحقیق این بود که اعتقاد داشتیم دانستن قضیه‌ی تالس و کاربردهای آن، برای حل مسایل زندگی روزمره مفید است. در کل می‌توان گفت هندسه شامل مطالعه‌ی شکل‌ها و خواص آن‌ها می‌باشد. برای بسیاری از دانش‌آموزان، کلاس هندسه تنها دنباله‌ای از قضایا برای حفظ کردن است و مسایل هندسه، به عنوان معماهایی حل نشدنی که با روحیه‌ی دانش‌آموزان سازگار نیستند، نمود پیدا می‌کنند.

برای انجام این مقایسه، خود را محدود به تحلیل کتاب‌های درسی دو کشور ایران و فرانسه در دوره‌هایی که این قضیه تدریس می‌شود نمودیم و پاسخ‌های دانش‌آموزان به تعدادی از سؤالات در مورد این قضیه و عکس قضیه را تجزیه و تحلیل کردیم.

در ابتدای این نوشته، شرح مختصری از نظام آموزشی فرانسه را می‌آوریم.

نظام آموزشی فرانسه شامل ۵ سال دوره‌ی ابتدایی، ۴ سال دوره‌ی راهنمایی و ۳ سال دوره‌ی متوسطه است. برخلاف ایران که برای هر درس فقط یک کتاب درسی توسط دفتری زیرنظر آموزش و پرورش تألیف می‌شود (نظام متمرکز)، در فرانسه، نظام تألیف بیش‌تر شبیه به دانشگاه‌های ایران، یعنی غیرمتمرکز است. یعنی پس از مشخص شدن سرفصل‌ها از طرف وزارت آموزش و پرورش، مؤلفین مختلف براساس آن، کتاب‌های مختلفی تألیف می‌کنند و پس از تأیید آن‌ها توسط سازمان‌های ذیصلاح، معلمان براساس سلیقه‌ی تدریس خود و سطح دانش‌آموزان، یک کتاب را انتخاب و تدریس می‌کنند. کتاب‌های بررسی شده در این تحقیق، کتب ریاضی سال سوم راهنمایی و هندسه‌ی دوم و سوم دبیرستان در ایران و کتب ریاضی سال سوم و چهارم راهنمایی و اول و دوم دبیرستان در فرانسه بود که بررسی، فقط روی قسمت‌هایی از کتاب‌ها که شامل قضیه‌ی تالس بودند، صورت گرفت.

الف) تاریخچه‌ی قضیه‌ی تالس

تالس، فردی یونانی بود که ۶۰۰ سال قبل از میلاد مسیح زندگی می‌کرد. وی، فیلسوف و دانشمند و ریاضی‌دان بود و به عنوان پدر علم هندسه‌ی استدلالی شناخته می‌شود. سی صد سال پیش از اقلیدس، بابلیان و مصریان قضیه‌ای که امروزه به قضیه‌ی تالس شهرت دارد را می‌شناختند. بابلیان از قضیه‌ی تالس برای اندازه‌گیری طول‌های غیرقابل دسترس، مثل ارتفاع یک هرم یا عمق یک چاه استفاده می‌کردند. البته، بعضی‌ها معتقدند که تالس، مخترع قضیه‌ی تالس نبوده بلکه اطلاعاتی راجع به روابط بین زاویه‌ها در یک مثلث به دست آورده بود.

ب) واژه‌ی هندسه و انواع مختلف هندسه

واژه‌ی هندسه[1] نشأت گرفته از زبان یونانی و مرکب از دو جزء زمین[2] و اندازه‌گیری[3] می‌باشد. یونانی‌ها به مرور علم هندسه را که نخست برای اندازه‌گیری روی زمین استفاده می‌شد، به اندازه‌گیری مساحت و سپس حجم اجسام فضایی تعمیم

دادند. ولی از آنجا که اغلب از کاربردهای آن استفاده می‌کردند، دقت لازم را برای کسب فرمول‌های دقیق به خرج نمی‌دادند. به هرحال، یونانی‌ها با تصورات وسیعی که داشتند و با توجه به نیازهای عملی در زندگی روزمره، توسعه‌ی خارق‌العاده‌ای به هندسه دادند. در مفهوم جدید، هندسه، بر پایه‌ی اندازه‌گیری بنا نمی‌شود. چرا که علاوه بر هندسه‌ی اقلیدسی که در آن هنوز اندازه‌گیری مهم است، شاخه‌هایی چون توپولوژی و هندسه‌ی آفینی نیز مطرح هستند که به مفاهیمی چون منحنی‌های باز یا بسته، مجموعه‌های محدب، خطوط موازی و نظایر آن می‌پردازند.

پ) عملکردهای گوناگون یک شکل

در مورد عملکردهای گوناگون یک شکل، افراد مختلف نظرات مختلفی دارند. از جمله در سال ۱۹۸۳، بزو[۴] در صفحه‌ای از کتابش نوشته است که «روی یک شکل قابل دید، می‌توان یک سری روابط و فرضیه‌هایی را از رابطه‌هایی که در یک بیان شفاهی شفاف نیستند، به راحتی دید.» پولیا (۱۹۶۵) نیز معتقد است که وجود یک شکل، نقش مهمی در سرعت بخشیدن به پیدا کردن راه‌حل مسأله و درک سریع مطلب دارد.

هم‌چنین، در بسیاری از مواقع، به کمک یک شکل می‌توان ایده‌ی اصلی برای یک اثبات استدلالی پیچیده را به دست آورد. در دوره‌های مختلف تحصیلی به موارد متفاوتی از درک یک شکل برمی‌خوریم:

مثلاً در یک دوره مشاهده می‌شود که با یک نگاه به شکل، دانش‌آموز می‌تواند سریعاً به راه‌حل مسأله پی ببرد. ولی در دوره‌ای دیگر، دانش‌آموز توانایی این کار را ندارد، زیرا ممکن است توجه خود را معطوف به قسمتی از شکل کند که نیازی به آن توجه نیست، یعنی برای حل مسأله کاربردی ندارد. گاهی عوامل زیادی که در شکل مشاهده می‌گردد باعث اشتباه دانش‌آموز می‌شود. بنابراین، می‌توان گفت که روش‌های زیادی برای نگاه کردن یک شکل وجود دارد که انتخاب یکی، باعث رد دیگری می‌شود. پس همواره نگاه اولیه به یک شکل، از اهمیت زیادی برخوردار است اما نباید خود را محدود به نگاه اولیه و فوری کنیم. در واقع، به دلیل فاصله‌ای که بین دیدگاه معلم و دیدگاه دانش‌آموز در مورد یک شکل وجود دارد، می‌توان بیان کرد که درک‌های متفاوتی از یک شکل می‌تواند وجود داشته باشد.

ت) انواع درک و تصور از یک شکل هندسی

طبق نظر ریموند دووال[۵]، در هندسه چهار نوع درک متفاوت از یک شکل می‌تواند وجود داشته باشد که عبارتند از:

۱) درک مشاهده‌ای و سریع[۶]؛
۲) درک عقلانی[۷]؛
۳) درک پی در پی (متوالی)[۸]؛
۴) درک عمل‌کننده[۹].

که در زیر، مروری اجمالی بر هریک داریم.

۱) درک مشاهده‌ای و سریع؛ یعنی پی بردن به شیء مورد نظر در صفحه یا در فضا با اولین نگاه چشم و به صورت خود به‌خودی و ناخودآگاه که این شناسایی، پایدار می‌ماند؛ درک کلی که فقط از ملاحظه و مشاهده نشأت می‌گیرد.

۲) درک عقلانی؛ زمانی از یک شکل درکی عقلانی داریم که به همراه یک نشانه‌گذاری، یک تصور یا یک فرضیه که با آن، یک سری خواص در ذهن یادآوری می‌شود، به شکل نگاه کنیم. در واقع، هرگز نمی‌توان گفت که این خاصیت ریاضی، روی شکل به تنهایی دیده می‌شود. برای مثال، توازی دو خط و تساوی دو پاره‌خط را هرگز نمی‌توان با نگاه چشم ارزیابی کرد یا با اندازه‌گیری ساده به آن پی برد. (به علت وجود خطا و اشتباه

در دید). البته می‌توان خاطرنشان کرد که در تمرین‌هایی که برای حل آن‌ها از قضایا و تعاریف استفاده می‌کنیم، از این نوع درک استفاده می‌شود.

۳) درک متوالی؛ به ترتیب ساخت شکل توجه کردن است. این ترتیب، نه تنها به خواص ریاضی که در زمان ساخت شکل به کار رفته بستگی دارد، بلکه با اجبارهای تکنیکی و وسایل استفاده شده در این ساخت هم مرتبط است (مثل خط‌کش و پرگار).

۴) درک عمل کننده؛ از فراموش‌شده‌ترین انواع تصورات از یک شکل است که شامل درک تغییرات متفاوت ممکن بر روی یک شکل داده شده و تبدیل آن به یک شکل دیگر است.

باتوجه به انواع مختلف درک و تصور از یک شکل هندسی، می‌توان به انواع تغییراتی نیز که می‌توان روی یک شکل انجام داد، اشاره کرد:

الف) تغییرات سلولی[۱۰]؛ شامل تقسیم یک شکل به قطعاتی برای تولید یک شکل جدید توسط آن‌ها؛

ب) تغییرات بصری[۱۱]؛ شامل بزرگ یا کوچک کردن یا تغییر فرم دادن یک شکل؛

پ) تغییرات موقعیتی[۱۲]؛ شامل جابه جایی شکل از یک صفحه به صفحه‌ی دیگر (مثلاً در صفحه‌ی موازی با صفحه‌ی اول)؛

به اعتقاد دووَل (۱۹۹۴)، زمانی که یکی از این تغییرات منجر به ایده‌ای برای حل مسأله باشد، شکل به عنوان یک نیروی کمکی برای حل مسأله در نظر گرفته می‌شود.

هدف اصلی تحقیق

هدف اصلی در این تحقیق، مقایسه‌ی آموزش قضیه‌ی تالس در کتاب‌های درسی ریاضی در ایران و فرانسه بود که این مقایسه، محدود به مباحث کلاسی، تمرین‌ها و مسایل کتاب‌ها و تفاوت دانش‌آموزان در به کارگیری این قضیه بود. در حقیقت، سه سؤال زیر، این تحقیق را هدایت کردند:

آیا در پایان سال تحصیلی، دانش‌آموز قضیه‌ی تالس و عکس آن را فهمیده است یا خیر؟ چرا گاهی اوقات، دانش‌آموزان تفاوت بین قضیه و عکس آن را درک نمی‌کنند؟ اگر در یک سؤال مطرح شده درباره‌ی قضیه‌ی تالس، متغیر را عوض کنیم ـ مثلاً نحوه قرار گرفتن خطوط موازی را ـ آیا دانش‌آموز، هنوز قادر به پاسخ گویی هست یا خیر؟

چارچوب‌های نظری برای تجزیه و تحلیل داده‌ها

برای تجزیه و تحلیل داده‌های این تحقیق، از چارچوب نظری گی بروسو[۱۳] که درباره‌ی اساس و روش‌های آموزش ریاضی است و نیز، چارچوب نظری نیکولاس بالاچف[۱۴] که مربوط به انواع مختلف استدلال است، استفاده شد.

در این چارچوب، بالاچف، استدلال را به پنج دسته‌ی زیر تقسیم کرده است:

۱) **تجربه‌ی ساده**[۱۵]؛ یعنی اثبات یک گزاره از طریق بررسی آن توسط چند مثال مانند اندازه گیری یک شکل توسط خط کش؛

۲) **تجربه‌ی اصلی**[۱۶]؛ بررسی یک شرط در یک حالت؛

۳) **مثال خاص**[۱۷]؛ یعنی توضیح اعتبار یک دلیل یا علت، توسط یک عمل یا ایجاد تغییراتی بر روی یک شیء؛

۴) **تجربه‌ی ذهنی**[۱۸]؛ مانند استفاده‌ی ذهنی از یک شکل یا به جواب رسیدن توسط تجربه؛

۵) **اثبات کلامی**[۱۹]؛ که در آن، نیازی به تجربه نیست و توسط نظریه‌های صورت‌بندی شده و تعریف‌ها و خواص مشخص شده، به حل مسأله پرداخته می‌شود.

روش تحقیق

داده‌های این تحقیق از دو منبع به دست آمدند؛ یکی، پاسخ دانش‌آموزان به ۱۰ سؤال برای هر دوره و دیگری، تحلیل محتوای کتاب‌های درسی ریاضی.

با استفاده از کتاب‌های درسی ریاضی، ۱۰ سؤال برای دوره‌ی راهنمایی و ۱۰ سؤال برای دوره‌ی متوسطه در نظر گرفته

شد. محتوای سؤال‌های طرح شده برای دوره‌ی راهنمایی و دبیرستان یکی بود و فقط، در شکل‌ها تغییراتی داده شده بود که از آن، به عنوان یک متغیر آموزشی استفاده شد. مثلاً در سؤال‌های دوره‌ی راهنمایی، استفاده از قضیه‌ی تالس و عکس آن برای حل مسأله، قید شده بود ولی برای سؤال‌های دوره‌ی متوسطه، تشخیص استفاده از قضیه‌ی تالس برای حل مسأله به‌عهده‌ی دانش‌آموز بود و انتظار می‌رفت که وی، با استفاده از شکل و فرض مسأله، به استفاده از قضیه‌ی تالس برای حل مسأله پی برد و این مورد، به عنوان دومین متغیر آموزشی در نظر گرفته شد. سؤال‌ها بین ۵۰ دانش‌آموز دوره‌ی راهنمایی و ۵۰ دانش‌آموز دوره‌ی متوسطه توزیع شد. در فرانسه، دانش‌آموزان از کلاس‌های مختلف از پایه‌ی چهارم راهنمایی و سال اول دبیرستان و در ایران، از پایه‌ی سوم راهنمایی و پایه‌ی دوم دبیرستان به سؤال‌ها پاسخ دادند. زمان در نظر گرفته شده برای پاسخگویی به هر سؤال، ۱۰ دقیقه بود.

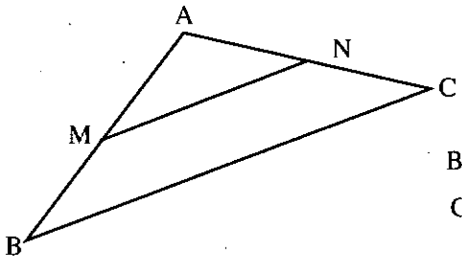
بخشی از نتایج تحلیل محتوای کتاب‌های درسی ریاضی ایران و فرانسه

در این تحقیق، کتاب‌های درسی ذکرشده، مورد مطالعه‌ی کامل قرار گرفت و تشابه‌ها و تفاوت‌ها بین کتاب‌های درسی ریاضی دو کشور شناسایی شدند که خصوصاً، تنوع زیادی در کتاب‌های فرانسوی دیده شد. لازم به ذکر است که تجزیه و تحلیل کتاب‌ها براساس مقایسه‌ی سن دانش‌آموزان در دو کشور ایران و فرانسه و بُعدهای مختلفی از جمله فعالیت‌ها، درس، تمرین‌های کتاب، تمرین‌های حل شده‌ی کتاب، کار در کلاس و... صورت گرفت و در این زمینه، نتایجی حاصل شد که اشاره‌ی کوتاهی به چند نکته‌ی مهم از آن خواهیم داشت.

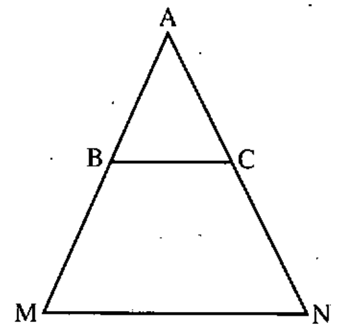
۱) در کتاب‌های درسی ریاضی فرانسه قبل از هر درس، به‌یک سری تمرین یا شکل‌هایی برمی‌خوریم که دانش‌آموز قبل از آموزش گرفتن، به حل آن‌ها پرداخته و به موضوع درس، خود به‌تنهایی پی می‌برد که به این نوع تمرین‌ها یا شکل‌ها، فعالیت گفته می‌شود. اما در کتاب‌های ایران، اگر هم به‌ندرت چنین چیزی وجود داشته باشد، توجه چندانی به آن نمی‌شود.

۲) در کتاب‌های درسی ریاضی ایران، برخلاف فرانسه، اثبات قضیه‌ی تالس دیده می‌شود. (لازم به ذکر است که تقریباً ۲۰ سال قبل، اثبات قضیه‌ی تالس در کتاب‌های درسی فرانسه وجود داشته است.)

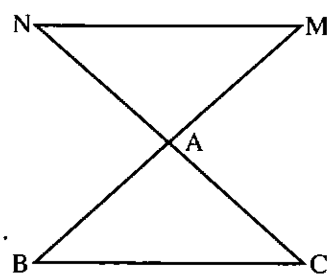
۳) نحوه‌ی ارایه‌ی شکل در قضیه‌ی تالس در کتاب‌های فرانسوی کامل‌تر از ایران است. مثلاً در کتاب‌های درسی فرانسه، به سه صورت زیر قضیه‌ی تالس بیان شده است. حال آن که در کتاب‌های درسی ایران، فقط به‌صورت شکل شماره ۱ دیده می‌شود. البته در ایران، در تمرین‌ها و آزمون‌ها از شکل‌های شماره‌ی ۲ و ۳ هم استفاده شده است که به نوعی، موجب اشتباه دانش‌آموزان می‌شود. (شکل ۱ و ۲ و ۳)



(۱)
M بین A و B
N بین A و C
$MN \parallel BC$



(۲)
M در امتداد AB
N در امتداد AC
$MN \parallel BC$



(۳)
$MN \parallel BC$
(شکل پروانه‌ای)

۴) در کتاب‌های درسی فرانسه، از تجانس و بازتاب به عنوان فرزندان قضیه‌ی تالس یاد می‌شود، ولی در کتاب‌های درسی ایران، فقط تجانس را می‌بینیم و دانش‌آموزان ارتباط آن را با قضیه‌ی تالس درک نمی‌کنند.

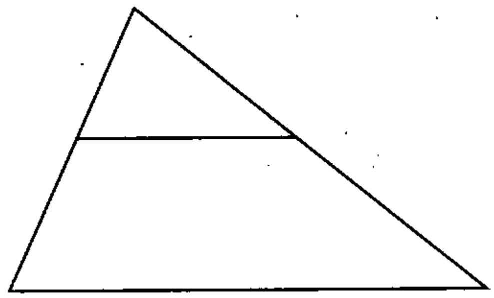
۵) در مورد تمرین‌های کتاب باید گفت کتاب‌های فرانسه از نظر تمرین، غنی‌تر است. مثلاً ۷۰ یا ۸۰ نوع تمرین در مورد هر موضوع یافت می‌شود.

۶) در فرانسه، تمرین‌های حل شده در کتاب، غنی‌تر از ایران است و هریک از این تمرین‌ها نشان‌دهنده‌ی روشی برای یادگیری درس یا برای حل تمرین‌های دیگر می‌باشد.

۷) در ایران، در تمام تمرین‌های کتاب، نسبت بین طول‌ها عددی گویا است ولی در فرانسه این نسبت، یک عدد حقیقی است.

لازم به توضیح است که در تحلیل محتوای تمرین‌ها، از دسته‌بندی ناتالی پف[۲۰] استفاده شد که در آن، تمرین‌ها به سه دسته تقسیم شده‌اند:

الف) نوع محاسباتی[۲۱]، مثلاً محاسبه‌ی طول یک پاره خط در شکلی مشابه شکل زیر؛



ب) نوع استدلالی[۲۲]، مثلاً اثبات توازی دو خط؛

پ) نوع ساختنی[۲۳]، مثلاً تقسیم یک پاره خط به چند پاره خط مساوی یا با نسبت‌های معلوم.

بخشی از نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان

با استفاده از چارچوب نظری نیکولاس بالاچف در مورد انواع استدلال، و چارچوب ریموند دوول در مورد درک شکل‌ها، پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال‌های پیشنهادی، تجزیه و تحلیل شدند. در این تجزیه و تحلیل، از سؤال‌هایی مانند سؤال‌های زیر، استفاده شد:

۱) آیا دانش‌آموزان با نگاه به شکل جواب می‌دهند؟

۲) اگر دانش‌آموزان از قضیه‌ی تالس و عکس آن استفاده کرده‌اند، آیا آن را فهمیده‌اند؟

۳) اگر دانش‌آموزان از قضیه‌ی تالس و عکس آن استفاده کرده‌اند، آیا از آن خوب استفاده کرده‌اند؟

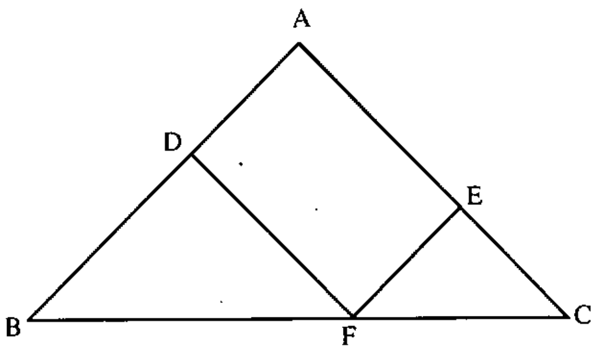
۴) آیا می‌توانند خواصی را که استفاده می‌کنند، خوب بیان کنند؟ (مثلاً تعریف متوازی‌الاضلاع).

۵) آیا روح مسأله را فهمیده‌اند؟

برای روشن شدن مطلب، تجزیه و تحلیل پاسخ یکی از دانش‌آموزان دوره‌ی دبیرستان در فرانسه، ارایه می‌شود.

سؤال مورد نظر به قرار زیر بود:

سؤال: در شکل زیر، $CE=\frac{۲}{۵}CA$ و $AD=\frac{۲}{۳}BD$ و $EF\|AB$. ثابت کنید $DF\|AC$.



پاسخ دانش‌آموز: می‌توانیم بگوییم که AEFD یک مستطیل است، زیرا اضلاع روبه‌رویش دو به دو مساویند. پس $AE\|DF$ و $E\in[AC]$ و $D\in[AB]$. برطبق قضیه‌ی تالس $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$. چون ACDF یک ذوزنقه است، اضلاع روبه‌رویش موازیند، پس $DF\|AC$.

در تحلیل این پاسخ، می‌توان گفت که این دانش‌آموز، سه چیز مختلف را هم زمان بیان کرده است. از مستطیل AEFD صحبت کرده، ولی از آن استفاده‌ای نکرده است. از قضیه‌ی تالس استفاده کرده، ولی خطوط موازی مناسبی را انتخاب نکرده است. از ذوزنقه ADFC نام برده، ولی خاصیت ذوزنقه را درست بیان نکرده است. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که این دانش‌آموز، باتوجه به شکل، پاسخ داده اما روح مسأله را نفهمیده و در واقع، یک درک سریع از شکل دارد و از مخلوطی از استدلال‌های تجربه‌ی ساده و اثبات کلامی، استفاده کرده است. در تحقیق اصلی، تمام این تحلیل‌ها با کدگذاری، در جدول‌هایی مشخص گردیده و مقایسه شده‌اند.

(این مقاله، برگرفته از پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد نگارنده است که علاقه‌مندان، می‌توانند با مراجعه به آن یعنی منبع [۱۴]، از جزئیات جدول‌ها مطلع شوند).

نتیجه گیری

۱) با مقایسه‌ی پاسخ دانش‌آموزان در دو کشور، نتیجه شد که دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی در فرانسه، قوی‌تر و دانش‌آموزان دوره دبیرستان در ایران، قوی‌تر هستند.

۲) با مقایسه‌ی دو کشور، دانش‌آموزان ایرانی با تغییراتی که به شکل مسأله داده می‌شود، کمتر قادر به درک سؤال هستند.

۳) در هیچ مورد، اثباتی از نوع **تجربه‌ی اصلی** مشاهده نشد.

۴) پاسخ‌ها به نحوی نبود که بتوان از روی آن‌ها، به نوع استدلال مورد استفاده‌ی دانش‌آموزان پی برد.

۵) برخلاف دانش‌آموزان فرانسوی، دانش‌آموزان ایرانی عادت به توضیح دادن پاسخ، نداشتند.

۶) اکثریت دانش‌آموزان ایرانی، درک سریع و ناخودآگاه از شکل داشتند و این، همواره مانع تفکر دقیق آن‌ها می‌شد.

۷) اکثریت دانش‌آموزان در هر دو کشور، فقط قضیه را حفظ می‌کردند و نمی‌دانستند چگونه معلومات خود را برای حل مسأله به کار بندند.

۸) بعضی از دانش‌آموزان به چیزهایی فکر می‌کردند که برای حل مسأله، نیازی به آن‌ها نداشتند.

۹) در ایران، دانش‌آموزان در وضعیت قبل از آموزش قرار نمی‌گیرند و همیشه در وضعیت آموزش هستند و برخلاف فرانسه، تنها معلم است که در کلاس، نقش اصلی را ایفا می‌کند.

زیرنویس‌ها

* این مقاله، خلاصه‌ای است از پایان‌نامه‌ی نگارنده برای اخذ کارشناسی ارشد در آموزش ریاضی از دانشگاه ژوسیوی پاریس که زیرنظر دکتر فرانسوا کُلمز (Dr Francois ColMeze) نگاشته شده است.

1. Géometry
2. Géo
3. Metry
4. Bessout

(این قسمت مربوط به صفحه‌ی ۵۳ از کتاب بزو، با نام «هندسه» می‌باشد (۱۹۸۳).)

5. Raymond Duval
6. Appréhension perceptive
7. L'appréhension discursive
8. Appréhension séquentielle
9. Appréhension opératoire
10. Changement méréologique
11. Changement optique
12. Changement positionnelle
13. Guy Brousseau
14. Nicolas Balacheff
15. L'empirisme naïf
16. L'expérience cruciale
17. L'exemple générique
18. L'expérience mentale
19. Le calcule sur les énoncés
20. Nathalie Pfaff
21. Type calcul
22. Type démonstration
23. Type construction

منابع فرانسوی

1. Gilbert ARSAC, Giséle CHAPIRON, Alain COLONNA, Gilles GERMAIN, Yves GUICHARD, Michel MANTE. Initiation au raisonnement déductif au collége-PUL (Février 1992) Chapitre 6.
2. Nicolas BALACHEF Thése Présentée à l'université Joseph Fourier; une étude des processus de prevue en mathématique chez des éléves de collége (vol 1) (1987-1988).
3. Guy BROUSSEAU Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques in RDM, Vol 7, n2 (1986).
4. Guy BROUSSEAU Promenade avec Thalés, entre la maternelle et l'université in autour de Thaés commission Inter-IREM premiére cycle. Bulletin inter-IREM (1995)
5. Jean Claude DUPERRET, IREM de Reims Pour un Thalés Dynamique in Repére n 20, (Juillet 1995)
6. Raymonds DUVAL, IREM de Strasbourg Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométriques. In Repére n 17 (Octobre 1994).
7. Eric LAGUERRE Mémoire de DEA, université Paris 7, (1998-1999)
8. Nathalie PFAAFF Le role de l'analyse des taches pour un enseignant in petit in petit Xn 48 (1997-1998)
9. Les nouveaux programmes official en France et en Iran
10. Le manuel de Quatriéme en France (Hachette 1998)
11. Le Manuel de Troisiéme en France (Hatier, avril 1999)
12. Les manuels de Seconde en France (Fractale, avril 2000 et Hatier)
13. Les manuels de Premiére S en France (Hachette 2001 et Terracher)
14. Thése de DEA de didactique de mathematiques de madame Mahshid Torabi. Sous la direction de Mr. François Colmeze.

مقاله‌ی ارائه شده در هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران
شهرکرد ـ تابستان ۱۳۸۵

چرایی و چگونگی آموزش هندسه در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای

ابوالفضل رفیع پور، دانشجوی دکتری آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی
زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

در این مقاله، ابتدا به ضرورت تدریس هندسه در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای پرداخته شده و با ذکر دلایل مستند، از تدریس و یادگیری هندسه در آموزش ریاضی مدرسه‌ای، حمایت شده است. سپس یک روند تدریس **نوعی**[1] که حاصل بازتاب بر عمل تدریس درس هندسه است، ارایه می‌شود و به عنوان پشتوانه‌ی نظری این روش تدریس، به نتایج تحقیقات متعدد در حوزه‌ی آموزش ریاضی ـ هندسه ـ استناد شده است. در این روش تدریس که براساس مطالب کتاب هندسه ۲ دوره‌ی متوسطه‌ی نظری است، برای یک مسأله، چند راه‌حل معرفی شده است؛ زیرا بررسی روش‌های مختلف برای یک مسأله‌ی خاص، معمولاً با انواع مختلفی از بازنمایی‌ها همراه است که این مورد نیز، به دانش‌آموز در ساختن دانش هندسی خود کمک می‌کند. هم‌چنین به گفته‌ی اسکمپ (۲۰۰۲)، روش‌های مختلف حل مسأله، به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا فهم و درک آن‌ها از مفاهیم هندسی، تبدیل به **درک رابطه‌ای**[2] شود. درضمن، برای کالبدشکافی این جلسه‌ی تدریس نوعی، بحث‌هایی در مورد **ساخت‌وسازگرایی**[3] و **درک (فهم) رابطه‌ای و ابزاری**[4] خواهد آمد.

مقدمه

بنا به گفته‌ی هاوسون و ویلسون (۱۹۸۶)، «هیچ زمینه‌ی ویژه‌ای در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای به اندازه‌ی هندسه که آموزش آن طی سی سال اخیر دچار تحول کلی شده، توجه ریاضی‌دانان را برنمی‌انگیزد.» جالب است که این زمینه، مورد توجه ویژه‌ی آموزشگران ریاضی و معلمان ریاضی نیز بوده است. همان‌طور که شاریگین و پروتاسوف (۲۰۰۴) ابراز کرده‌اند، برخی افراد تمایل دارند که هندسه از برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای حذف شود و برخی نیز تمایل دارند که حجم هندسه در برنامه‌ی درسی کاهش یابد. به گفته‌ی آن‌ها، این تمایل بیش‌تر در بین افرادی دیده می‌شود که در فهم و یادگیری هندسه دچار مشکل هستند و این مسأله، حتی در بین افراد حرفه‌ای در حوزه‌ی ریاضی نیز دیده می‌شود.

با مرور پیشینه‌ی چالش‌برانگیزی که در زمینه‌ی تدریس هندسه وجود دارد، می‌توان سؤال‌های زیر را مطرح ساخت:

۱ـ آیا برای قرن جدید، باز هم دانش‌آموزان مدرسه‌ای باید هندسه بخوانند؟

۲ـ ضرورت آموزش و تدریس هندسه در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای چیست؟

۳ـ تدریس هندسه چگونه انجام شود تا تبیین‌کننده‌ی ضرورت حضور هندسه در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای باشد؟

۴ـ دانش‌آموزان به چه نوع هندسه‌ای نیاز دارند و درواقع، چه نوع هندسه‌ای برای آموزش مدرسه‌ای، مناسب‌تر و مفیدتر است؟

۵ـ سرفصل‌های چنین هندسه‌ای چه می‌تواند باشد؟
۶ـ آموزش هندسه به کدام یک از اهداف آموزش ریاضی مدرسه‌ای مرتبط است؟
۷ـ تدریس هندسه چگونه باید طراحی شود تا اهداف آموزشی آن محقق گردد؟

این مقاله، با اشاره‌ی مختصری به این پیشینه، تنها بر دو سؤال اول متمرکز می‌شود و در ادامه با ارایه‌ی یک بدیل[5] برای تدریس هندسه، بر ضرورت تدریس هندسه در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای، صحه می‌گذارد.

ضرورت آموزش و تدریس هندسه در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای

آموزشگران و ریاضی‌دانان، دلایل گوناگونی را برای آموزش و تدریس هندسه در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای برشمرده‌اند که به برخی از آن‌ها اشاره می‌شود.

بنا به اظهار شاریگین و پروتاسوف (۲۰۰۴)، «هندسه مجموعه‌ای از تعریف‌ها و فرمول‌ها نیست. بلکه هندسه، توانایی دیدن [مشاهده کردن]، تصور کردن و فکر کردن است.» به همین دلیل، آن‌ها معتقدند که هندسه، بیش از آن است که تنها، به عنوان یک شاخه از ریاضی یا یک موضوع درسی در ریاضی مدرسه‌ای مطرح شود و با این باور، دلایل زیر را برای تدریس و آموزش هندسه برشمرده‌اند:

- هندسه، پدیده‌ای از فرهنگ انسانی است؛
- با استفاده از هندسه، می‌توان اخلاق و اصول اخلاقی را در دانش‌آموزان رشد داد؛
- هندسه، ذهن دانش‌آموزان را برای تحصیلات بالاتر آماده می‌سازد؛
- هندسه، حس زیبایی شناسی را در دانش‌آموزان توسعه می‌دهد؛
- هندسه، تاریخ تفکر انسانی را به خوبی نشان می‌دهد (صص ۱۷۶ـ۱۶۷).

به همین دلایل، شاریگین و پروتاسوف (۲۰۰۴) مدافع تدریس هندسه در مدارس قرن بیست‌ویکم هستند و اعتقاد دارند که توانایی‌های بالقوه‌ی تربیتی و آموزشی زیادی در هندسه نهفته است که برای پرورش انسان‌ها لازم است. این همان چیزی است که شهشهانی (۱۳۷۵) نیز قبلاً به آن اشاره کرده بود و در رابطه با تدریس هندسه در دبیرستان، سه دلیل زیر را برشمرده بود:

الف) هندسه به طور تاریخی، علم فضا و اشکال است و تمام پدیده‌های طبیعی در فضا رخ می‌دهند. بنابراین، هندسه در واقع زمینه‌ی همه‌ی علوم طبیعی است، کل فعل و انفعالات طبیعی در فضای هندسی صورت می‌گیرد و شکل هندسی دارند. بنابراین هندسه به نوعی زبان همه‌ی علوم است.

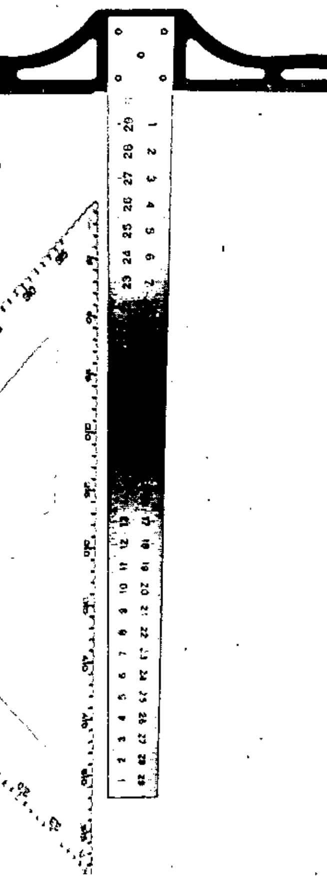
ب) هندسه اولین علم نظری است. اولین علمی که در آن، یک سری از نتایج براساس تعقل و تفکر از نتایج دیگر گرفته شده است که سابقه‌اش به ریاضی باستان بازمی‌گردد.

پ) هندسه یک زمینه‌ی بسیار خوب برای شناخت و تقویت تخیل و خلاقیت است. مسأله‌ی ارایه‌ی اثبات در ریاضی، بیش‌تر به جای آن‌که روی منطق تأکید داشته باشد، بر روی اکتشاف مصر است. اگر به اثبات‌ها در هندسه به عنوان وسیله‌ای برای کشف نگاه کنیم، هندسه وسیله‌ای برای تقویت تخیل و خلاقیت دانش‌آموزان است (ص ۴۴۹).

بنا به گفته‌ی زنگنه و گویا (۱۳۸۱) نیز، یکی از ویژگی‌های اصلی هندسه، ایجاد توانایی تجسم است و شاید این همان ویژگی هندسه باشد که وجود آن را در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای محرز می‌کند، چرا که تقریباً هیچ درس دیگری را نمی‌توان جایگزین هندسه کرد.

علاوه بر این‌ها، شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM)[6] هندسه را به عنوان یکی از ۵ اصل محتوایی برای برنامه‌ریزی درسی ریاضی از پیش‌دبستانی تا پایان پایه‌ی دوازدهم مطرح کرده است. در اصول و استانداردهای ریاضی مدرسه‌ای که در سال ۲۰۰۰ توسط این شورا منتشر شد، آمده است که برنامه‌های آموزشی از پیش‌دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم، باید تمام دانش‌آموزان را قادر سازد تا:

- مشخصات و ویژگی‌های شکل‌های هندسی دوبعدی و سه‌بعدی را تحلیل کنند و مفاهیم ریاضی را در رابطه با روابط هندسی توسعه دهند؛
- مکان‌ها و روابط فضایی را با استفاده از هندسه‌ی مختصاتی و سایر نظام‌های بازنمایی، تشخیص دهند و توصیف نمایند؛
- با به کار بردن انتقال‌ها، از هندسه در تحلیل موقعیت‌های ریاضی استفاده کنند؛
- از تجسم و استدلال فضایی و مدل‌سازی، برای حل مسایل استفاده کنند (ص ۴۱).



این مورد در استاندارد برنامه‌ی درسی برخی کشورهای دیگر مانند برنامه‌ی درسی ریاضی کشور نیوزلند (۱۹۹۲) نیز به چشم می‌خورد. در این برنامه‌ی درسی، استاندارد هندسه به عنوان یکی از ۵ استاندارد محتوایی مطرح شده است و برنامه‌ی درسی قصد دارد به وسیله‌ی سند تولید شده در رابطه با استانداردهای ریاضی مدرسه‌ای، فرصت‌هایی برای دانش‌آموزان پدید آورد تا همه‌ی آن‌ها:

- دانش مورد نیاز برای درک فضای دوبعدی و سه‌بعدی را کسب کرده و رویدادهای محیط واقعی خود را درک نموده و آن‌ها را مدل‌سازی کنند؛
- توانایی‌های خود را برای استفاده از مدل‌های هندسی به عنوان ابزاری برای حل مسایل علمی گسترش دهند؛
- آگاهی‌های فضایی را در خود توسعه داده و توانایی درک و استفاده از ویژگی‌های هندسی و تقارن را در زندگی واقعی گسترش بدهند (ص ۹۱).

علاوه بر این‌ها، یی (۲۰۰۶)، هندسه را علم مطالعه‌ی فضا و راه‌های نظام‌واری برای نگاه کردن به فضای پیرامون انسان می‌داند. او اهداف تدریس هندسه در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای را توسعه‌ی شهود و درک فضایی، توسعه‌ی توانایی تفکر منطقی و پیش‌نیازی برای سایر بخش‌های ریاضی معرفی می‌کند (ص ۱۱۷). ریحانی (۱۳۸۴) نیز تأکید کرده است که «هندسه، برای فهم و تعبیر پدیده‌های گوناگون، توسعه پیدا کرده است و بدین جهت، لازم است که تفکر هندسی مورد نیاز برای فهم این پدیده‌ها و چگونگی توسعه‌ی آن‌ها، بررسی شود» (ص ۱۲).

با توجه به ویژگی‌هایی که برای آموزش هندسه برشمرده شده است و با عنایت به دلایلی که برای چرایی حضور هندسه در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای ذکر شده است، مؤلفان مقاله اعتقاد دارند که روش‌های تدریس مبتنی بر ساخت‌وسازگرایی، می‌توانند پاسخ مناسبی به چگونگی حضور هندسه در آموزش مدرسه‌ای باشند. بنابراین، در ادامه‌ی این مقاله، یک روش تدریس برای درس هندسه که حاصل بازتاب بر عمل تدریس مؤلفان مقاله است، ارایه می‌شود.

ارایه‌ی روش تدریس نوعی برای هندسه‌ی مدرسه‌ای

روش تدریسی که در این بخش معرفی می‌شود، براساس «تدریس از طریق حل مسأله»[۷] (شرودر و لستر، ۱۹۸۹؛ گویا، ۱۹۹۲) است. در این روش، ابتدا یک مسأله‌ی خوب انتخاب می‌شود و یکی از ملاک‌های انتخاب مسأله‌ی خوب، داشتن پیش‌نیازهای کم و راه‌حل‌های مختلف است. سپس به دانش‌آموزان برای حل مسأله فرصت مناسب داده می‌شود تا در گروه‌های کوچک بر روی مسایل کار کنند. آن‌گاه، گروه‌های مختلف کارشان را به کل کلاس ارایه می‌کنند، در حالی که سایر دانش‌آموزان خوب گوش می‌دهند و روش ارایه شده را نقد و بررسی می‌کنند. درنتیجه، دانش‌آموزان کلاس نه تنها جواب درست مسأله‌ی مورد بحث را پیدا می‌کنند، بلکه به علت درستی راه حل نیز پی می‌برند و این یکی از نمودهای درک رابطه‌ای است. در این روش، بحث در سطح کلاس درس نیز شکل می‌گیرد و دانش‌آموزان فرصت تعامل با یکدیگر و با معلم را پیدا می‌کنند. طی این فرآیند، با توجه به مسأله‌ی انتخاب شده و یکی از ویژگی‌های آن که داشتن چند راه‌حل است، چند روش حل مختلف از جانب دانش‌آموزان در کلاس درس مطرح می‌شود که اغلب آن‌ها درست هستند.

با استفاده از این روش تدریس، در یک تدریس کلاسی، از فعالیت ۱ـ۱ صفحه‌ی دوم کتاب هندسه‌ی ۲ استفاده شد و روش‌های مختلفی برای آن ارایه گردید که در زیر، ماهیت این تنوع مورد بحث قرار می‌گیرد.

فعالیت: مثلث‌های شکل‌های ۱، ۲ و ۳ با هم متشابه و مثلث‌های کوچک، هم‌نهشت هستند. تعداد مثلث‌های کوچک هر شکل را تعیین کرده و سپس جدول زیر را کامل کنید. (شکل ۱) و (جدول ۱)

دانش‌آموزان کلاس پس از حدس زدن جواب از روی مثال‌های ارایه شده توسط شکل، برای به‌دست آوردن این نتیجه

به روش استدلال استنتاجی، دست به کار شدند. در این فرآیند، دانش‌آموزان در گروه‌های کوچک بر روی ساختن ایده‌ی اثبات، با یکدیگر کار کردند. در پایان وقت اختصاص یافته به کار در گروه‌های کوچک، گروه‌های مختلف روش خود را برای تمام کلاس مطرح کردند و دانش‌آموزان دیگر با دقت، به استدلال‌های ارایه شده توسط نماینده‌ی هر گروه گوش می‌کردند تا درستی آن اثبات را بپذیرند یا مثال نقضی برای عدم صحت آن ارایه کنند. در این روند، پاسخ‌های تمام گروه‌ها بررسی می‌شد و مواردی که نادرست بودند یا از بدفهمی دانش‌آموزان ناشی می‌شدند، توسط کلاس مشخص می‌شدند. به طور مثال، برای بررسی این فعالیت، دانش‌آموزان کلاس درس به شش روش مختلف برای حل مسأله اشاره کردند که در این راه‌حل‌ها، از مفاهیم مختلفی مانند استقرا، دنباله‌ها، مساحت مثلث، مساحت مستطیل و تصاعد هندسی استفاده کرده بودند. در برخی مواقع، روش‌ها به گونه‌ای بودند که حوزه‌های مختلف ریاضی را به هم متصل می‌کردند.

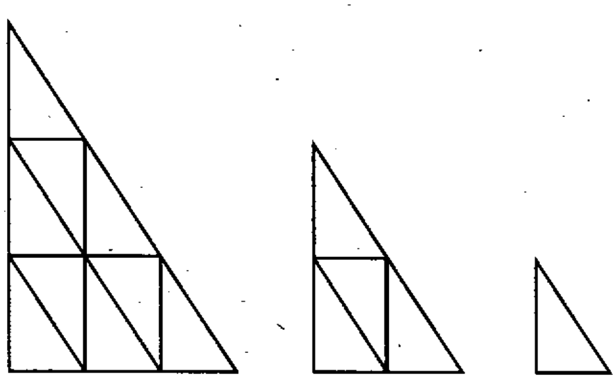
پیشینه‌ی نظری مورد نیاز برای کالبدشکافی کلاس درس

در این بخش، به‌منظور تجزیه و تحلیل بهتر یک جلسه‌ی کلاس درس، به دو نظریه در حوزه‌ی یادگیری ریاضی اشاره می‌شود. در ابتدا، نظریه‌ی ساخت و سازگرایی که امروزه طیف وسیعی از آموزشگران ریاضی بر لزوم و کاربرد آن نظر موافق دارند، بررسی می‌شود و در ادامه، درک و فهم رابطه‌ای در مقابل درک و فهم ابزاری مطرح خواهد شد.

الف) نظریه‌ی ساخت‌وسازگرایی. حرف اصلی ساخت‌وسازگرایان، که امروزه در سطح وسیعی مورد پذیرش واقع شده این است که دانش‌آموزان، باید در توسعه‌ی فهم و درک شخصی خود، فعالانه شرکت داشته باشند. درواقع، ساخت‌وسازگرایی بینشی ایجاد می‌کند که توسط آن، چگونگی یادگیری ریاضی به‌وسیله‌ی کودکان را بفهمیم و این بینش، ما را به استفاده از راهبردهای آموزشی هدایت می‌کند که کودکان، آغازگر آن هستند، نه خود ما. به بیان ساده‌تر، اصل اعتقادی ساخت‌وسازگرایی این است که کودکان، سازنده‌ی دانش خویش هستند (چمن‌آرا، ۱۳۸۲ به نقل از ون دو ویل، ۲۰۰۰). با همین بینش است که پولیا (۱۳۸۲)، معتقد است که نمی‌توان تنها به‌وسیله‌ی خواندن، یاد گرفت، نمی‌توان تنها با گوش دادن به سخنرانی‌ها، یادگرفت، نمی‌توان با نگاه کردن به فیلم‌ها، چیزی یادگرفت؛ تنها زمانی می‌توان آموخت که عمل و ذهن، چیزی به آن‌ها اضافه کند (ص ۳۸).

درواقع، ساخت‌وسازگرایان مدعی هستند که «مردم، درک و دانش خویش را از جهان طی تجربه‌کردن با اشیا و بازتاب بر این تجارب، می‌سازند. زمانی که با چیز جدیدی روبه‌رو می‌شویم، باید آن را با ایده‌ها و تجربه‌های قبلی خود، وفق بدهیم، که ممکن است ـ در اثر این کار ـ باورهای ما تغییر کنند، یا حتی اطلاعات جدید به دلیل نامربوط بودن، کنار گذاشته

شکل ۱



جدول ۱

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	...	۵۰۰	nام
تعداد مثلث‌های کوچک				...		

هندسه مجموعه‌ای از تعریف‌ها و فرمول‌ها نیست. بلکه هندسه توانایی مشاهده کردن، تصور کردن و فکر کردن است

شوند. در هر صورت، ما خلق‌کنندگان فعال دانش خود هستیم» (چمن‌آرا، ۱۳۸۴).

ب) درک رابطه‌ای و درک ابزاری. ریچارد اسکمپ، یکی از پایه‌گذاران گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی (PME)[۸]، در دومین کتاب خود، صراحتاً بین دو شکل اساسی از فهم، تمایز قایل شده است. او از فهم رابطه‌ای و فهم ابزاری یاد می‌کند (اسکمپ، ۱۹۷۹، ص ۲۵۹). او فهم رابطه‌ای را به معنی «دانستن این که چه کاری باید کرد و چرا» می‌داند و فهم ابزاری را به صورت «دانستن قوانین بدون دلیل» تعریف می‌کند.

چمن‌آرا (۱۳۸۲) به نقل از ون‌دوویل (۲۰۰۰) فواید درک رابطه‌ای را به صورت زیر برمی‌شمرد:

- درک رابطه‌ای ذاتاً رضایت‌بخش است؛
- درک رابطه‌ای حافظه را ارتقاء می‌دهد؛
- درک رابطه‌ای، نیاز کمتری به یادآوری و حفظیات دارد؛
- درک رابطه‌ای به یاد گرفتن مفاهیم و رویه‌های جدید، کمک می‌کند؛
- درک رابطه‌ای توانایی حل مسأله را رشد می‌دهد؛
- درک رابطه‌ای خود ـ تولید است؛.
- درک رابطه‌ای، طرز تلقی‌ها و باورها را بهبود می‌بخشد.

کالبدشکافی یک جلسه‌ی تدریس

در این بخش، فعالیت‌های انجام شده در یک جلسه تدریس هندسه ۲ در پنج بخش ارایه می‌شود و با استفاده از پیشینه‌ی نظری مطرح شده در بخش قبلی، در مورد آن‌ها بحث خواهد شد.

الف) انتخاب مسأله

در یک جلسه‌ی تدریس، از یک فعالیت مسأله ـ محور برای طراحی جلسه‌ی کلاس استفاده شد. در این فعالیت، دانش‌آموزان به حدسیه‌سازی و ساختن الگوها ترغیب شدند، زیرا همان‌طور که گویا (۱۳۷۵) نیز اشاره کرده است، یک بُعد مهم از آموزش هندسه، بُعد الگوسازی هندسه است و این بُعد، جایگاه خاصی در تربیت یک شهروند مسئول، خلاق و متعهد دارد. زیرا الگوسازی در هندسه، به دانش‌آموزان توانایی تحقیق، حدس‌زدن، حدسیه‌سازی، فرضیه‌سازی و آزمایش را می‌دهد. هم‌چنین، شورای ملی معلمان ریاضی (۲۰۰۰)، در رابطه با انتخاب فعالیت و تکالیف، بیان می‌دارد که فعالیت‌ها باید با دنیای واقعی مرتبط باشند و از تجارب دانش‌آموزان استفاده کنند و صرف‌نظر از محتوا، تکالیف مفید باید چالش‌برانگیز باشند. تکالیف چالش‌برانگیز، تکالیفی هستند که با بیش از یک راه قابل حل هستند. شونفیلد (۱۹۸۵) و رزنیک (۱۹۸۵)، نیز بر وجود روش‌های متنوع برای حل یک مسأله تأکید کرده‌اند و داشتن راه‌حل‌های متنوع برای یک مسأله را یکی از ویژگی‌های مسأله‌ی خوب برشمرده‌اند.

ب) کار در گروه‌های کوچک

کارپنتر (۲۰۰۳) به نقل از وود (۱۹۹۳) اشاره می‌کند که «تشویق دانش‌آموزان به بحث و گفت‌وگو در کلاس مهم است چرا که امکان درک ایده‌ها با شیوه‌های مشابه را به آن‌ها می‌دهد. البته، با وجودی که بحث در گروه‌های کوچک اهمیت دارد، بحث‌های کلاسی نیز روش دیگری برای تشویق دانش‌آموزان به

در میان گذاشتن افکارشان درباره‌ی ایده‌های ریاضی است.» گویا (۱۹۹۲) نیز بر کار در گروه‌های کوچک، به عنوان یکی از راه‌های تدریس اثربخش تأکید کرده است.

ج) بحث کلاسی

در بخشی از فرآیند تدریس در کلاس درس، راه‌حل‌های پیشنهادی توسط دانش‌آموزان به بحث گذاشته می‌شوند و دانش‌آموزان با آرامش، ایده‌های خود را برای حل مسأله شرح می‌دهند و از راه‌حل خود در برابر نقد دانش‌آموزان دیگر دفاع می‌کنند. به این وسیله، استاندارد ارتباطات[9] که یکی از استانداردهای فرآیندی در مجموعه استانداردهای شورای ملی معلمان ریاضی است، در کلاس درس امکان اجرا می‌یابد. ون‌دوویل (۲۰۰۱) به نقل از اسمیت (۱۹۹۶) بیان می‌کند که «ایجاد زمینه‌ای که در آن دانش‌آموزان بتوانند با اطمینان و آرامش، ایده‌های ریاضی خود را شرح دهند، وظیفه‌ی اصلی تدریس است و گامی به سوی توسعه‌ی توان ریاضی دانش‌آموزان خواهند بود» (ص ۳۹۷). او در ادامه می‌افزاید که ملزم کردن دانش‌آموزان به این که پاسخ‌های خود را شرح دهند یا از آن دفاع کنند، تأثیر مثبتی بر دیدگاه آن‌ها نسبت به ریاضی و توانایی‌های شخصی آن‌ها در ریاضی دارد. چنین کاری موجب ایجاد اعتمادبه‌نفس و خودباوری در دانش‌آموزان نیز می‌شود. توجیه پاسخ‌ها، دانش‌آموزان را وادار به تفکر بازتابی می‌کند. دفاع کردن یا توضیح دادن، حدس زدن (بی‌تفکر) و پاسخ‌های مبتنی بر یادگیری طوطی‌وار را حذف می‌کند. لذا توضیح خواستن از دانش‌آموزان، مکانیزم خوبی برای تدریس است (ون‌دو ویل، ۲۰۰۱). هم‌چنین شورای ملی معلمان ریاضی (۲۰۰۰)، بیان می‌کند که ارتباطات یک بخش ضروری ریاضی و آموزش ریاضی است. از نظر این شورا ارتباطات راه به اشتراک گذاشتن ایده‌ها است. وقتی دانش‌آموزان در تفکر و استدلال در مورد ریاضی به چالش کشیده می‌شوند و نتایج تفکراتشان را با یکدیگر به صورت زبانی یا به صورت کتبی مبادله می‌کنند، راحت‌تر می‌آموزند. گوش دادن به توصیف دیگران، به دانش‌آموزان فرصت می‌دهد تا فهمشان را توسعه دهند. بحث در مورد ایده‌های ریاضی که از چندین جنبه شرح داده شده‌اند، به شرکت‌کننده‌گان در این بحث کمک می‌کند که بین مفاهیم مختلف در ریاضی و خارج آن، ارتباط و اتصال برقرار کنند. دانش‌آموزانی که درگیر بحث برای تصدیق راه‌حل‌ها هستند ـ خصوصاً در مواجهه با استدلال‌های لجوجانه (رضائی، ۱۳۸۲) فهم ریاضی بهتری به دست می‌آورند. این قبیل فعالیت‌ها به دانش‌آموزان در توسعه‌ی یک زبان مشترک برای بیان ایده‌ها کمک می‌کند. دانش‌آموزانی که فرصت‌هایی برای صحبت کردن، نوشتن و خواندن و گوش کردن در کلاس‌های ریاضی دارند و برای این کارها حمایت و تشویق می‌شوند، دو برابر سود می‌برند، آن‌ها برای یادگیری ریاضی ارتباط برقرار می‌کنند و یاد می‌گیرند به طور ریاضی‌وار ارتباط برقرار کنند (NCTM، ۲۰۰۰).

د) ارایه راه‌حل‌های مختلف برای یک مسأله

ارایه‌ی چند روش برای حل یک مسأله و با رویکردها و نگاه‌های متفاوت، باعث می‌شود دانش‌آموزان در گنجینه‌ی دانش خود کنکاش کرده و بین مطالب مختلف ارتباط برقرار کنند و بدین ترتیب، یادگیری آن‌ها در هندسه و به طور کلی در ریاضی ارتقا می‌یابد. این نوع ارایه‌ی مطالب، به درک رابطه‌ای مفاهیم کمک می‌کند و باعث می‌شود مطالب گوناگونی از حوزه‌های مختلف ریاضی و غیر ریاضی با هم مرتبط شوند. به عنوان نمونه، از بین راه‌حل‌های ارایه شده برای فعالیت مطرح شده در بخش‌های قبل، موارد زیر قابل ذکر هستند:

○ روش اول: مساحت مثلث nام ـ مثلث ۵۰۰ ام ـ را بر مساحت مثلث شکل ۱ تقسیم می‌کنیم. در این روش قاعده و ارتفاع مثلث شکل ۱ را به ترتیب x و y می‌گیریم. به این ترتیب به رابطه‌ی n^2 برای تعداد مثلث‌های کوچک در شکل nام می‌رسیم.

○ روش دوم: اعداد ردیف دوم در جدول، همگی فرد هستند و همان‌طور که در درس جبر و احتمال داشتیم، مجموع اعداد فرد از ۱ تا n برابر با n^2 است و روش اثبات آن با استفاده از استقرای ریاضی است.

در دو راه‌حل ذکر شده در بالا، بین مباحث هندسی و مباحث جبر و احتمال ارتباط برقرار شده است، که این کار باعث ایجاد ارتباط و اتصال بین این دو درس می‌شود. همان‌طور که زنگنه و گویا (۱۳۸۱) نیز بیان کرده‌اند، هماهنگی و وحدت بین شاخه‌ها و موضوع‌های ریاضی، یکی از دیدگاه‌های جدید آموزش هندسه است و در این‌جا، منظور از هماهنگی و وحدت، ارتباط و اتصال بین مقوله‌های مختلف ریاضی و بین ریاضی با مقوله‌های خارج از آن یعنی وحدت درونی و وحدت بیرونی است (NCTM، ۱۹۹۱). علاوه بر این، کارپنتر (۲۰۰۳) معتقد است که استفاده از استراتژی‌های متنوع، به دانش‌آموزان در ساختن ایده‌ها کمک می‌کند. اسکمپ (۱۹۷۹)، نیز تعداد راه‌حل‌های ارایه شده برای

یک مسأله را یکی از عواملی برمی شمرد که به درک مفهومی مطالب توسط کودکان کمک می کند. درنهایت، برای جلوگیری از کسب این ایده که همیشه، یک مدل ریاضی به عنوان بهترین مدل برای مسایل تکنولوژی و علوم وجود دارد، باید فرصت هایی برای دانش آموزان فراهم شود تا طی آن ها ببینند که بیش از یک توصیف ریاضی برای یک مسأله وجود دارد که به نظر می رسد همگی آن ها از درجه ی اهمیت یکسانی برخوردارند (گویا و مهربانی، ۱۳۸۳). در تجربه ی تدریس نوعی، شش روش مختلف برای حل مسأله ی مورد بحث ارایه شد که همگی این شش روش، به عنوان یک راه حل درست برای حل این مسأله، از طرف کلاس پذیرفته شد. به این ترتیب دانش آموزان در برخورد با یک مسأله ی جدید، از روش های مختلفی برای مواجهه با مسأله، استفاده کردند.

ه) بررسی راه حل های مختلف

در تجربه ی تدریسی که موضوع بحث این مقاله است، راه حل های نادرست به دقت بررسی شدند و بین راه حل هایی که دارای اشتباهات مفهومی بودند و راه حل هایی که اشتباه محاسباتی داشتند، تمایز قایل شد. در این مسیر، راه حل هایی وجود داشتند که صحیح بودند ولی برای رسیدن به جواب به دانش ریاضی ای نیاز داشتند که دانش آموزان هنوز از آن آگاه نبودند. در چنین مواردی، این روش به عنوان رهیافت پذیرفته می شد. به گفته ی گویا و مهربانی (۱۳۸۳) باید بین اشتباهات محاسباتی (مانند عمل ضرب و تقسیم) و انتخاب های منطقی که ناموفق از کار درمی آیند (و می توانند دوباره در نظر گرفته شوند) تمایز قایل شد. درواقع در بررسی راه حل های مختلف، فقط راه حل درست و راه حل غلط وجود ندارد، بلکه در این بررسی، شق های دیگری نیز وجود دارند. یکی از این شق ها، راه حل هایی است که در اثر بدفهمی ها ایجاد می شوند که یکی از وظایف معلم، اصلاح این بدفهمی ها است. همان طور که چمن آرا (۱۳۸۴) نیز بیان می کند، «پاسخ های دانش آموزان و راه حل های آنان برای مسایل، همیشه باید جدی گرفته شوند. به هر حال، زمانی که این راه حل ها تولید می شوند، برای دانش آموزان معنا دارند، حتی اگر آن راه حل، از دید معلم نادرست باشند. پس لازم است از دانش آموزان بخواهید توضیح دهند که چگونه به پاسخ خود رسیده اند. این امر کمک می کند تا پاسخ هایی که برای مقبول بودن نزد معلم داده شده اند، از آن هایی که نتایج فهم یا بدفهمی دانش آموزان هستند، جدا شوند» (ص۱۸).

بحث و نتیجه گیری

این مقاله در پاسخ به سؤال **بودن یا نبودن هندسه در برنامه ی درسی ریاضی مدرسه ای**، با استناد به تحقیقات موجود، **پاسخ بودن** را برگزید. زیرا هندسه، یکی از درس هایی است که پتانسیل زیادی برای آموزش و تدریس در برنامه ی درسی ریاضی مدرسه ای دارد و چنان چه به شیوه های مناسب تدریس شود، می تواند توانایی خلاقیت و تفکر را در دانش آموزان رشد دهد.

هم چنین، در اصول و استانداردهای شورای ملی معلمان ریاضی (۲۰۰۰) آمده است که «به جای تدریس بخش های اضافه تر با سرعت بیش تر به دانش آموزان با توانایی بالاتر، بهتر است که همان مطالب را با عمق بیش تر به آن ها آموخت» به اعتقاد مؤلفان، یکی از راه هایی که می توان از طریق آن، مطالب یکسان را با عمق بیش تری آموزش داد و یاد گرفت، ارایه ی روش های مختلف برای حل یک مسأله ی خاص است. با این روش، دانش آموزانی که دارای عملکرد بهتری در درس هندسه هستند، می توانند به جای سرعت گرفتن و جلوتر رفتن در درس، مبحثی یکسان را با عمق بیش تری بیاموزند، چرا که روی حمله به یک مسأله ی خاص از زاویه های گوناگون فکر می کنند. درنتیجه، در رابطه با چگونگی تدریس هندسه، و با توجه به بحث هایی که در مورد **ساخت وسازگرایی و درک رابطه ای** مطرح شد، بدیل ارایه شده برای روش تدریس درس هندسه، روش تدریس مبتنی بر ساخت وسازگرایی و طراحی فعالیت بر مبنای آموزش ریاضی از راه حل مسأله به عنوان یکی از روش های مناسب برای یادگیری ریاضی (هندسه) است. به گفته ی گویا و مهربانی (۱۳۸۳)، ارایه ی چندین روش برای بررسی یک موضوع ریاضی، می تواند به منظور ایجاد ارتباط و اتصال هم مهم باشد و در این حالت ریاضی ای که دانش آموزان می سازند منسجم تر است. هم چنین، زنگنه و گویا (۱۳۸۱) بیان کرده اند که «تقویت استدلال شفاهی را باید از اهداف آموزش نوین هندسه دانست که خود باعث تعمیق یادگیری مفهومی می شود.»

از سوی دیگر، گویا و زنگنه (۱۳۸۱)، به مواردی از مشکلات آموزش هندسه در صد سال اخیر در ایران اشاره کرده اند که از آن جمله، می توان به موارد زیر اشاره کرد:

- عدم ارتباط هندسه با دنیای واقعی؛
- عدم ارتباط هندسه با درس های دیگر ریاضی؛
- عدم اعتمادبه نفس قشر عظیمی از دانش آموزان در آموختن هندسه.

ادعای نویسندگان این مقاله این است که بدیل ارایه شده برای تدریس هندسه، می‌تواند برخی از این مشکلات تاریخی هندسه در ایران را کاهش دهد. زیرا دانش‌آموزان در چنین تدریسی، با تکالیف غنی که دارای راه‌حل‌های متنوعی هستند آشنا می‌شوند. علاوه بر این، نوع کار گروهی و انتخاب‌های متفاوت گروه‌ها، این اجازه را به دانش‌آموزان می‌دهد که مطالب مختلف ریاضی و مفاهیم سایر علوم را به هم مرتبط سازند. در این روش تدریس، برخی راه‌حل‌های دانش‌آموزان به دنیای واقعی نیز مرتبط می‌شود. بالاخره در این نوع تدریس، دانش‌آموزان در بحث‌های گروهی و بحث‌های کلاسی شرکت می‌کنند و ترس آن‌ها از بیان عقایدشان، کمتر می‌شود و بدین ترتیب، اعتمادبه‌نفس آن‌ها در حل مسایل هندسی بالا می‌رود.

زیرنویس‌ها

1. Typical
2. Relational Understanding
3. Constructivism
4. Instrumental Understanding
5. Alternative
6. National Council of Teachers of Mathematics
7. Teaching Mathematics Via Problem Solving
8. Psychology of Mathematics Education
9. Communication

منابع

۱. اسکمپ، ریچارد. (۱۹۷۳). فهم رابطه‌ای و فهم ابزاری. ترجمه‌ی رضا حیدری و زهرا گویا. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۸۱، سال بیست و سوم، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۲. پولیا، جرج. (۱۹۶۹). اهداف آموزش ریاضی. ترجمه‌ی علیرضا طالب‌زاده و زهرا گویا. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۷۲، سال بیستم، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۳. چمن‌آرا، سپیده. (۱۳۸۴). آشنایی با روش‌های تدریس ریاضی مبتنی بر دیدگاه ساخت و سازگرایی. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۸۱، سال بیست‌وسوم، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۴. رضائی، مانی (۱۳۸۲). باز هم یک استدلال لجوجانه. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۷۳، سال بیستم، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۵. ریحانی، ابراهیم. (۱۳۸۴). معرفی نظریه‌ی پیاژه و نظریه‌ی فن‌هیلی-فن‌هیلی در مورد یادگیری هندسه. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۸۰، سال بیست‌ودوم، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۶. ظهوری زنگنه و همکاران. (۱۳۸۲). کتاب هندسه(۲)، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، وزارت آموزش و پرورش.
۷. ظهوری زنگنه، بیژن. (۱۳۸۴). هندسه‌ی خط و صفحه در ریاضی مدرسه‌ای. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۸۰، سال بیست‌ودوم، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۸. ظهوری زنگنه، بیژن و گویا، زهرا. (۱۳۸۱). دیدگاه‌های نوین آموزش هندسه. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۶۷، سال نوزدهم، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۹. کارپنتر، شری. (۲۰۰۳). ساخت و سازگرایی چشم‌انداز آینده‌ی معلمان. ترجمه‌ی سپیده چمن‌آرا. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۸۰، سال بیست و دوم، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۱۰. میزگرد هندسه. (۱۳۷۵). گزارش نخستین کنفرانس آموزش ریاضی ایران.
۱۱. گویا، زهرا؛ مرتاضی مهربانی، نرگس. (۱۳۸۳). ماهیت ریاضی. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۷۶، سال بیست و یکم، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۱۲. هاوسون، جفری و ویلسون، برایان. (۱۹۸۶). ریاضی مدرسه‌ای دهه‌ی ۹۰. ترجمه‌ی ناهید ملکی. (۱۳۶۸)، چاپ اول، نشر مرکز.
۱۳. ون‌دوویل، جان، ا. (۲۰۰۱). توسعه‌ی فهم و درک ریاضی (قسمت اول). ترجمه‌ی سپیده چمن‌آرا. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۷۳، سال بیستم، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

14. Gooya, Zahra. (1992). **Influences of Metacognition-based Teaching and Teaching Via Problem Solving on Student's Beliefs about Mathematics and Mathematical Problem Solving**, Doctoral Dissertation. The University of British Columbia.
15. Ministry of Education. (1992). **Mathematics in the NEW ZEALAND Curriculum**. Publisher: Learning Media.
16. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). **Priciples and Standards for School Mathematics**. Group Working. Publisher: NCTM
17. Schoenfeld, A. H. (1994). Reflection on Doing and Teaching Mathematics. **In Mathematical Thinking and Problem Solving**. Edited by Schoenfeld.
18. Reznik, B. (1994). Some Thoughts on Writing for Putnam. In **Mathematical Thinking and Problem Solving**. Edited by Schoenfeld.
19. Sharygin. I. F & Protasov V. Yu. (2004). Dose the School of 21st Century Need Geometry? In **10th International Congress on Mathematics Education**. National Presentation: Russia.
20. Skemp, R. (1973). Relational Understanding and Instrumental Understanding. In **Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics: a Tribute to Richard Skemp**. By David Tall. (2002).
21. Skemp, R. (1989). **Mathematics in Primary School**. London: Routhladge.
22. Schroeder, Thomas L; Laster, Jr. Frank K. (1989). Developing Understanding in Mathematics. ia Problem Solving.
23. Tall, David Thomas, Michael. (2002). **Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics**. A Tribute to Richard Skemp. POST PRESSED.
24. Yee, Lee peng. (2006). **Teaching Secondary School Mathematics, A Resource Book**. McGraw-Hill Education (Asia).

خاطره‌ای از تدریس رابطه‌ی فیثاغورس در پایه‌ی سوم راهنمایی

مجتبی فرهادی
معلم ریاضی مدارس راهنمایی استان اصفهان

به دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل دَر می‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیّت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

رشد آموزش ریاضی

«...سرگروه‌ها توجه کنند: برای جلسه‌ی آینده، مقوای رنگی، قیچی، نوارچسب، ماژیک و ماشین حساب همراه داشته باشند، جلسه‌ی بعد تدریس فعال...»

این، قسمتی از جمله‌ای بود که در آخر جلسه‌ی قبل از جلسه‌ی تدریس رابطه‌ی فیثاغورس، خطاب به دانش‌آموزان گفتم. لازم به ذکر است که با هماهنگی با مدیر مدرسه، وسایل مورد نیاز از قبل تهیه و در دفتر آموزشگاه موجود بود. به علاوه به کمک سرگروه‌های دانش‌آموزان کلاس (کلاس به چند گروه تقسیم شده بود)، مقواها را شطرنجی کرده و به تعداد گروه‌ها، چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی متفاوت با اضلاع اعداد درست (اعداد فیثاغورسی) رسم شد و یک مربع نیز از هر مقوا جدا کردیم.

جلسه‌ی تدریس این درس فرا رسید. وارد کلاس شدم. گروه‌های دانش‌آموزان در محل‌های مربوط به خود قرار گرفته بودند. وسایل مورد نیاز هم فراهم شده بود. پس از یادآوری قوانین و مقررات فعالیت گروهی به دانش‌آموزان، مثلث‌های قائم‌الزاویه و مربع‌هایی را که از قبل تهیه کرده بودم، در اختیار گروه‌ها قرار دادم و در مورد تعریف و خواص مقدماتی این شکل‌های هندسی از دانش‌آموزان سؤال کردم. در فاصله‌ای که گروه‌ها پیرامون این سؤال بحث می‌کردند، روی تابلوی کلاس یک مربع و یک مثلث قائم‌الزاویه کشیدم. پاسخ‌هایی به سؤال من داده شد:

«آقا اجازه، مثلث قائم‌الزاویه یک زاویه‌ی قائمه و دو زاویه‌ی تند دارد.»
«آقا، ضلع بزرگ‌تر وتر نام دارد.»
«مساحت مربع برابر است با یک ضلع ضرب در خودش» و...

دانش‌آموزان سعی می‌کردند پشت سرهم و حتی هم‌زمان، جواب‌های خود را ارایه دهند. (البته بعضی از پاسخ‌ها، کاملاً صحیح نبود.) پس از جمع‌بندی نظرات همه، سؤال بعد را در مورد مفهوم مساحت یک شکل هندسی پرسیدم.

یکی گفت: «آقا اجازه، مساحت یعنی دورتادور

شکل.» دیگری گفت: «آقا، یعنی طول ضرب در عرض.» سومی گفت: «آقا مساحت یعنی تمام سطح داخل شکل.»...

به هرحال، این پاسخ‌ها نیز نیاز به بحث کلاسی و بررسی و نقد داشت و مفهوم مساحت از میان پاسخ‌های خودشان، یادآوری شد.

کم‌کم مثلث قائم‌الزاویه، مربع، مفهوم مساحت، واحدهای اندازه‌گیری مساحت و بالاخره روش محاسبه‌ی مساحت مربع که پیش‌نیازهای این درس بودند، به کمک دانش‌آموزان یادآوری شدند. روی یک ضلع مربع روی تابلو عدد ۸ نوشتم و مساحت مربع را از دانش‌آموزان پرسیدم. یکی از دانش‌آموزان گفت:

«باید واحدها را داخل مربع بگذاریم و آن‌ها را بشماریم.»

بلافاصله همان دانش‌آموز به همراه چند نفر دیگر گفتند:

«هشت هشت تا میشه شصت و چهار تا. آقا شصت و چهار تا میشه.»

بار دیگر داخل مربع غدد ۴۹ و کنار ضلع آن، حرف x را نوشتم و ضمن تأکید بر این که ۴۹، مساحت مربع است، این بار اندازه‌ی ضلع مربع را پرسیدم. پس از چند سؤال و جواب به این نتیجه رسیدیم که ضلع مربع برابر است با جذر مساحت آن و ضلع این مربع $\sqrt{۴۹}$، یا ۷ است.

پس از آن که مطمئن شدم مفاهیم مورد نیاز برای ادامه‌ی درس برای همه یادآوری شد، از گروه‌ها خواستم، سه مربع از مقوای شطرنجی شده طوری جدا کنند به طوری که ضلع هرکدام برابر با یکی از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌شان باشد و از آن‌ها خواستم مربع‌ها را طوری ببرند که بتوانند تعداد واحدهای شطرنجی داخل آن را به‌راحتی بشمرند.

انجام این کار به کمی وقت نیاز داشت. اعضای گروه‌ها با اشتیاق، مربع‌ها را آماده می‌کردند. هر مربعی که آماده می‌شد یکی از اعضای گروه واحدهای داخل آن‌را می‌شمرد و مساحت آن‌را تعیین می‌کرد. بعضی از اعضا نیز به گروه‌های دیگر سر می‌کشیدند و گروه خود را از میزان پیشرفت سایر گروه‌ها مطلع می‌کردند. من نیز در این زمان، با سرکشی به گروه‌ها، هر جا لازم بود راهنمایی‌های لازم را برای دقیق بودن مربع‌ها انجام دادم.

پس از آماده شدن مربع‌ها، از گروه‌ها خواستم کنار هر ضلع مثلث قائم‌الزاویه، مربع به ضلع همان عدد را با نوارچسب بچسبانند و مساحت هر مربع را داخل آن با ماژیک بنویسند. وقتی کار چسباندن مربع‌ها کنار اضلاع مثلث و نوشتن مساحت، انجام شد، با کمی مکث پرسیدم: «آیا می‌توانید بین سه عددی که روی مثلث‌ها نوشتید رابطه‌ای پیدا کنید؟ اگر پیدا کردید آن را روی سه عدد مربوط به گروه‌های دیگر نیز امتحان کنید.»

سکوتی کلاس را فراگرفت و اعضای گروه‌ها مشغول فکرکردن و یافتن الگو شدند. در حدود ۱۵ تا ۲۰ ثانیه‌ی بعد ولوله‌ای کلاس را فراگرفت و رفت و آمد بین گروه‌ها آغاز شد.

این جمله چندین بار در شلوغی کلاس شنیده شد که: «مساحت دو مربع کوچک‌تر برابر است با مساحت مربع بزرگ‌تر.»

آری، دانش‌آموزان با شور و شوق مثال زدنی به کشف رابطه‌ی فیثاغورس نائل شده بودند و این احساس لذت و شادی در برق چشمانشان نمایان بود.

***

پس از انجام این فعالیت عملی، فعالیت موجود در کتاب، عکس رابطه‌ی فیثاغورس و کاربرد آن را از روی کتاب درسی مطالعه کردیم و درباره‌ی آن در کلاس بحث شد. از دانش‌آموزان خواستم برای محاسبه‌های وقت‌گیر مانند یافتن مجذور و جذر، از ماشین حساب استفاده کنند. در پایان جلسه‌ی اول، قرار شد هر گروه با توجه به توضیحات کتاب، ماکتی برای اثبات رابطه‌ی فیثاغورس، به عنوان فعالیت گروهی خارج از کلاس بسازد.

در جلسه‌ی بعد، در حین انجام تمرینات، پیرامون زندگی فیثاغورس و جنبه‌های تاریخی موضوع، سه گانه‌های اولیه و غیراولیه‌ی فیثاغورسی و هم‌چنین تعمیم رابطه‌ی فیثاغورس، اطلاعاتی به کلاس دادم و تحقیق بیش‌تر در مورد هریک از موضوعات را به عنوان پروژه‌ای برای گروه‌ها در نظر گرفتم.

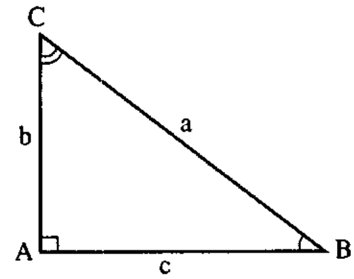
مروری بر قضیه‌ی فیثاغورس و تعمیم آن در اشکال متشابه هندسه‌ی مسطح و هندسه‌ی فضایی

سید یحیی میرعماد
دبیر ریاضی شهرستان دامغان و مدرس دانشگاه‌های دامغان

قضیه‌ی فیثاغورس

در هر مثلث قائم‌الزاویه، مساحت مربع ایجاد شده روی وتر برابر با مجموع مساحت‌های مربع‌های ایجاد شده روی دو ضلع زاویه‌ی قائمه است.

$$a^2 = b^2 + c^2$$



قضیه‌ی فوق را می‌توان برای مساحت هر سه شکل متشابه مسطح که یک ضلع نظیر آن‌ها بر روی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه منطبق باشد برقرار کرد؛ از آن جمله

در هر مثلث قائم‌الزاویه، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ایجاد شده روی وتر با مجموع مساحت‌های مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ایجاد شده روی اضلاع زاویه‌ی قائمه برابر است.

برهان: با توجه به این که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع x برابر با $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ است، پس اگر طرفین رابطه‌ی (۱) را در عدد $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ضرب کنیم داریم

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 \qquad (2)$$

که رابطه‌ی (۲)، رابطه‌ای میان مساحت مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به اضلاع a و b و c است.

مساحت دایره‌ی ایجاد شده به قطر وتر مثلث قائم‌الزاویه برابر با مجموع مساحت‌های دوایری به قطر اضلاع زاویه‌ی قائمه است.

برهان: با ضرب طرفین رابطه‌ی (۱) در $\frac{\pi}{4}$ داریم

$$\pi\frac{a^2}{4} = \pi\frac{b^2}{4} + \pi\frac{c^2}{4} \qquad (3)$$

که هریک از جملات رابطه‌ی (۳)، مساحت دوایر موردنظر هستند.

تعمیم قضیه‌ی فیثاغورس

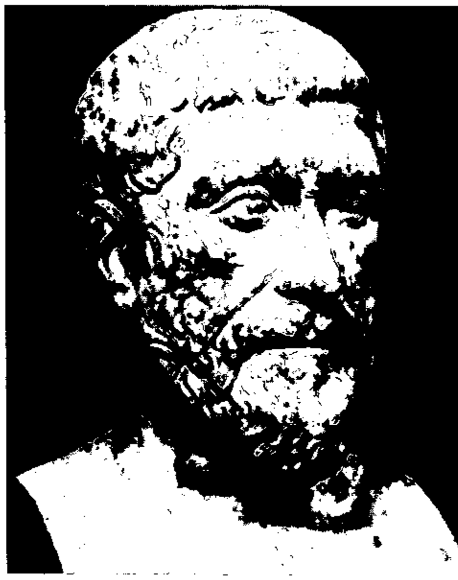
اگر سه شکل متشابه A و B و C به گونه‌ای باشند که ضلع متناظر آن‌ها بر روی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای قرار گیرند، (و شکل A روی وتر باشد) داریم

$$S_A = S_B + S_C \qquad (4)$$

برهان:

$$A \sim B \Rightarrow \frac{S_A}{S_B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow S_B = \frac{b^2}{a^2}S_A$$

$$A \sim C \Rightarrow \frac{S_A}{S_C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \Rightarrow S_C = \frac{c^2}{a^2}.S_A$$



از جمع روابط فوق داریم

$$S_B + S_C = \frac{b^2}{a^2} S_A + \frac{c^2}{a^2} S_A$$
$$= \frac{S_A}{a^2}(b^2 + c^2)$$
$$= \frac{S_A}{a^2} . a^2$$
$$= S_A$$

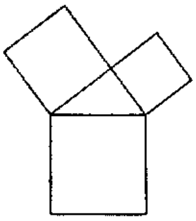
حال اگر هریک از سه شکل متشابه واقع بر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه را به ارتفاع دلخواه h در فضا درنظر بگیریم (یک منشور قائم) سه شکل فضایی متشابه تولید می‌شود که از ضرب طرفین رابطه‌ی (۴) در h، خواهیم داشت

$$h.S_B + h.S_c = h.S_A$$

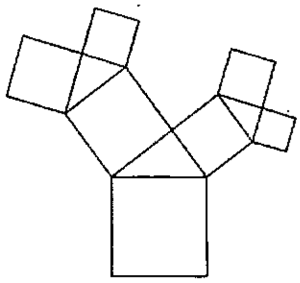
یعنی:

قضیه‌ی فیثاغورس برای شکل‌های فضایی متشابه: اگر سه شکل فضایی متشابه به گونه‌ای باشند که قاعده‌های آن‌ها در یک ضلع متناظر بر روی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه باشند، حجم ایجاد شده‌ی نظیر وتر با مجموع حجم‌های ایجاد شده‌ی نظیر بر روی اضلاع زاویه‌ی قائمه برابر است.

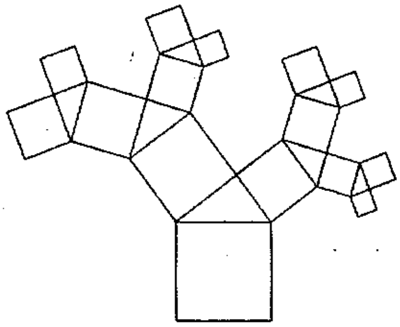
فرکتال‌های تولید شده براساس قضیه‌ی فیثاغورس



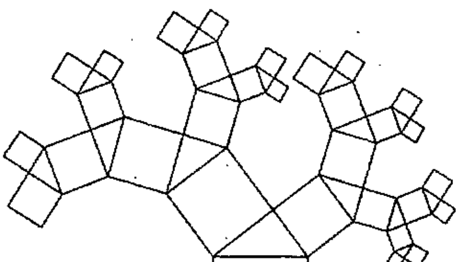
n=1



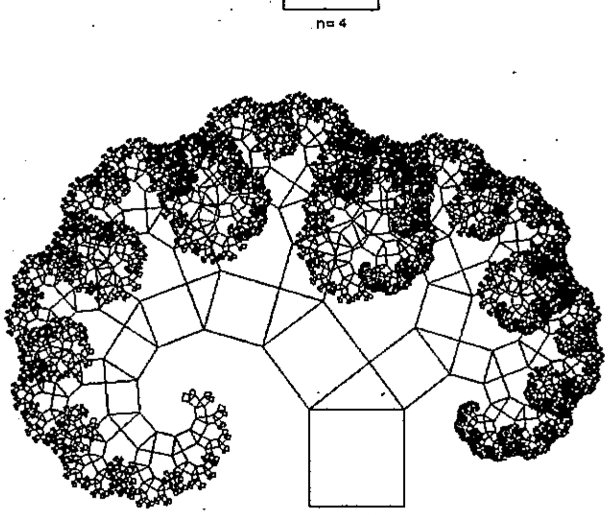
n=2



n=3



n=4



n=12

کشف روابط جالب ضرایب عددی ضرب چندجمله‌ای‌ها با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه‌ی عددی

عمر گیوه‌چی

مطلب را با این جمله آغاز می‌کنم که اگر گمان کنیم که برتری دانش انسان امروزی نسبت به نیاکان ما ناشی از برتری هوش و استعداد ماست سخت در اشتباه هستیم. بنابه گفته‌ی برنارد سیلوستر، فیلسوف و شاعر فرانسوی قرن دوازدهم: «ما هم‌چون کودکی هستیم که بر روی شانه‌های موجودات عظیمی ایستاده باشیم. اگر این امکان را داریم که دورتر را بهتر ببینیم نه به این خاطر است که دید ما دقیق‌تر و یا خود ما بالاتر از آن‌ها هستیم، بلکه به این علت است که به برکت و عظمت و بزرگی آن‌ها بالا رفته‌ایم.»

* * *

آیا تا به حال نام **مثلث قائم‌الزاویه‌ی عددی** را شنیده‌اید؟

در واقع مثلث قائم‌الزاویه‌ای وجود دارد که دارای خواص جالبی است. این مثلث قائم‌الزاویه‌ی عددی، از ضرایب چندجمله‌ای‌هایی به‌دست آمده است که در زیر به خصوصیات آن می‌پردازم.

افرادی که با ریاضی آشنایی دارند، بسط دوجمله‌ای خیام نیوتن را می‌دانند و به زیبایی موجود در این الگو، واقف هستند.

$$(a+b)^۰ = ۱$$
$$(a+b)^۱ = a+b$$
$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$
$$(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$$
$$\vdots \qquad \cdots$$

اگر ضرایب عددی جملات سمت راست تساوی‌ها را بنویسیم، به یک مثلث متساوی‌الساقین می‌رسیم که تمام اعداد روی دو ضلع آن، یک می‌باشد.

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=۰ & & & & & ۱ & & & & \\
n=۱ & & & & ۱ & & ۱ & & & \\
n=۲ & & & ۱ & & ۲ & & ۱ & & \\
n=۳ & & ۱ & & ۳ & & ۳ & & ۱ & \\
n=۴ & ۱ & & ۴ & & ۶ & & ۴ & & ۱ \\
\vdots & & & & & \cdots & & & &
\end{array}$$

با توجه به نظمی که در این مثلث وجود دارد، می‌توان اعداد سطرهای بعدی را به‌دست آورد. حال به عبارت‌های زیر توجه کنید.

$$\begin{array}{ll}
n=۱ & a \\
n=۲ & a(a+۱) \\
n=۳ & a(a+۱)(a+۲) \\
n=۴ & a(a+۱)(a+۲)(a+۳) \\
n=۵ & a(a+۱)(a+۲)(a+۳)(a+۴) \\
\vdots & \vdots \\
n=k & a(a+۱)(a+۲)\cdots(a+k-۱)
\end{array}$$

اگر حاصل ضرب‌های بالا را به‌دست آوریم، خواهیم داشت

$$\begin{array}{ll}
n=۱ & a=a \\
n=۲ & a(a+۱)=a^۲+a \\
n=۳ & a(a+۱)(a+۲)=a^۳+۳a^۲+۲a \\
n=۴ & a(a+۱)(a+۲)(a+۳)=a^۴+۶a^۳+۱۱a^۲+۶a \\
n=۵ & a(a+۱)(a+۲)(a+۳)(a+۴)=a^۵+۱۰a^۴+۳۵a^۳+۵۰a^۲+۲۴a \\
n=۶ & a(a+۱)(a+۲)(a+۳)(a+۴)(a+۵)=a^۶+۱۵a^۵+۸۵a^۴+۲۲۵a^۳+۲۷۴a^۲+۱۲۰a \\
\vdots & \cdots
\end{array}$$

ضرایب عبارت‌های سمت راست تساوی‌ها را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

n = ۱	۱					
n = ۲	۱	۱				
n = ۳	۱	۳	۲			
n = ۴	۱	۶	۱۱	۶		
n = ۵	۱	۱۰	۳۵	۵۰	۲۴	
n = ۶	۱	۱۵	۸۵	۲۲۵	۲۷۴	۱۲۰
⋮			...			

در این اعداد، که تشکیل یک مثلث می‌دهند، الگوهای زیر مشاهده می‌شود:

۱) این ضرایب یک مثلث قائم‌الزاویه را می‌سازند.

۲) یک ضلع زاویه‌ی قائمه، فقط عدد یک است.

۳) تعداد جملات هر سطر، با شماره‌ی سطر، یکی است.

۴) اعداد روی وتر مثلث در سطر n ـ اُم، برابر است با $(n-1)!$. به عنوان مثال، اگر در سطر سوم هستیم، عدد روی وتر مثلث برابر است با $۲ = ۲! = (n-۱)!$.

۵) مجموع تمام اعداد روی وتر از سطر اول تا سطر n ـ اُم، برابر است با $\sum_{k=1}^{n}(k-1)!$.

۶) اعدادی که روی ستون دوم قرار دارند، همان اعداد دنباله‌ی مثلثی هستند که جمله‌ی عمومی آن $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ است؛ یعنی

۱ ۳ ۶ ۱۰ ۱۵ ۲۱ ...

۷) مجموع اعداد روی هر سطر، با فاکتوریل شماره‌ی سطر، برابر است. به عنوان مثال، اگر در سطر چهارم هستیم، مجموع همه‌ی اعداد با !۴ برابر است

$$n = ۴ \Rightarrow ۱+۶+۱۱+۶ = ۲۴ = ۴!$$

۸) می‌توان با یافتن الگویی که در این مثلث وجود دارد، تمام اعداد سطرهای بعدی را ـ بدون ضرب چندجمله‌ای‌ها ـ به‌دست آورد.

n = ۱	۱				
n = ۲	۱		۱		
n = ۳	۱		۳	۲	
n = ۴	۱		۶	۱۱	۶
⋮			⋮		
n = k	۱ ...	A		B ...	
	۱	...	...	C ...	

که در آن $\boxed{k \times A + B = C}$

مثلاً برای به‌دست آوردن عدد زیر عدد ۲۲۵ در سطر هفتم، داریم A=۸۵ و B=۲۲۵ و k=۶، لذا

$$C = ۶ \times ۸۵ + ۲۲۵ = ۷۳۵$$

البته اگر بخواهیم اعداد روی وتر را به‌دست آوریم، کافی است در رابطه‌ی بالا به جای B، عدد صفر را قرار دهیم.

۹) خاصیت بعدی مربوط به جمع اعداد داخل مثلث با کنار گذاشتن اعداد روی وتر می‌باشد.

$$n = ۳: \quad \left.\begin{matrix} ۱ \\ ۱+۳=۴ \end{matrix}\right\} \rightarrow ۴+۱=۵$$

$$n = ۴: \quad \left.\begin{matrix} ۱ \\ ۱+۳=۴ \\ ۱+۶+۱۱=۱۸ \end{matrix}\right\} \rightarrow ۱+۴+۱۸=۲۳$$

$$n = ۵ \quad \left.\begin{matrix} ۱ \\ ۱+۳=۴ \\ ۱+۶+۱۱=۱۸ \\ ۱+۱۰+۳۵+۵۰=۹۶ \end{matrix}\right\} \rightarrow ۱+۴+۱۸+۹۶=۱۱۹$$

این روش را می‌توان به همین شکل ادامه داد.

حال اگر این اعداد را کنار یکدیگر قرار دهیم، به الگوی زیر می‌رسیم

$$n = ۳ \ : \ ۵ = ۳!-۱$$
$$n = ۴ \ : \ ۲۳ = ۴!-۱$$
$$n = ۵ \ : \ ۱۱۹ = ۵!-۱$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که مجموع اعداد داخل این مثلث تا سطر k اُم، برابر است با

$$k!-۱$$

افکار گنگ

مارتی راس
مترجم: حمیدرضا وهابی، دانشگاه آزاد اسلامی اسلامشهر

حال به اعدادی می‌رسیم که عجیب و گنگ و نامنظم‌اند، انگار که هیچ خاصیت خوبی ندارند، آن‌چنان غیرعادی‌اند که توضیح و فهم ماهیتشان غیرممکن به‌نظر می‌رسد؛ حتی گاهی عدد بودن چنین موجوداتی نیز انکار می‌شود...
ایساک بارو[1] (۱۷۳۴)

با مشهورترین عدد گنگ شروع می‌کنیم:

$$\boxed{\sqrt{2}}$$

می‌دانیم که این عدد به‌طور طبیعی به‌عنوان وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با ساق‌هایی به طول ۱ ظاهر می‌شود. گنگ بودن $\sqrt{2}$ حدود ۵۰۰سال قبل از میلاد توسط فیثاغورسیان[2] با رسوایی آشکار شد. ریاضیات و فلسفه‌ی آن‌ها بر پایه‌ی اعداد طبیعی و نسبت‌های عددی کوچک بود، و لذا این کشف می‌توانست خیلی دردسرآور باشد. به‌علاوه فیثاغورسیان تنها افرادی نبودند که به‌ظهور اعداد گنگ واکنش بد نشان دادند.

تقریباً همه‌ی اثبات‌های گنگ بودن $\sqrt{2}$، یک برهان خلف دارد. فرض کنید $\sqrt{2}$ گویا باشد، در نتیجه می‌توانیم بنویسیم

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

که در آن m و n اعداد صحیح‌اند. سپس، با استفاده از برخی روش‌های کلی محاسباتی، نشان می‌دهیم که

$$\sqrt{2} = \frac{m_1}{n_1}$$

که این کسر جدید به نوعی ساده‌تر است (مثلاً m_1 کوچکتر از m است، یا n_1 کوچکتر از n است، یا هردو برقرارند). با تکرار این عمل،

$$\sqrt{2} = \frac{m_2}{n_2}$$

و سپس،

$$\sqrt{2} = \frac{m_3}{n_3}$$

و به همین ترتیب، هربار عبارت گویای ساده‌تری برای $\sqrt{2}$ به‌دست می‌آید. اما واضح است که این عمل را نمی‌توان تا بی‌نهایت ادامه داد. بالاخره، صورت یا مخرج مساوی با ۱ خواهد شد، یا به حالت پوچ مشابهی خواهیم رسید. و این همان تناقض است. این فرض که می‌توانیم عبارت (۱) را بنویسیم، به همراه روش کلی ساده‌کردن کسر، به ناچار به یک تناقض؛ به تساوی‌ای که مطمئنیم نادرست است، منجر شد. تنها نتیجه‌ی ممکن این است که (۱) غیرممکن است، یعنی در واقع $\sqrt{2}$ گنگ است.

این شکل ظاهری برهان است، ولی اکنون باید روشی برای ساده‌کردن کسرها ارائه دهیم، و این همان قسمتی است که برهان‌های مختلفی برای آن ارائه می‌شود. معمولاً، و احتمالاً آن‌چه که فیثاغورسیان انجام دادند، برهانی است که وابسته به عوامل m و n می‌باشد[3]:

بنابر(۱)، $m^2 = 2n^2$، پس m^2 و در نتیجه m زوج است. پس می‌توانیم بنویسیم $m = 2k$. در نتیجه $4k^2 = 2n^2$ و لذا

$n^2 = 2k^2$ ، پس n^2 و در نتیجه n زوج است. بنابراین در (۱) هر دو عامل m و n زوج هستند و لذا یک عامل ۲ را می‌توانیم از صورت و مخرج حذف کنیم تا به یک کسر ساده‌تر برسیم. البته این عمل همواره بدون ایجاد تناقض انجام می‌شود، مثلاً $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ، ولی $\frac{3}{4}$ را نمی‌توان بیش‌تر از این ساده کرد. تناقض ایجاد شده از (۱) بدین دلیل است که عمل ساده‌کردن کسرها را می‌توان به‌طور مداوم ادامه داد.

در این‌جا ما برهان دیگری را ارائه می‌کنیم که شهرت کمتری دارد ولی به نوعی ساده‌تر است، زیرا به تشخیص عوامل m و n بستگی ندارد:

بنابر (۱)، $m^2 = 2n^2$ ، پس

$$n < m < 2n \qquad (2)$$

اکنون $\sqrt{2}$ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{2-\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}-1} = \frac{2n-m}{m-n} = \frac{m_1}{n_1}$$

اما بنابر (۲)،

$$2n < 2m \Rightarrow 2n - m < m \Rightarrow m_1 < m$$

پس صورت (و مشابهاً مخرج) کسر جدید، از صورت (و مخرج) کسر قبلی، کوچک‌ترند و ما به تناقض مورد نظر رسیدیم.

پیش از معرفی و بررسی دیگر اعداد گنگ، بیایید لحظه‌ای روی یک پرسش اساسی، که تا کنون آن را نادیده گرفته‌ایم، فکر کنیم:

یک عدد گنگ دقیقاً چیست؟

توجه کنید که ماهیت $\sqrt{2}$ فقط از نظر هندسی برای ما مشخص شد، ولی از نظر عددی، فقط نشان دادیم که $\sqrt{2}$ چه چیزی نمی‌تواند باشد، نه این که چه چیزی هست. پاسخ استاندارد سؤال فوق، پاسخی صحیح ولی غیرمفید است:

یک عدد گنگ، یک عدد اعشاری نامختوم غیر مکرر است.

چگونه می‌توان اعداد اعشاری نامختوم را ضرب یا تقسیم کرد؟ یا حتی چگونه می‌توان بسط اعشاری کامل یک عدد دلخواه را به‌دست آورد؟ به عنوان مثال، هیچ‌کس نمی‌داند بسط اعشاری کامل $\sqrt{۲}$ چیست. آری، یک عدد گنگ دقیقاً چیست؟ واقعاً این سؤالی بسیار عمیق است. بالاخره، در قرن نوزدهم پاسخ قانع‌کننده‌ای به این سؤال داده شد. در مقام مقایسه، عدد مختلط $i = \sqrt{-۱}$، که معمولاً در هاله‌ای از ابهام در نظر گرفته می‌شود، خیلی آسان‌تر از $\sqrt{۲}$ قابل تعریف است؛ و در حدود سال ۱۸۰۰ ماهیت آن به روشنی درک شد. واقعاً فیثاغورسیان حق داشتند که به زحمت بیفتند. ما در این مقاله به دنبال تعریف دقیق ماهیت اعداد گنگ نیستیم. در واقع ما بدون مراجعه به تعریف دقیق اعداد گنگ، می‌توانیم به یافتن مثال‌های دیگری از این گونه اعداد ادامه دهیم. به عنوان مثال، گزاره‌ی زیر به شیوه‌ی دیگری بیان می‌کند که $\sqrt{۲}$ گنگ است:

هیچ عدد گویای $\frac{m}{n}$ وجود ندارد به طوری که $(\frac{m}{n})^{۲} = ۲$.

کافی است در هر برهانی که گنگ بودن $\sqrt{۲}$ را نشان می‌دهد، به جای $\sqrt{۲}$ کسر $\frac{m}{n}$ را با فرض $(\frac{m}{n})^{۲} = ۲$ قرار دهیم.

جستجویمان را برای یافتن سایر اعداد گنگ ادامه می‌دهیم. عدد $\sqrt{۲}$ در واقع یک عدد گنگ جبری است (یک عدد را جبری می‌نامیم در صورتی که ریشه‌ی یک معادله با ضرایب گویا باشد؛ عددی را که جبری نباشد، عدد متعالی می‌نامیم). طبیعی است که در مسیر جستجوی اعداد گنگ، در این مرحله با سایر اعداد گنگ جبری مانند $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$، $\sqrt{n}$، $\sqrt[۳]{n}$ و غیر مواجه می‌شویم. اثبات گنگ بودن این گونه اعداد، مشابه برهان $\sqrt{۲}$، با یک ترفند جبری ساده امکان‌پذیر است. البته واضح است که همه‌ی این گونه اعداد گنگ؛ مثلاً $\sqrt{۹}$ گنگ نیستند. با وجود این که در دنیای اعداد گنگ جبری ظاهراً همه‌چیز روشن است، ولی موانعی هم وجود دارد. به عنوان مثال این سؤال را در نظر بگیرید: اگر a و b گنگ باشند، آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که a^b نیز گنگ است؟ شاید تصور کنید که پاسخ مثبت است، ولی چنین نیست. مثال زیر همراه با برهان جالبی که دارد؛ نشان می‌دهد که پاسخ سؤال فوق منفی است:

عدد $(\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}}$ را در نظر بگیرید.

$$(\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}} = (\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}.\sqrt{۲}} = (\sqrt{۲})^{۲} = ۲$$

$\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ یا گویاست یا گنگ است. اگر $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ گویا باشد، قرار می‌دهیم $a = b = \sqrt{۲}$. اگر $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ گنگ باشد، قرار می‌دهیم $a = \sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ و $b = \sqrt{۲}$. پس در هر صورت، نمونه‌ای یافته‌ایم، لیکن واقعاً نمی‌دانیم آن عدد چیست؟ در مثال فوق دیدیم که حتی بدون دانستن ماهیت دقیق یک عدد مانند $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$، می‌توان آن را مورد استفاده قرار داد. در واقع در سال ۱۹۳۰، ر. کوزمین[4] ثابت کرد که $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ گنگ است. جدید بودن برهان نشان می‌دهد که اثبات گنگ بودن یک عدد چقدر می‌تواند سخت باشد. در واقع وقتی پا را از ریشه‌های nام اعداد و تعمیم‌شان یعنی ریشه‌های معادلات چند جمله‌ای فراتر می‌نهیم، با اعدادی نظیر $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ مواجه می‌شویم؛ که می‌توان گفت اثبات گنگ بودن این گونه اعداد تقریباً همیشه سخت است. آری، می‌بینید که چگونه می‌توان تعریف‌های مشکل را در زیر نقابی از علامت‌گذاری‌های ساده مخفی کرد. تعریف دقیق اینکه یک عدد به توان یک عدد گنگ می‌رسد چیست؟ در ادامه، مثال‌های بیش‌تری از اعدادی را ارائه می‌دهیم که گنگ بودن آن‌ها تا کنون ثابت نشده است.

اکنون جهان اعداد جبری را ترک می‌کنیم و به دنیای اعداد متعالی وارد می‌شویم. ابتدا عدد مشهور زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\boxed{e}$$

قبل از اثبات گنگ بودن e، ابتدا باید تعریف دقیق این عدد را بیان کنیم. برخلاف $\sqrt{۲}$، چندین تعریف هم‌ارز برای e وجود دارد. اولین تعریف به حدود سال ۱۶۰۰ میلادی برمی‌گردد؛ که به صورت زیر است:

$$e = \lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^{n} \qquad (۳)$$

این تعریف معمولاً در امور مالی و مباحث مربوط به بهره‌ی مرکب پیوسته ظاهر می‌شود. تعریف دیگری که اغلب در

مطالعه‌ی حسابان از آن استفاده می‌شود، معرفی تابع $f(x)=e^x$ و سپس تعریف عدد e به صورت $e=f(1)$ است. البته در این رهیافت فقط سؤال ما تغییر می‌کند: پایه‌ی تابع $f(x)=e^x$ چه خاصیت ویژه‌ای دارد؟ در حقیقت برای هر پایه‌ی دلخواه a، یک عدد ثابت M وجود دارد به طوری که

$$\frac{d}{dx}(a^x)=Ma^x$$

حال ما می‌توانیم عدد یکتای e را به صورت زیر تعریف کنیم: پایه‌ای که به ازای آن $M=1$ می‌شود را عدد e می‌نامیم. یعنی

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x \qquad (4)$$

تعریف‌های (۳) و (۴) معادل‌اند.

در اینجا ما عدد e را به صورت سری نامتناهی زیر تعریف می‌کنیم:

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots \qquad (5)$$

(۵) از (۳) نتیجه می‌شود. ابتدا بسط عبارت $(1+\frac{1}{n})^n$ را با استفاده از فرمول دوجمله‌ای می‌نویسیم

$$(1+\frac{1}{n})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1)^{n-k}(\frac{1}{n})^k$$

$$=\binom{n}{0}\left(\frac{1}{n}\right)^0+\binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)^1+\binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots$$

$$+\binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

(۵) از (۴) نیز نتیجه می‌شود. برای اثبات این مطلب، ابتدا بسط مکلورن تابع $f(x)=e^x$ را حول نقطه‌ی $x_0=0$ به دست می‌آوریم

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}_{(0)}}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^0}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

در نتیجه

$$e=f(1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

قضیه‌ی زیر با استفاده از تعریف (۵) ثابت می‌شود.

قضیه (اویلر[5], ۱۷۳۷): e گنگ است.

برهان. مشابه $\sqrt{2}$، اثبات گنگ بودن e نیز با استفاده از برهان خلف انجام می‌شود. فرض کنید e گویا باشد، در نتیجه می‌توانیم بنویسیم

$$e=\frac{m}{n} \qquad (6)$$

که در آن m و n اعداد صحیح‌اند. بنابر (۵)،

$$en!=n!+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\cdots+\frac{n!}{n!}+\frac{n!}{(n+1)!}+\frac{n!}{(n+2)!}+\cdots$$

در نتیجه بنابر (۶)،

$$\frac{m}{n}n!-n!-\frac{n!}{1!}-\frac{n!}{2!}-\cdots-\frac{n!}{n!}=\frac{n!}{(n+1)!}+\frac{n!}{(n+2)!}+\cdots \qquad (7)$$

نشان می‌دهیم که طرف راست (۷)، بین صفر و یک است.

$$0<\frac{n!}{(n+1)!}+\frac{n!}{(n+2)!}+\frac{n!}{(n+3)!}+\cdots$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots$$

$$<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots$$

آخرین عبارت یک سری هندسی است که مجموع آن به صورت زیر به دست می‌آید

$$\text{مجموع}=\frac{\text{جمله اول}}{\text{قدر نسبت}}=\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n}$$

در نتیجه طرف راست (۷)، بین صفر و یک است؛ در حالی که طرف چپ (۷) یک عدد صحیح است. این تناقض نشان می‌دهد که e یک عدد گنگ است.

اگرچه تعریف (۵) به سال ۱۶۶۵ و ایزاک نیوتن[۶] برمی‌گردد، ولی برهان فوق در سال ۱۸۱۵ توسط ژوزف فوریه[۷] ارائه شد. برهان اصلی اویلر بر پایه‌ی بسط کسر مسلسل[۸] وی برای $\frac{e-1}{2}$ می‌باشد.

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cdots}}}}$$

کسر مسلسل فوق در واقع نشان می‌دهد که مقدار $\frac{e-1}{2}$ برابر با حد دنباله‌ی زیر است

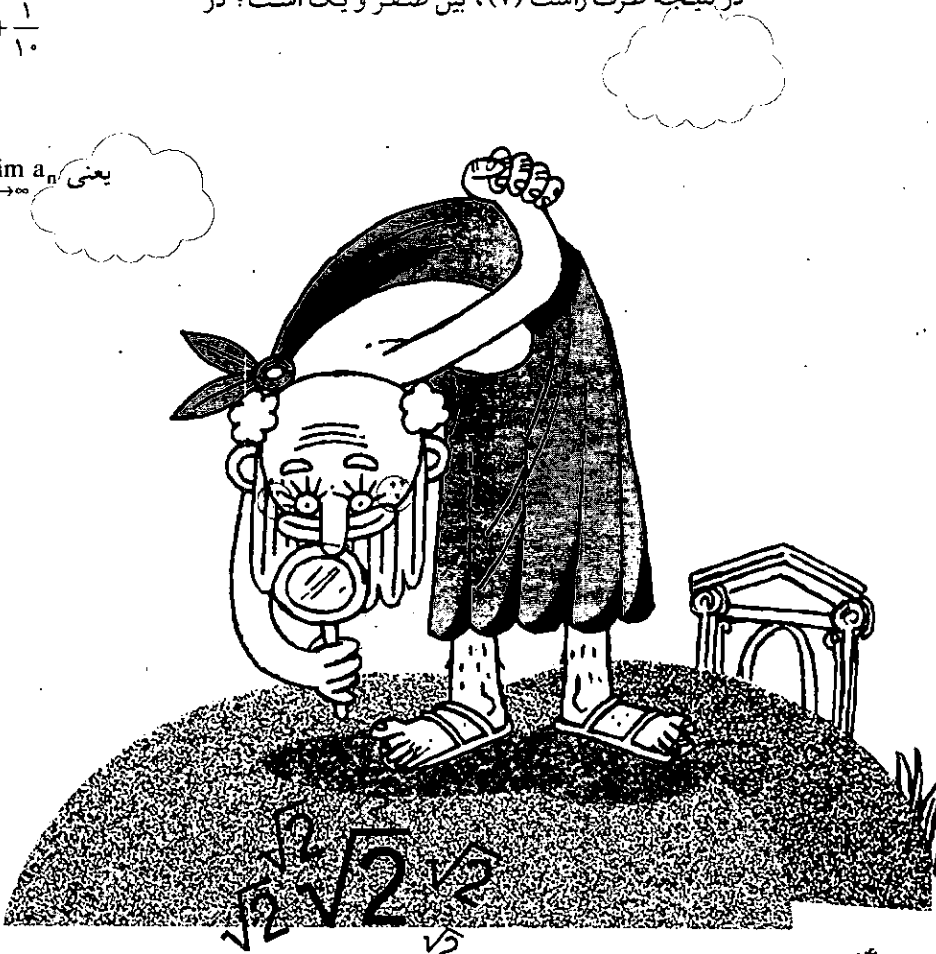
$$a_1=1,a_2=\frac{1}{1},a_3=\frac{1}{1+\frac{1}{6}}=\frac{6}{7},a_4=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10}}}=\frac{61}{71},\ \cdots$$

یعنی $\frac{e-1}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

در حقیقت هر عدد دلخواه یک بسط کسر مسلسل ساده دارد. به عنوان مثال،

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

بسط $\sqrt{2}$ را به سادگی می‌توان اثبات کرد ولی اثبات بسط e کار بیش‌تری را می‌طلبد. واضح است که یک کسر مسلسل متناهی (یعنی کسر مسلسلی که در آن از مرحله‌ای به بعد صورت‌ها مساوی صفرند)، یک عدد گویاست. برعکس، اویلر ثابت کرد که هر کسر مسلسل ساده‌ی نامتناهی، گنگ است.



به‌ویژه $\frac{e-1}{2}$ و در نتیجه e گنگ است.

- مبحث عدد e را با بیان این که به‌ازای هر عدد صحیح ناصفر m، عدد e^m نیز گنگ است، به پایان می‌رسانیم. واضح است که این مطلب در مورد $\sqrt{2}$ صدق نمی‌کند، زیرا $2 = (\sqrt{2})^2$. اثبات گنگ بودن e^m از اثبات گنگ بودن e مشکل‌تر است؛ روش فوریه در این مورد کارساز نیست. یوهان لامبرت[9] گنگ بودن e^m را در سال ۱۷۶۶ با استفاده از کسرهای مسلسل اثبات کرد. به‌عنوان نتیجه‌ای از این مطلب ثابت می‌کنیم که مثلاً $Ln2$ گنگ است:

اگر $Ln2$ گویا باشد، آن‌گاه $Ln2 = \frac{m}{n}$ که در آن m و n اعداد صحیح‌اند. تساوی $Ln2 = \frac{m}{n}$ معادل $e^m = 2^n$ است، که با گنگ بودن e^m متناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که $Ln2$ یک عدد گنگ است. اینک، مثال دیگری از یک عدد گنگ داریم که به توان یک عدد گنگ می‌رسد و حاصل یک عدد گویا می‌شود؛ $e^{Ln2} = 2$.

اکنون به درخشان‌ترین ستاره در آسمان اعداد گنگ می‌نگریم:

$\boxed{\pi}$

به‌طور طبیعی عدد π به‌عنوان نسبت محیط یک دایره به قطرش تعریف می‌شود. ولی، برخلاف $\sqrt{2}$، این تعریف هندسی فوراً تبدیل به داده‌های عددی نمی‌شود. هزاران سال است که انسان‌ها در جست‌وجوی فرمول‌ها و تخمین‌های دقیق‌تری برای محاسبه‌ی عدد π هستند. جدول زیر، بخشی از تاریخچه‌ی تخمین‌های عددی π را نشان می‌دهد. (جدول مقابل)

زمان	مقدار تقریبی π	شخص یا مکان
۲۰۰۰ سال قبل از میلاد	$3\frac{1}{8}$	بین‌النهرین[10]
۲۰۰۰ سال قبل از میلاد	$(\frac{16}{9})^2$	مصر[11]
۱۲۰۰ سال قبل از میلاد	۳	چین[12]
۵۵۰ سال قبل از میلاد	۳	کتاب عهد عتیق[13]
۲۵۰ سال قبل از میلاد	بین $3\frac{10}{71}$ و $3\frac{1}{7}$	ارشمیدس[14]
۲۶۳ میلادی	۳٫۱۴۱۵۹	لیوهوی[15]
۱۴۲۹ میلادی	۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹	غیاث‌الدین جمشید کاشانی[16]
۱۷۰۶ میلادی	تا ۱۰۰ رقم اعشار	جان میشن[17]
۱۸۵۳ میلادی	تا ۵۰۰ رقم اعشار	ویلیام شنکس[18]
۱۸۹۷ میلادی	۴	ایالت ایندیانا[19]
۱۹۵۸ میلادی	تا ۱۰۰۰۰ رقم اعشار	ژنیوس[20]
۱۹۹۵ میلادی	تا ۶ میلیارد رقم اعشار	یاسوماسا کانادا[21]

شاید از دیدن عدد ۴ در جدول فوق به عنوان مقدار π تعجب کرده باشید. موضوع مربوط می‌شود به یک رویداد احمقانه که در سال ۱۸۹۷ رخ داد. شخصی به‌نام ادواردگودوین[22]، که می‌توان گفت افکارش خارج از دایره‌ی منطق بود، نمایندگان مجلس سنای ایالت ایندیانا را قانع کرد که چاپ یک اسکناس به ارزش π را به تصویب برسانند. این اسکناس عجیب قرار بود شامل شش شکل هندسی برای بیان مقدار π باشد. ولی قبل از این که نمایندگان مجلس سنا در مورد این موضوع رأی‌گیری کنند، یک ریاضی‌دان در مورد عدد π به آن‌ها توضیح داد و آن‌ها را از این کار منصرف کرد.

- سؤال کلی‌تر دیگری ممکن است در مورد جدول فوق مطرح شود: آیا افرادی که به محاسبه‌ی مقدار π پرداخته‌اند، به این نکته واقف بوده‌اند که عددی را که به‌دست آورده‌اند صرفاً یک مقدار تقریبی است، نه یک مقدار دقیق؟ یقیناً ارشمیدس این را می‌دانست؛ ولی در مورد افراد قدیمی‌تر، این موضوع واضح نیست.

سؤال. فرض کنید هشت تریلیون رقم اول π را بدانیم. چه چیزی می‌تواند به ما بگوید که π گویاست یا خیر؟

جواب. یقیناً هیچ چیز.

تمایل به محاسبه‌ی مقدار π در طول تاریخ ریاضیات موجب کشف تعداد زیادی فرمول‌های زیبا شده است. روش ارشمیدس شاید یکی از جالب‌ترین روش‌ها برای محاسبه‌ی π باشد. روش وی براساس محاسبه‌ی محیط چند ضلعی‌های منتظم محاطی و

محیطی یک دایره‌ی واحد، یعنی در واقع محاسبه‌ی مقدار تقریبی 2π، بود. چون هم از چند ضلعی‌های محاطی و هم از چند ضلعی‌های محیطی استفاده کرد، توانست تقریب‌های پایینی و بالایی π را به‌دست آورد. او برای به‌دست آوردن تقریب‌های دقیق‌تر، در هر مرحله تعداد اضلاع را دوبرابر می‌کرد. اساساً فرمول‌های سینوس و تانژانت نصف زاویه که ما امروزه برای محاسبه‌ی محیط چندضلعی‌های منتظم به‌کار می‌بریم، براساس روش ارشمیدس استوار است. او با یک ۶ـضلعی منتظم شروع کرد و بالاخره به یک ۹۶ـضلعی رسید، ولی از لحاظ تئوری، این روش را با هر درجه‌ای از دقت می‌توان به‌کار برد. با حدگیری از محیط چندضلعی‌های محاطی، عبارت زیر به‌دست می‌آید:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 3\times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)$$

چند ضلعی‌های منتظم و فرمول‌های نصف زاویه توسط فرانسوا ویت[23] نیز به‌کار برده شدند. وی در سال ۱۵۷۹، مساحت این چندضلعی‌ها را محاسبه کرد و با استفاده از یک ترفند جبری هوشمندانه، حاصل ضرب نامتناهی زیر را به‌دست آورد

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{16}\cdots$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}.\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\cdots$$

با استفاده از حسابان پیشرفته، می‌توانیم مقدار π را به‌شکل یک حد مستقیم‌تر به‌دست آوریم. مساحت دایره‌ی واحد یعنی π به‌صورت زیر قابل بیان است

$$\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

حال با محاسبه‌ی تقریبی انتگرال فوق می‌توان فرمول حدی مستقیمی برای π به‌دست آورد. مثلاً، می‌توانیم عبارت زیر انتگرال یعنی $\sqrt{1-x^2}$ را با استفاده از قضیه‌ی دوجمله‌ای بسط دهیم و سپس جمله به‌جمله انتگرال بگیریم. در سال ۱۶۶۶، نیوتن با استفاده از این ایده و با به‌کار بردن انتگرالی که کمی متفاوت با انتگرال فوق بود، سری زیر را به‌دست آورد

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5\times 2^5} - \frac{1}{28\times 2^7} - \frac{1}{72\times 2^9} - \cdots\right)$$

بسط توابع معکوس مثلثاتی[24]، ایده‌ی دیگری است که ریاضی‌دانان بارها برای محاسبه‌ی π از آن استفاده کرده‌اند. اولین فرمول از این نوع را که یک ریاضی‌دان آماتور هندی در قرن پانزدهم کشف کرد، در واقع همان بسط مشهور $\mathrm{arctg}\,1$ است

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

در این‌جا به دو فرمول زیبای دیگر نیز می‌توان اشاره کرد: یکی حاصل‌ضرب نامتناهی زیر که در سال ۱۶۵۵ توسط جان والیس[25] کشف شد

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots$$

و دیگری سری نامتناهی زیر که در سال ۱۷۳۴ توسط اویلر کشف شد

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

هر دو فرمول از بررسی خواص تابع سینوس حاصل می‌شوند.

با وجود این‌که همه‌ی فرمول‌های فوق زیبا هستند، ولی واضح نیست که تا چه حد می‌توانند به ما برای اثبات گنگ بودن π کمک کنند. یقیناً ساختار حدی این گونه فرمول‌ها به تنهایی، نمی‌توانند ما را به نتیجه‌ی مطلوب برسانند. شاید فکر کنید با تقلید از برهان گنگ بودن e بتوان برهانی برای گنگ بودن π ارائه کرد؛ ولی به‌دست آوردن یک سری برای π که مثل سری e به اندازه‌ی کافی مرتب و سرراست باشد، خیلی سخت است. حتی گنگ بودن e^m را نیز نمی‌توان با استفاده از چنین روش‌هایی اثبات کرد. سری جالب زیر را که با استفاده از تئوری تابع تتا در

سال ۱۹۱۴ توسط سرینی واسا رامانوجان[۲۶] کشف شد، در نظر بگیرید

$$\frac{1}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n!}{n!n!}\right)^{3}\frac{42n+5}{2^{12n+4}}$$

حتی سری فوق که ظاهراً مشابه سری e مفید به نظر می‌رسد، نمی‌تواند در اثبات گنگ بودن π به ما کمک کند.

رهیافت طبیعی دیگری که برای اثبات گنگ بودن π به ذهن می‌رسد، یافتن یک کسر مسلسل ساده برای π است. اگرچه جملاتی از چنین کسری را می‌توان یکی‌یکی با استفاده از بسط اعشاری π مشابه $\sqrt{2}$ ساخت، ولی کسر مسلسل ساده‌ی کامل π هنوز کشف نشده است. کسرهای غیرساده‌ی زیادی برای π وجود دارد، اولین آن‌ها که نتیجه‌ای از فرمول حاصل ضرب والیس است در سال ۱۶۵۵ توسط ویلیام برونکر[۲۷] کشف شد

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^{2}}{2+\cfrac{3^{2}}{2+\cfrac{5^{2}}{2+\cdots}}}$$

به هرحال چنین کسرهایی لزوماً گنگ نیستند.

در واقع، برهان اصلی گنگ بودن π که توسط لامبرت در سال ۱۷۶۶ ارائه شد، براساس کسرهای مسلسل است، ولی در آن از یک روش معکوس جالب استفاده شده است. لامبرت ابتدا کسر مسلسل تابعی زیر را به‌دست آورد

$$tgx=\cfrac{1}{(\frac{1}{x})-\cfrac{1}{(\frac{3}{x})-\cfrac{1}{(\frac{5}{x})-\cdots}}}$$

سپس ثابت کرد که اگر زاویه‌ی x گویا باشد، آن‌گاه این کسر مسلسل باید گنگ باشد. اما $tg\frac{\pi}{4}=1$ گویاست، پس $\frac{\pi}{4}$ و در نتیجه π باید گنگ باشد.

اصولاً، برهان لامبرت یک برهان ظریف و زیباست؛ ولی اثبات تمام مراحل آن‌کار زیادی را می‌طلبد[۲۸]. به همین دلیل ما در این‌جا برهان جالبی از ایوان نیون[۲۹] برای اثبات گنگ بودن π آورده‌ایم. انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$I=\int_{0}^{1}P(x)\sin\pi x\,dx \quad (8)$$

که در آن $P(x)=x^{N}(1-x)^{N}$ و N یک عدد صحیح (بزرگ) است که بعداً انتخاب خواهد شد. توجه کنید که در نقاط انتهایی، $P(x)=0$. در نتیجه با استفاده از انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء،

$$I=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}P'(x)\cos\pi x\,dx$$

اکنون $P'(x)=Nx^{N-1}(1-x)^{N}-Nx^{N}(1-x)^{N-1}$ و هم‌چنان در نقاط انتهایی، $P'(x)=0$. مجدداً با استفاده از انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء،

$$I=-\frac{1}{\pi^{2}}\int_{0}^{1}P''(x)\sin\pi x\,dx$$

که در آن

$$P''(x)=N(N-1)x^{N-2}(1-x)^{N}-N^{2}x^{N-1}(1-x)^{N-1}$$
$$-N^{2}x^{N-1}(1-x)^{N-1}+N(N-1)x^{N}(1-x)^{N-2}$$

و هم‌چنان در نقاط انتهایی، $P''(x)=0$، مجدداً با استفاده از انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء،

$$I=-\frac{I}{\pi^{3}}\int_{0}^{1}P'''(x)\cos\pi x\,dx$$

انتگرال‌گیری را به همین روش ادامه می‌دهیم. مشتق‌های متوالی P(x) را نیز با استفاده از قاعده‌ی ضرب مشتق توابع به‌دست می‌آوریم. در مشتق‌های مراتب بالاتر P(x)، تعداد جملات بیش‌تر و بیش‌تر خواهد شد و تمام جملات در نقاط انتهایی هم‌چنان صفر خواهند بود. برای این‌که در یکی از مشتق‌های مراتب بالاتر P(x) جمله‌ای حاصل شود که در یکی از نقاط انتهایی، ناصفر باشد، باید از x^{N} یا $(1-n)^{x}$ حداقل N بار

مشتق گرفته باشیم. در نتیجه در جمله‌ی مذکور یک عامل $N!$ خواهیم داشت. از طرف دیگر برای محاسبه‌ی کامل انتگرال (۸)، باید $2N$ بار عمل انتگرال گیری را انجام دهیم؛ زیرا از آن جا که درجه‌ی چند جمله‌ای $P(x)$ مساوی $2N$ است، دقیقاً بعد از $2N$ بار مشتق گیری از آن، تمام جملاتش در نقاط انتهایی ناصفر خواهند شد. با توجه به مطالب فوق،

$$I = \frac{k_1 N!}{\pi^{N+1}} + \frac{k_2 N!}{\pi^{N+2}} + \cdots + \frac{k_{N+1} N!}{\pi^{2N+1}} \qquad (9)$$

که در آن k_1، k_2، ... و k_{N+1} اعداد صحیح‌اند.

تا این جا هیچ تناقضی وجود ندارد. حال فرض کنید π یک عدد گویا باشد. در نتیجه $\pi = \frac{m}{n}$، که در آن m و n اعداد صحیح‌اند. با ضرب کردن دو طرف تساوی (۹) در کسر $\frac{m^{2N+1}}{N!}$ خواهیم داشت

$$\frac{m^{2N+1}}{N!} I = k \qquad (10)$$

که در آن k یک عدد صحیح است.

N را می‌توانیم آن قدر بزرگ انتخاب کنیم که $1 > \frac{m^{2N+1}}{N!} > 0$. هم‌چنین $1 > I > 0$، زیرا هر جمله در انتگرال (۸) بین صفر و یک است. بنابراین طرف چپ تساوی (۱۰) بین صفر و یک است، در حالی که طرف راست آن یک عدد صحیح است. این تناقض نشان می‌دهد که π یک عدد گنگ است.

اثبات فوق در واقع شکل تغییر یافته‌ی برهان اصلی ایوان نیون است که توسط چارلز هرمیت[30] ارائه شده است. از روش بالا برای اثبات گنگ بودن اعداد دیگری مانند e^m نیز می‌توان استفاده کرد. برهان فوق را با کمی دقت بیش‌تر می‌توان برای اثبات گنگ بودن π^2 نیز به کار برد، ولی اثبات گنگ بودن توان‌های بالاتر π سخت‌تر است. با روشی مشابه برهان فوق، حتی می‌توان نشان داد که π ریشه‌ی هیچ معادله‌ی درجه‌ی دوم با ضرایب گویا نیست، یعنی در واقع π یک عدد متعالی است. خاصیت متعالی بودن از خاصیت گنگ بودن قوی‌تر است. مثلاً عدد $1+\sqrt{2}$ گنگ است ولی متعالی نیست، زیرا ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 - 2x - 1 = 0$ است. اثبات متعالی بودن یک عدد از اثبات گنگ بودن آن بسیار دشوارتر است.

حال، در پایان این مقاله به معرفی برخی از اعداد می‌پردازیم که گرچه به احتمال زیاد گنگ‌اند ولی تا کنون این مطلب در مورد آن‌ها ثابت نشده است. روش‌های زیادی برای ترکیب اعداد گنگ و ساختن اعداد جدید وجود دارد، ولی معلوم نیست که حاصل کار همیشه گنگ باشد. به‌عنوان مثال گنگ بودن اعداد

$$\pi + e, \pi e, \pi^e$$

هنوز ثابت نشده است. شاید تصور کنید که عدد e^π نیز چنین است، ولی در سال ۱۹۲۹ الکساندر گلفاند[31] ثابت کرد که این عدد گنگ است. با وجود این، تساوی $e^\pi = (-1)^i$، نشان می‌دهد که عدد e^π در دنیای اعداد مختلط، عددی کاملاً معمولی است. نکته‌ی دیگری که در این جا باید ذکر شود این است که اگرچه گنگ بودن $\pi + e$ و πe هنوز ثابت نشده است، ولی نشان دادن این که حداقل یکی از آن‌ها باید گنگ باشد، آسان است. کافی است معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - (\pi + e)x + \pi e = 0$ را درنظر بگیرید، که گویا نیست. پس یکی از اعداد $\pi + e$ یا πe باید گنگ باشند.

اعداد جالبی نیز با استفاده از تابع زتای ریمان[32] به‌دست می‌آیند

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots \qquad s = 2, 3, 4, \cdots$$

ما قبلاً مقدار این تابع به ازای $s = 2$، که توسط اویلر به‌دست آمده است، یعنی $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ را دیده‌ایم. اویلر هم‌چنین نشان داد که $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. در حالت کلی مقادیر این تابع به‌ازای sهای زوج به صورت زیر می‌باشند

$$\zeta(2n) = a_n \pi^{2n}$$

که در آن a_n ها گویا هستند. a_n ها را اعداد برنولی[33] می‌نامند. ثابت شده است که همه‌ی $\zeta(2n)$ ها گنگ‌اند. $\zeta(2n+1)$ ها خیلی مرموزترند. برای مدتی طولانی، هیچ کس

واقعاً ایده‌ای برای محاسبه‌ی مقادیر تابع زتای ریمان به ازای sهای فرد نداشت. وقتی که در سال ۱۹۷۸، گنگ بودن $\zeta(۳)$ توسط یک ریاضی‌دان غیرمشهور به‌نام روجر آپری[34] ثابت شد، همه دچار حیرت شدند. گنگ بودن $\zeta(۵)$ و مقادیر پس از آن تاکنون ثابت نشده است.

برای ارائه‌ی آخرین مثال خویش، ابتدا توجه کنید که $\zeta(۱)$ را چیزی جز ∞ نمی‌توان تعریف کرد، زیرا سری هارمونیک(هم‌ساز)[35] $۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots$ همگرا نیست. ولی اگر Lnk را به شیوه‌ای صحیح از آن کم کنیم، به یک مقدار متناهی γ، موسوم به ثابت اویلر[36] می‌رسیم:

$$\gamma = \lim_{k\to\infty}(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{k}-\mathrm{Lnk})$$

گنگ بودن γ نیز تاکنون ثابت نشده است. مانند سایر اعدادی که در این مقاله ملاحظه کردید، دانستن این که γ گویاست یا گنگ، شاید فایده‌ی کاربردی خاصی نداشته باشد؛ ولی ریاضی‌دانان برای روشن شدن مرزهای تاریک دانش همیشه در جستجوی پاسخ چنین سؤالاتی هستند. **و این بار، ثابت اویلر، شکار بزرگ جویندگان اعداد گنگ است.**

زیرنویس‌ها

1. Isaac Barrow
2. Pythagoreans

۳. این که برخی از نتایج ریاضی را بتوانیم به صورت حتمی به فیثاغورسیان نسبت دهیم، خیلی مشکل است و این کار در مورد خود فیثاغورس غیرممکن است. ولی آگاه بودن فیثاغورس از گنگ بودن $\sqrt{۲}$، عموماً مورد توافق همگان می‌باشد. به‌هرحال، با وجود این که روش اثبات گنگ بودن $\sqrt{۲}$ توسط فیثاغورسیان بر پایه‌ی رده‌بندی اعداد به صورت زوج و فرد بوده است، ولی ب. ل. وان درواردن [۱] و والتر بورکیت [۲، ص۴۳۶] مخالفت‌های بحث‌برانگیزی در مورد احتمال این که فیثاغورسیان از چنین روشی استفاده کرده‌اند، داشته‌اند.

4. R.Kuzmin
5. Euler
6. Isaac Newton
7. Joseph Fourier
8. Continued Fraction
9. Johann Lambert
10. Mesopotamia
11. Egypt
12. China
13. Old Testament
14. Archimedes
15. Liu Hui

۱۶. غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضی‌دان و ستاره‌شناس مشهور ایرانی در حدود سال ۷۹۰ هجری قمری در کاشان به‌دنیا آمد. وی از نوابغ ریاضی قرن نهم محسوب می‌شود و یکی از کارهای مهم او این است که عدد π را با دقتی که تقریباً تا یک صدوپنجاه سال بعد از وی در دنیا بی‌رقیب ماند محاسبه کرد.

17. John Machin

جان میشن، ریاضی‌دان انگلیسی، در سال ۱۷۰۶ میلادی با استفاده از فرمول زیر، موسوم به فرمول میشن، توانست مقدار تقریبی π را تا ۱۰۰ رقم اعشار محاسبه کند.

$$\frac{\pi}{۴} = ۴\,\mathrm{arctg}\frac{۱}{۵} - \mathrm{arctg}\frac{۱}{۲۳۹}$$

18. William Shanks
19. Indiana
20. Genuys

ژنیوس در سال ۱۹۵۸ با استفاده از کامپیوتر IBM 704 در مدت ۱/۷ ساعت، مقدار تقریبی π را ۱۰۰۰۰ رقم اعشار محاسبه کرد.

21. Yasumasa Kanada

یاسوماسا کانادا، ریاضی‌دان ژاپنی از دانشگاه توکیو، در دو دهه‌ی گذشته چندین رکورد را در مورد محاسبه‌ی مقدار تقریبی π به نام خود ثبت کرده است. وی در سال ۲۰۰۲ با استفاده از یک ابرکامپیوتر در مدت ۶۰۰ ساعت، مقدار تقریبی π را تا ۱/۲۴۱۱ تریلیون رقم اعشار محاسبه کرد.

22. Edward Goodwin
23. Francois Viete
24. Inverse Trigonometric Functions
25. John Wallis
26. Srinivasa Ramanujan
27. William Brouncker

۲۸. در دوره‌های تاریخی مختلف، استانداردهای متفاوتی برای معتبر بودن یک قضیه بین ریاضی‌دانان وجود داشته است. برخی افراد اثبات گنگ بودن e را به لامبرت نسبت می‌دهند، زیرا وی به‌وضوح از همگرایی کسر $\frac{e-۱}{۲}$ آگاه بوده است. به‌طور مشابه برخی اثبات گنگ بودن π را به لژاندر نسبت می‌دهند، زیرا وی به صورت نظام‌مندی به مطالعه‌ی کسرهای مسلسل پرداخت و از خواص این گونه کسرها بیش از لامبرت آگاهی داشت. کلود برزینسکی [۳] این مطالب تاریخی را به صورت جزئی‌تر مورد بحث قرار داده است.

29. Ivan Niven
30. Charles Hermite
31. Alexandr Gelfond
32. Riemann Zeta Function
33. Bernoulli Numbers
34. Roger Apery
35. Harmonic Series
36. Euler's Constant

* توضیحات مربوط به زیرنویس‌های ۱۶، ۱۷، ۲۰ و ۲۱ از اینترنت گرفته شده است. مترجم

منابع

1. B.L. Vander Waerden, Science Awakening (1st ed.), P. Noordhoff (1961).
2. Walter Burkett, Love and Science in ancient Phythagoreanism, Harvard University Press (1972).
3. C. Brezinski, History of Continued Fractions and Pade Approximants, Springer (1991).

منبع اصلی ترجمه شده

Marty Ross, Irrational Thoughts, **The Mathematical Gazette**, Vol. 88, No.511, March 2004.

یادی از
دکتر محمدهادی شفیعیها

زمستان سال گذشته، جامعه‌ی ریاضی ایران، یکی از اعضای خود را از دست داد؛ دکتر محمدهادی شفیعیها، مردی که در اخلاق معلمی و انسانیت، در جامعه‌ی فرهنگی و علمی این سرزمین، سرآمد بود و همواره سعی در آموزش و توسعه‌ی دانش ریاضی برای جوانان ایرانی داشت. دکتر شفیعیها، از سال ۱۳۶۱، در مرکز نشر دانشگاهی، در مقام یک ویراستار مسئول، دقیق و متعهد، خدمات ارزنده‌ای به جامعه‌ی علمی ما کرده است.

دکتر علیرضا مدقالچی، که تجارب بسیاری در زمینه‌های پژوهشی، آموزشی و مدیریتی در عرصه‌ی ریاضی دارد و برای ویرایش دو کتابش در سال‌های گذشته، به دکتر شفیعیها مراجعه کرده است؛ درباره‌ی وی می‌گوید: «او در واژه‌گزینی، دقت و حوصله‌ی کم‌نظیری داشت و گاهی یک واژه‌ی ریاضی، ماه‌ها در ذهنش بود تا واژه‌ی فارسی مناسبی برای آن ارایه کند. در انتخاب واژه‌ی فارسی، به مفهوم آن توجه داشت و معتقد بود نام‌گذاری فرنگی می‌تواند با مسمّی نباشد. از دقت، موشکافی و اشراف کم‌نظیر ایشان بر فرهنگ فارسی، شگفت‌زده می‌شدم.*»

بسیاری از ما، نام این استاد را با نام کتاب «هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی» شناخته‌ایم. ترجمه‌ی این کتاب و در اختیار دانش‌آموزان و دانشجویان قرار گرفتن آن، یکی از ده‌ها اثر ارزشمندی است که توسط دکتر شفیعیها، ترجمه و یا تألیف شده است. از این رو، انتشار «ویژه‌نامه‌ی هندسه» در «رشد آموزش ریاضی»، بهترین فرصت برای آن است که یادی از این انسان و خدمات وی به جامعه‌ی آموزش ریاضی ایران، داشته باشیم.

دکتر شفیعیها، سال‌ها در دانشکده‌ی فنی دانشگاه تهران، در مقام استادی، دروس مختلف ریاضی من جمله هموگرافی، هندسه‌ی تحلیلی، جبرخطی، ریاضیات نوین و حتی منطق و توپولوژی را تدریس می‌کرد. زمینه‌ی اصلی مطالعات خود وی، هندسه‌ی دیفرانسیل بود، ولی برای تدریس سایر دروس نیز همیشه آمادگی کافی داشت و به قول خود وی، حتی اگر قبلاً آن را نخوانده بود، ولی نیاز بود که به دانشجویان تدریس شود، خود مانند یک شاگرد، آن را به دقت مطالعه می‌کرد و بر آن تسلط کافی می‌یافت و به بهترین نحوی به دانشجویان ارائه می‌کرد.**

این استاد گرامی، همواره می‌گفت که هم در دوران تعلّم خود، استادان بسیار خوب داشته است و هم در دوران تعلیم، دانشجویان خوبی داشته است و در کمال تواضع معتقد بود: «من از شاگردانم خیلی بیش‌تر چیز یاد گرفتم تا این که من به شاگردانم چیز یاد داده باشم...»

همان‌طور که اشاره شد، دکتر شفیعیها، علاوه بر تدریس دانشگاهی، در زمینه‌ی تألیف و ترجمه‌ی کتاب نیز بسیار فعال بود و آثار ارزشمندی را از زبان‌های انگلیسی و روسی به فارسی ترجمه کرده است. وی به زبان‌های فرانسه، روسی و انگلیسی، تسلط کامل داشت و کمی نیز زبان آلمانی می‌دانست. انگیزه‌ی او از ترجمه‌ی کتب این بود که منابع اصیل و خوب علمی را در اختیار جوانان قرار دهد و به جامعه‌ی علمی ـ آموزشی ما ارایه کند.

او در خصوص کار در مرکز نشر دانشگاهی گفته است: «پس از بازگشت از دانشگاه کمبریج انگلستان، در تمام دوران تدریسم تا سال ۶۲-۱۳۶۱، تقریباً همه ساله در سفر به اروپا، با استادان قدیمی‌ام تماس می‌گرفتم و به طور مداوم در جریان تحولات جدید علمی و ریاضی بودم. چون من معتقدم، یک شرط زنده ماندن، تازه بودن است؛ اطلاعات تازه داشتن است. من اگر این مرکز نشر دانشگاهی را انتخاب کرده‌ام، برای این است که کتاب‌هایی که به آن‌جا می‌آید، دائماً کتاب‌های تازه است و من، با علوم جدید لحظه به لحظه آشنا می‌شوم و آخرین

تحقیقات راجع به ریاضیات در زمینه‌های مربوط به خودم یا نزدیک به خودم را دارم. در حال حاضر [منظور زمان مصاحبه ـ سال ۱۳۷۳ ـ است] بیش‌ترین وقت من از نظر علمی در مرکز نشر دانشگاهی صرف ویرایش کتاب‌های ریاضی می‌شود. کتاب‌هایی که استادان می‌آورند ویرایش کنم، که تعدادشان خیلی زیاد است... استادهایی هستند که دوره‌ی دکتری تدریس می‌کنند و دانشجوی دکتری دارند و کتاب‌هایشان به آن‌جا می‌آید. یک مقدار زیاد هم در بخش واژه‌گزینی کار می‌کنم...»

دکتر شفیعیها معتقد بود: «... معلمی هنر است. معلم زمانی بر کار مسلط است که اولاً بر درس خودش سخت مسلط باشد، این اولین مسأله است. دوم، شاگرد احساس کند که معلم نسبت به او احترام قائل است. من هیچ وقت با دانشجویانم شوخی‌های بی‌جا نکردم، همیشه مؤدب بودم. می‌دانید؛ در کلاس بعضی از بچه‌ها پیدا می‌شوند یک به اصطلاح «مزه‌ای» می‌اندازند، هستند این‌ها؛ نهایت این بود که می‌گفتم که خوب، خیلی از شما متشکرم. سعی کنید که شوخی‌هایتان به تناسب مقام دانشجویی‌تان باشد. از این حد تجاوز نمی‌کرد. به ندرت یادم می‌آید که با محصلی، بلند صحبت کرده باشم. واقعاً دوستشان داشتم؛ بچه‌های من بودند. ما اگر به جوانان به این وضع بنگریم که این جزو ذات بچه است، شیطنتش را باید بکند، شوخیش را باید بکند، منتها یک حدی را رعایت بکند؛ درسش را هم بخواند. شیطنت مال اوست، جوانی مال اوست، مال من که نیست. خوب من می‌دیدم که شاگرد واقعاً سرکلاس خسته است، می‌خواهد حرف بزند، می‌خواهد بخندد، آرام می‌آمدم بالای سرش، برای این که نظم کلاس به هم نخورد، می‌گفتم: می‌دانم خسته شدی، پاشو برای ۵-۶ دقیقه قدم بزن، بعد دوباره بیا. آهسته بلند می‌شد، می‌رفت. ۱۰ دقیقه قدم می‌زد، بعد می‌آمد و می‌نشست سرکلاس. هم من راحت بودم، هم شاگرد راحت بود. شما اگر خصوصیت سنّی بچه‌ها را بشناسید، باید به او حق بدهید که در یک سنّی یک کارهایی بکند...»

دکتر شفیعیها، همواره به توان علمی ایرانیان اعتقاد داشت و ایرانی را کمتر از هیچ یک از ملل دنیا، نمی‌دانست.

هم‌چنین، به جوانان توصیه می‌کرد: «به دانشجویان امروزی و مردان فردا یک چیز را بگویم، از دقایق لحظات زندگی‌شان سعی کنند استفاده کنند و بدانند آن‌ها باید این مملکت را بسازند، سعی کنند اگر سرکلاس می‌روند، واقعاً بروند چیزی یاد بگیرند، سعی کنند هر روز یک کلمه‌ی تازه یاد بگیرند، اگر نسل جوان امروز سعی کند روزی یک کلمه یاد بگیرد، بدانید فردای مملکت بهشت می‌شود. امیدواریم که نسل آینده گوش بدهد به این حرف‌هایی که ما معلّمین قدیمی می‌زنیم...»

در ادامه، به زندگی و آثار وی در کارنامه‌ی پربار زندگی‌اش، نگاهی می‌اندازیم: ***

دکتر محمدهادی شفیعیها در اواخر سال ۱۳۹۸ خورشیدی در قزوین به دنیا آمد. تحصیلات مکتب‌خانه‌یی، دبستانی و دبیرستانی را در زادگاه خود به اتمام رسانید و در سال ۱۳۱۹ به دریافت دیپلم ریاضی نایل گردید. در همان سال در دانشسرای عالی تهران (رشته‌ی ریاضیات) ثبت‌نام کرد و پس از دریافت لیسانس، برای تدریس در دبیرستان‌ها؛ به اهواز اعزام شد (سال ۱۳۲۲). پس از دو سال تدریس در دبیرستان شاهپور و دانشسراهای دخترانه و پسرانه‌ی اهواز، به

سرپرستی اداره آموزش و پرورش مسجدسلیمان و سپس سرپرستی آموزش و پرورش قم منصوب گردید. در سال ۱۳۲۵ به تهران منتقل و دبیری ریاضیات دبیرستان‌های البرز، مروی، شاهدخت و قریب را عهده‌دار شد.

او در سال ۱۳۳۴ به دانشکده فنی دانشگاه تهران منتقل شد و به تدریس پرداخت. در سال ۱۳۴۰ برای ادامه‌ی تحصیل به دانشگاه کمبریج انگلستان اعزام شد و پس از مراجعت، در دانشگاه‌های آریامهر (صنعتی شریف)، تهران، پلی‌تکنیک (امیرکبیر)، دانشگاه ملی (شهید بهشتی) و پست و تلگراف به تدریس ادامه داد. البته کار رسمی نام‌برده در تمام سال‌های اشتغال، در دانشکده فنی دانشگاه تهران بوده است. چندین دوره مسئول برگزاری امتحانات ورودی دانشکده فنی دانشگاه تهران بود و مدتی نیز معاون آموزشی و پژوهشی آن دانشکده بود.

دکتر شفیعیها در فروردین ماه ۱۳۶۱، سال تعطیلی دانشگاه‌ها (انقلاب فرهنگی)، به تقاضای خود بازنشسته شد و از آن تاریخ در مرکز نشر دانشگاهی در مقام ویراستاری و سرپرستی بخش ریاضی مشغول به کار بود. نامبرده متجاوز از ۵۰ جلد کتاب‌های ریاضی دانشگاهی را که توسط استادان دانشگاه‌های کشور تألیف یا ترجمه شده است، ویرایش کرده است.

او با زبان‌های فرانسوی، انگلیسی، روسی و اندکی آلمانی آشنایی داشت. علایق و سرگرمی‌های او کوهنوردی، اسکی، شنا و موسیقی بود. در کوهنوردی قسمت اعظم کوه‌های ایران را مانند: دماوند، دنا، سهند و سبلان، تخت‌سلیمان و زردکوه بختیاری زیر پا گذاشته بود. شناگری ورزیده بود و در عبور از کانال مانش با شنا شرکت کرده بود.

تألیف‌ها و ترجمه‌های نام‌برده به شرح زیر است:

۱ـ تانسورها و هندسه ریمانی (تألیف)
۲ـ اصول خطکش محاسبه (تألیف)
۳ـ مسایل هندسه تحلیلی و محاسبات ماتریسی (تألیف)
۴ـ هدف ادبیات (ترجمه)، (اثر ماکسیم گورکی)
۵ـ پدران و فرزندان (ترجمه)، (اثر تورگنیف)
۶ـ آن‌ها که وقتی آدمی بودند (ترجمه)، (اثر ماکسیم گورکی)
۷ـ در آستانه فردا (ترجمه)، (اثر تورگنیف)
۸ـ رودین (ترجمه)، (اثر تورگنیف)
۹ـ آسیه و عشق نخستین (ترجمه)، (اثر تورگنیف)
۱۰ـ موسیقی افلاک (ترجمه)، (اثر برونفسکی)
۱۱ـ حساب انتگرال (ترجمه)، (اثر ادواردز)
۱۲ـ تبدیلات هندسی (ترجمه)، (اثر یاگلوم)
۱۳ـ هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی (ترجمه)، (اثر ماروین جی گرین برگ)
۱۴ـ تاریخ هندسه (ترجمه)، (اثر ایوز)
۱۵ـ از ریاضیات چه می‌دانیم؟ (ترجمه)، (اثر سویر)
۱۶ـ اصول اقلیدس (ترجمه)، (اثر اقلیدس ـ ازهیث)
۱۷ـ هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی با تغییرات و اضافات جدید (ترجمه)، (اثر ماروین جی گرین برگ)

دکتر شفیعیها در تهیه‌ی مقاله‌های دایرةالمعارف فارسی با زنده‌یاد دکتر غلامحسین مصاحب همکاری داشته است. همچنین در تهیه‌ی مقاله‌های زندگی‌نامه‌ی علمی دانشوران و مقاله‌های دایرةالمعارف ریاضی با استاد احمد بیرشک همکاری داشته است. مقاله‌هایی نیز در مجله‌ی نشر ریاضی مرکز نشر دانشگاهی دارد.

پانویس‌ها

* به نقل از خبرنامه‌ی انجمن ریاضی ایران، سال ۲۹، شماره‌ی ۱، بهار ۱۳۸۶، ص ۲۲.

** اطلاعات و نقل قول‌های این نوشتار، از این قسمت به بعد، از متن مصاحبه‌ی رادیویی مورخ ۱۳۷۳/۱۲/۲ با دکتر شفیعیها، گرفته شده است.

*** اطلاعات این بخش از متنی که توسط خانواده‌ی دکتر شفیعیها در اختیار ما قرار گرفته است، نقل شده است.

معرفی کتاب

سپیده چمن‌آرا

تاریخ هندسه

نویسنده: هوارد ویتلی ایوز؛
مترجم: محمدهادی شفیعیها؛
ناشر: شرکت انتشارات علمی و فرهنگی؛
چاپ نخست: زمستان ۱۳۸۳؛
شمارگان: ۱۵۰۰ نسخه؛
بها: ۱۰۰۰۰ ریال.

«تاریخ هندسه»، کتابی است از مجموعه‌ی کتاب‌های تاریخ و ریاضیات دبیرستانی که توسط انتشارات علمی و فرهنگی، به چاپ رسیده است. «واژه‌ی هندسه، به معنای اندازه‌گیری زمین است. هندسه‌ی علمی، هزاران سال پیش، در برخی از نواحی شرق باستان، به منظور کمک در مهندسی و پیشه‌های کشاورزی پدید آمده است.

این کتاب، تاریخ هندسه را مورد مطالعه قرار داده و درباره‌ی اَشکال مختلف هندسه، مطالب دقیقی ارایه کرده است که برای علاقه‌مندان این رشته بسیار مفید است.

مطالب این کتاب، چنان تنظیم شده است که به خصوص برای طرح مطالب تاریخی در کلاس‌های هندسه‌ی دبیرستانی، قابل استفاده باشد.»

در این کتاب، تاریخ هندسه از پیش از دوران یونان، مورد بررسی قرار گرفته است. نویسنده در این خصوص می‌گوید: «داستان تاریخ هندسه، نظیر تاریخ بسیاری از موضوع‌های بالنده و در حال تغییر، دو مسیر، هم پیوسته را پیموده است؛ یکی از محتوای رو به رشد آن حکایت دارد و دیگری از تغییر ماهیت و موضوع آن. همه می‌دانیم که هندسه، به احتمال زیاد، از خیلی پیش‌تر و در دوران باستان با محتوای بسیار ناچیزی آغاز شده و رفته‌رفته رشد یافته تا به حجم کنونی رسیده است. از سوی دیگر، زیاد نیستند شمار افرادی که می‌دانند ماهیت یا ویژگی ذاتی موضوع آن در دوران‌های مختلف، تکامل از معنیِ ضمنیِ متفاوتی برخوردار بوده است. در تاریخ مختصر هندسه که در پی می‌آید، سعی خواهیم کرد که هم به سیر تکامل آن توجهی خاص داشته باشیم و هم به داستان جالب و گیرای آن.»

به همین دلیل، نویسنده، تحت عناوینِ «هندسه‌ی ناخودآگاه» و «هندسه‌ی علمی»، به شناخت طبیعی بشر از هندسه و شناخت علمی وی از این موضوع، اشاراتی می‌کند و سپس به «محتوای هندسه پیش از دوران یونانی آن» و «هندسه‌ی استدلالی» و «هندسه‌ی اولیه‌ی یونانی و مباحث اصلی موضوعی» می‌پردازد و پس از آن، «هندسه‌ی بَعدی یونانی»، «تغییر مسیر از راه هند و عربستان»، بازگشت هندسه به اروپای غربی را بررسی می‌کند و به مباحث «هندسه‌ی تصویری» و «هندسه‌ی تحلیلی» و «هندسه‌ی دیفرانسیل» و «هندسه‌ی نااقلیدسی» و بالاخره «توپولوژی» می‌پردازد. سپس «برنامه‌ی ارلانگر» را مرور می‌کند و در چند فصل آخر کتاب، به «فضاهای مجرد» و «اصول هیلبرت و علوم اصل موضوعی صوری» و «هندسه از دیدگاه جدید» می‌پردازد. علاوه بر فصل فوق، کتاب شامل ۱۶ پیوست است که توسط نویسندگان مختلفی نگاشته شده و توسط مؤلف کتاب، جمع‌آوری شده است. در این پیوست‌ها، موضوعات جالبی از قبیل «ترسیم با پرگار و ستاره»، «هندسه‌ی چهاربُعدی»، «تاریخ اصطلاحات بیضی، هذلولی و سهمی»، «مختصات قطبی» و... به اختصار مطرح شده‌اند.

ترجمه‌ی روان و شیوای دکتر شفیعیها نیز، کتاب را جذاب‌تر کرده است و خواننده را به مطالعه‌ی آن ترغیب می‌کند.

طول روز شما چقدر بود؟

آلبرت شولر

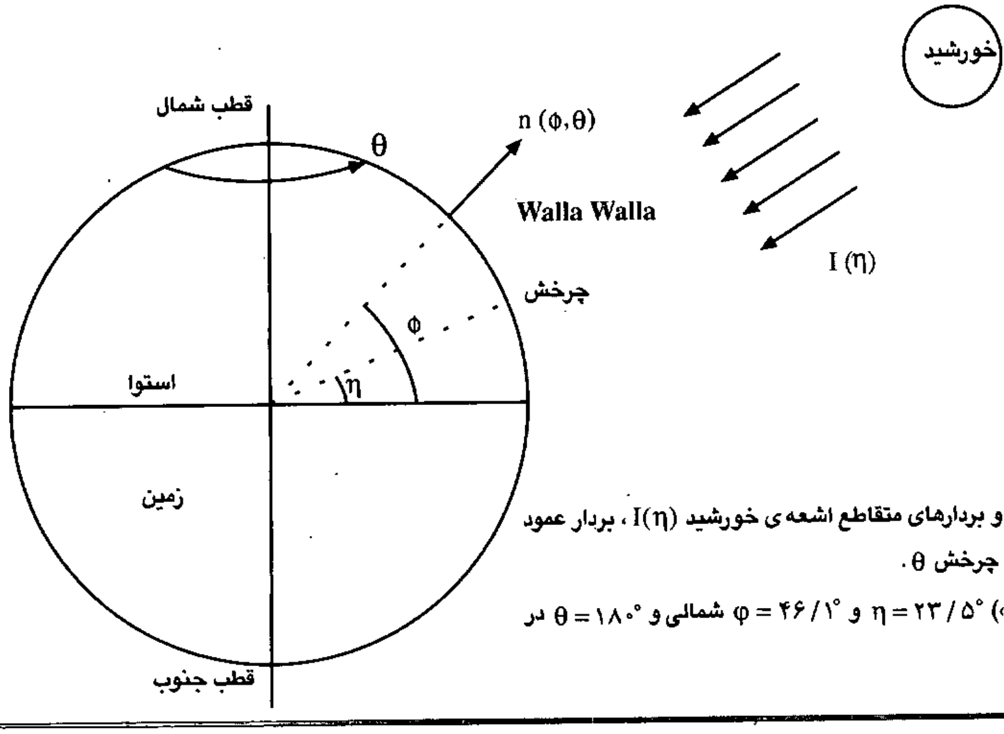
مترجمان: مریم گیلزادکهن، دبیر ریاضی منطقه‌ی ۲ تهران

سپیده چمن‌آرا، هیأت تحریریه‌ی رشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی مدارس راهنمایی منطقه‌ی ۲ تهران

در این مقاله، روشی برای برآورد طول روز، (یعنی فاصله‌ی زمانی بین طلوع خورشید تا غروب آن) در یک مکان مشخص بر روی کره‌ی زمین و در زمان مشخصی از سال و با استفاده از روش‌های محاسبات برداری آشنا برای دانش‌آموزان، به شما معرفی می‌کنیم.

این روش، به‌سادگی با مشاهده‌ی این‌که طلوع و غروب خورشید زمانی به‌وقوع می‌پیوندد که بردار عمود بر کره‌ی زمین در مکان مشاهده‌کننده، عمود بر اشعه‌ی دریافتی از خورشید است، به‌دست می‌آید. نخست رابطه‌ی کلی برای محاسبه‌ی طول روز را به‌دست آورده و از آن برای محاسبه‌ی طول روز در «والا والا»، واشنگتن (زادگاه من) در فصل تابستان و در بلندترین روز سال در نیمکره‌ی شمالی استفاده می‌کنیم. شکل (۱)

با بررسی شکل (۱)، چندین پارامتر را تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\varphi \in [-۹۰^\circ, ۹۰^\circ]$ متناظر با عرض جغرافیایی اندازه‌گیری شده از خط استوا باشد. هم‌چنین فرض کنید $\theta \in [۰^\circ, ۳۶۰^\circ]$ اندازه‌ی چرخش زمین در روز مورد نظر باشد که $\theta = ۰^\circ$ نشان‌دهنده‌ی نیمه‌شب در مکان موردنظر است ـ دقیقاً در نیمه‌ی راه بین طلوع و غروب خورشید ـ و $\theta = ۱۸۰^\circ$ نیم‌روز است. به‌دلیل حوزه‌ی زمانی، ممکن است این‌ها با زمان نیمه‌شب یا ظهر روی ساعت هماهنگ نباشند.



شکل ۱. کره‌ی زمین و بردارهای متقاطع اشعه‌ی خورشید $I(\eta)$، بردار عمود $n(\varphi,\theta)$ و زاویه‌ی چرخش θ.

در این‌جا («والا والا») $\eta = ۲۳/۵^\circ$ و $\varphi = ۴۶/۱^\circ$ شمالی و $\theta = ۱۸۰^\circ$ در نیم‌روز.

با این مختصات، واحد بردار واحد عمود خارج گرد در آن مکان و چرخش (φ,θ) ، با

$$n(\varphi,\theta)=[\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi]^T$$

مشخص می‌شود که با استفاده از مختصات کروی‌ای که در آن صفحه‌ی $\varphi=۰$ روی خط استوا قرار گیرد، به‌دست آمده است.

فرض کنید در روز مورد نظر، $\eta\in[-۲۳/۵, ۲۳/۵]$ ، زاویه‌ی بین اشعه‌ی خورشید با صفحه‌ای باشد که خط استوای زمین را در بر می‌گیرد.

به عنوان مثال، $\eta=۰°$ در روز اول بهار یا پاییز و $\eta=۲۳/۵°$ در طولانی‌ترین روز تابستان. برداری که نشان‌دهنده جهت اشعه‌ی خورشید است $I(\eta)=[\cos\eta, ۰, \sin\eta]^T$ است. (در $-n(\varphi,\theta)$ ، قرار می‌دهیم $\theta=۱۸۰°$ و $\theta=\eta$.)

طلوع و غروب خورشید زمانی اتفاق می‌افتد که بردار $n(\varphi,\theta)$ و $I(\eta)$ بر هم عمود باشند یا ـ معادلاً ـ حاصل ضرب داخلی آن‌ها برابر صفر باشد. در این صورت مقدار θ به گونه‌ای است که

$$I(\eta).n(\varphi,\theta) = \cos\eta\ \cos\theta\ \cos\varphi - \sin\eta\ \sin\varphi = ۰$$

و نقاط چرخش زمین که در آن‌ها خورشید، طلوع و غروب می‌کند، مشخص می‌شود. اگر رابطه را برای $\cos\theta$ حل کنیم، خواهیم داشت

$$\cos\theta = \tan\eta.\tan\varphi \qquad (۱)$$

با توجه به مقادیر η و φ ، رابطه‌ی (۱) می‌تواند ۰، ۱ یا ۲ جواب در بازه‌ی $[۰°, ۳۶۰°]$ داشته باشد. شکل ۲ نمونه‌ای را نشان می‌دهد که در آن دو جواب وجود دارد. جابه‌جایی خط افقی به سمت بالا یا پایین در این شکل، حالت‌هایی را می‌دهد که یک یا صفر پاسخ وجود دارد.

زمانی که دو پاسخ $\theta_۱$ و $\theta_۲$ وجود داشته باشد و طول روز را با D نشان دهیم، خواهیم داشت

$$D = ۲۴/۳۶۰°(\theta_۲ - \theta_۱) \qquad (۲)$$

و

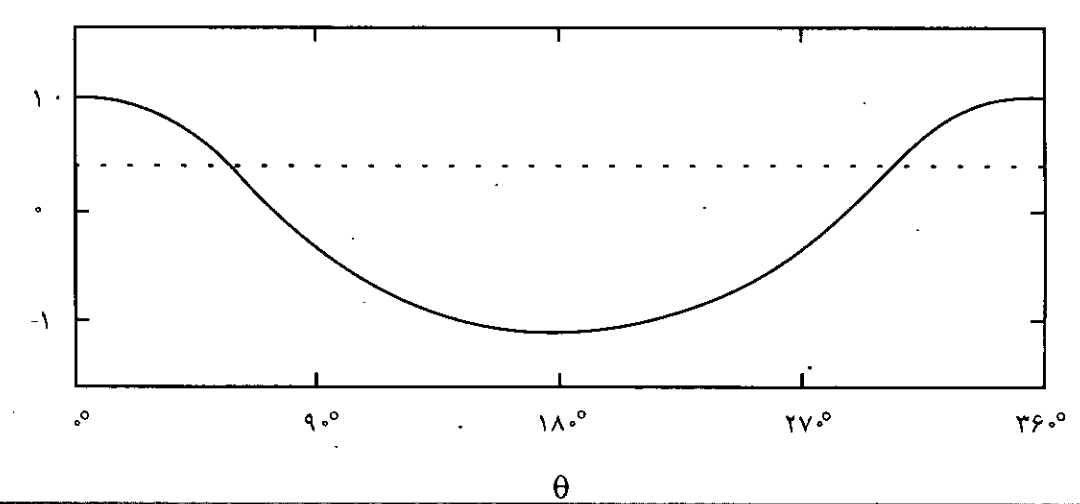
$$\theta_۲ = ۳۶۰° - \theta_۱$$

و

$$\theta_۱ = \arccos(\tan\eta \tan\varphi)$$

شکل ۲. ترسیم $\cos\theta$ و تابع ثابت $\tan(۲۳/۵°)\tan(۴۶/۱°) \approx ۰/۴۵۲$.

از چپ به راست، دو محل تقاطع، نشان‌دهنده‌ی به ترتیب طلوع و غروب خورشید هستند.



برای محاسبه‌ی طول روز در «والا والا» (φ = °۴۶/۵) در طولانی‌ترین روز تابستان (η = °۲۳/۵)، از رابطه‌ی ۲ استفاده کرده و درمی‌یابیم θ_1 = °۶۳/۱ و θ_2 = °۲۹۶/۸ . بنابراین D = ۱۵/۵۸ ساعت (۱۵ ساعت و ۳۵ دقیقه). اگر شما عرض جغرافیایی مکان مورد نظر خودتان، φ را در رابطه‌ی ۲ جاگذاری کنید، می‌توانید طول روز خودتان را طولانی‌ترین روز تابستان به‌دست آورید.

البته با خطایی نسبی در حدود ۱ درصد، در سایت اینترنتی [http://aa.usno.navy.mil] مقدار ۱۵ ساعت و ۴۶ دقیقه توسط رصدخانه‌ی دریایی ایالات متحده (USNO) اعلام شده است که این اختلاف ۱۱ دقیقه‌ای، چشم‌گیر می‌باشد.

عمده‌ی این اختلاف از تعاریف طلوع و غروب خورشید که توسط (USNO) استفاده شده است ناشی می‌شود: به‌منظور مقاصد محاسباتی، طلوع و یا غروب به این صورت تعریف می‌شود که مرکز خورشید از لحاظ هندسی، $(\frac{5}{6})^\circ$ پایین‌تر از سطح افق باشد.

مدل ما به صورت ضمنی فرض می‌کند که در زمان طلوع یا غروب خورشید، مرکز خورشید درست در سطح افق باشد. از آن‌جا که زمین در ۲۴ ساعت، °۳۶۰ می‌چرخد، حدود ۳ دقیقه و ۲۰ ثانیه طول می‌کشد تا زمین ۵۰ کمان دقیقه یعنی $(\frac{5}{6})^\circ$ بچرخد با این فرض که خورشید عمود بر صفحه‌ی افق طلوع می‌کند. این امر موجب می‌شود طول روز حداقل ۶ دقیقه و ۴۰ ثانیه طولانی‌تر شده و درنتیجه موجب این اختلاف می‌شود.

دیگر جنبه‌های جالب دستگاه زمین-خورشید که در این مدل نادیده گرفته شده‌اند، عبارتند از:

۱. ما فرض کردیم که η در دوره‌ی ۲۴ ساعت، ثابت باشد. از آن‌جا که زمین به حرکت در طول مدارش ادامه می‌دهد، این عدد در طول روز کمی تغییر خواهد کرد.

۲. زمین، کره‌ی کامل نیست. بهتر است آن را به صورت یک کره‌ی دو سر تخت در نظر گرفت- شکلی که در اثر دوران یک بیضی حول قطر کوچکش، حاصل می‌شود. در شکل رسمی زمین، براساس محاسبات دانشمندان زمین‌شناس، جان فیلمور و هی‌فورد در سال ۱۹۰۹، نسبت قطر کوچک‌تر به قطر بزرگ‌تر، تقریباً ۰/۹۹۷ می‌باشد [۱].

۳. انحنای زمین همیشه °۲۳/۵ نیست. انحنای محور زمین، در هر ۴۰۰۰۰ سال، چیزی حدود °۱/۵ تغییر می‌کند که °۲۳/۵ میانگین آن می‌باشد [۲]. و این امر می‌تواند کمی در مقدار η در یک زمان خاص از سال، تأثیر بگذارد.

۴. شعاع‌های خورشید در اطراف زمین، موازی نیستند؛ لیکن واگرایی آن‌ها بسیار ناچیز است.

با استفاده از رویکرد (مدل) فوق، می‌توان ضمن محاسبه‌ی طول روز، تعدادی تمرین جالب دیگر نیز کشف کرد.

مدارهای قطبی. مدارهای قطب شمال و قطب جنوب، عرض‌های جغرافیایی هستند که متمم انحراف محور زمین باشند. در مدل ما، فرض می‌کنیم انحراف محور زمین °۲۳/۵ باشد: پس، در این مدل، دایره‌ی قطبی شمال، ۶۶/۵ درجه‌ی شمال جغرافیایی می‌باشد. نشان دهید در مکان‌هایی که بالای دایره‌ی قطبی قرار دارند، خورشید در زمستان طلوع نمی‌کند.

اعتدالین. اعتدال زمانی به‌وقوع می‌پیوندد که خورشید در صفحه‌ای که از خط استوای زمین می‌گذرد، قرار گیرد. این امر، دوبار در هر سال رخ می‌دهد، یک‌بار در شروع فصل بهار و یک‌بار در آغاز فصل پاییز. در مدل ما، در زمان اعتدالین، $x = 0$ می‌باشد. با استفاده از (۲) ثابت کنید که در این روزها، هر مکانی در روی زمین، به‌جز قطبین، روز و شب مساوی- ۱۲ ساعتی- دارند. در قطبین چه اتفاقی خواهد افتاد؟

بیش‌ترین ارتفاع خورشید. بیش‌ترین ارتفاع خورشید در یک روز، برابر با بیش‌ترین زاویه‌ی μ است که خورشید بر فراز افق طلوع می‌کند که در نیمه‌ی روز ($\theta = 180^\circ$) اتفاق می‌افتد. از آن‌جا که $n(\varphi, 180^\circ)$ و $I(\eta)$ بردارهای واحد هستند، زاویه‌ی α بین آن‌ها در رابطه‌ی $\cos\alpha = I(\eta).n(\varphi, 180^\circ)$ صدق می‌کند. درنتیجه $\mu = 90^\circ - |\eta - \varphi|$.

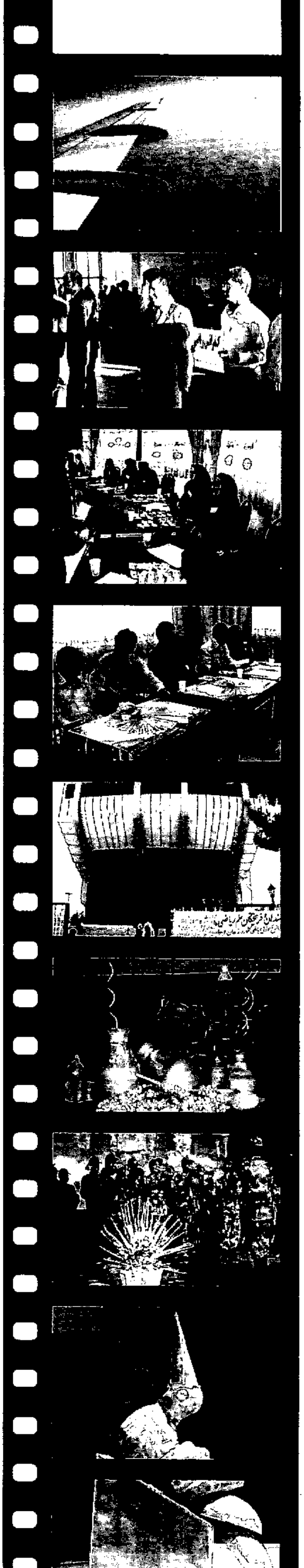
در زادگاه شما در طولانی‌ترین روز تابستان، μ چقدر است؟ در طولانی‌ترین شب زمستان چطور؟

منابع

1. J. P. Snyder, **Map Projections Used by the U. S. Geological Survey** (2nd ed), United States Government Printing Office, 1984.
2. J. Imbrie and K. P. Imbrie, **Ice Ages: Solving the Mystery**, Enslow Publishers, 1979.

منبع اصلی ترجمه‌شده

Albert Schueller, How Long Was Your Day? **The College Mathematics Journal**, Vol. 35, No. 1, January 2004.



نمایی از نهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

گزارش و عکس: مانی رضایی

نهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران در شهر زاهدان با همکاری استانداری سیستان و بلوچستان، دانشگاه سیستان و بلوچستان، توسط سازمان آموزش و پرورش استان سیستان و بلوچستان برگزار شد.

کمیته‌ی علمی نهمین کنفرانس در نخستین اطلاعیه‌ی خود، اهداف و محورهای مورد بحث در کنفرانس را به شرح زیر تعیین کرد:

اهداف کنفرانس:

* گسترش فرهنگ ریاضی؛
* تبادل تجربه‌ها؛
* بررسی شیوه‌های نوین تدریس و ارایه‌ی مسایل آموزشی.

محورهای کنفرانس:

* بهبود وضعیت آموزش ریاضی و چالش‌های پیش‌رو؛
* آموزش معلمان؛
* برنامه‌های جانبی (نمایشگاه؛ کارگاه؛ فعالیت‌های غیررسمی ریاضی)..

پس از انتشار اولین فراخوان کنفرانس، ۲۲۰۰ نفر از طریق سایت کنفرانس و ارسال تقاضانامه، آمادگی خود را برای شرکت در کنفرانس اعلام کردند که با توجه به امکانات موجود، با تقاضای ۷۱۱ نفر موافقت شد. از میان ۶۵۲ مقاله‌ی ارسال شده به کنفرانس، بعد از داوری کلیه‌ی مقاله‌ها، ۱۶۸ مقاله پذیرفته شد که این مقاله‌ها در قالب سخنرانی‌های ۱۰ و ۲۰ دقیقه‌ای و نمایش پوستر در کنفرانس ارایه شدند. هم‌چنین از هفت نفر از استادان با تخصص آموزش ریاضی، برای ایراد سخنرانی عمومی (۴۰ دقیقه‌ای) و یک مهمان خارجی دعوت به عمل آمد. کمیته علمی از میان مقاله‌های پذیرفته‌شده‌ی ۲۰ دقیقه‌ای، ۱۷ مقاله را برای انتشار در گزارش کنفرانس برگزید و چکیده‌ی تمامی مقاله‌های دیگر نیز در این مجموعه منتشر شده است.

مراسم افتتاحیه‌ی کنفرانس، شنبه ۱۷ شهریور ۱۳۸۶، رأس ساعت ۸ صبح و طبق برنامه با تلاوت قرآن و اجرای زنده‌ی سرود جمهوری اسلامی آغاز شد. در این مراسم، بیش از ۶۵۰ نفر از شرکت‌کنندگان کنفرانس و گروهی از دبیران استان حضور داشتند و آقای اعتصام، رییس سازمان آموزش و پرورش استان؛ حجت‌الاسلام سلیمانی، امام جمعه‌ی زاهدان؛ دکتر دهمرده، استاندار سیستان و بلوچستان؛ دکتر اکبری، رییس دانشگاه سیستان و بلوچستان؛ دکتر شهریاری، نماینده‌ی مردم زاهدان در مجلس؛ هریک در سخنرانی‌های ۱۰ الی ۱۵ دقیقه‌ای ضمن خوش‌آمدگویی به شرکت‌کنندگان کنفرانس، بیاناتی ایراد کردند. هم‌چنین دکتر اکبر گلچین، دبیر

کنفرانس در گزارشی، فعالیت کمیته‌ی علمی و آمار مربوط به شرکت‌کنندگان و مقاله‌ها و نحوه‌ی داوری مقاله‌ها را به اجمال تشریح کرد.

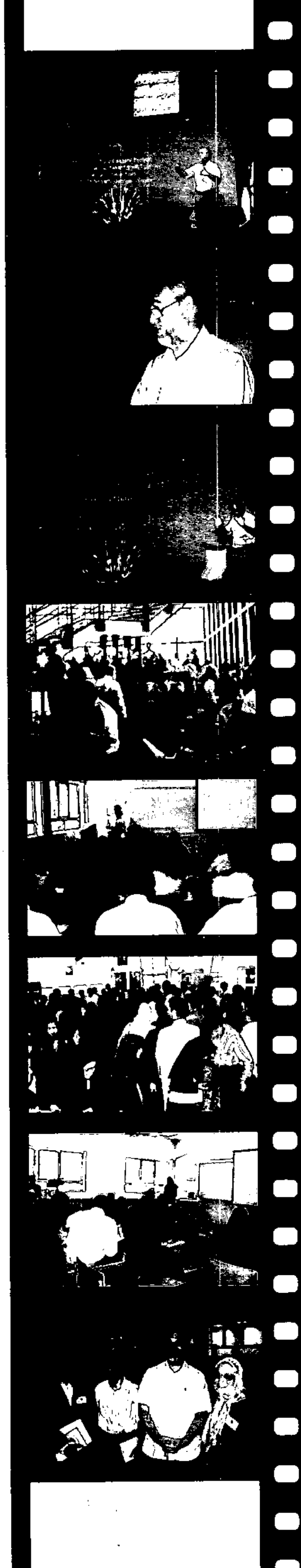
در پایان این مراسم، دکتر مهدوی، مدیرکل دفتر آموزش و ارتقای مهارت‌های حرفه‌ای و تربیت معلم وزارت آموزش و پرورش، با تشکر از برگزارکنندگان کنفرانس و استاندار و رییس دانشگاه، در مورد فعالیت‌های انجمن معلمان سخنرانی کرد.

جان میسون، سخنران عمومی مراسم افتتاحیه‌ی کنفرانس بود. سخنرانی وی با عنوان

Using Theoretical Constructs to Inform Teaching

مورد توجه بسیار قرار گرفت. میسون تأکید کرد چیزی که در تدریس گفته می‌شود، مهم نیست بلکه مهم آن است که درون شما چه اتفاقی می‌افتد. وی پیشنهاد می‌کند باید بر روی تجربه‌ی خودمان بازتاب داشته باشیم. میسون در این سخنرانی چند فعالیت را مورد بررسی قرار داد و از حاضران دعوت به همراهی کرد. این همراهی تا جایی بود که بسیاری از معلمان با جزییات، هریک از فعالیت‌ها را تعقیب می‌کردند. وی با اشاره به نظرات ویگوتسکی گفت: «روش مورد علاقه‌ی من آن است که به دیگران نگویم از چه رهیافتی استفاده کنند اما آن‌ها را طوری هدایت کنم که به سمت رهیافتی خاص سوق پیدا کنند. یادگیری زمانی رخ می‌دهد که بر فعالیت خود انعکاس داشته باشیم، جمع‌بندی کنیم و انجام دهیم. معلم کار خودش را در لحظه انجام می‌دهد اما یادگیری در طول زمان رخ می‌دهد.»

استقبال از موضوع مورد اشاره‌ی میسون تا جایی بود که در برنامه‌ی روز دوم کارگاه «طراحی فعالیت» گنجانده شد (امیدواریم در



شماره‌ی آتی مجله، ترجمه‌ی متن این سخنرانی منتشر شود).

ارایه‌ی مقاله‌ها، بعد از ظهر روز اول شروع شد. دو سخنرانی عمومی ۴۰ دقیقه‌ای، توسط دکتر احمد شاهورانی و دکتر محمدرضا فدائی، به صورت موازی در ابتدا و سپس به ترتیب در یک بخش، ۶ سخنرانی ۲۰ دقیقه‌ای و در چهار بخش متوالی هریک ۶ سخنرانی ۱۰ دقیقه‌ای، ارایه شد. هم‌چنین چهار کارگاه موازی نیز در برنامه‌ی بعدازظهر گنجانده شده بود. ارایه‌ی ۲۷ مقاله به صورت پوستر و برگزاری ۶ نمایشگاه، برنامه‌ای پربار و فشرده برای روز اول کنفرانس فراهم کرده بود و زمان نیم‌ساعته‌ی پذیرایی، فرصت مناسبی برای بحث و تبادل‌نظر و انتخاب برنامه‌ی بعدی را فراهم می‌کرد.

با وجود برنامه‌ریزی گسترده و منظم برگزارکنندگان کنفرانس، و کم بودن بُعد مسافت بین سالن‌های سخنرانی، پانل‌های پوستر و محل نمایشگاه؛ به دلیل اطلاع‌رسانی ناکافی، هدایت و راهنمایی شرکت‌کنندگان کنفرانس به خوبی صورت نمی‌گرفت. نبودن نقشه‌ی راهنما برای مکان‌های معرفی‌شده و نبود نشانه‌ها و تابلوهای راهنما برای حاضران غیربومی، مشکلات متعددی را فراهم کرده بود.

از سوی توزیع «مجموعه مقالات نهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران» در روز پایانی کنفرانس، برای آن دسته از شرکت‌کنندگان این کنفرانس که امکان استفاده از آن را در جریان کنفرانس نیافتند، نوشدارو پس از مرگ سهراب شد. شرکت‌کنندگان کنفرانس به جز کتابچه‌ی «راهنمای نهمین کنفرانس آموزش ریاضی» در روزهای کنفرانس، چیزی در اختیار نداشتند تا موضوع مورد علاقه‌ی خود را از میان مقاله‌های ارایه شده، بیابند. انتخاب سخنرانی‌ها تنها از طریق مطالعه‌ی عنوان سخنرانی و شناخت سخنران میسر بود که معمولاً انتظار آنان را برآورده نمی‌کرد.

با این حال، نمی‌توان فعالیت گسترده و قابل ستایش مسئولان برگزاری کنفرانس را نادیده گرفت. مجموعه‌ی مقاله‌های کنفرانس برای نخستین بار، هم‌زمان با برگزاری کنفرانس انتشار یافته است. این مجموعه، به شکلی مناسب مرتب شده است و حاوی مقاله‌ها و چکیده‌ی مقاله‌ها است و به شکلی یکنواخت و مرتب سازمان‌دهی شده است. انتشار معیارهای داوری نیز راهنمای مناسبی برای ارایه‌کنندگان مقاله در کنفرانس‌های بعدی خواهد شد.

روز دوم کنفرانس با سخنرانی‌های عمومی به صورت موازی شروع شد. دو سخنران عمومی (۴۰ دقیقه‌ای) این روز، دکتر زهرا گویا و دکتر ابراهیم ریحانی بودند. به دنبال آن، ۶ سخنرانی ۲۰ دقیقه‌ای و سپس در دو بخش، سخنرانی‌های ۱۰ دقیقه‌ای ارایه شد. پیش‌بینی ۱۰ دقیقه زمان در انتهای هریک از سخنرانی‌های این کنفرانس، فرصت مناسبی برای پرسش و پاسخ هم‌چنین جابه‌جا شدن شنوندگان را فراهم می‌کرد. این امر می‌توانست با نقش فعال «رییس جلسه» در هر سخنرانی به خوبی انجام شود؛ اما ثابت نبودن رییس جلسه در هر سالن و در بسیاری موارد، عدم حضور ایشان، به طولانی شدن پرسش و پاسخ‌ها منجر می‌شد. به عنوان پیشنهاد، استفاده از معلمان استان در سالن‌های سخنرانی به عنوان رییس جلسه، می‌توانست ضمن استفاده از توان‌مندی‌های آنان، هماهنگی بیش‌تر را نیز به همراه داشته باشد.

ارایه‌ی مقاله‌ها به صورت پوستر در روز

دوم و سوم نیز ادامه داشت. بحث و گفت‌وگو در کنار پوسترهای نصب شده فرصت مناسبی بود تا معلمان، از مناطق مختلف کشور، با نظرات یکدیگر آشنا شوند. بسیاری از معلمان از فرصت به دست آمده برای برقراری ارتباط بیش‌تر با همکاران خود بهره می‌گرفتند و در برخی موارد، این تبادل‌نظر به شکوفایی ایده‌ای نو می‌انجامید.

بعد از پذیرایی صبح، سخنرانی‌های ۲۰ دقیقه‌ای و سپس سخنرانی‌های ۱۰ دقیقه‌ای ارایه شد. اضافه شدن کارگاه جان میسون بعد از این دو برنامه، صبح روز دوم را پربارتر به پایان رساند.

میسون برای این کارگاه، نامی انتخاب نکرده بود و آن را تنها با عنوان Workshop شروع کرد، تلاش وی بر آن بود تا در این کارگاه نشان دهد «چگونه تمرین‌های درس را بگیریم و آن‌ها را ارتقا دهیم.» به عبارت دیگر «چگونه تمرین بهتری بسازیم؟» وی معتقد بود «به دانش‌آموزان اجازه دهید آن‌قدر تمرین حل کنند تا خودشان ادعا کنند، می‌توانند تمرین‌هایی از این دست را حل کنند». وی روش کار خود را در کلاس چنین توصیف کرد: بعد از انجام تمرین‌ها، دانش‌آموزان کار یکدیگر را چک می‌کنند و خودشان سؤال تولید می‌کنند: سؤال ساده، سؤال سخت. آن‌ها سؤال‌ها را عمومیت می‌دهند. در ادامه با دادن مجموعه‌ای از سؤال‌ها در کارت‌های مجزا از آن‌ها می‌خواهم تا سؤال‌ها را رده‌بندی کنند. این رده‌بندی از فردی به فرد دیگر تفاوت می‌کند. میسون «مرتب کردن» را بازتابی بر عمل می‌داند. وی پس از بحثی کوتاه در این مورد، چند مثال از تمرین‌های ارتقا یافته ارایه کرد. وی سعی داشت تنوع مثال‌ها و امکان ارتقای تمرین‌ها را در این کارگاه به نمایش بگذارد. این کار با

تمرین‌هایی آشنا انجام شده بود که به صورت قابل توجهی تغییر کرده و مسیری را برای آموزش فراهم ساخته بودند. کار دشوار ترجمه‌ی هم‌زمان این کارگاه و سخنرانی میسون درمراسم افتتاحیه، توسط دکتر امیرحسین اصغری به انجام رسید.

در برنامه‌ی بعدازظهر روز دوم، تنها دو سخنرانی عمومی (۴۰ دقیقه‌ای) دکتر نورالله نژادصادقی و دکتر حسن علم‌الهدی پیش‌بینی شده بود. میزگرد اتحادیه معلمان و سرگروه‌های آموزشی نیز بعدازظهر روز دوم تشکیل شد.

دو برنامه‌ی جنبی در پایان روز اول و دوم، نیرویی مضاعف به شرکت‌کنندگان داد و خاطره‌ای خوش به همراه داشت. اجرای موسیقی مقامی بلوچستان در روز اول هرچند کوتاه بود، مورد استقبال قرار گرفت تا جایی که پس از نمایش تئاتر طنزگونه هنرمندان زاهدان، با درخواست حاضران، در نوبتی دیگر اجرای مجدد داشت. اجرای موسیقی مقامی سیستان در روز دوم و نمایش رقص شمشیر هنرمندان استان نیز با استقبال حاضران روبه‌رو شد.

بازدید از کتابخانه‌ی استاد کامبوزیا در نزدیکی شیرآباد، واقع در ۴ کیلومتری زاهدان، یکی دیگر از برنامه‌های جنبی روز دوم کنفرانس بود. وجود کتابخانه‌ای با بیش از ۲۷۰۰۰ جلد کتاب در منطقه‌ای محروم و با حداقل امکانات، شگفتی بیش‌تر بازدیدکنندگان را به همراه داشت.

سومین روز کنفرانس، با سخنرانی عمومی دکتر سهیلا غلام‌آزاد آغاز شد و سپس همانند برنامه روزهای قبل، ۶ سخنرانی موازی ۲۰ دقیقه‌ای و در ادامه، در سه زمان متوالی، سخنرانی‌های ۱۰ دقیقه‌ای ارایه شدند.

بعدازظهر روز سوم، به مراسم اختتامیه اختصاص یافته بود. دوری راه و پرواز ظهر ۱۹ شهریور موجب شد تا بسیاری از شرکت‌کنندگان عزم برگشت کردند و مراسم اختتامیه با حضور عده‌ی کمتری برگزار شد.

مهمان‌نوازی میزبانان زاهدان، با وجود امکانات محدود، در کنار تلاش آنان برای فراهم کردن شرایطی برای اجرای مناسب این کنفرانس به گونه‌ای بود که می‌توان برخی نارسایی‌ها مانند توزیع دیرهنگام چکیده‌های مقاله و نبود راهنمای مکان‌های برگزاری کنفرانس را نادیده گرفت.

بیش از ده سال از برگزاری اولین کنفرانس آموزش ریاضی می‌گذرد و کنفرانس آموزش ریاضی به بلوغ خود رسیده است. دکتر گویا در سخنرانی عمومی خود (روز دوم) با عنوان «فراتحلیلی از یک دهه کنفرانس‌های آموزش ریاضی در ایران» با اشاره به این موضوع، نقد گسترده‌ای بر این کنفرانس‌ها داشت. وی به عنوان یکی از اعضای همه‌ی کمیته‌های علمی این کنفرانس‌ها، فرازها و فرودهای این کنفرانس‌ها را به لحاظ تعداد شرکت‌کنندگان، تعداد مقاله‌ها، محتوا و کیفیت آن‌ها، داوری مقاله‌ها، هم‌چنین زمان و نحوه‌ی برگزاری کنفرانس‌ها، مورد بررسی قرار داد. دکتر گویا با برشمردن توانایی‌های موجود آموزشگران ریاضی ایران، از این مقطع به عنوان شروعی برای تحول کیفی این کنفرانس‌ها یاد کرد. امیدواریم با شروع دهه‌ی دوم کنفرانس‌های آموزش ریاضی ایران، شاهد حرکت متعالی آن و تأثیر مثبت برگزاری این گردهم‌آیی‌ها در جامعه‌ی آموزشی کشور باشیم.

نامه های رسیده

نامه‌ها و مطالب دوستان زیر تا پایان شهریور ۸۶، به دستمان رسیده است. از همگی متشکریم و باز هم منتظر مطالب شما هستیم.

مصطفی صبحی، از زنجان؛
[illegible]، از زنجان؛
[illegible]، از تهران؛
[illegible]، از اصفهان؛
[illegible]؛
[illegible]، از مشهد؛
[illegible] دایی، از زنجان؛
[illegible]، از اصفهان؛
[illegible]؛
[illegible] کاظمی، از بهشهر مازندران؛
فاطمه جلیلی، از خمینی شهر؛

حسن [illegible]، از شیراز؛
نوشین [illegible]، از شیراز؛
سعید [illegible]، از زنجان؛
غلام[illegible] مسعودی، از آذربایجان شرقی؛
محمدرضا پورفهندی، از تربت حیدریه؛
فرزاد کریمی، از شیراز؛
لطیف پورشامی، از تبریز؛
محمدجواد صادقیان، از ایلام؛
علی اکبر جاویدمهر، از قم؛
مهری غضنفریان، از زنجان؛
حمید رضاردار، از مشهد

پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد آموزش ریاضی

عنوان: تأثیر نگرش‌های دانش‌آموزان نسبت به ریاضی بر عملکرد آن‌ها

پژوهشگر: زهرا کامیاب
استاد راهنما: دکتر احمد شاهورانی
استادان مشاور: دکتر غلامرضا نفیسی، دکتر عین‌اله پاشا.
تاریخ دفاع: سال تحصیلی ۸۵ـ ۱۳۸۴
دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد علوم و تحقیقات

چکیده

نگرش نسبت به ریاضی، همواره به عنوان ساختاری پیچیده مورد توجه آموزشگران ریاضی قرار گرفته است. این پیچیدگی هم در ارتباط با عدم اتفاق‌نظر در مورد تعریف نگرش و هم در ارتباط با روش‌شناسی موضوع است. در این پژوهش در ابتدا، با استناد به تحقیقات پیشین، تعریفی برای نگرش نسبت به ریاضی ارائه گردید: نگرش نسبت به ریاضی یک مقوله از رفتار است که بر تمایل یا عدم‌تمایل فرد نسبت به ریاضی دلالت می‌کند، و از پنج مؤلفه‌ی اساسی تشکیل شده است: ۱) عواطف فرد نسبت به مفهوم ریاضی؛ ۲) عواطف فرد نسبت به فعالیت ریاضی؛ ۳) ارزش ریاضی در ساختار اهداف کلی فرد؛ ۴) انتظارات؛ نتایجی که فرد انتظار دارد، با مطالعه‌ی ریاضی به دست آورد؛ ۵) نگرش فرد نسبت به معلم ریاضی.

پژوهش با توجه به تعریف ارائه شده، در دو مرحله تدوین شد. در مرحله‌ی اول، بررسی ارتباط نگرش‌ها نسبت به ریاضی و رشته‌ی تحصیلی و نیز ارتباط نگرش‌ها نسبت به ریاضی و جنسیت، مد نظر بود. در مرحله‌ی دوم، هدف بررسی ارتباط نگرش‌ها نسبت به ریاضی و عملکرد ریاضی دانش‌آموزان بود. بدین منظور، یک پرسش‌نامه‌ی نگرش‌سنج و یک آزمون ریاضی طراحی شد. پرسش‌نامه‌ی نگرش‌سنج شامل دو قسمت مجزا بود: قسمت اول؛ گویه‌های چهار گزینه‌ای و قسمت دوم؛ سؤالات تشریحی باز ـ پاسخ. برای تهیه‌ی قسمت اول پرسش‌نامه‌ی نگرش‌سنج، روش لیکرت مورد استفاده گرفت. سپس آزمون مقدماتی در دو مرحله؛ مرحله‌ی اول آزمون نگرش و مرحله‌ی دوم آزمون ریاضی، به منظور تدوین دو آزمون استاندارد در شهر تهران برگزار شد. پس از برگزاری مرحله‌ی اول آزمون مقدماتی، معیاری اتخاذ شد و گویه‌های مناسب انتخاب گردید. پس از اجرای مرحله‌ی دوم آزمون مقدماتی، ضریب تمییز و درجه‌ی دشواری سؤالات ریاضی محاسبه شد. پس از حذف سؤال‌های نامناسب، روایی و پایایی دو آزمون محاسبه گردید. برای سنجش پایایی پرسش‌نامه‌ی نگرش‌سنج، از روش آلفای کرانباخ و به منظور سنجش پایایی آزمون ریاضی، از روش دو نیمه کردن آزمون، استفاده شد. برای سنجش روایی مقیاس‌های نگرش، روایی سازه و همسانی درونی و برای سنجش روایی آزمون ریاضی، روایی ملاکی مورد استفاده قرار گرفت. نتایج در هر دو مورد نشان‌دهنده‌ی این مطلب بود که هر دو آزمون از اعتبار و روایی بسیار بالایی برخوردارند.

مطالعه‌ی اصلی در شهر کرمان، در دو مرحله و با دو نمونه انجام گرفت. نمونه‌ی اول، دانش‌آموزان سه رشته‌ی تحصیلی؛ ریاضی، تجربی و انسانی و نمونه‌ی دوم فقط دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی را شامل می‌شدند. در مرحله‌ی اول، آزمون نگرش برگزار شد. سپس تبدیل داده‌های کیفی به داده‌های کمی پیوسته با استفاده از مقیاس‌های فازی انجام گرفت. تجزیه و تحلیل سؤالات با استفاده از آزمون t و آزمون خی دو انجام شد. با استناد به نتایج به دست آمده از آزمون t، با ۹۵٪ اطمینان می‌توان گفت دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی در کل، نگرش مثبت‌تری نسبت به دانش‌آموزان رشته‌ی تجربی و انسانی و دانش‌آموزان رشته‌ی تجربی در کل نگرش مثبت‌تری نسبت به دانش‌آموزان رشته‌ی انسانی دارند؛ یعنی نگرش‌ها نسبت به ریاضی با رشته‌ی تحصیلی دانش‌آموزان ارتباط مستقیم دارد. بین نگرش‌های دختران و پسران نسبت به ریاضی اختلاف معنی‌داری مشاهده نشد؛ یعنی نگرش‌ها نسبت به ریاضی با جنسیت دانش‌آموزان ارتباطی ندارد. در مرحله‌ی دوم، آزمون نگرش و آزمون ریاضی برگزار شد. در این مرحله، ارتباط نگرش‌ها نسبت به ریاضی و عملکرد ریاضی دانش‌آموزان، با استفاده از ضریب همبستگی پیرسون مورد بررسی قرار گرفت. ضریب همبستگی به دست آمده ۰/۴۴۱+ در سطح ۰/۰۱ معناداری بود که نشان‌دهنده‌ی ارتباط متوسط نگرش‌ها نسبت به ریاضی و عملکرد ریاضی دانش‌آموزان است.

شماره‌ی جدید نشریه‌ی اتحاد منتشر شد!

شماره‌ی دیگری از نشریه‌ی **اتحاد**، نشریه‌ی اتحادیه‌ی انجمن‌های علمی و آموزشی معلمان ریاضی ایران، به چاپ رسید. شماره‌ی اخیر که روی آن تاریخ «سال چهارم تابستان هشتاد و شش» درج شده است، حاوی مطالبی با عناوین زیر می‌باشد:

- تعداد جایگشت‌های کامل و ناکامل؛
- مشکلات آموزش ریاضی در ایران؛
- معرفی، اهداف و تشکیلات خانه‌ی ریاضیات نیشابور؛
- نگاهی به $+\infty$ و $-\infty$ در حسابان؛
- چه کسی عینک صورتی را به چشمان ما می‌زند؟
- مستطیل سوپرطلایی؛
- خبر؛
- نگاهی به تجزیه و تحلیل اطلاعات در پژوهش؛
- ایجاد علاقه در معلم؛
- چهارده مجموعه‌ی کراتفسکی؛
- نکوداشت؛
- حل مسأله؛
- دیدگاه.

روی جلد این نشریه، به تصویری از نقشه‌ی بوستان ریاضیات نیشابور و تصاویر طراحی شده از بخش‌های مختلف آن که با فهرستی مفصل از عناوین این قسمت‌ها همراه شده است، اختصاص دارد. برای اطلاعات بیش‌تر می‌توانید با آدرس پست الکترونیکی زیر، تماس بگیرید:

ettehad.magazine@gmail.com

برگ اشتراک مجله های رشد

شرایط

۱ـ واریز مبلغ ۲۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی الحساب به حساب شمارهٔ ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.

۲ـ ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک.

- **نام مجله:** ....
- **نام و نام خانوادگی:** ....
- **تاریخ تولد:** ....
- **میزان تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

....

پلاک: .... کدپستی: ....

- **مبلغ واریز شده:** ....
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ....
- **آیا مایل به دریافت مجله درخواستی به صورت پست پیشتاز هستید؟ بله ☐ خیر ☐**

امضا:

نشانی: تهران ـ صندوق پستی مشترکین ۱۶۵۹۵/۱۱۱

نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir

پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir

امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ۷۷۳۳۹۷۱۳ـ۱۴

پیام گیر مجلات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ـ۸۸۸۳۹۲۳۲

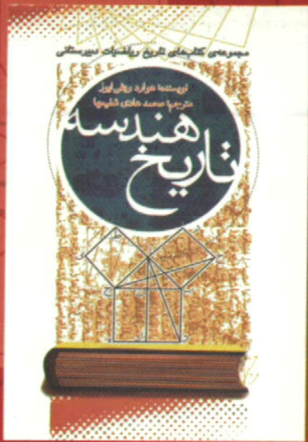
یادآوری:

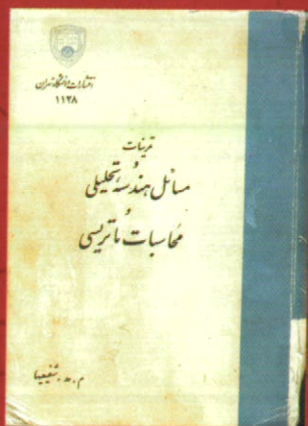
- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک است.
- برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است).

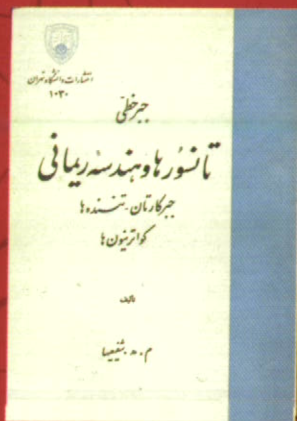
IN THE NAME OF GOD
Ministry of Education
Organization of Research& Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office

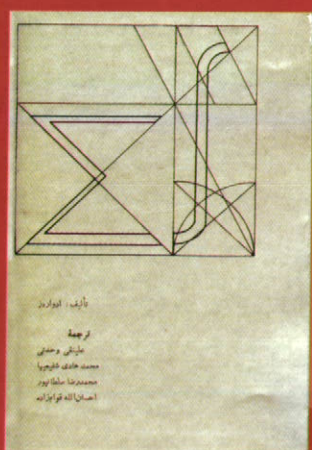
Roshd
Mathematics Education Journal 90
Vol. 25 No. 2 2008 ISSN: 1606 - 9188

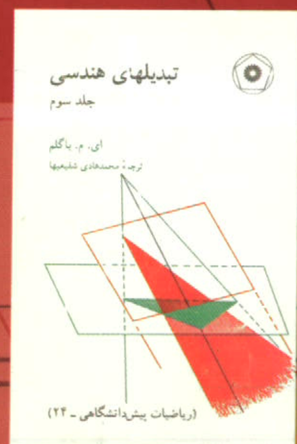
P.O.Bax: Tehran 15875 - 6585
E-mail: info@roshdmag.ir
roshd_riazi@yahoo.com



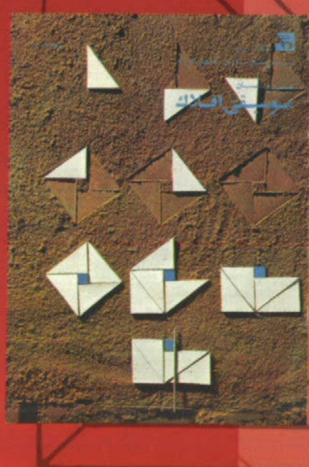








یادی از
دکتر محمد هادی شفیعیها



معلم • جوان • نوجوان • نوآموز • دانش آموز • کودک • مدیریت مدرسه • مدرسه فردا • تکنولوژی آموزشی • قرآن • آموزش ابتدایی

آموزش ریاضی • آموزش زبان و ادب فارسی • آموزش زبان • آموزش جغرافیا • آموزش شیمی • آموزش زیست شناسی • زمین شناسی

آموزش معارف اسلامی • برهان • مشاور مدرسه • برهان • آموزش تاریخ • آموزش علوم اجتماعی • آموزش راهنمایی تحصیلی • هنر

نشریات رشد

راهی مطمئن بسوی تقویت بنیه‌ی علمی دانش آموزان و معلمان

از کجا بخریم؟

همکاران محترم فرهنگی، دانشجویان و دانش آموزان عزیز می توانند محصولات دفتر انتشارات کمک آموزشی (نشریات رشد عمومی و تخصصی و کتاب های رشد) را از طریق زیر دریافت کنند:

- کلیه واحدهای آموزشی سراسر کشور
- تکمیل برگ اشتراک مجله های رشد و ارسال مدارک به امور مشترکین تلفن: ۷۷۳۳۶۶۵۶
- نمایشگاه دائمی نشریات رشد واقع در فروشگاه مرکزی انتشارات مدرسه

تهران، خیابان کریم خان، ابتدای ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره چهار آموزش و پرورش، کتاب فروشی انتشارات مدرسه تلفن: ۸۸۸۲۲۶۶۸