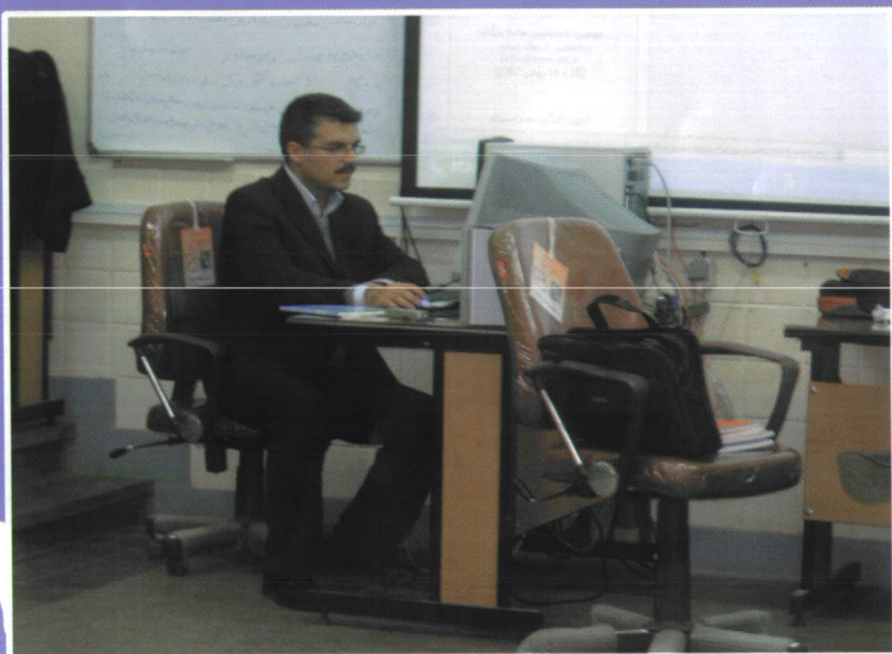
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.ir
آموزشی-تحلیلی-اطلاع رسانی

رشد آموزش ریاضی ۹۶

دوره‌ی بیست و ششم، شماره‌ی۴، تابستان ۱۳۸۸، بها: ۴۰۰۰ ریال

- بررسی بدفهمی‌ها به عنوان یکی از موانع اصلی ایجاد درک مثلثاتی در دانش‌آموزان
- نیاز به توجه بیش‌تر به آموزش مثلثات
- چگونه ریاضی به حساب می‌آید
- هندسه‌ی پویا، هنر در کلاس درس ریاضی
- توابع زیبا در فرش‌های زیبا



تصاویر گزارش « تحقیقات در آموزش ریاضی» به صفحه ی ۵۸ مراجعه کنید.

بسم الله الرحمن الرحیم

آموزشی - تحلیلی - اطلاع رسانی

www.roshdmag.ir

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد آموزش ریاضی ۹۶

دوره‌ی بیست و ششم، شماره‌ی ۴، تابستان ۱۳۸۸

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلّمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول‌ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه‌ی مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه‌ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه‌ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیأت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه‌ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده‌ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می‌تواند سفارش ترجمه‌ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن‌های ارسالی تا حد امکان از معادل‌های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویس‌ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره‌ی صفحه‌ی مورد استفاده باشد.
- چکیده‌ای از موضوع مطلب ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.

هم چنین:

- مطالب مندرج در مجله، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ گویی به پرسش‌های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.
- مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، باز گشت داده نمی‌شود.

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴) و ۸۸۳۰۵۸۶۲
شماره‌ی پیام‌گیر مجلات تخصصی رشد: ۱۱۲-۸۸۳۰۱۴۸۲
E-mail: riazi@roshdmag.ir

چاپ: شرکت افست (سهامی عام)
شمارگان: ۱۳۰۰۰

عکس روی جلد: مهسا قبایی

اشک‌ها و لبخندهای ریاضی!

اخیراً، در سایت ویکی‌پدیا، مطلبی راجع به «ریاضیات خنده‌دار» منتشر شده که افراد بسیاری را خندانده و آموزشگران ریاضی را در دل، به گریه واداشته است! این مطلب، در مورد اشتباهات «خنده‌داری» است که دانش‌آموزان مرتکب می‌شوند. مثلاً، از دانش‌آموزی خواسته شده که عبارت $(a+b)^n$ را **بسط** دهد و او در پاسخ چنین نوشته:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= (a \quad + \quad b)^n\\ &= (a \qquad\quad + \qquad\quad b)^n\\ &= (a \qquad\qquad + \qquad\qquad b)^n\end{aligned}$$

و ادامه داده که «به همین ترتیب!»

خواننده‌ی عمومی می‌خندد و گاهی به این همه بی‌دقتی تأسف می‌خورد و گناه همه چیز را ابتدا به گردن دانش‌آموز و سپس، معلم و کتاب درسی می‌اندازد. اما خواننده‌ی خاص، با مروری در پیشینه‌ی تحقیقات آموزش ریاضی به‌خصوص در دهه‌ی ۱۹۸۰ میلادی، با انواع مشابه این پدیده مواجه می‌گردد و با تحلیل عمیق‌تر، ریشه‌های شناخته شده‌ی آن‌ها را تشخیص می‌دهد و درمی‌یابد که چنین اتفاقاتی، ناشی از اشتباهات ساده یا بی‌دقتی‌های طبیعی دانش‌آموزان نیست. بسیاری از پژوهش‌های انجام شده در دهه‌ی ۱۹۸۰، پدیده‌هایی را که اکنون، از آن‌ها با عنوان «خنده‌دار» یاد می‌شود، مورد مطالعه‌ی عمیق قرار داده بودند و **ریشه‌های شناختی** این اشتباهات را یافته بودند و این جان کلام است! و اجازه می‌خواهم که نگاهی اجمالی به آن بیندازم.

اواخر دهه‌ی ۱۹۷۰ میلادی، بحث‌های مربوط به ساخت‌وسازگرایی به عنوان رویکردی جدید به فرایند یاددهی ـ یادگیری با انسجام جدی‌تری مطرح شد و باعث جنب‌وجوش و تقابلات بسیاری در بنیان‌های نظری یادگیری شد. به‌طور نمونه، در دهه‌ی ۱۹۸۰، ساخت‌وسازگرایان، به دلیل اعتقادی که به نقش یادگیرنده در ساخت‌وساز و تولید دانش داشتند، تحقیقات قابل توجهی در این زمینه انجام دادند تا ببینند که این ساخت‌وساز چگونه رخ می‌دهد. در همین راستا نیز، پژوهش‌های بسیاری برای شناخت چگونگی فهم و درک یادگیرنده از یک مفهوم ریاضی یا علوم انجام شد. البته در همین دوران، ساخت‌وسازگرایان افراطی معتقد بودند که اهمیت این پژوهش‌ها، **شناخت** فهم و درک شخصی دانش‌آموزان است، پس هر **فهمی**، چه درست چه نادرست، قابل اهمیت و از نظر آموزشی، پربها و راهگشاست. در حالی که سایر ساخت‌وسازگرایان، اعتقاد داشتند که لازم است فهم‌های نادرست که آن‌ها هم ریشه‌های شناختی دارند، از فهم‌های درست متمایز شوند و جامعه‌ی آموزشی بداند که چگونه این نوع فهم‌ها ایجاد می‌شوند و چه راهکارهایی بیندیشد تا مانع شکل‌گیری این نوع فهم در ذهن دانش‌آموزان شود. بدین سبب، و با تأکید بر این که هر ساخت‌وسازی اگرچه قابل اعتناست، اما مورد تأئید نیست؛ فهم‌های نادرست را **بدفهمی** نامیدند و ضرورت مداخله‌ی معلم را در جرح و تعدیل این ساخت‌وسازها، مطرح کردند. تحقیقات حوزه‌ی **بدفهمی‌ها یا فهم‌های** دانش‌آموزان، فضای تازه و عمیقی در آموزش ریاضی و به‌خصوص مباحث مربوط به برنامه‌ریزی درسی و آموزش معلمان ایجاد نمود. توصیه‌ی ساخت‌وسازگرایان به معلمان و برنامه‌ریزان این بود که **بدفهمی‌ها** یا تنوع **فهم و درک** دانش‌آموزان را جدی بگیرند و با استناد به یافته‌های پژوهشی این حوزه، به ریشه‌های شناختی شکل‌گیری آن‌ها دقت کنند و برای دوباره‌نگری، تغییر یا جرح و تعدیل هر برنامه‌ی درسی یا روش تدریسی، آن‌ها را درنظر بگیرند، مثلاً، در نمونه‌ای که تفسیر دانش‌آموز از واژه‌ی **بسط**، همان **بسط فیزیکی** بوده است، این

اتفاق را ساده ببینیم و برخورد غضبناک یا بی‌تفاوت نسبت به آن نداشته باشیم. در عوض، مطمئن باشیم که بالقوه، ممکن است این تفسیر نادرست، در ذهن دانش‌آموزان دیگری نیز شکل گرفته باشد، پس در جرح و تعدیل برنامه و روش خود، این نمونه‌های شناسایی شده توسط پژوهش را جدی بگیریم.

در نمونه‌ی دیگری از این «ریاضیات خنده‌دار!»، معلم پای تابلو نوشت $\lim_{x\to 8}\frac{1}{x-8}=\infty$. سپس از دانش‌آموزان خواست $\lim_{x\to 5}\frac{1}{x-5}$ را محاسبه کنند تا مطمئن شود آن‌ها محاسبه‌ی حد را فهمیده‌اند. یکی از آن‌ها چنین نوشت:

$$\lim_{x\to 5}\frac{1}{x-5}=\rotatebox{90}{5}$$

جالب است بدانید که عین این اتفاق، در پژوهشی که سال‌ها قبل انجام شده بود، مشاهده شد و در سال ۲۰۰۳ در سمیناری در ایالات متحده، یک محقق از رومانی، این یافته را ادامه داد و راجع به ریشه‌های شناختی آن بحث کرد. این مثال، بیانگر فهم رویه‌ای یا شکلی دانش‌آموز است؛ انگار که او از تدریس معلم تصویربرداری کرده و آن تصویر را به نظر خودش، به موقع جرح و تعدیل نموده و نتیجه آن شده که می‌بینید!

در پدیده‌ی خنده‌دار! دیگری، معلم از دانش‌آموز خواسته که معادله‌ی $\frac{1}{n}\sin x = ?$ را حل کند و او دست به کار شده:

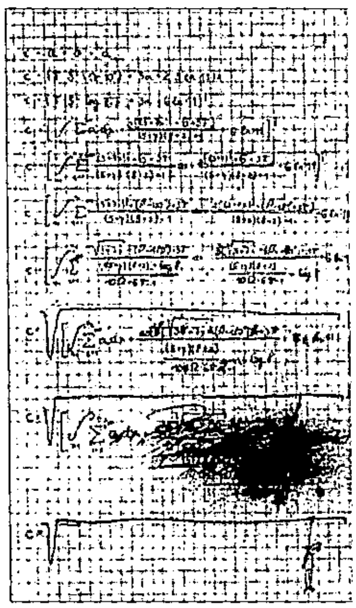
$$\frac{1}{\cancel{n}}\mathrm{si}\cancel{n}\,x = ?$$

$$\mathrm{six} = 6$$

یعنی از نظر دانش‌آموز، جواب معادله‌ی بالا برابر ۶ است زیرا معنی six، ۶ است!؟

این جاست که اگر شناخت به کمکمان بیاید، از این تفسیر دانش‌آموز، بهره‌های بسیار می‌گیریم و در تدریس خود، به این پیچیدگی‌ها، تفسیرها، ظرافت‌ها و به زبانی دیگر، این بدفهمی‌های بالقوه توجه می‌کنیم. این نمونه‌ها نشان می‌دهند که چگونه تدریس‌های رویه‌ای صرف، دانش‌آموز را به هدف از انجام یک تکلیف ریاضی، کم‌توجه می‌کند. این یادگیرنده، مراحل یا گام‌های انجام یک رویه را به خوبی یاد گرفته و با دقت و نظم، این یادگیری را نشان می‌دهد. او حتی در نهایت، به تعبیر و تفسیر پاسخ خود پرداخته و نوشته که شش و ۶، با هم معادل یا مساوی‌اند پس معادله به درستی حل شده!؟ در چنین وضعیتی و با چنین شناختی از فرایند ذهنی دانش‌آموز، آیا انصاف است گناه همه‌ی یادنگرفتن‌ها، اشتباه کردن‌ها و به نتیجه نرسیدن‌ها را به گردن او بیندازیم؟! آیا به اصطلاح، چنین «اشتباهات خنده‌داری» نباید تکانی آن هم شدید، برای نحوه‌ی یاددهی ـ یادگیری ریاضی در شرایط موجود باشد؟ چرا هریک از این اشتباهات که بالقوه می‌توانند در تدریس ریاضی تحول ایجاد کنند، آن‌قدر نادیده گرفته می‌شود و بدفهمی‌های منجر به وقوع آن‌ها بررسی نمی‌شود تا بحران پدید آید؟ بعد هم به دلیل درمان نشدن این بدفهمی‌ها، آن‌قدر شاهد تکرار آن‌ها هستیم که کم‌کم، نسبت به چرایی آن‌ها بی‌تفاوت شده‌ایم و به آن‌ها می‌خندیم؟!!

در پس این خنده‌ها، اشک‌های فراوان باید ریخت! بدانیم که موضوع جدی است و طنز، بیان واقعیت تلخ و دردناک در زمانی است که یا امکان گفتن یا دیدن آن واقعیت نیست یا جسارتی برای گفتن باقی نمانده است. به آخرین نمونه‌ی این نوشته نگاه کنید و ببینید آیا هنوز هم فکر می‌کنیم که وقت زیاد است؟!

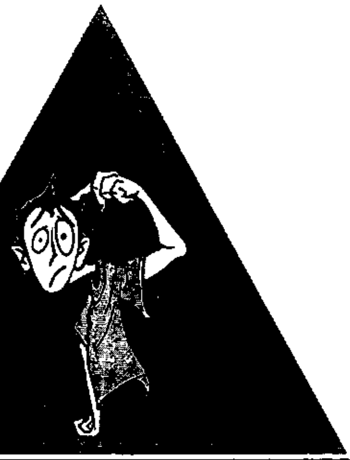


کودک دارزده شده را نجات دهیم! یادگیری با تکرار و تکرار واقع نمی‌شود، آموزش با تحقیر و بی‌اعتمادی و ترس، تبدیل به اضطراب می‌شود و اضطراب ریاضی، مانع فهم و درک معنادار می‌گردد. واقعیت‌ها را ببینیم! به نتایج تحقیقات بها دهیم! و بیش از این، در رابطه با یادگیری ریاضی عزیزانمان، فرصت‌سوزی نکنیم!

پی‌نوشت

این نوشتار، براساس ایمیلی بود که از آقای فرید صادق‌پور دریافت کردم که بدین‌وسیله، از ایشان تشکر می‌کنیم.

بررسی بدفهمی‌ها به عنوان یکی از موانع اصلی ایجاد درک مثلثاتی در دانش‌آموزان



علی‌اکبر ربانی فرد
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی گرگان

زهرا گویا
دانشگاه شهید بهشتی

در دنیای امروز، نقش ریاضی در صورت‌بندی نظام عالم و تبیین پدیده‌ها بر کسی پوشیده نیست و مثلثات برای صورت‌بندی پدیده‌های هارمونیک نقش ویژه‌ای دارد. بنابر اصول و استانداردهای برنامه‌ی درسی شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM، ۲۰۰۰)، برنامه‌ی ریاضی باید شامل مثلثاتی باشد که همه‌ی دانش‌آموزان بتوانند آن را برای حل مسائل مربوط به مثلث‌ها به‌کار ببرند و برای صورت‌بندی پدیده‌های متناوب از آن استفاده کنند. علاوه بر این، به گفته‌ی گیلمن (۱۹۹۱) توسعه‌ی توابع مثلثاتی، پایه‌ای برای بعضی از مفاهیم آنالیز است و مباحثی هم‌چون مختصات قطبی و نمایش مثلثاتی اعداد مختلط، وابسته به فهم و درک اولیه از نسبت‌های مثلثاتی است. هم‌چنین، در بسیاری از مباحث علمی هم‌چون فیزیک نیوتنی، مهندسی، نقشه‌برداری و اغلب شاخه‌های مهندسی، کاربرد مثلثات انکارناپذیر است و این‌ها، اهمیت مثلثات را نمایان می‌سازند.

با این وجود، تال و بلاکت (۱۹۹۱) دریافتند که دانش‌آموزان در نخستین مراحل یادگیری توابع مثلثاتی، با مشکل روبه‌رو هستند. درنتیجه، لازم است به این موضوع توجه ویژه شود و بدفهمی‌ها و مشکلات یادگیری دانش‌آموزان در رابطه با مثلثات مورد مطالعه قرار گیرد.

اسمیت و همکاران (۱۹۹۳، نقل شده در حسام، ۱۳۸۴) نیز بر این نوع تحقیقات تأکید کرده و بیان می‌کنند قبلاً، محققان تنها به تمایز بین پاسخ‌های درست و نادرست اکتفا می‌کردند، در حالی که اکنون، حتی در ارزشیابی‌های کلان نیز معمول این است که فعالانه برای درک بدفهمی‌ها تحقیق شود تا بشود خطاهای دانش‌آموزان را تبیین و تشریح کرد.

از این گذشته، تحقیقات انجام شده نشان می‌دهند که فعالیت‌های تدریس در کلاس‌های ریاضی، نتوانستند فهم درستی از توابع مثلثاتی را توسعه دهند. مثلاً کندال و استیسی (۱۹۹۷) مشاهده کردند که بیش‌تر دیدگاه‌ها برای تدریس مثلثات از جمله دیدگاه مثلث قائم‌الزاویه، به دانش‌آموزان اجازه نمی‌دهند که سینوس و کسینوس را به‌عنوان تابع درک کنند.

بالاخره، به سبب این که ابداع مثلثات، برگ زرینی از تاریخ ریاضی ایرانی ـ اسلامی است، در ایران نسبت به آن علاقه‌مندی

ویژه‌ای وجود دارد و حجم کمِ اختصاص یافته به آن در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای، همیشه با اهمیت به حساب آمده است، بدین جهت و به دلایل فوق، انجام تحقیقات در زمینه‌ی یاددهی- یادگیری مثلثات از ضرورت جدی برخوردار است. بدین‌منظور، تحقیقی انجام شد که هدف اصلی آن، شناخت بدفهمی‌ها و اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان در رابطه با مثلثات در ایران بود تا از این طریق، راه‌های از بین بردن بدفهمی‌ها هموار گشته و موجبات اصلاح و کارآمدی بیش‌تر در فرایند آموزش و یادگیری مثلثات فراهم شود.

در این مقاله، با طرح «چرایی حضور مثلثات در برنامه‌ی درسی»، به بررسی چگونگی این حضور پرداخته می‌شود. سپس یافته‌های تحقیقی در مورد نقش بدفهمی‌ها در یادگیری مثلثات ارایه می‌گردند. پس از آن، ضمن اشاره‌ی مختصری به نقش تدریس در رفع بدفهمی‌های مثلثاتی، تنها به یک نمونه از سؤال‌های تحقیق که توسط نویسندگان انجام شد و تجزیه و تحلیل آن سؤال پرداخته می‌شود و در مقاله‌های بعدی، گزارش تحقیق انجام گرفته منتشر خواهد شد.

> هدف ریاضی تنها حفظ رویه‌ها نیست؛ بلکه دانش‌آموزان باید ریاضی را بفهمند، بتوانند توضیح دهند چرا رویه‌هایی که به کار می‌برند مناسب‌اند و استدلال کنند که چرا مفاهیم ریاضی، خواصی دارند که به آن‌ها اجازه‌ی استفاده از آن رویه‌ها را می‌دهد. (NCTM، ۲۰۰۰، اسکمپ، ۱۹۸۹)

چرایی حضور مثلثات در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای

به گفته‌ی شهریاری (۱۳۷۹)، «اگر بگوییم که مثلثات در تمام زمینه‌های دانش بشری (از علوم نظری گرفته تا صنایع و فنون) ریشه دوانیده و بدون استفاده از آن، همه‌ی رشته‌های علمی دچار نوعی توقف می‌شوند، سخنی به اغراق نگفته‌ایم.» وی در ادامه، بیان می‌کند که رشته‌های مختلف ریاضی مثل جبر و هندسه، علوم نظری و محاسبه‌ای مانند فیزیک و نجوم، علوم عملی از جمله نقشه‌برداری و محاسبات فنی، و سایر علوم، همگی به نوعی با مثلثات مرتبط‌اند. به کمک اتحادهای مثلثاتی و روابط بین نسبت‌های مثلثاتی قوس‌ها، می‌توان بعضی از معادله‌های جبری را حل کرد و جواب‌ها را با تقریب مناسب به‌دست آورد. این روش، اغلب بر روش تحلیلی یعنی تعیین ریشه‌های معادله از راه رسم منحنی برتری دارد، زیرا به سهولت و با سرعت به حل مسئله کمک می‌کند و چون جواب‌های مسئله به صورت مضربی از یک نسبت مثلثاتی به دست می‌آید، با استفاده از جدول مقادیر مثلثاتی قوس‌ها، تعیین مقادیر عددی ریشه‌های معادله به آسانی میسر می‌شود.

از این گذشته، مثلثات با هندسه ارتباطی عمیق دارد. تعریف‌های اصلی مثلثات در دوره‌ی ریاضیات متوسطه، براساس پاره‌خط‌های متناسب و مثلث‌های متشابه است و بنابراین، نمی‌توان این دو شاخه‌ی ریاضی را از هم جدا کرد. هم‌چنین، تمام مسائلی که در بخش مربوط به حل مثلث و چندضلعی‌ها در مثلثات حل می‌شود، ارتباط محکم مثلثات را با هندسه نشان می‌دهد.

در هر صورت، با وجودی که اهمیت مثلثات در برنامه‌ی درسی ریاضی دبیرستانی مورد تأکید و تأیید برنامه‌ریزان درس ریاضی و آموزشگران ریاضی است، با این حال، تحقیقات در زمینه‌ی تدوین برنامه‌ی درسی و یادگیری مثلثات اندک است و این حوزه، نیازمند توجه تحقیقی بیش‌تری است.

اما نکته‌ی جالب این است که تحقیقات معدودی هم که در این زمینه شده، همگی به نوعی به بدفهمی‌ها به‌عنوان یکی از موانع اصلی ایجاد درک مثلثاتی در دانش‌آموزان اشاره کرده‌اند. به همین منظور، در ادامه، ضمن مروری بر چگونگی حضور مثلثات در برنامه‌ی درسی ریاضی دبیرستانی، به یافته‌های پژوهشی در مورد نقش بدفهمی‌های دانش‌آموزان در یادگیری مثلثات پرداخته می‌شود.

چگونگی حضور مثلثات در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای

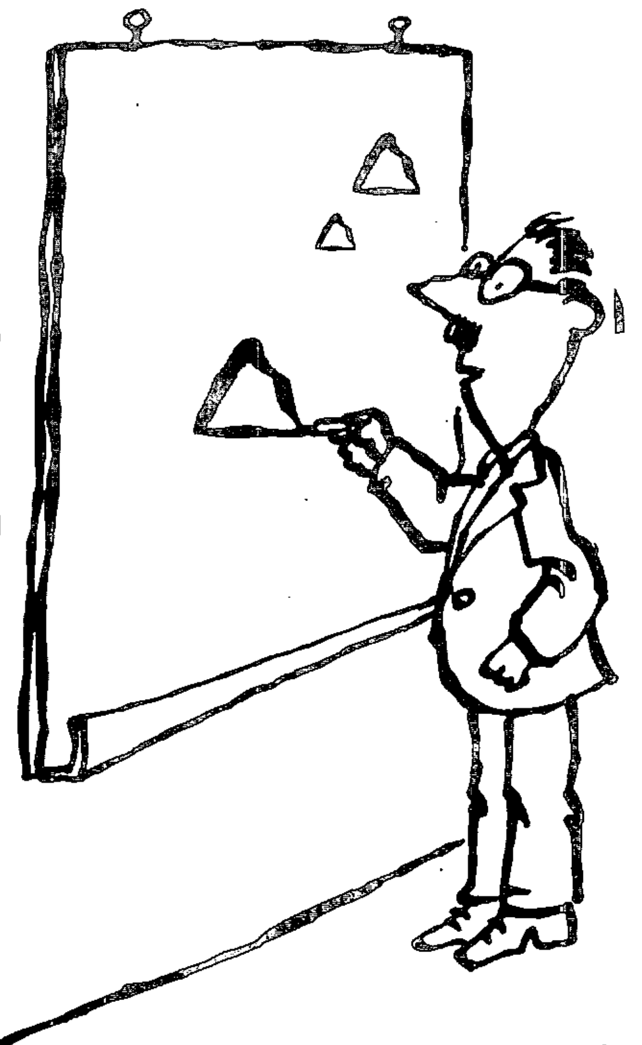
با توجه به این‌که فهم روابط مثلثاتی برای فهم و درک موضوع‌های دیگر از جمله فیزیک نیوتنی، نقشه‌برداری، معماری و بسیاری از شاخه‌های مهندسی لازم است (وبر، ۲۰۰۵) و یکی از موضوع‌هایی است که هندسه را با جبر پیوند می‌زند، لذا بایستی جایگاه خاص و حضور پررنگ‌تری در برنامه‌ی درسی ریاضی داشته باشد. هم‌چنین، لازم است مثلثات به گونه‌ای

تدریس شود که دانش‌آموزان کاربرد آن را ببینند و بتوانند بعضی از مسائل مربوط از جمله تعیین ارتفاع یک درخت یا ساختمان را با توجه به زاویه‌ی دید و تعیین بُرد یک گلوله با توجه به سرعت اولیه و زاویه‌ی پرتاب را حل کنند. علاوه بر این، ضروری است که دانش‌آموزان، توانایی تخمین سینوس و کسینوس زاویه‌های خاص را داشته باشند، زیرا همان‌طور که در اصول و استانداردهای شورای ملی معلمان آمریکا و کانادا (NCTM، ۲۰۰۰) تأکید شده، توانایی تخمین زدن، شاهدی بر این مدعاست که دانش‌آموزان فهمی قوی از عملگرهای مثلثاتی دارند. در حالی که ناتوانی برای تخمین زدن، نشان‌دهنده‌ی این است که دانش‌آموزان، عملگرهای مثلثاتی را به خوبی یاد نگرفته‌اند. این سند، تصریح کرده است که برنامه‌ی درسی ریاضی، باید شامل مطالعه‌ی مثلثاتی باشد که همه‌ی دانش‌آموزان بتوانند پدیده‌های متناوب را با استفاده از توابع سینوس و کسینوس، صورت‌بندی کنند، معادلات مثلثاتی را حل نمایند و رابطه‌ی بین توابع مثلثاتی با مختصات قطبی، اعداد مختلط و سری‌ها را بفهمند و برای حل مسائل پیچیده‌ی مربوط به مثلث‌ها، از مثلثات کمک بگیرند.

بدین سبب، در اکثر کشورهای جهان، مثلثات بخشی هر چند مختصر، از برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای است و شروع آن، دوره‌ی متوسطه است. در برنامه‌ی درسی ایران نیز، بخشی از کتاب درسی ریاضی پایه‌ی اول متوسطه به مثلثات اختصاص پیدا کرده و مطالب زیادی به صورت فشرده، بیان شده است.

به گفته‌ی شهریاری (۱۳۷۹)، در برنامه‌های مثلثاتی دبیرستانی، در درجه‌ی اول تابع‌های مثلثاتی به عنوان تابع‌هایی با متغیر عددی بررسی می‌شوند که این کار، اهمیت زیادی دارد زیرا این تابع‌ها، در آنالیز ریاضی، فیزیک، مکانیک و صنعت نقش اساسی دارند. سپس راه‌های محاسبه‌ی شکل‌های هندسی بررسی می‌شوند که اهمیت آن در کاربرد عملی در هندسه، فیزیک، صنعت، اخترشناسی و غیره است.

لذا با توجه به این دو جنبه و تعمق در بیان ضرورت وجود مثلثات در برنامه‌ی درسی ریاضی توسط شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM، ۲۰۰۰)، چنین استنباط می‌شود که لازم است به این موضوع در برنامه‌ی درسی ریاضی دبیرستانی توجه ویژه شود. ولی موانعی برای رسیدن به این اهداف وجود دارند که از آن جمله، می‌توان به بدفهمی‌ها اشاره کرد. بدین جهت در ادامه، به یافته‌های تحقیقی در مورد نقش بدفهمی‌ها و تأثیر آن‌ها



در یادگیری مثلثات اشاره می‌شود.

نقش بدفهمی‌ها در یادگیری مثلثات

حسام (۱۳۸۴)، با بررسی بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان، دریافت به دلیل این که در ریاضی، مفاهیم به صورت سلسله مراتبی شکل گرفته، این ویژگی موجب می‌شود تا یادگیری هر مفهوم، به فهم و درک و برداشت دانش‌آموزان از مفاهیم پیش‌نیاز آن بستگی داشته باشد. وی به نقل از استیسی و مک گریگور (۲۰۰۲)، بیان می‌دارد که آن‌چه دانش‌آموزان، از یادگیری و تجربه‌های پیشین خود به موقعیت‌های آموزشی می‌آورند، دارای اهمیت زیاد و تأثیرات مثبت و منفی بر فرآیند یاددهی ـ یادگیری است. حسام هم‌چنین، با استناد به اسمیت و همکاران (۱۹۹۳)، یکی از دلایل مشکل‌آفرین بدفهمی‌ها را این می‌داند که وقتی دانش‌آموزان از آن‌ها برای تفسیر و تعبیر تجربه‌های جدید استفاده می‌کنند، در یادگیری آن‌ها خلل ایجاد می‌شود، زیرا تحقیقات نشان می‌دهند که بدفهمی‌ها به طور آنی به وجود نمی‌آیند، درنتیجه به سرعت هم کنار گذاشته نمی‌شوند

و به طور مداوم، قبل و بعد از آموزش ظاهر می‌گردند و در بین تعداد قابل توجهی از دانش‌آموزان و افراد بالغ، شایع هستند.

دانش‌آموزان به بدفهمی‌هایشان از نظر احساسی و ذهنی، دلبستگی داشته و آن‌ها را به راحتی رها نمی‌کنند، زیرا آن‌ها را فعالانه ساخته‌اند.

به اعتقاد کیزر (۲۰۰۴) بدفهمی‌ها باید مانند یک بیماری، درمان شده و «بازسازی»[1] شوند. منظور کیزر از «بازسازی» این است که صرفاً پرداختن به راه‌حل درست، بدفهمی‌ها را زایل نمی‌کند بلکه ضروری است که دانش‌آموزان، مفاهیم تخصصی را به گونه‌ای درک نمایند که بتوانند آن‌ها را جایگزین بدفهمی‌های موجود خویش نمایند. هم‌چنین، عبارت «بازسازی» دلیلی بر این معناست که باید فهم نادرست در تقابل با فهم درست متزلزل شده و از طریق جایگزینی با آن، بازسازی شود.

به دلیل اهمیت نقشی که بدفهمی‌ها در یادگیری ریاضی دارند، فرودنتال (۱۹۷۹)، یکی از مسائل تحقیقی مهم را در آموزش ریاضی، بررسی فرایند عملکرد ریاضی دانش‌آموزان و یافتن اشتباهات آن‌ها می‌دانست. بنابراین شناخت بدفهمی‌ها کمک می‌کنند تا بدانیم که چرا کودکان نمی‌توانند ریاضی را بفهمند. بر همین اساس، شناسایی و مستند کردن بدفهمی‌ها، یکی از وظایف مهم تحقیقات در حوزه‌های ریاضی و علوم شناخته شده است. لذا پژوهشگران بسیاری در این زمینه فعالیت کرده و بدفهمی‌های متعددی را در رابطه با ریاضی مدرسه‌ای شناسایی نموده‌اند. به‌علاوه، پژوهش‌ها و ارزیابی‌های بین‌المللی نیز در برخی موارد، به بررسی این موضوع همت گمارده‌اند، زیرا شناخت بدفهمی‌ها، می‌تواند در جلوگیری از ایجاد یا رفع آن‌ها نیز مؤثر باشد.

تعبیر «آگاهی از بدفهمی‌های بالقوه» که توسط کیزر (۲۰۰۴) به کار برده شده، حاکی از آن است که قبل از شکل‌گیری یا ظاهر شدن بدفهمی‌ها، معلم باید بداند که دانش‌آموزان در کدام مرحله از رشد ذهنی خود، مستعد بروز بدفهمی‌ها و خطاهای خاص هستند و این مسئله، به کدام قسمت از برنامه‌ی درسی مرتبط می‌شود. با این تفاسیر، به یافته‌های تحقیقی در مورد بدفهمی‌ها در مثلثات می‌پردازیم.

بدفهمی‌ها و مشکلات موجود در مثلثات

هدف ریاضی تنها حفظ رویه‌ها نیست؛ بلکه دانش‌آموزان باید ریاضی را بفهمند، بتوانند توضیح دهند چرا رویه‌هایی که به کار می‌برند مناسب‌اند و استدلال کنند که چرا مفاهیم ریاضی، خواصی دارند که به آن‌ها اجازه‌ی استفاده از آن رویه‌ها را می‌دهد. (NCTM، ۲۰۰۰، اسکمپ، ۱۹۸۹). در حالی که تحقیقات انجام شده توسط وبر (۲۰۰۵) نشان می‌دهد که فعالیت‌های تدریس در کلاس‌های مثلثات، چنین فهمی را از توابع مثلثاتی ایجاد نمی‌کند. هم‌چنین، کندال و استیسی (۱۹۹۷) ضمن مقایسه‌ی دو روش تدریس مثلثات یعنی روش نسبت و روش دایره‌ی واحد، به محاسن و معایب این دو روش پرداخته و مشاهده کردند که دیدگاه مثلث قائم‌الزاویه (روش نسبت)، اجازه نمی‌دهد دانش‌آموزان توابع سینوسی و کسینوسی را بفهمند و مشکلات دانش‌آموزان را در حل مسائل کلامی مثلثات، در دو مقوله دسته‌بندی کرده‌اند:

- توانایی شناختن یعنی این‌که چه توابع مثلثاتی، برای حل مسائل مناسب هستند؛ دانش‌آموزان در حل مثلث قائم‌الزاویه که بعضی از اجزای آن مجهول است، نمی‌دانند که از چه توابع مثلثاتی کمک بگیرند تا بتوانند آن را حل کنند.
- حل معادله و تبدیل آن به صورتی که قابل حل باشد. البته مشکلات جبری نیز در حل این معادلات سهیم هستند.

علاوه بر این، اورهان[2] در پژوهشی که بر روی ۷۷ دانش‌آموز انجام داد، به این نتیجه‌گیری رسید که اشتباهات دانش‌آموزان در مثلثات، نظام‌وار است. وی دریافت که مثلثات در سطح روابط بین زاویه و اضلاع مثلث فهمیده می‌شود و دانش‌آموزان

> **به گفته‌ی گویا (مریم، ۱۳۸۰)، برای شناخت و رفع اشکالات مفهومی دانش‌آموزان، آن‌ها باید مجال طرح ایده‌هایشان را پیدا کنند و فعالیت‌های گروهی در کلاس درس، می‌تواند چنین فرصتی را فراهم نماید. به همین دلیل، به نظر می‌رسد روش سخنرانی که در آن، معلم به صورت یک طرفه به توضیح و تکرار یک موضوع می‌پردازد، کمکی به رفع بدفهمی‌های دانش‌آموزان نمی‌کند و لذا، اتخاذ روش‌های دیگر تدریس، ضروری به نظر می‌رسد**

در سؤال‌هایی که مربوط به مثلث قائم‌الزاویه هستند، موفق‌ترند و اظهار می‌دارد که چون موضوع مثلثات در این سطح قرار گرفته شده است، طبیعی است که بعضی شگفتی‌ها و بدفهمی‌ها را در مطالعاتی که بعداً اتفاق می‌افتد ببینیم.

تحقیق اورهان آشکار کرد که بیش‌تر دانش‌آموزان، درک واضحی از مثلثات نداشتند؛ مثلاً بعضی از آن‌ها از نمادهای جبری استفاده می‌کردند و در تبدیل اندازه‌ی یک زاویه از درجه به رادیان، با سختی مواجه بودند. وی با تجزیه و تحلیل عملکرد دانش‌آموزان دریافت که بیش‌تر دانش‌آموزان، فهم متفاوتی از مفهوم دامنه‌ی توابع مثلثاتی دارند. اورهان هم‌چنین یادآور شد که دانش‌آموزان شرکت‌کننده در این پژوهش، تصور می‌کردند که در تابع $y = \sin x$ ، x باید زاویه باشد و اغلب دانش‌آموزان نمی‌توانستند یک عدد حقیقی را مانند یک زاویه در توابع مثلثاتی ببینند.

این یافته با آن‌چه که تال و بلاکت (۱۹۹۱) عنوان کردند سازگار است که نخستین مراحل یادگیری مثلثات، اغلب با مشکل مواجه است و دانش‌آموزان دبیرستانی با سختی با مسائل اساسی مثلثات روبه‌رو می‌شوند.

کندال و استیسی (۱۹۹۷)، یک سال بعد از آن که دانش‌آموزان درس مثلثات را خوانده بودند از آن‌ها امتحان گرفتند. در این امتحان، از مجموع ۱۷۸ دانش‌آموز، ۱۷۲ نفر در امتحان نمره‌ی صفر گرفتند که نشان‌دهنده‌ی فهم سطحی آن‌ها از مفاهیم مثلثاتی بود.

وبر (۲۰۰۵) نیز به دو محدودیت در فهم توابع مثلثاتی اشاره کرده است که یکی از آن‌ها، مربوط به نقشی است که نمودارهای هندسی در فهم توابع مثلثاتی و ارتباط دادن این توابع به مدل‌های هندسی مناسب بازی می‌کنند. مطالعه‌ی وی نشان داد که دانش‌آموزان، توابع مثلثاتی را با مدل هندسی آن‌ها مرتبط نمی‌کنند. مثلاً هنگامی که از آن‌ها خواسته شد که $\sin\theta$ را برای یک θ خاص تقریب بزنند، بیش‌تر دانش‌آموزان اظهار کردند که اطلاعات آن‌ها برای ادامه‌ی کار کافی نیست. بعضی‌ها هم مدعی شدند که اگر مثلث مناسبی داشته باشند، می‌توانند $\sin\theta$ را تقریب بزنند.

> به اعتقاد کیزر (۲۰۰۴) بدفهمی‌ها باید مانند یک بیماری، درمان شده و «بازسازی» شوند. منظور کیزر از «بازسازی» این است که صرفاً پرداختن به راه‌حل درست، بدفهمی‌ها را زایل نمی‌کند بلکه ضروری است که دانش‌آموزان، مفاهیم تخصصی را به گونه‌ای درک نمایند که بتوانند آن‌ها را جایگزین بدفهمی‌های موجود خویش نمایند. هم‌چنین، عبارت «بازسازی» دلیلی بر این معناست که باید فهم نادرست در تقابل با فهم درست متزلزل شده و از طریق جایگزینی با آن، بازسازی شود

براون (۲۰۰۵) نیز دریافت که فهم و درک دانش‌آموزان از سینوس و کسینوس، ناقص است و آن نقص‌ها را به صورت زیر دسته‌بندی کرد:

۱. سینوس و کسینوس به عنوان مؤلفه‌های یک نقطه در دایره‌ی واحد؛
۲. سینوس و کسینوس به عنوان فاصله‌های عمودی و افقی آن نقطه؛
۳. سینوس و کسینوس به عنوان نسبتی از اضلاع مثلث.

نتایج تحقیق براون (۲۰۰۵) نشان داد که دانش‌آموزان، موانع شناختی متعددی دارند که بعضی از آن‌ها، خاص مثلثات است. وی در ادامه، به فهم شکننده از مفهوم چرخش زاویه در دایره‌ی واحد و ارتباط دادن نقطه‌ی دایره‌ی واحد به نقطه‌ای روی نمودار توابع سینوس و کسینوس اشاره کرده و یادآور شده است که موانع دیگری از قبیل ناتوانی در ارتباط دادن مختصات یک نقطه در نمودار به قطعه‌های عمودی و افقی وصل شده به محورها نیز وجود دارند.

نقش تدریس در رفع بدفهمی‌ها و مشکلات مثلثات

آموزش ریاضی مدرسه‌ای نیازمند آن است که از آموزش مثلثاتی که فقط تأکید بر حفظ کردن رویه‌ها دارد فاصله بگیرد و به سمت برنامه‌هایی برود که به توصیه‌ی وبر (۲۰۰۵)، بر فهم و درک مفهومی روابط مثلثاتی، صورت‌بندی ریاضی آن‌ها و حل مسئله تأکید نماید.

وبر (۲۰۰۵) با استفاده از چارچوب نظری فرهوم که توسط تال و گری در سال ۱۹۹۴ ارایه شد، تحقیقی روی دو گروه از دانش‌آموزان انجام داد که در آن، یک گروه به روش سنتی مثلثات را آموزش دیدند و گروه بعدی، بر اساس نظریه‌ی فرهوم آموزش دیدند. وبر به این نتیجه رسید که دانش‌آموزانی که به روش سنتی

آموزش دیده بودند، فهم قوی از توابع مثلثاتی نداشتند و در درک مفاهیم مثلثاتی و توجیه خواص توابع مثلثاتی ناتوان بودند. در واقع، نوع آموزشی که آن‌ها دیده بودند، در توسعه‌ی فهم و درک آن‌ها غیر مؤثر بود. در حالی که دانش‌آموزانی که بر اساس نظریه‌ی فرهوم آموزش دیده بودند، در این موارد تواناتر بوده و درک بهتری از توابع مثلثاتی داشتند. اورهان نیز به این نتیجه رسید که اگر در آموزش ریاضی، اصول توسعه‌ی مفهوم‌ها و روش‌های آموزش مثلثات روشن شود، یادگیری راحت‌تر می‌شود. به‌طور مثال، وی اشاره کرد که بعضی از دانش‌آموزان هنگامی که نمودارها و نمایش‌های گرافیکی را تفسیر می‌کنند و از آن‌ها برای پیش‌گویی وضعیت یک تابع مثلثاتی یا روابط مثلثاتی استفاده می‌کنند، آن‌ها را بهتر می‌فهمند.

در پژوهش تال و بلکت (۱۹۹۱) که قبلاً اشاره شد، دو گروه از دانش‌آموزان شرکت کردند که گروه اول، با کامپیوتر به گونه‌ای آموزش دیدند که بتوانند اعداد و روابط هندسی را در یک حالت تعاملی کشف کنند. در صورتی که گروه دوم در همان مدرسه، توسط معلمی آموزش دیدند که به صورت سنتی مثلثات را تدریس می‌کرد. یافته‌های این مطالعه نشان داد دانش‌آموزانی که با کمک کامپیوتر آموزش دیده بودند، عملکرد بهتری نسبت به گروه دیگر داشتند. این پژوهشگران به این جمع‌بندی رسیدند که استفاده از تکنولوژی و کامپیوتر این اجازه را می‌دهد که دانش‌آموزان، به مفاهیم توجه بیش‌تری کنند و وقت خود را صرف محاسبات عددی غیرضروری نکنند. آن‌ها هم‌چنین یادآور شدند که دانش‌آموزان نیاز دارند که نمودارهای مثلث‌ها را به روابط عددی ارتباط دهند زیرا دست‌ورزی با نمادهای مثلثاتی، مستلزم درک چنین روابطی است.

زتلا[۳] (۱۹۷۹) نیز در تحقیق خود برای مقایسه، به یک گروه اجازه داد که در درس مثلثات، از ماشین‌حساب استفاده کنند و به گروه دیگر این اجازه را نداد. سپس بعد از دو هفته و نیم، از هر دو گروه امتحان یکسان به عمل آورد و ملاحظه کرد که گروه اول، به طور معنادارتری نمره‌های بالاتری از گروه دوم کسب کردند. نتایج تحقیق وی دلالت بر این دارد که آموزش مثلثات به کمک ماشین‌حساب در مقایسه با آموزش سنتی، مفیدتر است. بدین جهت، زتلا (۱۹۷۹) اظهار کرد که ماشین‌حساب، این اجازه را به معلم می‌دهد که محاسبات یکنواخت و تکراری را در آموزش مفاهیم و حل مسئله‌های مثلثاتی حذف کند و وقت بیش‌تری را صرف شکل‌گیری مفاهیم نماید. علاوه بر این، تحقیق تال و بلکت (۱۹۹۱) نشان داد که کامپیوتر این امکان را می‌دهد که دانش‌آموزان روابط بین داده‌های عددی و هندسی را در یک عمل تعاملی کشف کنند و مثلاً با امتحان کردن چند زاویه‌ی خاص، بتوانند حدس بزنند که تانژانت زاویه، برابر با سینوس زاویه تقسیم بر کسینوس زاویه است. بدین سبب آن‌ها اعتقاد دارند که یکی از قوی‌ترین اصول آموزش، استفاده از تکنولوژی جدید می‌باشد و اظهار می‌دارند که استفاده از کامپیوتر اجازه می‌دهد تا دانش‌آموزان با اشکال مختلف هندسی دست‌ورزی کنند و خود، به روابط عددی و مثلثاتی دست یابند.

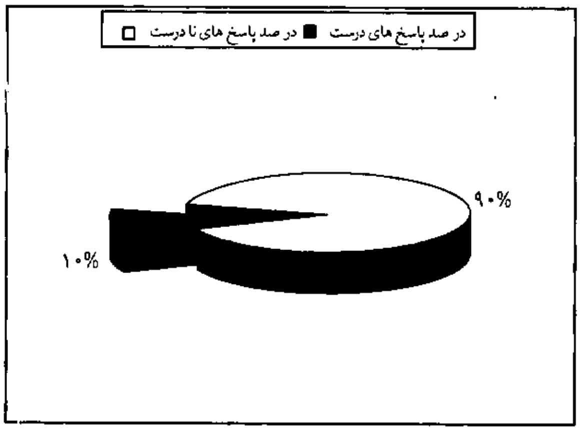
به گفته‌ی گویا (مریم، ۱۳۸۰)، برای شناخت و رفع اشکالات مفهومی دانش‌آموزان، آن‌ها باید مجال طرح ایده‌هایشان را پیدا کنند و فعالیت‌های گروهی در کلاس درس، می‌تواند چنین فرصتی را فراهم نماید. به همین دلیل، به نظر می‌رسد روش سخنرانی که در آن، معلم به صورت یک طرفه به توضیح و تکرار یک موضوع می‌پردازد، کمکی به رفع بدفهمی‌های دانش‌آموزان نمی‌کند و لذا، اتخاذ روش‌های دیگر تدریس، ضروری به‌نظر می‌رسد. در هر صورت، توجه به توصیه‌های مستند به یافته‌های پژوهشی برای شناخت و رفع بدفهمی‌های مثلثاتی دانش‌آموزان ضروری است.

تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان به یک سؤال مثلثاتی

در تحقیقی که در ابتدا به آن اشاره شد، از دانش‌آموزان خواسته شد که مقدار $\cos 340^\circ$ و $\sin 340^\circ$ را تقریب بزنند و توضیح دهند که چگونه به این تقریب رسیده‌اند.

پاسخ‌های داده شده به این سؤال قابل ملاحظه بودند. اول این‌که از بین ۵۰ نفر، تنها ۵ نفر به آن پاسخ درست دادند و با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی، این مقادیر را تقریب زده بودند.

در حالی‌که پیشینه‌ی تحقیق نشان می‌دهد که یکی از نشانه‌های فهم و درک توابع مثلثاتی این است که دانش‌آموزان بتوانند نسبت‌های مثلثاتی زاویه را تقریب بزنند و محدوده‌ی آن‌ها را در ذهن تصور کنند. در نتیجه، با توجه به درصد پایین پاسخ‌های صحیح، می‌توان گفت که دانش‌آموزان، فهم عمیقی از توابع مثلثاتی نداشتند. علاوه بر این، تجزیه و تحلیل راه‌حل‌های اشتباه، نکات ظریفی را در مورد فهم و درک مثلثاتی دانش‌آموزان روشن ساخت. دو راه حل زیر، هر یک در نوع خود ویژه بودند.



یک نفر از رابطه ی بین سینوس های $۳۰°, ۴۵°, ۶۰°$ به طور تقریبی نتیجه گرفته که $\sin ۲۰° = ۰/۳$ و بنابراین

$$\sin ۳۴۰° = \sin(۳۶۰° - ۲۰°) = \sin ۳۶۰° - \sin ۲۰° = ۱ - ۰/۳ = ۰/۷$$

مشکل اصلی که باعث ارائه ی این راه‌حل شده بود این بود که این دانش‌آموز، توابع مثلثاتی و در این مورد تابع سینوس را خطی در نظر گرفته بود.

این راه‌حل نیز قابل توجه است:

$$\sin ۳۴۰° = \sin(۲۷۰+۷۰) = \sin ۲۷۰ + \sin ۷۰ = -۱ + \sin ۷۰ = -۲$$
$$\cos ۳۴۰° = \cos(۲۷۰+۷۰) = \cos ۲۷۰ + \cos ۷۰ = ۱ + \cos ۷۰ = ۲$$

بدفهمی اصلی در این راه‌حل این بود که دانش‌آموزانی که آن را ارائه داده بودند، توجه نداشتند که مقدار سینوس یا کسینوس یک زاویه، نمی‌تواند بیش‌تر از ۱ یا کمتر از ۱- باشد.

بیش‌تر دانش‌آموزان نیز با کمک فرمول‌های $\sin(۲\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ و $\cos(۲\pi - \alpha) = \cos\alpha$، نوشته بودند

$$\sin ۳۴۰° = \sin(۳۶۰ - ۲۰) = -\sin ۲۰$$
$$\cos ۳۴۰° = \cos(۳۶۰ - ۲۰) = \cos ۲۰$$

و مقدار خاصی برای آن به‌دست آورده بودند. بعضی هم نوشته بودند

$$\sin ۳۴۰° = \sin(۲\pi - ۲۰°) = -\sin ۲۰°$$
$$\cos ۳۴۰° = \cos(۲\pi - ۲۰°) = \cos ۲۰°$$

این راه‌حل‌ها نشان می‌دهد که بسیاری از دانش‌آموزان، فرمول‌ها را حفظ می‌کنند، اما درک صحیحی از آن‌ها ندارند. این دانش‌آموزان فقط رویه‌ها را بدون توجه به مفاهیم، در ذهن تداعی کرده بودند و به این نکته توجه نداشتند که دو چیزی، که از لحاظ ماهیت با هم فرق می‌کنند، نمی‌توانند از هم کم شوند.

یک نفر هم نوشته بود

$$\sin ۳۴۰ = \sin(۲۵۰+۹۰) = \cos ۹۰ = ۰$$
$$\cos(۲۵۰+۹۰) = \sin ۹۰ = ۱$$

که می‌توان استنباط کرد این دانش‌آموز، تلاش نموده تا از رابطه‌های

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = -\sin\alpha \text{ و } \sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = \cos\alpha$$

کمک بگیرد، اما در هر صورت، در این کار موفق نبوده زیرا احتمالاً این رابطه را به‌صورت ناقصی در ذهن خود بازسازی کرده بود.

بالاخره یک نفر نیز نوشته بود «می‌توانیم با استفاده از رابطه ی مثلث، مقدار آن را به‌دست آوریم. برای مثال، سینوس برابر با ضلع مقابل به وتر است و با داشتن مقدار آن‌ها، سینوس و کسینوس به‌دست می‌آید». از این توضیح مشخص نیست که دانش‌آموز، $۳۴۰°$ را در مثلث چگونه تصور کرده بود، بلکه تنها می‌توان گفت که شاید درک نادرستی از مثلث داشته و به این صورت استدلال کرده است.

در هر صورت، دانش‌آموزان به هدف سؤال که مقدار تقریبی این نسبت‌ها بود توجه نکرده بودند و از این گذشته، شاید یکی از اساسی‌ترین دلایل برای پاسخ‌های نادرست دانش‌آموزان به این سؤال این بود که آن‌ها، درک درستی از دایره‌ی مثلثاتی نداشتند و نتوانستند با کمک گرفتن از آن، به تقریب مناسبی برای نسبت‌های این زاویه‌ها برسند.

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

به نظر می‌رسد یکی از مشکلات دانش‌آموزان در مورد مثلثات به روش تدریس بر می‌گردد؛ تدریسی که ابتدا سینوس و کسینوس را به عنوان نسبت‌های بین اضلاع مثلث معرفی می‌کند. بعد در سال دوم دبیرستان یا در همان سال اول، با سؤالاتی برخورد می‌کنند که این نسبت‌ها منفی است، و آن‌ها را دچار تناقض می‌سازد.

در این روش چون طول اضلاع همیشه مثبت است، نمی‌توانند تصور کنند که نسبت‌های اضلاع منفی باشد و درک این مطلب برای دانش‌آموزان مشکل است. به‌طور نمونه، زمانی که دانش‌آموزان با این سؤال برخورد می‌کردند که سینوس زاویه‌ی θ در شکل زیر را تشخیص دهند، اغلب آن را مثبت فرض می‌کردند، علت هم این بود که چون طول ضلع مثلث منفی نیست و آن‌ها نسبت‌های مثلثاتی را نسبت‌های بین دو

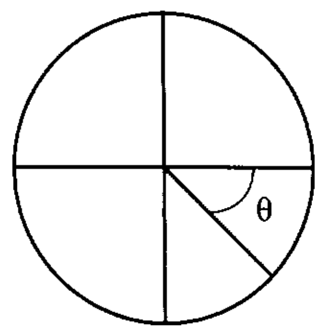
ضلع مثلث یاد گرفته بودند، دچار چنین بدفهمی شدند.

در مجموع می‌توان بدفهمی‌ها و مشکلات دانش‌آموزان را به صورت زیر دسته‌بندی کرد:

* توابع مثلثاتی را خطی در نظر می‌گرفتند؛
* از دایره‌ی مثلثاتی برای حل مسائل به خوبی نمی‌توانستند کمک بگیرند؛
* در تخمین نسبت‌های زاویه‌هایی که شناخته شده نیستند با مشکل مواجه بودند.

این دانش‌آموزان، حتی در حل برخی از مسائل معمولی که دانش مورد نیاز برای حل آن‌ها را در اختیار داشتند، به نتیجه نرسیدند و تلاششان با مشکلاتی مواجه شد.

در هر صورت، شناخت این بدفهمی‌ها، توجه معلم را نسبت به آن‌ها بیش‌تر می‌کند و کمک می‌کند که معلم به جرح



و تعدیل تدریس خود پرداخته و تدریس خود را به گونه‌ای ارائه دهد که این بدفهمی‌ها کمتر در دانش‌آموزان اتفاق بیفتد یا این‌که با آگاهی نسبت به وقوع احتمالی آن‌ها، از قبل آمادگی داشته و راه‌کاری برای مواجهه با آن‌ها در ذهن بپردازد. حتی معلمان می‌توانند از اشتباهات و بدفهمی‌ها برای ایجاد تضاد مفهومی و ایجاد فهم و درک درست استفاده کنند.

پی‌نوشت

1. Expanding
2. Orhan, math. Unipa. it/~girm/Aorhun.PDF

سال نشر گزارش تحقیق اورهان مشخص نبود، و فقط آدرس سایتی که این مقاله از آن گرفته شده در دسترس بود.

3. Szetela

منابع

۱. حسام، عبداله. (۱۳۸۴). بررسی بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان و نقش طرح‌واره‌های ذهنی در ایجاد آن‌ها. پایان‌نامه منتشر نشده‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشکده‌ی علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی. تهران، ایران.

۲. گویا، مریم. (۱۳۸۲). مفهوم تابع و بدفهمی دانش‌آموزان، **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۷۲، صص ۲۳ تا ۳۰، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۳. شهریاری، پرویز. (۱۳۷۹). **سرگذشت ریاضیات**. تهران. انتشارات مهاجر، چاپ اول.

۴. فرودنتال، هانس. (۱۹۷۹). مسایل تحقیقی آموزش ریاضی از دیدگاه فرودنتال. برگردان: زهرا گویا، ۱۳۸۰. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۶۵، صص ۵ تا ۱۱، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

5. Weber, K. (2005). Student's Understanding of Trigonometric Functions. *Mathematics Education Research Journal*. Vol. 17, No 3, 91-112.

6. Tall. D. & Blackett, N. (1991). Gender and the Versatile Learning Of Trigonometry Using Computer Software. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. XV, Assisi, Italy, (1991), Vol 1, pp.144-151.

7. Szetela, W. (1979). Hand-held Calculators and Learning of Trigonometric Ratios. *Journal for Research in Mathematics Education*. 1979. 111-118.

8. Keazer, A. (2004). Students Misconceptions in Middle School Mathmatics. *B. S. Undergraduate Mathematics Exchange*. Vol.2, No, 1, Spring 2004.

9. Brown, S. A. (2006). The Trigonometric Connection: Students' Understading of Sine and Cosine. In Novotna, J. Moraoa, H. Kratka, M. & Stehlikova, N. (Eds). *Proceeding of 30 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1. p. 228. Prague: PME.

10. Orhun, N.(?). Students' Mistakes and Misconception on Teaching of Trigonometry. math. unipa.it/~grim/Aorhun. PDF.

11. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA. The Author.

12. Skemp, R. R. (1989). *Mathematics in the Primary School*. London, Rutledge.

13. Kendal, M. & Stacey, K. (1997). Teaching Trigonometry. *Vinculum*, 34(1), 4-8.

نیاز به توجه بیش تر به آموزش مثلثات

قربانعلی نصیری
دبیر دبیرستان های شهرستان بروجن

اشاره

با توجه به نزدیکی مضمون این مقاله با مقاله ی «بررسی بدفهمی ها به عنوان یکی از موانع اصلی درک مثلثات»، که در همین شماره ی این مجله به چاپ رسیده است، و نزدیکی نتایج تحقیقات اشاره شده در آن مقاله به پرسش های مطرح شده در این مقاله، مطالعه ی هم زمان این دو مقاله را به خوانندگان توصیه می کنیم.

رشد آموزش ریاضی

مقدمه

مثلثات زاییده ی احتیاج به محاسبات عملی، به خصوص محاسبه ی اجزاء مختلف اشکال هندسی وقتی تعدادی کافی از آن اجزاء معلوم است، می باشد.

مطالعات نجومی، ریاضی دان های بابل قدیم و یونان را به سمت مطالبی کشانده بود که می توان آن را به عنوان مقدمه ی پیدایش مثلثات به حساب آورد. گرچه ریاضی دانانی مانند ارشمیدس، هیپارک، بطلمیوس، آریابهاتا، محمدبن جابربن سنان البتانی و ابوالوفا بوزجانی، کارهای مهمی در علم مثلثات انجام داده اند، اما گام اصلی در پیشرفت مثلثات را خواجه نصیرالدین طوسی برداشت. او با تألیف کتاب «کشف القناع فی اسرار شکل القطاع» در حقیقت اولین کتاب را در علم مثلثات نوشت. آن طور که استاد پرویز شهریاری می گوید: نقش طوسی را در مثلثات باید شبیه نقش اقلیدس در هندسه دانست، زیرا او توانست مجموعه ی آن چه را که قبل از او وجود داشت به صورت علمی و منظم و مستقل درآورد [۱]. ترجمه ی این کتاب مدت ها به صورت کتاب درسی مورد استفاده ی اهل علم در غرب بود. سپس مثلثات راه پیشرفت خود را در غرب ادامه داد و ریاضی دان های بزرگی مانند لباچوسکی که نظریه ی تحلیلی این توابع را براساس رشته های توانی به وجود آورد و اولر که توابع مثلثاتی هذلولی را به طریق جبری تعریف کرد، در این پیشرفت ها مؤثر بودند.

مثلثات در کتاب های درسی

صرف نظر از کاربردهای عملی مثلثات در محاسبات و حل اشکال هندسی واستفاده از نتایج آن ها در دروس دیگر، طرح مثال های متنوع و زیبا از توابع مثلثاتی در بحث های حد و پیوستگی و مشتق و انتگرال، در تعمیق آموزش این مفاهیم نقش اساسی دارد. آموزش و طرح مثلثات در کتب درسی ضرورتی انکارناپذیر است که خوشبختانه صفحاتی از کتب ریاضی ۱،

ریاضی ۲ و حسابان به این امر اختصاص داده شده است. ما در این جا نمی‌خواهیم درباره‌ی کافی بودن یا نبودن اختصاص این حجم از کتاب‌های درسی به مثلثات و این که پراکنده بودن این مطالب در سه کتاب درسی مفید است یا خیر، بحثی داشته باشیم. بلکه در این جا یک سؤال مهم‌تر و اساسی‌تر را بیان می‌کنیم که شاید برای پاسخ دادن به آن، بحث راجع به موارد بالا هم لازم شود. سؤال این است که «چرا اکثریت دانش‌آموزان، حتی در سال‌های بالای دبیرستان، مفاهیم ساده‌ی مثلثات را نفهمیده‌اند؟» آیا مثلثات علمی پیچیده و مشکل است یا نحوه‌ی آموزش و ترتیب مطالب ارایه شده در کتاب‌های درسی، نیازمند تجدیدنظر هستند؟ دانش‌آموزان ابراز می‌کنند که در فهم اکثریت مطالب مثلثات عاجزند اما با طرح چند سؤال و پرسش مفهومی در کلاس نیز می‌توان به آن پی برد. آن‌چه موجب شد این مقاله نوشته شود، نتیجه‌ی پاسخ‌های تأسف‌بار حدود ۵۰ دانش‌آموز به چند سؤال مثلثات بود که به‌طور تصادفی، از سال سوم و پیش‌دانشگاهی انتخاب شده بودند.

جدول زیر، جمع‌بندی این نتایج را نشان می‌دهد.

دانش‌آموزان در سال اول و در کتاب ریاضی ۱، نحوه‌ی محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی را به سه صورت می‌بینند*:

الف) با استفاده از یک دستگاه محورهای مختصات قائم نقطه‌ی دل‌خواه P روی نیم‌خطی که انتهای زاویه‌ی مورد نظر را نشان می‌دهد؛

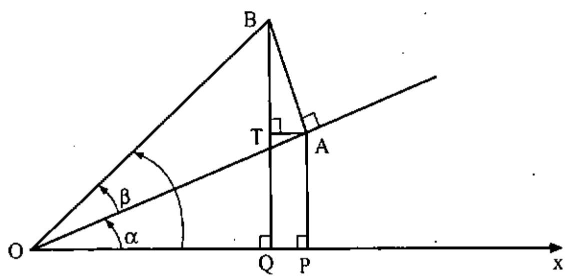
ب) با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی؛

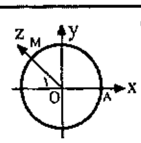
ج) با استفاده از نسبت ضلع‌ها در مثلث قائم‌الزاویه که البته تعاریف در این حالت، فقط برای زاویه‌های تند درست هستند.

در کتاب ریاضی ۲ اثبات اتحاد

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

به صورت زیر گفته شده است (شکل زیر را ببینید):



ردیف	سؤال	درصد پاسخ‌های صحیح
۱	به‌طور تقریبی، یک زاویه‌ی حدوداً ۱ رادیانی رسم کنید.	۱۰
۲	سینوس و کسینوس قوس ۴ رادیانی چه علامت‌هایی دارند؟	۸
۳	انتهای قوس ۵۰۰ درجه را روی دایره‌ی مثلثاتی یا شکل دیگر نشان دهید.	۲۵
۴	اگر زاویه‌ی O_1 برابر ۶۰ درجه باشد، OM انتهای چه قوسی است؟ دو زاویه‌ی مثبت و دو زاویه‌ی منفی نام ببرید. 	۲۰
۵	روی یک شکل، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۲۲۵ درجه را به‌دست آورید.	۱۸
۶	به روش دل‌خواه، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۲۲۵ درجه را به‌دست آورید.	۴۵
۷	به کمک اتحاد $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$، اتحاد مربوط به $\sin(\alpha-\beta)$ را به‌دست آورید.	۱۷
۸	رابطه‌ی بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α و $\alpha+270$ را روی شکل به‌دست آورید.	۱۵
۹	رابطه‌ی بین نسبت‌های مثلثاتی α و $\alpha+270$ را به روش دل‌خواه به‌دست آورید.	۳۵
۱۰	اگر زاویه‌ی x بین ۳۰ تا ۱۵۰ درجه تغییر کند، sin x در چه حدودی تغییر می‌کند؟	۲۴

اگر نیم‌خط OA با محور Ox زاویه‌ی α و نیم‌خط OB با نیم‌خط OA زاویه‌ی β بسازد و AB عمود بر OA باشد، از A و B عمودهای AP و BQ و سپس AT را رسم می‌کنیم. حال در شکل حاصل داریم

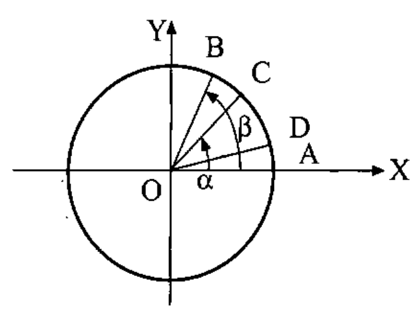
$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{BQ}}{OB}=\frac{\overline{BT}+\overline{TQ}}{OB}=\frac{\overline{BT}+\overline{AP}}{OB}$$

$$=\frac{BA\cos\alpha+OA\sin\alpha}{OB}=\frac{BA}{OB}\cos\alpha+\frac{OA}{OB}\sin\alpha+\frac{OA}{OB}\sin\alpha$$

$$=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

ملاحظه می‌کنید که این اثبات، فقط برای حالتی که β و α و حتی $\alpha+\beta$ زاویه‌های تند باشند، اعتبار دارد.[1] اما در عرض سال‌های زیادی که از تدریس اینجانب می‌گذرد، تاکنون هیچ دانش‌آموزی (حتی یک نفر) به این امر اعتراض و حتی توجه نکرده است و این نشان می‌دهد که تعاریف ذکر شده در بالا که در پایه‌های اول متوسطه آموزش داده شده است، خوب درک نشده‌اند.

اگرچه مشکل آموزش مثلثات، تنها این اثبات نیست، اما اثبات کامل زیر[2] برای $\cos(\alpha-\beta)$ به جای اثبات بالا، خالی از لطف نیست.[3]



اگر در شکل بالا، $A\hat{O}C=\alpha$ و $A\hat{O}B=\beta$ و نقطه‌ی D طوری انتخاب شده باشد که $A\hat{O}D=C\hat{O}B$، آن‌گاه برای مختصات نقاط A، B، C و D داریم

$$D(\cos\theta,\sin\theta),C(\cos\alpha,\sin\alpha),B(\cos\beta,\sin\beta),A(1,0)$$

که $\theta=\beta-\alpha$. هم‌چنین داریم

$$\overline{CB}=\overline{AD}\Rightarrow CB=AD\Rightarrow CB^2=AD^2$$

$$\Rightarrow(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=(\cos\theta-1)^2+(\sin\theta-0)^2$$

$$\Rightarrow 2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta=2-2\cos\theta$$

$$\Rightarrow\cos(\theta)=\cos(\beta-\alpha)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha-\sin\beta$$

نتیجه‌گیری و یک پیشنهاد

مدت زیادی است که پیشنهاد تألیف چند کتاب به جای یک کتاب متمرکز برای هر درس، توسط بعضی از متخصصین آموزش و پرورش داده شده است و گویا در یکی دو رشته‌ی درسی نیز به صورت آزمایشی اجرا شده است. نویسنده از مطالب گفته شده نتیجه می‌گیرد که نحوه‌ی ارائه‌ی مطالب مثلثات در کتاب‌های درسی ریاضی- هم از جهت ترتیب و توالی و هم از نظر نوع ارایه- نیازمند تجدید نظر جدی است. لذا، پیشنهاد می‌شود نحوه‌ی آموزش مثلثات در کتاب‌های ریاضی، توسط مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، بین همکاران محترم به مسابقه گذاشته شود و همکاران علاقه‌مند، با فرض این که می‌خواهند در یک کتاب درسی مثلثات را آموزش دهند، نحوه‌ی تدریس خود را نوشته و ارسال کنند. البته لازم است که تدریس پیشنهادی، شامل چگونگی آموزش، ترتیب و نظم مطالب ارایه شده، مثال‌ها و تمرین‌هایی که برای عمق دادن به آموزش این درس ضروری است باشد و از کلی گویی و طرح مباحث کلی دور باشد.

پی‌نوشت

* این مقاله، پیش از تغییر کتاب ریاضی(۱) در سال تحصیلی ۸۸-۸۷ نوشته شده است و لذا ممکن است تغییرات محتوای مثلثات کتاب ریاضی(۱)؛ ادعاهای نگارنده در حال حاضر سازگار نباشد که در هر حال از کلیت بحث، چیزی کاسته نمی‌شود.
رشد آموزش ریاضی

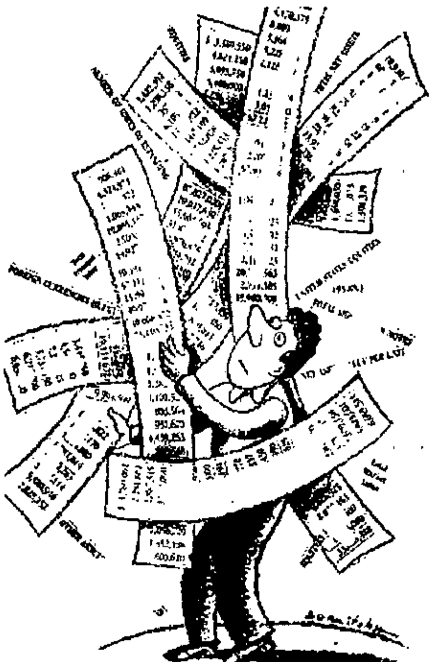
۱. این که نیم‌خط OP را محور Ox بنامیم و پاره‌خط‌ها را با اندازه‌ی جبری بنویسیم، چیزی به کلیت مسأله اضافه نمی‌کند.

۲. این اثبات از کتب ریاضی کشور قطر گرفته شده است [منبع ۴] که نویسنده‌ی مقاله، ۲ سال در آن کشور در مدارس ایرانی تدریس کرده است.

۳. پس از اثبات یکی از فرمول‌های کمان‌های مرکب (مجموع یا تفاضل دو کمان)، بقیه‌ی روابط به کمک آن ثابت می‌شوند.

منابع

۱. شهریاری، پرویز و فیروزنیا، احمد. روش‌های مثلثات.
۲. بابلیان، اسماعیل و همکاران، کتاب ریاضیات (۲)، وزارت آموزش و پرورش.
۳. بابلیان اسماعیل و همکاران، کتاب ریاضیات(۱)، وزارت آموزش و پرورش.
۴. کمیته‌ی نشر کتاب‌های درسی کشورهای عربی حوزه‌ی خلیج فارس، کتاب ریاضی ترم ۲، سال دوم رشته‌ی علمی دبیرستان‌های کشور قطر.



چگونه ریاضی به حساب می‌آید

لین آرتور استین*

ترجمه: مانی رضائی

دانشجوی دکتری آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

کسرها و جبر، نمایش‌های بسیار دقیق، نیرومند، و چالش برانگیزی از محتوای ریاضیات مدرسه‌ای‌اند. اما چگونه آن‌ها را آموزش دهیم تا دانش‌آموزان این مفاهیم را درک کنند؟

بسیار از کسانی در تعجب هستم که مراقب‌اند تا ریاضیات مانند یک گوریل ۶۰۰ پوندی در مدارس آمریکا باقی بماند. آزمون‌های رتبه‌بندی مدارس، باعث شده تا نهاد مدرسه در تلاش برای کسب نتیجه برای «پیشرفت تحصیلی» در ریاضیات، برآشفته شده و موضوعاتی مانند تاریخ، علوم، موسیقی، و هنر را به کناری براند. هیاهوی کشمکش‌های ریاضی در سال‌های ۱۹۹۰، والدین و معلمان را برآشفته و درنتیجه خواستار وضعیت قاطعانه‌تری در مشاجره‌های پرآشوب آموزش ریاضی هستند.

بسیاری از مشاجره‌ها مربوط به پایه‌های آخر ابتدایی و آموزش متوسطه است که دانش‌آموزان در آن، با مباحثی مواجه می‌شوند که درک آن‌ها دشوار و در برخی موارد دور از ذهن است. در دهه‌های اخیر، مدارس به‌سادگی دانش‌آموزان رتبه‌های پایین را نادیده گرفتند. اما امروز، چنین انتخابی نه در سیاست‌های آموزشی است و نه از نظر قانونی قابل پذیرش است. به‌طور خاص، دو موضوع کسرها و جبر II با مشکلات بیش‌تری روبه‌روست. بسیاری از بزرگسالان، و حتی برخی معلمان، در موضوع‌های مرتبط با کسرها و فرمول‌های جبری سردرگم شده و مشکلاتی دارند. به‌سادگی می‌توان دید چرا این مباحث در آموزش مدرسه‌ای رنج‌آور هستند. این‌ها نمونه‌هایی از آن است که چرا ریاضی به حساب می‌آید و چرا بحث‌برانگیز است.

سردرگمی در کسر

بیش از نیمی از دانش‌آموزان پایه‌ی هشتم آمریکا در یک آزمون بین‌المللی، در پاسخ به سؤال «نزدیک‌ترین تقریب به مجموع $\frac{۲۳}{۲۵}+\frac{۱۹}{۲۰}$ کدام است؟» از بین گزینه‌های ۱، ۲، ۴۲، ۴۵، پاسخ ۴۲ یا ۴۵ را انتخاب کردند. چنین پاسخ‌هایی مانند

خواندن کلمه‌ی «فیل» است در حالی که هیچ درکی از این که فیل یک حیوان است، در کلمه‌ی مورد نظر نیست. این دانش‌آموزان، هیچ ایده‌ای از این که عددهای $\frac{۱۹}{۲۰}$ و $\frac{۲۳}{۲۵}$ به ۱ نزدیک هستند، ندارند.

به‌طور مشابه، هیچ‌یک از والدین آن‌ها نیز ایده‌ای در این زمینه ندارند. عده‌ی اندکی از والدین درک خوبی از کسرها دارند و با آن‌ها می‌توانند کار کنند. از آن‌جا که مردم در زندگی روزمره از کسرها استفاده نمی‌کنند، برخی می‌پرسند چرا مدارس (در حال حاضر در تمام ایالت‌ها) اصرار دارند که همه‌ی دانش‌آموزان، مثلاً بدانند چگونه دو کسر غیر متعارفی $\frac{۹}{۱۳}$ و $\frac{۲}{۷}$ را جمع کنند یا چگونه $۱\frac{۳}{۴}$ را بر $\frac{۲}{۳}$ تقسیم کنند. برخی با بدبینی می‌پرسند آخرین باری که بزرگسالان عموماً با چنین مسأله‌ای روبه‌رو شده‌اند، چه زمانی بوده است؟ حتی معلمان ریاضی به سختی می‌توانند مسأله‌های واقعی‌ای طرح کنند که به این محاسبه‌های عجیب و غریب، نیاز داشته باشد (ما، ۱۹۹۹).

به‌علاوه، بیش‌تر مردم چنان که باید و شاید، با انگلیسی صحیح نمی‌توانند کسرها و ویژگی‌هایش را، برای نمونه، در جدول‌های عادی داده‌ها، به‌کار ببرند. یک مثال ساده‌ی نمایش این مشکلات در شیلد، (۲۰۰۲) است. با وجود آن که بیش‌تر مردم می‌دانند ۲۰ درصد یعنی $\frac{۱}{۵}$ از یک چیز، موارد متعددی از عدم توانایی در چیزهایی مشابه آن به چشم می‌خورد. اگرچه ماشین‌حساب می‌تواند از عهده‌ی محاسبه‌ی عبارت‌هایی مانند $\frac{۹}{۱۳}+\frac{۲}{۷}$ و $۱\frac{۳}{۴}\div\frac{۲}{۳}$ برآید، اما این وسیله به کسانی که در خواندن جدول و عبارت‌های کلامی آن مشکل دارند، هیچ کمکی نمی‌کند.

[در متن اصلی، نمونه‌ای تصویری شامل چند تصویر، نمودار و کلمات متقاطع آمده است که به‌عنوان مثالی از این مشکل ارایه شده است. به دلیل وابستگی زیاد این مثال‌ها به زبان انگلیسی و شرایط اجتماعی آن، از ترجمه‌ی آن صرف‌نظر شد. م.]

این که بسیاری از کودکان و بزرگسالان با کسرها مشکل دارند، می‌تواند معیار خوبی برای بررسی باشد. این وضعیت از آن‌جا ناشی شده است که ریاضی‌دانان، تعریف واحدی برای کسر ندارند. گروهی می‌گویند کسرها تنها نامی برای برخی نقاط روی محور اعداد هستند (وو، ۲۰۰۵)، در حالی که بعضی دیگر معتقدند بهتر است آن‌ها را مضرب کسرهایی با صورت واحد مانند $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۴}$، و $\frac{۱}{۵}$ در نظر بگیریم (تاکر، ۲۰۰۶). کتاب‌های درسی و راهنمای معلمان ابتدایی هم نمایش مغشوشی از هر دو دیدگاه است (مک کروری، ۲۰۰۶).

مردم عادی زمانی که از کسرها صحبت می‌کنند، به جای استفاده از تعریف‌های رسمی، بر معنای محتوایی آن تأکید دارند. کسرها (همانند اعداد) ساخته‌ی بشر هستند و از جوامع خاص و متون علمی برآمده‌اند. آن‌ها نمایشی برای بزرگی مسایل اجتماعی (مانند درصد معتادان در جامعه)؛ میزان حمایت‌های عمومی (مانند درصد حامیان مالی مدرسه)؛ و نتایج سیاست‌های دولت (مانند میزان بیکاری) هستند. هر عددی حاصل فعالیت بشر است و برای انتخاب طرح‌های ارایه شده کاربرد دارد (بست، ۲۰۰۱).

کسرها، نسبت، تناسب و دیگر عددها با مفاهیم کمّی، عبارت‌هایی با محتوای معنایی خاص هستند. برای آن‌که ریاضیات چیزی بیش از تمرین ذهنی صرف باشد و به‌منظور ایجاد حسی از آن، لازم است معلمان بر نقش اعداد و کلمات، به‌ویژه در رابطه‌های کمّی در عبارت‌هایی که حاوی معنای عددی هستند، تأکید کنند. توانایی محاسبه برای کاربران ریاضی، به معنای یک پشتوانه است. برای معنادار کردن ریاضیات، باید کسر و کلمات و توانایی محاسبه، در ذهن هر دانش‌آموز درهم‌آمیخته شود.

جبر برای همه؟

طبق دانش مورد نیازی که در دنیای استعاره‌ای توماس فردمن مطرح شده است، تمام دانش‌آموزان، صرف‌نظر از نخبه یا دیرآموز بودن، باید دبیرستان را برای ورود به کالج و کار فنی تمام کنند (پروژه‌ی دیپلم آمریکایی، ۲۰۰۴). بر این اساس، برای مثال، تمام دانش‌آموزان باید جبر II را بگذرانند، درسی که در ابتدا برای سوق پیدا کردن به ریاضی‌ورزی طراحی شده بود، اما در واقع، اکنون در بیش از نیمی از ایالت‌های آمریکا تمام فارغ‌التحصیلان دبیرستان باید جبر II را بگذرانند (زنیط،

۲۰۰۶).

طرفداران جبر پیشرفته برای این تغییر اسف‌بار سیاست آموزشی، دلایل متعددی دارند:

● با اشاره به موقعیت نیروی کار شهروندهای آمریکا، انجام انواع مهارت‌های تکنیکی. در جریان درس‌های جبر II، موجب جبران کمبودهای موجود می‌شود (کمیته‌ی علوم، مهندسی و سیاست عمومی، ۲۰۰۷).

● داده‌های مشاغل و آموزشی نشان می‌دهد جبر II «درس پیش‌نیاز» برای مشاغلی است که حقوق بالا دارند. به‌علاوه، از هر شش نفر جوانی که در چارک بالا هستند، پنج نفر جبر II را گذرانده‌اند (کارنوال و دسروچرز، ۲۰۰۳).

● جبر II پیش‌نیازی برای جبر کالج (بعد از مدرسه) است. جبر کالج، یک درس ریاضی است که به‌طور معمول، بیش‌ترین متقاضی را برای مدارک بعد از متوسطه دارد. تمام دانشجویان مُجازی که جبر II را نگذرانده‌اند، برای بهبود در ریاضیات باید آن را بردارند.

● اگر الزامی نباشد، بیش‌تر دانش‌آموزان انتخاب دیگری به‌جز جبر دارند. این گروه، کسانی هستند که والدین آن‌ها تعهد کمتری نسبت به آموزش فرزندانشان دارند. درنتیجه نظام آموزشی‌ای داریم که نابرابری‌ها را تشدید می‌کند و به‌طور مستمر، تفاوت‌های اجتماعی و اقتصادی موجب افزایش این نابرابری‌ها می‌شود (های‌کوک، ۲۰۰۷).

شکاکان جبر II الزاماتی را مورد توجه قرار می‌دهند که مورد نیاز دیگر حوزه‌های ریاضیات است؛ حوزه‌هایی مانند تحلیل داده‌ها، آمار، و احتمال که برای فارغ‌التحصیلان مدرسه مهم‌تر است و به‌طور کلی در زندگی روزمره و مشاغل، کاربرد بیش‌تری دارند. این گروه با نشان دادن رابطه‌ی تاریخی جبر II با موفقیت اقتصادی (مانند، پیشینه‌ی خانوادگی و حمایت اشراف)، از انگیزه‌های مشترک بیش‌تری صحبت می‌کنند که با چیرگی در جبر II به‌دست می‌آید. آن‌ها اشاره می‌کنند که بیش‌تر دانش‌آموزانی که جبر II را گذرانده‌اند، موفقیت بیش‌تری در ریاضیات بعد از مدرسه دارند.

درواقع، این مشکلات پیش از آن‌که در مدرسه نمایان شود، به‌عنوان موضوعی جدید در آموزش ریاضی مطرح شد. سپس، به فاصله‌ی کوتاهی پس از تدوین و توسعه‌ی استانداردها، خط‌مشی‌ها و آزمون‌های «جبر II برای همه» مشخص شد که در بیش‌تر مدارس، دست‌یابی به این اهداف ناممکن است. ملاک‌هایی شامل تغییر منزلت مدارک تحصیلی، عدم کفایت برخی پیش‌نیازها، انگیزش، شایستگی، و چگونگی آموزش از جمله مواردی است که موجب گسترش درس‌های «جعلی» ریاضی و کاهش نفوذ استانداردهایی شد که بخش‌ها و ایالت‌های برخوردار، برای دست‌یابی به این هدف، هزینه‌ی آن را پرداختند. هدفی که بدون صرف منابع عظیم مورد نیاز، واقعاً به نتیجه‌ی مطلوب نمی‌رسد (نادینگز، ۲۰۰۷).

شواهد متعدد نشان می‌دهد که فرض تمام و کمال بودن آموزش با چالش روبه‌رو است. برای پیشرفت در جبر، آموزش تکمیلی بیش از برنامه‌ی رسمی ضروری است. با وجود آن‌که چنین چیزی می‌تواند در برخی مباحث درست باشد، اما در جبر II که دانش‌آموزان بی‌علاقه‌اند و کمبود معلم وجود دارد و هدف نامشخص است، دشوارتر است. به دلایل متعدد، ثبت‌نام در جبر II طی دو دهه‌ی اخیر دو برابر شده است (مرکز ملی آمار آموزشی [NCES]، ۲۰۰۵a). در همین دوره، ثبت‌نام در درس‌های جبرانی ریاضی کالج نیز بیش‌تر شده و امتیازهای ریاضی در آزمون پیشرفت تحصیلی ملی (NAEP) در پایه‌ی ۱۲ کاهش یافته است (NCES، ۲۰۰۵a؛ لاتزر، ماکسول، و رودی، ۲۰۰۷). بنابراین، به وضوح باید اشتباهی شده باشد.

هر چند نمی‌توانیم با کنترل تصادفی آموزش ریاضیات مدرسه‌ای برای تعدادی از دانش‌آموزان، به درمان آن و دیگر مُسکن‌ها اکتفا کنیم، اما می‌توانیم اثرات برنامه‌ی درسی جاری را بر کسانی بیازماییم که از آن خارج می‌شوند. شواهد بسیار زیادی از ناهنجاری در دست است:

● یک‌سوم دانش‌آموزان ورودی پایه‌ی ۹ فارغ‌التحصیل نمی‌شوند، و آمریکا بیش‌ترین درصد ترک تحصیل در دوره‌ی متوسطه را در میان کشورهای صنعتی دارد (بارتون، ۲۰۰۵). به‌علاوه، تقریباً نیمی از سیاه‌پوستان، اسپانیایی‌زبانان و بومیان آمریکایی ترک تحصیل می‌کنند (سوانسون، ۲۰۰۴). اگرچه ریاضیات تنها عامل این آمار شرم‌آور نیست، اما یکی از موضوعات درسی است که بیش‌تر دانش‌آموزان در آن ناموفق هستند.

● یک‌سوم دانش‌آموزان ورودی به آموزش عالی، باید بخش اعظمی از ریاضیات دبیرستان را به‌عنوان پیش‌نیاز بخوانند تا بتوانند درس‌های «جبر کالج» یا «آمار مقدماتی» را بردارند (گرین و وینترز، ۲۰۰۵).

● در یک مطالعه در مورد نگارش دانشجویان، در حالی که متن نوشتاری در مورد چیزی بود که موارد کمّی در آن نقش محوری داشتند، یک‌سوم از دانشجویان در یکی از کالج‌های سطح بالای منتخب، در استفاده از هرگونه استدلال کمّی ناموفق بودند (لاتسکی، ۲۰۰۶).

● دانشجویان کالج در رشته‌های علوم تجربی و علوم اجتماعی، عموماً در نمایش داده‌های کلامی به صورت جدول و نمودار مشکل دارند (شیلد، ۲۰۰۶).

یک توضیح برای این نتایج دلسردکننده، مسیری است که ریاضیات مدرسه‌ای طی می‌کند. این مسیر از مسایل واقعی و کاربردی (مانند، اندازه‌گیری و شمارش) در پایه‌های پایین شروع می‌شود و تا مسایل مجرد و ظاهراً غیر کاربردی (مانند، فاکتورگیری و ساده کردن) در پایه‌های بالاتر ادامه می‌یابد. گزارش‌های تأسف‌بار زیادی وجود دارد که نشان می‌دهد ریاضیات دبیرستانی مملو از تمرین‌هایی است که به دانش‌آموزان، ناتوانی آنان را اثبات می‌کند. این نتایجی است، که در سال‌های اخیر به دست آمده است و تنها اقلیتی را نشان می‌دهد که درگیری مستقیم با آن دارند.

درگذشته، مدارس خاص جریان اصلی برنامه‌ی درسی ریاضی قوی و مجردی را برای دانش‌آموزانی اجرا می‌کردند که بیش از نیمی از آنان، هدفشان ورود به آموزش عالی بود و تعداد اندکی در نیمه‌ی دیگر، قابل صرف‌نظر کردن بودند. اعتقاد دو دهه‌ی اخیر آن بود که در عملکرد همه‌ی دانش‌آموزان باید نشانه‌هایی از کارآمدی و توانایی ریاضیات به چشم بخورد. اما هنوز بهترین انتخاب برای جریان اصلی بر پایه‌ی جبر به دست نیامده است. جریانی که همانند شور و حال اولیه‌ی جبر، توانایی تجرید رو به فزونی آن را داشته باشد.

ریاضیات حرفه‌ای

کسرها و جبر، شاید یکی از دشوارترین بخش‌های ریاضیات مدرسه‌ای باشند، اما آن‌ها تنها حوزه‌ای نیستند که دانش‌آموزان در آن به دردسر می‌افتند. تجربه نشان داده است که بیش‌تر دانش‌آموزان در مفاهیم مهم ریاضیات عالی ناموفق هستند. چیزی که در آموزش سنتی نادیده گرفته شده، تأکید کافی بر سه بخش مهم است: ارتباط‌ها، اتصال‌ها، و زمینه‌ها.

ارتباط‌ها

مؤسسه‌های آموزشی عالی انتظار دارند دانش‌آموزان با ترکیب مهارت‌های حوزه‌های گوناگون، ارتباط مؤثری با قشرهای مختلف مردم و با تجربیات متنوع برقرار کنند. کارفرمایان نیز درخواست مشابهی دارند. آن‌ها تأکید دارند که دانش رسمی، به‌خودی خود، برای رقابت‌های امروز کافی نیست. به‌جای پی‌گیری برای انجام تمرین‌های تکنیکی، سردمداران تجارت، بر کار گروهی و قابلیت سازگاری تأکید دارند. مصاحبه‌کنندگان با متقاضیان کار، توانایی ترکیب اطلاعات، ساخت فرض‌های مستدل، شناخت تناقض‌ها و تشریح دلایل آن را در داوطلبان می‌سنجند. آنان به دنبال فارغ‌التحصیلانی هستند که توانایی تفسیر داده‌ها و محاسبه‌ی آن را داشته باشند، و ارتباط بین موضوع‌های کمّی را بیابند (تیلور، ۲۰۰۷).

در برابر درخواست‌های آموزش عالی و بازار کار، دانش‌آموزان K-12 [از پیش‌دبستان تا سال آخر متوسطه] نیازمند توسعه‌ی تمرین‌های کلامی با محتوای کمّی هستند. آن‌ها باید بتوانند با نوشتن جمله‌های دقیق در پاراگراف‌هایی با نظم منطقی، معنای داده‌ها، جدول‌ها، نمودارها و فرمول‌ها را توضیح دهند و رابطه‌ی بین آن‌ها را بیان کنند و به روش‌های گوناگون، آن‌ها را نمایش دهند. برای مثال، دانشجویان علوم با استفاده از داده‌های گرمایش جهانی، مقاله‌ای درباره‌ی عوارض دی‌اکسیدکربن بنویسند؛ دانشجویان علوم اجتماعی با داده‌های مربوط به انتخابات اخیر، مطلبی در دفاع یا علیه روش انتخاباتی متناوب تهیه کنند؛ دانشجویان اقتصاد با بررسی جدول داده‌های مربوط به وام‌های ملی، محدودیت واگذاری وام را برای اعطاکنندگان وام و برای نسل بعد تدوین نمایند.

پیش از این، بر این باور بودیم که اگر معلمان ریاضی، به دانش‌آموزان چگونگی محاسبه را بیاموزند و معلمان انگلیسی [ادبیات] چگونگی نگارش را درس بدهند، در آن صورت دانش‌آموزان به طور طبیعی باید بتوانند با ترکیب این مهارت‌ها، ایده‌های کمّی را به نگارش دربیاورند. داده‌ها و سال‌ها تجربه‌ی ناامیدکننده نشان می‌دهد که تنها ساده‌لوحان می‌توانند آن را باور کنند. اگر خواهان آنیم که دانش‌آموزان، توانایی ارتباط ریاضی‌وار بیابند، بایستی مطمئن شویم که آن‌ها هر دو عمل مهارت ریاضی و استفاده از استدلال‌های کمّی را با هم آموخته و نقد می‌کنند.

اتصال‌ها

یکی از دلایلی که دانش‌آموزان گمان می‌کنند ریاضیات عبث است، آن است که می‌بینند تنها کسانی که از ریاضیات استفاده می‌کنند، معلمان هستند. معلمان در همه‌ی موضوعات- چه مدرسه‌ای و چه مربوط به مشاغل- از ریاضیات به طور منظم و معنادار استفاده می‌کنند و دانش‌آموزان با تشویق معلمان ریاضی، به کارآیی آن مثلاً در معماهای کلامی، پی می‌برند.

برای ساختن ریاضیاتی که از نظر دانش‌آموزان ارزشمند باشد، مدارس نیازمند ریاضیات فراگیرتری هستند. این مهم

می‌تواند با طراحی یک نظام ترکیبی از سوی معلمان و مسئولان اجرایی به دست آید که اهداف کمّی را ترسیم کنند. به صورت نظری، هر موضوع تدریس شده در مدرسه قابل ارزیابی است و تابع برخی پارامترهای کمّی یا استدلال‌های منطقی است که گواه آن، نتایج حاصل است. اندازه‌گیری و محاسبه در موضوعات کلامی، جدول‌ها، داده‌ها، و نمودارها، به وفور در جامعه و علوم طبیعی؛ الزامات تجاری و ریاضیات مالی؛ معادلات مشترک بین اقتصاد و شیمی؛ منطق استنتاجی بنیادهای تاریخ و تمدن، یافت می‌شود. اگر معلم در هر یک از این حوزه‌ها تنها آن‌هایی را مورد توجه قرار دهد که به ارتقای تفکر منجر می‌شود، دانش‌آموزان پیام درس را دریافت می‌کنند.

به عنوان مثالی دیگر، عملکرد بسیاری از دانشجویان مستعد در کالج‌ها نشان می‌دهد که برای بهبود استدلال‌های ساده‌ی کمّی لازم است دانش‌آموزان در پایه‌های ابتدایی و متوسطه، تمرین‌های بیش‌تری با استفاده از استدلال ریاضی انجام دهند. بیش‌تر این تمرین‌ها باید در برنامه‌ی درسی گنجانده شود. ریاضیات بسیار مهم‌تر از آن است که به معلم ریاضی تنها گذاشته شود.

زمینه‌ها

یکی از انتقادهای متداول به ریاضیات مدرسه‌ای آن است که تمرکز بیش از حدی بر رویه‌ها (الگوریتم‌ها) دارد و درک آن‌ها چندان ساده نیست. این مشکل ویژه‌ای برای کسرها و جبر است، زیرا این دو نمایش، مجرد و در سطحی بالاتر از حساب ساده‌ی اعداد صحیح هستند. بدون زمینه‌ای قابل اعتماد برای بنا نهادن معنی این مفاهیم، بسیاری از دانش‌آموزان تنها با ابزارهای بی‌معنی مجرد روبه‌رو می‌شوند.

بالا رفتن سطح تجرید، به توسعه‌ی الگوریتم‌ها و محو ارتباط آن‌ها با معنایشان می‌انجامد. چرا می‌توانید اعداد را معکوس و ضرب کنید؟ چرا $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$ برقرار است؟ اگر معنی این نمادها برایتان روشن باشد، این‌ها نتایجی بدیهی هستند، اما اگر چنین نباشد، چیزهایی رمزآلود خواهند بود. قابل درک است که جدا شدن رویه‌ها از معنای خود، دانش‌آموزان را به طور کامل آشفته می‌کند. در آزمون‌های استاندارد شده‌ی اخیر، این مشکل بدتر شده است زیرا معلمان خواهان حل مشکلی هستند که دانش‌آموزان از پس آن برنمی‌آیند. بنابراین، زمانی طولانی به رویه‌هایی اختصاص داده می‌شود که ممکن است در

آزمون‌های رتبه‌بندی مدارس به کار آید، رویه‌هایی که هم معلمان و هم دانش‌آموزان را به خود مشغول می‌کند.

با وجود این، جایگزینی مناسب برای مجردسازی‌های بی‌معنا وجود دارد. بیش‌تر کاربردهای استدلال‌های ریاضی در زندگی روزمره و مشاغل معمول با تفکر پیچیده‌تری از مهارت‌های اولیه (مهارت‌هایی مانند، حساب، درصد و تناسب) سروکار دارند، اما جریان اصلی ریاضیات دبیرستان (جبر، هندسه و مثلثات)، دانش‌آموزان را به مفاهیم مجردی سوق می‌دهد که در مثال‌های واقعی بسیار ساده شده (مانند، برنامه‌ی قطارهای شب) نشان داده می‌شود. با غنی ساختن برنامه‌ی آموزشی از مسایل ساده‌ی مجرد به مسایل واقعی پیچیده که در آن‌ها تنها مهارت‌های ساده نیاز است، معلمان می‌توانند به دانش‌آموزان کمک کنند تا ریاضیات را در مواجهه با مسایل پیرامون خود درک کنند (استین، ۲۰۰۱).

گرمایش جهانی، مخارج تحصیلی، و هزینه‌ی مصرف گاز، مثال‌هایی از موضوع‌هایی با داده‌های غنی است که با توجه به پیچیدگی‌های غیرمنتظره، دانش‌آموزان را ترغیب می‌کند اما برای آنان چالش برانگیز است. چنین چیزهایی می‌تواند کمک کند تا دانش‌آموزان با برنامه‌ی ملامت‌بار مبارزه کنند، عاملی که یکی از دلایل مهم ترک تحصیل آنان است (بریجلند، دای ایلیو، و موریسون، ۲۰۰۶).

در مهم‌ترین فعالیت‌های آموزشی متون معتبر، مفاهیم به شمارش مرتبط می‌شوند. در این متون، اشیاء، شمارش، اندازه‌گیری، درک و استنباط، یا تجزیه و تحلیل می‌شوند. مباحثی مانند تاریخ، جغرافیا، اقتصاد یا زیست‌شناسی که در آن‌ها استدلال ریاضی به کار می‌رود، بهترین موقعیت طبیعی معرفی این فعالیت‌ها در برنامه‌ی درسی‌اند. اما از سوی دیگر، با وجود تلاش بی‌دریغ معلمان ریاضی، دانش‌آموزان ریاضیات را به عنوان چیزی می‌نگرند که تنها در ریاضیات کاربرد دارد. بهترین راهی که می‌توان ریاضیات را در نظر دانش‌آموزان به حساب آورد، آن است که آنان شاهد استفاده‌ی

ریاضیات توسط معلمان خود در موضوعات متنوع باشند.

منبع اصلی که ترجمه شده است

Steen, L. A., (2007). How Mathematics Counts, *Educational Leadership*, Vol. 65, Nov. 2007.

این ترجمه، در چهارمین شماره‌ی نشریه‌ی الکترونیکی «چشم‌انداز» نیز به چاپ رسیده است.

* Lynn Arthur Steen استاد ریاضیات کالج ایالتی اولاف، نورث فیلد؛ Steen@stolaf.edu

منابع

American Diploma Project. (2004). *Ready or not: Creating a high school diploma that counts*. Washington, DC: Achieve. Available: www.achieve.org/files/ADPreport 7.pdf

Barton, P.E. (2005). *One third of a nation: Rising dropout rates and declining opportunities*. Princeton, NJ: Educational Testing Service. Available: www.ets. org/Media/Education Topics/pdf/onethird.pdf

Best, J. (2001). *Damned lies and statistics: Untangling numbers from the media, politicians, and activists*. Berkeley: University of California Press.

Best, J. (2007, June). *Beyond calculation: Quantitative literacy and critical thinking about public issues*. Paper Presented at Johnson Foundation Conference on Quantitative Literacy and Its Implications for Teacher Education, Milwaukee, WI.

Bridgeland, J.M., DiIulio, J.J., & Morison, K.B. (2006). *The silent epidemic: Perspectives of high school dropouts*. Washington, DC: Peter D. Hart Research. Available:
www.gatesfoundation.org/nr/downloads/ed/TheSilentEpidemic3-o6FINAL.pdf

Carnevale, A.P., & Desrochers, D.M. (2003). *Standards for what? The economic roots of K-16 reform*. Princeton, NJ: Educational Testing Service. Available:
www.transitionmathproject. org/assets/docs/resources/standards for what.pdf

Committee on Science, Engineering, and Public Policy. (2007). *Rising above the gathering storm: Energizing and emplogying America for a brighter economic future*. Washington, DC: National Academies Press. Available: www.nap.edu/catalog/11463.html

Greene, J.P., & Winters, M. (2005). *Public high school graduation and college readiness rates, 1991-2002*. NewYork: Manhattan Institute for Policy Research. Available: www.manhattan-institute.org/html/ewp 08.htm

Haycock, K. (2007). Kati Haycock's Testimony before the Subcommittee on Labor, HHR, and Education, House Appropriations Committee [Online press release]. Washington, DC: Education Trust. Available: www2.edtrust.org/EdTrust/Press+Room/Haycock+Appropriations+Testimony.htm

Lutsky, N. (2006). Quirks of rhetoric: A quantitative analysis of quantitative reasoning in student writing. *Proceedings of the section on statistical education, American Statistical Association* (pp.2319-2322). Available: www.statlit.org/pdf/2006lutskyASA.pdf

Lutzer, D.J., Maxwell, J. W., & Rodi, S.B. (2007). *CBMS (Conference Board of Mathematical Sciences) 2005: Staistical abstract of undergraduate programs in the mathematical sciences in the United States*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

McCrory, R. (2006, January). Mthematicians and mathematics textbooks for prospective elementary teachers. *Notices of the American Mathematical Society*, 53(1), 20-29. Available: http://meet.educ.msu.edu/documents/McCroryNotices.pdf.

National Center for Education Statistics. (2005a). Table ED4-A. *In America's children: Key national indicators of well-being*. Washington, DC: U.S. Department of Education. Available: www.childstats. gov/pdf/ac2007/ac 07.pdf

National Center for Education Statistics. (2005b). *The nation's report card: Long-term trends*. Washington, DC: Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Available:
http://nces.ed.gov/nationsreportcard/ltt/results2004/nat-math-perf.asp

Noddings, N. (2007, March 20). The new anti-intellectualism in America. *Education Week*, 26(28), 29, 32. Available: www.edweek.org/ew/articles/2007/03/20/28noddings.h26.html?qs=Noddings

Schield, M. (2002). Statistical literacy inventory: *Reading and interpreting tables and graphs involving rates and percentages*. Minneapolis, MN: Augsburg College, W.M. Keck Statistical Literacy Project. Available: http://web://augsburg.edu/~schield/MiloPapers/StatLitKnowledge2r.pdf

Schield, M. (2006, July). *Statistical Literacy Survey analysis*: Reading graphs and tables of rates and percentages. Paper presented at the International Conference on Teaching Statistics, Salvador Bahia, Brazil. Available: www.StatLit. org/pdf/2006SchieldICOTS.pdf

Steen, L.A. (Ed.). (2001). *Mathematics and democracy: The case for quantitative literacy*. Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines, Woodrow Wilson National Fellowship Foundation. Available: www.maa.org/ql/mathanddemocracy.html

Swanson, C.B. (2004). *who graduates? who doesn't? A statistical portrait of public high school graduation, class of 2001*. Washington, DC: Urban Institute. Available: www.urban.org/publications/410934.html

Taylor, C. (2007, June). *Preparing students for the business of the real (and highly quantitative)world*. Paper presented at Johnson Foundation Conference on Quantitative Literacy and Its Implications for Teacher Education, Milwaukee, WI.

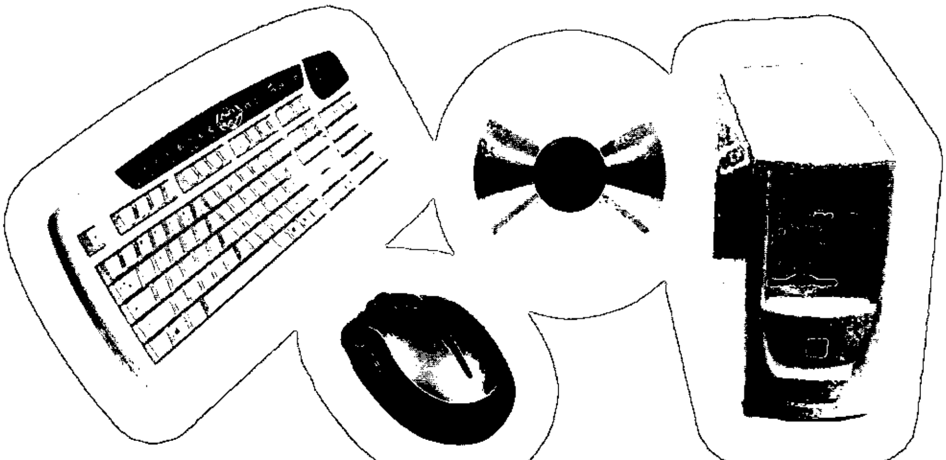
Tucker, A. (2006). *preparing for fractions [Discussion paper]*. Washington, DC: Mathematical Association of America. Available: www.maa.org/pmet/resources/PrepForFractions.pdf

Wu, H. (2005). Chapter 2: Fractions (Draft). Berkeley: University of California-Berkeley. Available: http://math.berkeley.edu/~wu/EMI2a.pdf

Zinth, K. (2006). *Mathematics graduation requirements, classes 2006 through 2011*. Denver, Co: Education Commission of the States. Available: www.ecs.org/clearinghouse/67/07/6707.pdf

بررسی نحوه‌ی استفاده از
ابزار فناوری اطلاعات و ارتباطات (ICT) در هفت کشور دنیا

سیده زهرا ابوالحسنی ـ کارشناس ارشد آموزش ریاضی



در این مقاله، با توجه به ویژگی‌های مختلف کشورها، هفت کشور از جمله ایران، انتخاب شده‌اند تا نحوه‌ی استفاده از فناوری اطلاعات و ارتباطات در آن‌ها، مورد مطالعه قرار گیرد. لازم به توضیح است که برای این مقاله، عمده‌ترین منابع استفاده شده، دو سایت

http://www.ncaction.org.uk

و http://www.iranculture.org

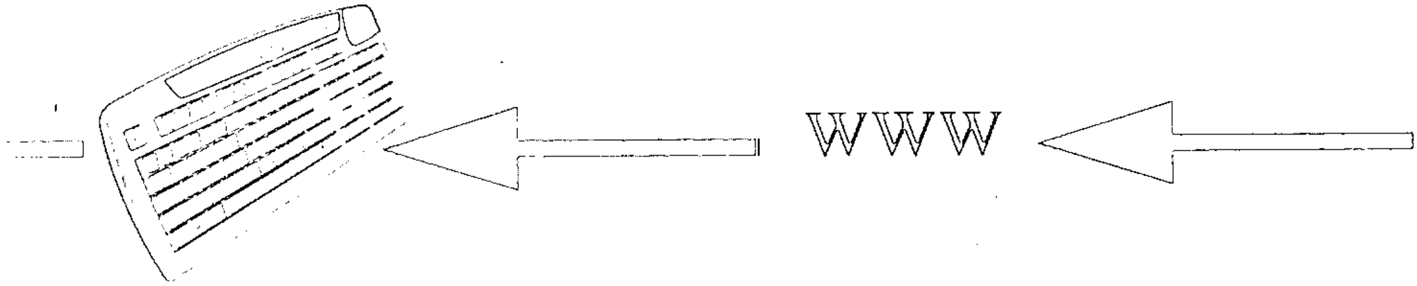
و رفیع پور (۱۳۸۳) بوده است.

کشور انگلستان

براساس گزارش یونسکو، انگلستان به لحاظ رشد اقتصادی، رتبه‌ی خوبی دارد. استفاده از ابزارهای کمک‌آموزشی هم‌چون ماشین حساب و کامپیوتر در کلاس‌های درس ریاضی، طی ده سال گذشته، در این کشور افزایش یافته است.

هم‌چنین کامپیوترها به طور وسیعی در مدارس در دسترس هستند و دانش‌آموزان با چگونگی استفاده از آن‌ها و کاربردهایشان، آشنا شده‌اند. در اواسط دهه‌ی هشتاد در انگلستان، یک بحث جدی در زمینه‌ی تربیت معلمان، چگونگی به‌دست آوردن تکنولوژی جدید توسط معلمان است.

گزارش آفستد در ریاضیات دوره‌ی دبیرستان ICT



(۲۰۰۴) بیان می کند: تفاوت های فراوان غیرقابل قبولی میان مدارس در استفاده از ICT وجود دارد تا یادگیری ریاضیات را افزایش دهد. اکثر معلمان درس ریاضی از ICT به طور مؤثر در خارج از کلاس درس استفاده می کنند تا موادآموزشی را فراهم کنند و اطلاعات را تجزیه و تحلیل کنند. تعداد کمی از آن‌ها هنوز به اندازه‌ی کافی مطمئن نشده‌اند و اعتماد به نفس پیدا نکرده‌اند که حتی استفاده از ICT نیازمند آموزش بیش‌تری می باشد.

اکنون ایده‌های تدریس مناسبی برای آموزش و کاربردهایی از حوزه‌ای از منابع وجود دارد. اما برای هماهنگی و توزیع مواد آموزشی، ایده‌ها و منابع بیش‌تری لازم است.

کشور ایران

در برنامه‌های توسعه‌ای فناوری اطلاعات کشورهای مختلف، از آموزش و آمادگی نیروی انسانی در سطح معلمان، مدیران و دانش‌آموزان به عنوان قلب برنامه یاد شده است. فلذا از اوایل شروع برنامه، وزارت آموزش و پرورش کشور ایران، توجه ویژه‌ای به این امر مبذول داشته و با بررسی و مطالعات گوناگون، اقدام به برنامه‌ریزی و اجرای پروژه‌هایی در زمینه‌ی فناوری اطلاعات کرده است.

رایج‌ترین استاندارد مورد استفاده، استاندارد «گواهی‌نامه‌ی بین‌المللی کاربری رایانه» (ICDL) در دنیاست که شامل هفت مهارت اصلی کاربری رایانه (مفاهیم پایه‌ی فناوری اطلاعات ـ سیستم و پست الکترونیک ـ واژه‌پردازی) می‌باشد.

مطالعات درخصوص توسعه‌ی فناوری اطلاعات و ارتباطات در آموزش و پرورش ایران به دو دسته‌ی مطالعات تطبیقی و مطالعات تحلیلی تقسیم‌بندی می شوند.

از جمله اقدام آموزش و پرورش کشور ایران، طراحی شبکه‌ی رشد آموزش و پرورش می‌باشد که از سال ۱۳۷۸ به طور آزمایشی شروع به کار کرد.

از آن‌جا که در هر مدرسه، سایت رایانه‌ای در حال ایجاد است، نگهداری و پشتیبانی سایت مزبور از جهت سخت‌افزاری و نرم‌افزاری نیازمند وجود افراد متخصص می‌باشد.[1]

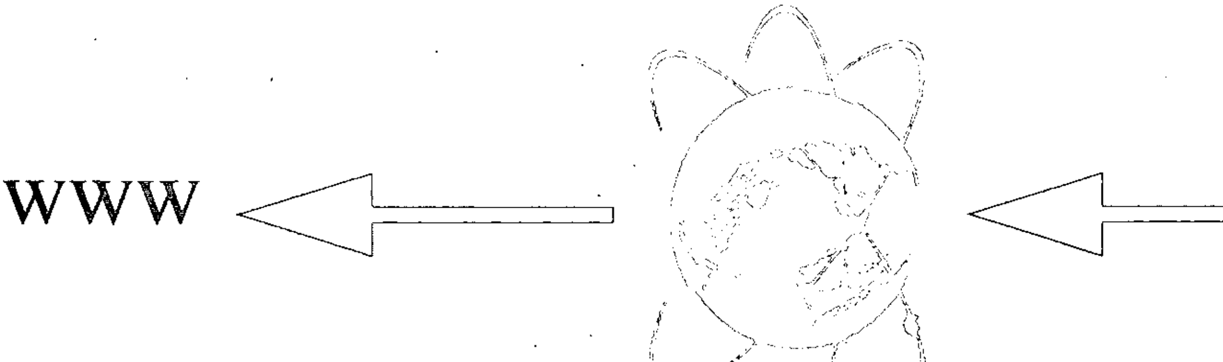
کشور چین

طی چند سال اخیر، نظام آموزش و پرورش چین، در مجموع در زمینه‌های کیفی و کمّی بهبود یافته و به نظام آموزشی با صفات اخلاقی پسندیده اولویت داده شده است؛ ضمن این که نوآوری و خلاقیت در بخش تعلیم و تربیت، بهبود چشم‌گیری داشته و در مجموع ۲۲ منطقه پارک فناوری پیشرفته وابسته به دانشگاه‌ها تأسیس گردیده است که خود، پایگاهی برای نتایج تحقیقات صنعتی به شمار می‌آید. علاوه بر این، کشور چین به راه‌اندازی شبکه‌ی آموزش از راه دور در سراسر کشور مبادرت کرده و ۷۰ درصد از دانشگاه‌ها و دانشکده‌های کشور را به برنامه‌ی آموزشی مناسب و پیشرفته مجهز نموده است. در حال حاضر، تعداد ۶۷ دانشگاه کشور از طریق این شبکه به اجرای برنامه‌ی آموزشی خود مبادرت می‌کنند.

کشور ژاپن

وزارت آموزش و پرورش ژاپن، قالب‌های برنامه‌ی درسی استاندارد را تهیه کرده است و مدارس، برای آموزش اجباری باید یکی از آن‌ها را انتخاب کنند.

در برنامه‌ی درسی جدید، استفاده از کامپیوتر از دوره‌ی ابتدایی شروع می‌شود و در دوره‌ی دبیرستان، در سطح وسیعی به‌کار گرفته می‌شود و از پایه‌ی پنجم به بعد، از ماشین‌حساب در تدریس به طور فزاینده‌ای استفاده می‌شود. براساس سومین مطالعه‌ی بین‌المللی ریاضیات و علوم (تیمز) و مطالعات دیگر، به نظر می‌رسد که دانش‌آموزان ژاپنی از ریاضی بیزار هستند و این طرز تلقی، در بین دانش‌آموزان رشد یافته است و باید برای آن، تدابیری اندیشیده شود. برای استفاده از ماشین‌حساب و کامپیوتر در برنامه‌ی درسی، تأکید زیادی شده



ولی به نظر می‌رسد که به طور مؤثر در کلاس درس از آن‌ها استفاده نمی‌شود و باید در این زمینه، معلمان را بیش‌تر آموزش داد.

استفاده از ماشین حساب از پایه‌ی پنجم به بعد توصیه شده است ولی معلمان به ندرت از آن استفاده می‌کنند و نیز، استفاده از کامپیوتر برای تمام پایه‌ها توصیه شده اما هنوز هم در کلاس‌های درس، خیلی کم از آن استفاده می‌شود.

کشور سنگاپور

نظام آموزشی سنگاپور در مواردی، شبیه ایران است. در سال ۱۹۹۰، در بخش‌های ریاضی برنامه‌ی درسی ارایه شده، بازنگری شد. برنامه‌ی درسی جدید، تأکید بیش‌تری بر مفاهیم ریاضی و توانایی به کار بردن آن‌ها برای حل مسئله‌ی ریاضی دارند و به روش‌های تدریس مؤثر، تأکید شده است. این روش‌ها عبارتند از: توسعه‌ی مفاهیم ریاضی از طریق انجام فعالیت‌های معنی‌دار، استفاده از تفکر ریاضی، ارتباط‌های ریاضی‌وار، حل مسئله‌ی ریاضی و استفاده از تکنولوژی کامپیوتر در تدریس و یادگیری ریاضیات.

وزارت آموزش و پرورش سنگاپور، فهرستی از کتاب‌های درسی و مواد کمک‌آموزشی مناسب را تهیه کرده و در اختیار همه قرار می‌دهد. لازم به توضیح است که کتاب‌های درسی این فهرست، به طور تجاری تهیه می‌شوند.

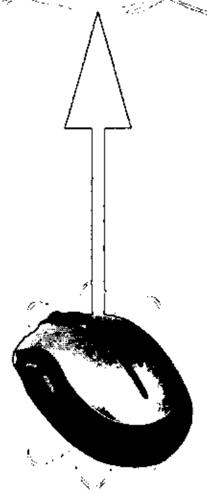
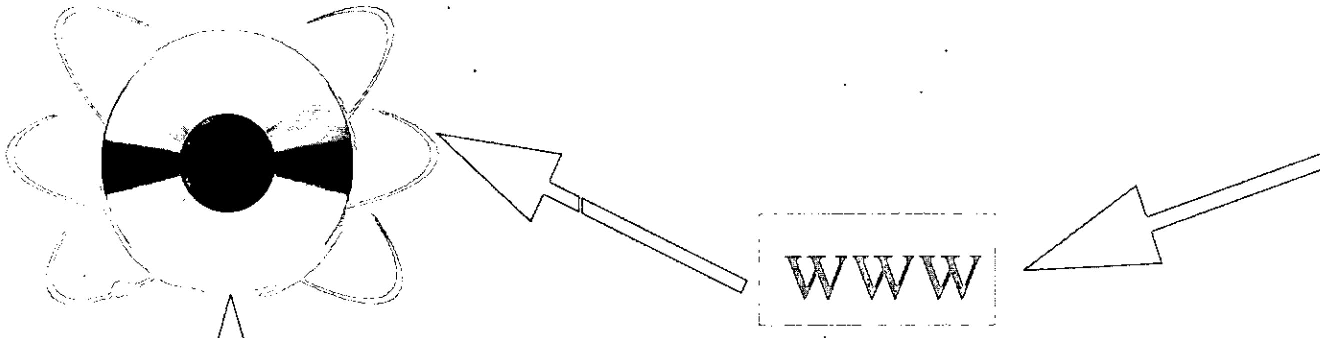
از آن‌جایی که دانش‌آموزان در یادگیری ریاضیات دوست دارند که از یک فرآیند ملموس و عینی به سوی تجرید حرکت کنند، معلمان تشویق می‌شوند که از این روند، برای آموزش آن‌ها استفاده کنند. معلمان برای به‌کار بردن شیوه‌ی فعال در یادگیری دانش‌آموزان و به استفاده از مواد آموزشی، فیلم‌های متنوع و کامپیوتر ترغیب می‌شوند.

کشور کانادا

در کشور کانادا، استفاده از ابزارهای کمک‌آموزشی الکترونیکی از قبیل ماشین حساب و کامپیوتر در کلاس درس ریاضی، طی ۱۰ سال اخیر افزایش یافته است. در سطح مدارس ابتدایی، استفاده از ماشین حساب به طور محسوسی افزایش یافته است، به گونه‌ای که صحت بیش‌تر جواب‌های به‌دست آمده برای مسایل ریاضی، با استفاده از ماشین حساب بررسی می‌شوند. ماشین حساب باعث شده تا مسایل ریاضی واقعی‌تر شوند، چرا که قبلاً سعی می‌شد تا اعداد به گونه‌ای سرراست باشند تا محاسبات، ساده باشند. ولی اکنون با استفاده از ماشین حساب، می‌توان با اعداد غیرمعمولی و واقعی نیز، به راحتی کار کرد. استفاده از ماشین حساب‌های گرافیکی، انقلابی در تدریس و یادگیری نمودار و کاربردهای آن پدید آورده است. در حال حاضر، تأکید برنامه‌ی درسی ریاضی بر حل مسئله و کاربردهای ریاضیات در جهان واقعی و روابط بین رشته‌ای مانند رابطه‌ی ریاضی با سایر علوم است. در راستای این تأکیدها، کتاب‌های درسی نیز تغییر کرده‌اند.

به طور مثال، استفاده از ماشین حساب‌های گرافیکی، باعث یادگیری بهتر در بعضی از اشکال و خواص توابع درجه دوم و درجه سوم و نمودارهای آن‌ها، توسعه‌ی مهارت‌ها در استفاده از این گونه ماشین حساب‌ها و بالا بردن قدرت و کاربرد ماشین حساب‌های گرافیکی می‌گردد. مثلاً دانش‌آموزان در کار گروهی، برای انتقالات نمودارهای درجه دوم از ماشین حساب‌های گرافیکی استفاده می‌کنند به گونه‌ای که ابتدا دانش‌آموزان معادله‌ی $Y = X^2$ را وارد کرده، سپس در مورد نمودار آن بحث می‌کنند. آن‌گاه معلم درباره‌ی تأثیر استفاده از مقادیر مختلف برای مقدار ثابت C در معادله‌ی $Y = X^2 + C$ از آن‌ها سؤال می‌کند و انتظار می‌رود که بتوانند شکل و موقعیت نمودار را به ازای هر C پیش‌بینی کنند.

استفاده از ماشین حساب‌های گرافیکی، دانش‌آموزان را قادر می‌سازد که چندین نمودار را به سرعت ایجاد کنند. این ابزار می‌تواند توجه آن‌ها را بر شکل نمودارها و تأثیر مقدار ثابت C در معادله‌ی $Y = X^2 + C$ متمرکز کند. ماشین حساب‌های گرافیکی به سرعت روی نتایج مقادیر مختلف نقش بازی کرده و دانش‌آموزان را تشویق به امتحان

کردن و پیش‌بینی نتیجه می‌کنند. در مجموع، دانش‌آموزان می‌توانند به طور مستقل، کار کرده و سؤال‌های شخصی‌شان را مطرح کنند.

بسیاری از مدارس، از تکنولوژی جدید در برنامه‌ی درسی استفاده می‌کنند تا بتوانند از برنامه‌های نرم‌افزاری و پایگاه‌های داده‌های بین‌المللی نیز استفاده کنند. برنامه‌ی درسی، بر تدریس مفاهیم بیش از یادگیری طوطی‌وار تأکید دارد. در کانادا، استفاده از ماشین حساب در تمام سطوح توصیه شده است و معلمان برای ارزشیابی آموخته‌های دانش‌آموزان، از آزمون‌های کتبی، پروژه‌های کلاسی و ارزشیابی فردی استفاده می‌کنند.

کشور هلند

در هلند، مطالب آموزشی و کتاب‌های درسی به طور مرتب تغییر می‌کنند و درنتیجه، آموزش ضمن خدمت برای ارتقای کیفیت آموزش لازم است. آموزش ضمن خدمت، صورتی از آموزش می‌باشد که به کارکنان داده می‌شود تا آن‌ها دانش، فهم، مهارت‌ها و تخصص‌های خود را افزایش دهند. این امر به طور مستقیم، مربوط به کار معلم می‌باشد و بر پایه‌ی صلاحیت‌های کسب شده در آموزش‌های اولیه بنا می‌شود. ارائه‌ی رشته‌های آموزش ضمن خدمت براساس تقاضای مدارس، تعیین می‌شود. رشته‌ها مطابق با گروه‌های هدفمند ویژه می‌باشند که این گروه‌ها ممکن است از یک معلم تا یک گروه کوچک معلمان یا همه‌ی معلمان در یک یا چند مدرسه تغییر کنند. شرکت در این آموزش، از طرف خود معلمان یا مسئولان مربوطه، به طور داوطلبی صورت می‌گیرد. آموزش ضمن خدمت، امری بسیار مهم در جمع‌آوری فناوری اطلاعات و ارتباطات (ICT) در دوره‌ی تحصیلی می‌باشد.

نتیجه‌گیری

با توجه به این که هنوز الگوی جامعی برای توسعه‌ی فناوری‌های نوین اطلاعاتی ـ ارتباطی در جهان وجود ندارد، به همین دلیل چارچوب‌ها کاملاً متفاوت است و کشورها براساس امکان‌سنجی‌های مختلف، توسعه‌ی سخت‌افزاری، نرم‌افزاری، تربیت نیروی انسانی و غیره را در اولویت قرار داده‌اند.

پی‌نوشت

1. www.ict-edu.ir

منابع

۱. رفیع‌پور، ابوالفضل (۱۳۸۱). آشنایی با نظام‌های آموزش و پرورش شش کشور دنیا، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، سال بیستم، شماره‌ی ۷۰، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۲. جلالی، علی‌اکبر و امام‌جمعه، طیبه (۱۳۸۳). مطالعه‌ی تطبیقی تلفیق فناوری اطلاعات و ارتباطات در برنامه‌ی درسی دوره‌ی آموزش عمومی آموزش و پرورش کشورهای سنگاپور، کره‌ی جنوبی، استرالیا، فنلاند، انگلستان و ایران به منظور ارایه‌ی الگوی مناسب برای ایران، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

3. Ofsted report: ICT in Schools 2004 (HMI 2050) http://www.ofsted.gov.uk/publications/index.cfm?fuseaction=pubs.summary&id=3652

4. http://www.ncaction.org.uk

5. http://www.iranculture.org

هندسه‌ی پویا

هنر در کلاس درس ریاضی

مارا آلاجیک، دیانا پِلِنز، دانشگاه ایالتی ویکیتا

ترجمه: **نرگس عصارزادگان**، دبیر ریاضی اصفهان

زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

در این مقاله، به روش‌هایی برای پرورش درک تجسم هندسی، با تمرکز بر تجسم ریاضیِ اشیای هندسی دوبعدی در محیط هندسه‌ی پویا، اشاره شده است. به علاوه، تلاش شده است با بیان فعالیت‌های هندسه‌ی پویا/ فعالیت‌های هنری به عنوان هسته‌ی مرکزی درک تبدیل‌های هندسی، بین هندسه و هنر پلی زده شود.

مقدمه

آرکاوی[1] پیشنهاد می‌کند که «تجسم[2] عبارت است از توانایی، فرایند و محصول خلاقیت، تفسیر، استفاده از تصویرها، شکل‌ها، نمودارها، و بازتاب بر آن‌ها، در ذهن ما، بر روی کاغذ یا توسط ابزارهای فنّاورانه، با هدف مجسم کردن و مرتبط کردن اطلاعات، اندیشیدن درباره‌ی ایده‌های ناشناخته‌ی پیشین و توسعه‌ی آن‌ها و ارتقای ادراک» (۳، ص۵۶). چگونه تعریف آرکاوی درباره‌ی تجسم، به بیان هنری مرتبط می‌شود؟ تجسم هم فرایند خلاقیت، تولید و ساخت تصویرها، نمودارها، شکل‌ها، شمایل‌ها، حتی نمادها می‌باشد و هم محصول آن‌ها؛ برای بازنمایی آگاهی ما از چیزهایی که به درک و فهم وابسته هستند و هم برای بازنمایی آن درک و فهم. هم ریاضیات و هم هنر، زبان، ساختار و شیوه‌ی بیان خود را دارند؛ ریاضیات مانند هنر، برای پیشرفت خلاقیت و ادراک شهودی، به مهارت‌های حل مسئله‌ی خلاق و به‌کارگیری مهارت‌های رسمی و غیر رسمی نیاز دارد. پرورش مهارت جهت گزینش ابزارها، رسانه‌ها و رویکردهای مناسب، برای کارآموزان هنر و ریاضی در زمینه‌های خودشان، مشترک هستند.

کاکس و برنا[3] [۵] نشان داده‌اند یادگیری ایده‌های پیچیده‌ی جدید در ایجاد ارتباط درونی/ عملکرد ماهرانه برای بازنمایی‌های[4] دیداری گوناگون از جمله نمودارها و پویانمایی‌ها به افراد کمک می‌کند. اگر یادگیرنده بتواند اطلاعات حاصل از بازنمایی‌های مربوط به قالب‌های گوناگون را تلفیق کند، آن‌گاه اغلب به درک عمیق‌تری از مفهوم دست می‌یابد. از سوی دیگر، اگر یادگیرنده در ایجاد ارتباط بین انواع مختلف اطلاعات شکست بخورد، آن‌گاه ممکن است بسیاری از سودمندی‌های ناشی از بازنمایی‌های تلفیقی[5] حاصل نشود [۸]. به‌علاوه، بازنمایی‌های تلفیقی برای مفاهیم معین، به انعطاف‌پذیری بیش‌تر تفکرات دانش‌آموز، پیوند خورده‌اند (اولسون[6] [۱۱] نقل شده در [۹]) و تجسم، جایگاه ویژه‌ای در کسب بازنمایی‌های

دقیق دارد.

در این نوشتار، چند نمونه از مثال‌های عملی برای پرورش ادراک تجسم هندسی، به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند که هم به عنوان ابزاری برای ادراک فرایندهای ریاضی خاص و هم برای توسعه‌ی بیان هنری افراد، می‌باشند.

سطوح ون‌هیله درباره‌ی تفکر هندسی

همان‌گونه که پیاژه و اینهلدر[7] [۱۲] بیان داشتند، پیشرفت ادراک انواع هندسه (مثل توپولوژی، تصویری، اقلیدسی) ترتیبی است، پژوهشگران دیگر بر این باورند که پیشرفت همه‌ی انواع تفکر هندسی به طور پیوسته در طول زمان، توسعه یافته و به طور فزاینده‌ای با یکدیگر تلفیق می‌شوند. مراحل پیشرفت بیان شده توسط پیاژه و اینهلدر مشابه هستند. آن‌ها توانایی رو به رشد طبیعی کودک برای دریافت و نمایش پیچیدگی‌های هندسی را در دنیای سه‌بعدی پیرامون ما شرح می‌دهند. مجموعه‌ی مراحل بیان شده توسط پیاژه و اینهلدر، به اهمیت درک ارتباط‌های بین اشیاء و یافتن روش‌هایی جهت نمایش این ارتباط‌ها از طریق تکنیک‌های رسم «نمای سه‌بعدی»[8] تأکید دارند.

در اصل، ون‌هیله[9] پنج سطح داشت[10] که توسط پژوهشگران مختلف به کار برده شده و دوباره نام‌گذاری شدند؛ اما اکنون سطوح ون‌هیله روی سه سطح تمرکز دارد که آموزش مدرسه‌ای، بیش‌تر آن‌ها را پوشش می‌دهد. تجسم با «تفکر غیرکلامی» آغاز می‌شود. شکل‌ها توسط ظاهرشان سنجیده می‌شوند و عموماً به جای اجزای جدا از هم، به عنوان یک «کل» دیده می‌شوند. در سطح تجزیه و تحلیل[11]، دانش‌آموزان می‌توانند اجزا را تشخیص بدهند و ویژگی‌های شکل‌ها را شرح دهند. برای مثال، یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌تواند به دلیل داشتن سه ضلع مساوی، زوایای مساوی و تقارن‌هایش، از سایر مثلث‌ها تمیز داده شود. دانش‌آموزان نیاز دارند که زبان مناسبی را برای گام برداشتن به سوی مفاهیم تازه بیاموزند. به هرحال، در این مرحله، ویژگی‌ها «به طور منطقی مرتب نمی‌شوند»، به این معنا که دانش‌آموزان ارتباط‌های اساسی بین ویژگی‌ها را درک نمی‌کنند. در سطح استنتاج[12] غیررسمی، ویژگی‌های شکل به طور منطقی مرتب می‌شوند. دانش‌آموزان می‌توانند ببینند یک ویژگی بر دیگری تقدم دارد یا بعد از دیگری می‌آید، بنابراین می‌توانند یک ویژگی را از دیگری نتیجه بگیرند. آن‌ها می‌توانند آن‌چه را که تاکنون می‌دانستند، برای شرح ارتباط‌هایی بین شکل‌ها و صورت‌بندی تعریف‌ها به کار گیرند. به طور مثال، آن‌ها می‌توانند توضیح دهند که چرا همه‌ی مربع‌ها مستطیل هستند. اگرچه استنتاج غیررسمی مبنای استنتاج رسمی است، اما نقش اصول موضوع، تعریف‌ها، قضیه‌ها و عکس قضیه‌ها درک نمی‌شود. دانش‌آموزان می‌توانند ارتباط‌های درونی بین شکل‌ها را مشاهده کنند و ارتباط‌ها را از طریق شکل‌ها نتیجه بگیرند. اثبات‌های ساده می‌تواند جریان یابد اما به طور کامل درک نمی‌شود. دانش‌آموزان در سطح استنتاج، معنای استنتاج و نقش فرضیه‌ها، قضیه‌ها، و برهان‌ها را می‌فهمند. آن‌ها می‌توانند برهان‌ها را با فهم و درک بنویسند. دانش‌آموزان می‌فهمند چگونه در یک نظام اصل موضوعی کار کنند و استنتاج‌های انتزاعی بسازند. دانش‌آموزان می‌توانند هندسه‌ی نااقلیدسی را در بالاترین سطح یعنی سطح دقت[13] بفهمند ([۷] و [۸]).

این مراحل یادگیری، در ایجاد چارچوبی برای آموزشی که هدف آن توسعه‌ی فهم و درک مطالب یا مهارت‌هایی است که باید آموخته شود، مهم هستند [۴]. ایده‌ی اصلی این است که یک یادگیرنده نمی‌تواند بدون گذراندن سطوح قبلی، به سطح استدلال[14] برسد. گذراندن سطوح قبلی یعنی دست‌یابی به درک عمیق‌تر مفاهیم و ارتباط‌هایی که به آن سطح استدلال مرتبط می‌شوند.

وقتی شخصی با نظم جدیدی از تفکر، برای به‌کارگیری عملیات معینی روی موضوع‌های جدید توانمند می‌شود، می‌توانید بگویید به سطح بالاتری از تفکر رسیده است. دست‌یابی به سطح جدید نمی‌تواند متأثر از تدریس باشد، اما هنوز معلم می‌تواند با انتخاب خوبی از تمرین‌ها، موقعیت مطلوبی برای دانش‌آموز بیافریند تا او به سطح بالاتری از تفکر دست یابد [۳۷، ص۳۹].

تجسم با هندسه‌ی پویا

وقتی دانش‌آموزان درک مفهومی خود را از ایده‌های ریاضی می‌سازند، کشف آن ایده‌ها توسط بازنمایی‌های گوناگون بسیار مهم است و توسط بسیاری از نویسندگان، مورد مطالعه قرار گرفته است ([۸] و [۶]). دمانا و ویتس[15] تأکید می‌کنند که «توانایی دانش‌آموزان برای عمل کردن بین بازنمایی‌های گوناگون یک مفهوم و درون یک بازنمایی موقعیت یا مسئله، برای

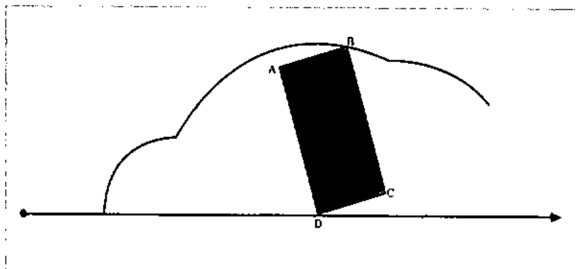
به‌کارگیری اثربخش فناوری جهت ارتقای یادگیری ریاضی، اساسی است» [۶، ص۲۱۸]. شولتز و واترز[۱۶] [۱۴] ملاحظات دقیقی را برای انتخاب بازنمایی‌هایی که یادگیری دانش‌آموزان را تسهیل می‌کنند، توصیه کرده‌اند. بازنمایی‌های دیداری در فعالیت‌های غنی شده توسط فناوری، دست کم به سه روش، از ارتباط‌های ریاضی‌وار حمایت می‌کنند:

(الف) پیوند بازنمایی‌های چندگانه‌ی یک ایده‌ی ریاضی و ارتقای زمینه برای تجرید بازتابی؛

(ب) ایجاد ارتباط درونی بین موضوع‌های ریاضی؛

(پ) مرتبط کردن ریاضی با پدیده‌های دنیای ـ واقعی.

استفاده‌ی متناسب فناوری، حامی یادگیرنده‌ها ـ هم معلم و هم دانش‌آموز، برای نزدیک کردن بازنمایی‌های چندگانه با هم از طریق بازنمایی‌های واسط و روشن کردن ارتباط‌هایی است که



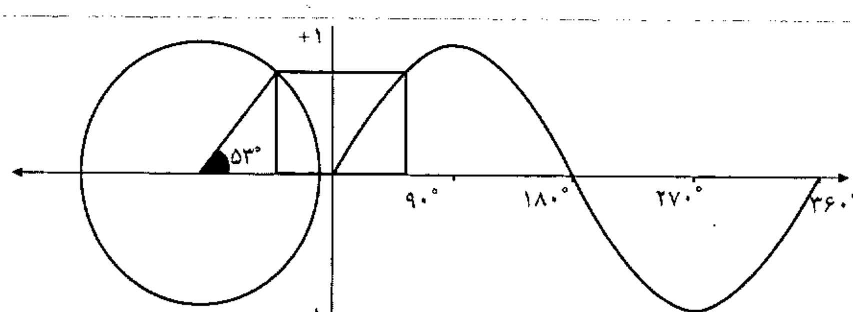
شکل ۱. غلتیدن مستطیل ردیاب

بین بازنمایی‌های مختلف پدیده‌های ریاضی وجود دارد.

یک راه‌حل دیداری برای یک مسئله می‌تواند دانش‌آموزان را با مفاهیمی درگیر کند که به آسانی، «توسط راه‌حل‌های نمادین مسئله نادیده گرفته می‌شوند» و می‌تواند از بازنمایی‌های هندسی برای کمک به فرایندهایی استفاده کند که به نظر، کاملاً نمادین می‌آیند» [۳، ص۶۲]. برای مثال، می‌توان دستگاه معادلات دومتغیری را بدون ایجاد ارتباط با بازنمایی هندسی آن موقعیت، به طور نمادین و تنها به عنوان روابط دو خط در صفحه، مطالعه کرد ([۱]).

جابه‌جا کردن/ پویانمایی[۱۷] یک شکل هندسی روی صفحه‌ی نمایش کامپیوتر، رفتار پویای برنامه‌های هندسی مانند اسکچ‌پَد[۱۸]، کابری و سیندرلا را نمایش می‌دهد. این قابلیت، به طور چشم‌گیری، کیفیت و اثرات تجربه‌های هندسی را تغییر داده است. افزون بر این، فرصت‌های گسترده‌ای را برای یادگیرندگان فراهم کرده تا اشیاء را به راه‌های جدید کیفی، آزمایش، کشف و تجسم کنند. یک ترسیم در یکی از این رسانه‌ها، نه مثل روی یک تکه کاغذ یا یک تخته‌ی گچی، منبعی برای تجربه کردن با تنوعی از مثال‌ها ایجاد می‌کند که دست‌یابی به مجموعه‌ای از بازنمایی‌ها را برای مطالعات بعدی فراهم می‌نماید. این یادگیری تجسم به طور متفاوت، مستلزم این است که یادگیرندگان متفاوت فکر کنند. تغییر در راهبردهای آموزشی یک الزام است، به ویژه اگر آموزش معلمان به طور سنتی بوده و فرصت‌هایی برای رساندن معلمان به «سرعت» یک کلاس درس هندسه‌ی پویا فراهم نشده باشد.

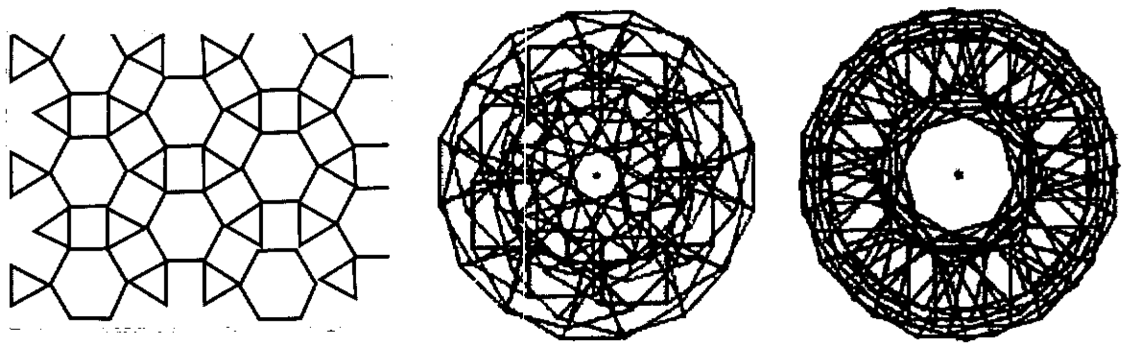
برخلاف تصاویر رسم شده با دست و با استفاده از خط‌کش و پرگار، شکل‌های هندسه‌ی پویا با جابه‌جا کردن ویژگی‌های گوناگون قابل دست‌ورزی هستند. شخص می‌تواند متعاقباً، با تولید مقدار زیادی داده و تجزیه و تحلیل آن‌ها، تغییرناپذیری را مشاهده کند [۱۳]. ابزارهای هندسه‌ی پویا دانش‌آموزان را درگیر یادگیری فعال در هندسه می‌کنند. با افزایش توانایی ما برای تجسم و استدلال کردن با استفاده از نمودارها، حل مسئله، طرح سؤال، تولید حدسیه‌ها، جست‌وجو برای دیدن ارتباط‌ها و درنظر گرفتن مثال‌های نقض یا برهان‌های استنتاجی رسمیِ ما نیز تقویت می‌شود. در هر یک از این قالب‌ها، هندسه‌ی پویا باعث یک تغییر مهم می‌شود. ما می‌توانیم بازنمایی‌های درونی و تبدیل‌های هندسی خودمان را قابل مشاهده‌تر کرده و هر زمان



شکل۲. توصیفی از تجسم متحرک تابع سینوس

که لازم بود، آن‌ها را پالایش کنیم.

یک لوله‌ی شکل‌نما[21] می‌تواند به عنوان دو آینه با یک زاویه‌ی $\frac{\pi}{3}$ یا $\frac{\pi}{4}$ نسبت به هم تجسم شود. وقتی یک شیء بین آینه‌ها قرار می‌گیرد، ۶ یا ۸ بار منعکس می‌شود (بستگی به زاویه دارد). یک بازنمایی هندسه‌ی پویا از این نوع در اسکچ‌پد هندسه، می‌تواند طرح‌های جالبی تولید کرده و درک بهتری از چگونگی تولید این تصاویر خیره‌کننده توسط لوله‌ی شکل‌نما پیدا کند.



شکل ۳. تبدیل‌های هندسی: کاشی‌کاری و لوله‌های شکل‌نما

توصیه‌های آموزشی[22]

ابزارهای فناورانه‌ی در دسترس برای پرورش تجسم، هم برنامه‌های درسی و هم فرصت‌های پداگوژی را وسیع‌تر می‌کنند هندسه‌ای که از طریق هنر هندسی کشف می‌شود، هم انگیزه‌بخش است و هم به زندگی واقعی پیوند خورده است. هندسه‌ی پویا برای پیشرفت دانش‌آموزان، بازنمایی‌های درونی و بیرونی را هم در هندسه و هم در بیان هنری عرضه می‌کند. همان‌طور که یادآوری شد، به موازاتی که فناوری توسعه می‌یابد، استفاده از آن در کلاس درس، فرصت‌ها و چالش‌های عمده‌ای ایجاد می‌کند. هم‌زمان با راه‌های جدید ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان و ارایه‌ی دامنه‌ی وسیع‌تری از تجربه‌ها در چارچوب زمانی کوتاه‌تر، دام‌ها و بدفهمی‌های جدید بسیاری نیز برای دانش‌آموزان ایجاد می‌شود ([۱۰]، [۱۳]، [۱]). نه تنها لازم است که معلمان به طور پیوسته، از آن‌چه دانش‌آموزان به طور واقعی در هندسه‌ی پویا می‌بینند آگاه باشند، چیزهایی که شاید از آن‌چه که معلمان انتظار داشتند کاملاً متفاوت باشد، بلکه چگونگی تدریس و سؤال‌های آن‌ها نیز لازم است تغییر یابند [۳]. برای مثال، پس از رسم سه میانه‌ی یک مثلث، شاید از دانش‌آموزی که با کاغذ ـ مداد کار می‌کند، خواسته شود آن‌چه را که مشاهده می‌کند توصیف نماید، و تمرین را برای مثلث دیگری تکرار کند، در حالی که از دانش‌آموزی که با هندسه‌ی پویا کار می‌کند، می‌توان خواست که مثلث اصلی را دست‌کاری کند و تغییرات را در مثلثی که ترسیم کرده مشاهده کند. ممکن است که ترسیم، تغییر را به گونه‌ای که معلم انتظار داشته، تأئید نکند. هم‌چنین، امکان‌های جدیدی برای بررسی ایجاد می‌شوند، مثل دستور «تجزیه‌ی نقاط» که ممکن است دانش‌آموز پیشرفته‌تر در حین آزمایش کردن، کشف کند که به چند راه مختلف، از یک نقطه در ترسیم استفاده شده است.

پی‌نوشت

1. Arcavi
2. Visualization
3. Cox & Brna
4. Representations
5. Multiple Representations
6. Ohlsson
7. Inhelder
8. Perspective
9. Van Hiele

۱۰. برای اطلاع بیش‌تر، مقاله‌ی «یادگیری اکتشافی هندسه با استفاده از ابزار هندسه‌ی پویا براساس سطوح ون هیله» را که در شماره‌ی ۹۲ مجله‌ی رشد آموزش ریاضی به چاپ رسیده است، بنگرید. م.

11. Analyze
12. Deductive
13. Rigor
14. Reasoning
15. Demana & Waits
16. Schultz & Waters
17. Dragging/ Animating

Technology in Mathematics Teaching, Proceedings of ICTMT5 in Klogenfurt 2001. Schniftenreiche Didactik Der Mathematik Band 25 (pp. 17-32). Vienna: öbv & hpt.

[8] Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. Phi Dalta Kappan, 78(5), 361-367.

[9] Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning and teaching. Review of Educational Research, 60(1), 1-64.

[10] National Research Council (2000). How people learn: Brain, kind, experience, and school Washington, DC: National Academy Press.

[11] Ohlsson, S. (1987). Sense and reference in the design of interactive illustrations for rational numbers. In R. W. Lawler & Masoud Yazdani (Eds.), Artificiol intelligence and education (pp. 307-344). Norwood, NJ: Ablex.

[12] Piaget, J., & Inhelder, B. (1967), The Child's Conception of Space. New York: Norton.

[13] Schattschneider, D., & King J. (1997). Preface of geometry turned on: Dynamic software in learning, teaching, and research. Washington, DC: Mathematical Association of America. Retrieved March 26, 2004 from http://mathforum.org/dynamic/geometry_turned on/ about/Preface.html

[14] Schultz, J. E., & Waters, M. S. (2000). Why Representations? Mathematics Teacher, 93(6), 448-454.

[15] Smith, D. A. (2002). How people learn mathematics. In Proceedings of International Confernce on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level), Hersonissos, Greece. (ERIC Document Reproduction Service no. ED 472 053).

[16] Shaffer, D. W. (1995). Symmetoic Intuitions: Dynamic Geometry/ Dynamic Art. Symmetry: Culnure and Science, 6(3), 476-479.

[17] Van Hiele, P. (1986). Structure and Insight: A theory of mathematics education. Oriando, FL: Academic Press, Inc.

[18] Van Hiele, P. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play: Teaching children mathematics. In L. J. Sheffield (Ed.), Developing Mathematically Promising Students (pp. 310-316). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

18. Sketch Pad
19. Cabri
20. Cinderella
21. Kaliedoscope
22. Pedagogical Implications
23. Split Points

منبع اصلی که ترجمه شده است

Alagic, M. & Palenz, D. (2005). Dynamic Geometry, Art in Mathematics Classroom. Paper Presented to the "Bridges for Teachers, Teachers for Bridges" Conference, Wichita State University.

منابع استفاده شده در مقاله‌ی اصلی

[1] Alagic, M. (2004). Fostering understanding of mathematics visualization. In M. Alagic & R. Sarhangi (Eds.), Bridgec for teachers, teacher, for bridges: 2004 workshop book (pp.1-17). Bel Air, MD: Academx Publishing Services.

[2] Alagic, M. (2003). Technology in the mathematics classroom: Conceptual onentation. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching (JCMST), 22(4), 381-399.

[3] Arcavi, A. (1999). The role of visual representatioins in the learning of mathematics. In Proceedings of the Annual Meeting of the North Amecican Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Morelos, Mexico. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 466382).

[4] Bruner, J. (1973). Going beyond the information given. New Yodc Norton.

[5] Cox, R., & Brna, P. (1995). Supporting the use of external representations in problem solving: The need for flexible learning environments. International Journal of Artificial Inelligence in Education, 6(2), 239-302.

[6] Demana, F., & Waits, B. K. (1990). Enhancing mathematics teaching and learning through technology. In T. J. Cooney & C. R. Hirsch (Eds.), Teaching and learning mathematics in the 1990s, 1990 yearbook of the national council of teachers of mathematics (pp. 212-222). Reston, VA: National council of Teachers of Mathematics.

[7] Dreyfus, T. (2002). Computer-rich learning environments and the construction of abstract algebraic concepts. In Borovcnik, M., & Kautschitsch, H. (Eds.)

توابع زیبا در فرش‌های زیبا!

قاسم حسین قنبری، دبیر ریاضی دبیرستان شریعتی سمنان
پری دانشگر، دبیر طراحی هنرستان‌های سمنان

چکیده

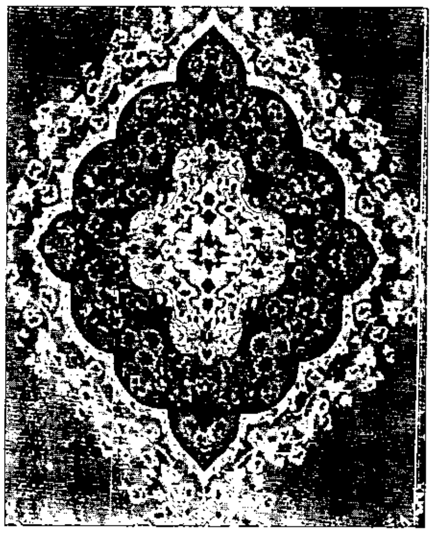
در این مقاله، تابعی ارائه می‌شود که با کمک آن، نقوش فرش طراحی می‌شود. این تابع به صورت قطبی یا پارامتری می‌باشد و نمودار آن، یک ترنج است و در ترکیب با سایر توابع ریاضی، نقوش مختلف فرش را ایجاد می‌کند.

مقدمه

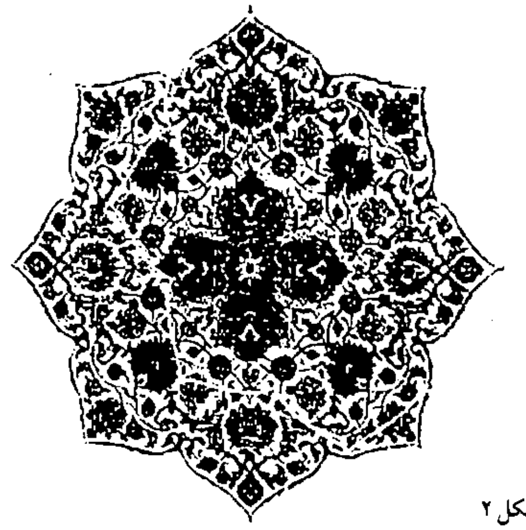
اغلب در کلاس‌های درس، با این سؤال از طرف دانش‌آموزان مواجه هستیم که سهم ما از ریاضی چیست؟ و ما، به عنوان یک ملت متمدن، در به‌وجود آوردن این فرهنگ عظیم چه نقشی داشته‌ایم؟

یکی از جواب‌های معمول این است که «خوارزمی، خیام، بیرونی و...، ریاضی‌دانان بزرگ ایران بوده‌اند و جبر و مقابله، مثلثات و... از کارهای ایشان است.» بعید است که چنین جواب‌هایی فرد را راضی کند. علت آن شاید کلی بودن جواب و یا تفاوت زبان ریاضی خیام و خوارزمی با زبان ریاضی امروز است. در این راستا، مقاله‌ی حاضر قصد دارد نقوش فرش‌های ایرانی را با زبان ریاضی امروز تحلیل کند، با این هدف که نشان دهد فرش ایرانی جلوه‌ای از فرهنگ ریاضی این مرز و بوم است و اجداد ما چگونه از ریاضی استفاده می‌کردند و به عبارتی، کاربرد ریاضی در چه سطحی انجام می‌گرفته است. تلاش در جهت پاسخ به این گونه سؤال‌ها نیز در حیطه‌ی مسئله‌های آموزشی است.

در طرح هر فرش، مثل هر طرح دیگر، دو نوع منحنی می‌توان درنظر گرفت: منحنی‌های بسته و منحنی‌های باز. به منحنی‌های بسته معمولاً ترنج گفته می‌شود و در مرکز اکثر فرش‌ها به شکل‌های مختلف وجود دارد. نمونه‌هایی از آن‌ها را در شکل‌های ۱ و ۲ می‌بینید.



شکل ۱

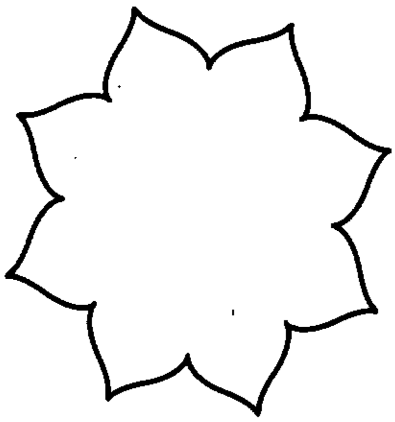


شکل ۲

البته منظور از ترنج فقط منحنی دور شکل است. اما چگونه می‌توان با کمک خط‌کش و پرگار یک ترنج رسم کرد؟

فرض کنید می‌خواهیم ترنجی با ۸ گل‌برگ رسم کنیم. به این منظور، دو دایره‌ی هم‌مرکز رسم کرده و روی دایره‌ی کوچک‌تر، هشت نقطه‌ی A_1 ، A_2 ، ... ، A_8 را با فاصله‌های مساوی در نظر می‌گیریم. سپس روی دایره‌ی بزرگ‌تر، هشت نقطه‌ی B_1 ، B_2 ، ... ، B_8 را با فاصله‌های مساوی درنظر گرفته طوری که B_1 روی نیمساز $A_1\hat{O}A_2$ ، B_2 روی نیمساز $A_2\hat{O}A_3$ و... قرار بگیرد. حال نقطه‌ی A_1 را به نقطه B_1 و نقطه B_1 را دوباره به نقطه‌ی A_2 وصل کرده و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. با توجه به نحوه‌ی وصل کردن این نقاط به هم، شکل‌های مختلفی ایجاد می‌شود که در شکل۲، سه نمونه نشان داده شده است.

از بین انواع مختلف ترنج، نوع۳ (در شکل۳) از همه مهم‌تر است و کار ما روی آن بنا شده است. حال یکی از این شکل‌ها را به طور مجزا، یعنی بدون دایره‌ها درنظر می‌گیریم (شکل۴). سؤال این است که آیا تابعی وجود دارد که بتواند این شکل را رسم کند؟

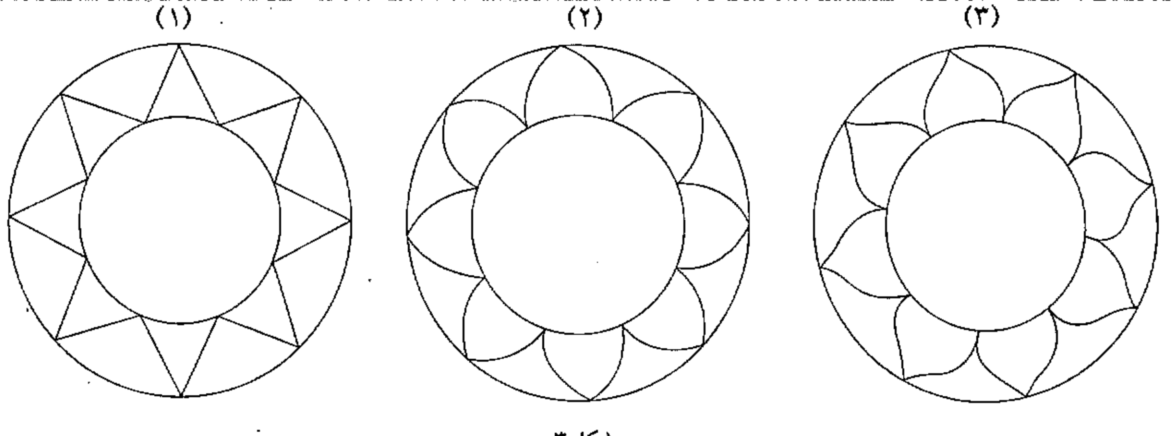


شکل ۴

البته در مختصات دکارتی، چنین امری ممکن نیست. با توجه به تقارن مرکزی و نوع شکل، مختصات قطبی را برای پیدا کردن تابع انتخاب می‌کنیم. در [۱] ما چنین تابعی را ارائه کردیم. خاطرنشان می‌شود که رسم نمودار در مختصات قطبی، کار مشکلی است و ما از نرم‌افزار متمتیکا[1] [۲] برای این کار کمک گرفتیم. ضابطه‌ی این تابع، که آن را T می‌نامیم، به صورت زیر است:

$$T_{(k,r)}(x) = r + \mathrm{Arcsin}\left(2\left(\left|\frac{k}{\pi}x - 2\left[\!\left[\left(\frac{k}{\pi}x+1\right)/2\right]\!\right]\right| - 1/2\right)\right)$$

در تابع T، k تعداد گلبرگ‌ها و r شعاع دایره‌ای است که منحنی حول آن رسم شده است. به عنوان مثال، برای $k = 8$ و $r = 8$ ، تابع T شکل(۴) را رسم می‌کند.

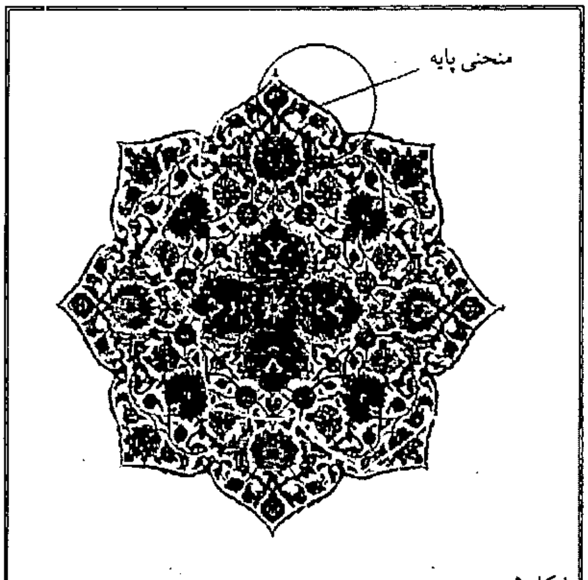


شکل ۳

اما سؤال جالب این است که چگونه ضابطه‌ی تابع T به‌دست آمده است؟

برای یافتن این تابع، ترنج شکل ۲ را مبنا قرار می‌دهیم. با نگاهی دقیق به آن درمی‌یابیم که این شکل با کمک یک منحنی پایه و چند تقارن روی آن به‌وجود آمده است. با توجه به مشخصات آن، آشناترین تابعی که این ویژگی را داشته باشد، تابع $y = \mathrm{Arcsin}(x)$ است.

با توجه به فاصله‌ی شکل از مرکز و اطلاعاتی که در مورد توابع قطبی داریم، ضابطه‌ی این تابع باید به صورت $f(x) = R + \mathrm{Arcsin}(g(x))$ باشد که R عددی ثابت است و شعاع دایره‌ای را مشخص می‌کند که شکل، حول آن رسم شده است. $g(x)$ نیز باید تابعی باشد که برد آن در بازه‌ی [۱و۱-]

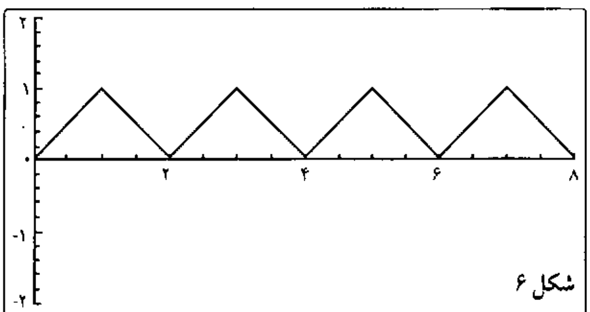


شکل ۵

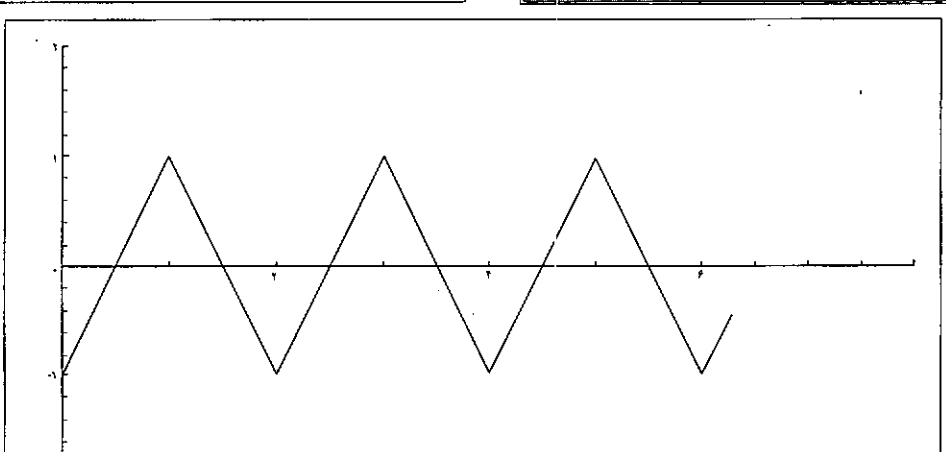
قرار بگیرد، زیرا می‌دانیم برد تابع $y = \mathrm{Arcsin}(x)$، بازه‌ی [۱و۱-] است. علاوه بر همه‌ی این موارد، تابع g باید متناوب هم باشد. به عنوان نمونه، تابع $g(x) = \left|x - 2\left[\frac{x+1}{2}\right]\right|$ را درنظر گرفته، نمودار آن را رسم می‌کنیم تا شکلی مانند شکل (۶) به‌دست آید.

یکی از مشکلات این تابع این است که برد آن، بازه‌ی [۱و۱-] را کامل نمی‌پوشاند. به این منظور، تابع را نیم واحد به پایین منتقل کرده، سپس در ۲ ضرب می‌کنیم، یعنی به تابع $g(x) = 2\left(\left|x - 2\left[\frac{x+1}{2}\right]\right| - \frac{1}{2}\right)$ می‌رسیم که نمودار آن در شکل (۷) نشان داده شده است.

حال اگر نمودار $f(x) = R + \mathrm{Arcsin}(g(x))$ را به ازای $R = 4$ رسم کنیم، شکل آن چیزی نیست که می‌خواستیم (شکل۸)، از جمله این که شکل بسته نیست و تعداد گل‌برگ‌ها هم کافی نیستند! تعداد گل‌برگ‌ها را می‌توان با ضریبی که به x می‌دهیم، افزایش دهیم یعنی تابع را به صورت $g(x) = 2\left(\left|ax - 2\left[\frac{ax+1}{2}\right]\right| - \frac{1}{2}\right)$ درنظر می‌گیریم که در آن

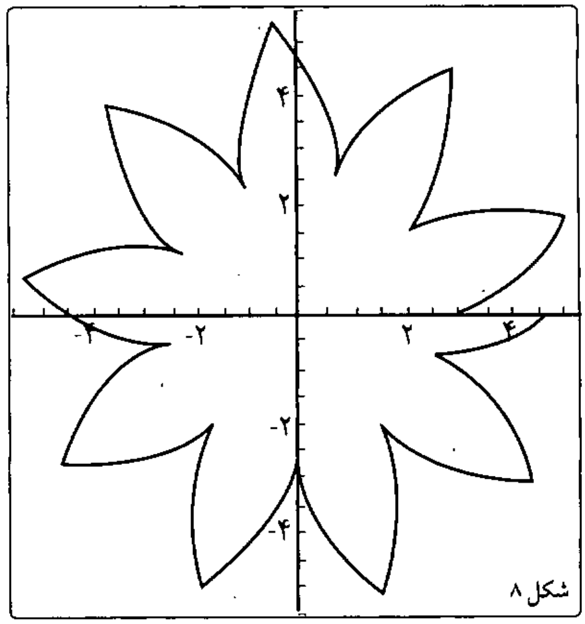


شکل ۶



شکل ۷

صورت، با $a = 3$ شکل (۸) را خواهیم داشت.



شکل ۸

لذا مشکل اصلی، بسته بودن نمودار است که برای آن راه‌حل زیر را داریم:

اگر $\frac{1}{a} \le 0$ آن‌گاه $a > 0$, $0 \le ax < 1$ و درنتیجه

$$1 \le ax + 1 < 2$$

و از آن‌جا

$$\frac{1}{2} \le (ax+1)/2 < 1$$

و از آن داریم

$$\left[\frac{ax+1}{2}\right] = 0$$

پس

$$0 \le ax - 2\left[\frac{ax+1}{2}\right] \le 1$$

هم‌چنین

$$-\frac{1}{2} \le (ax - 2\left[\frac{ax+1}{2}\right] - \frac{1}{2}) \le \frac{1}{2}$$

و $$-1 \le 2(ax - 2\left[\frac{ax+1}{2}\right] - \frac{1}{2}) \le 1$$

از مطالب بالا نتیجه می‌گیریم که اگر $0 \le x < \frac{1}{a}$ آن‌گاه

$$-1 \le 2(ax - 2\left[\frac{ax+1}{2}\right] - \frac{1}{2}) \le 1 .$$

پس با تغییر x در هر یک از این فاصله‌ها، یک نیم گل‌برگ به‌وجود می‌آید و با تغییر x در فاصله‌ی $\left[0, \frac{2}{a}\right]$، یک گل‌برگ کامل ترسیم می‌شود.

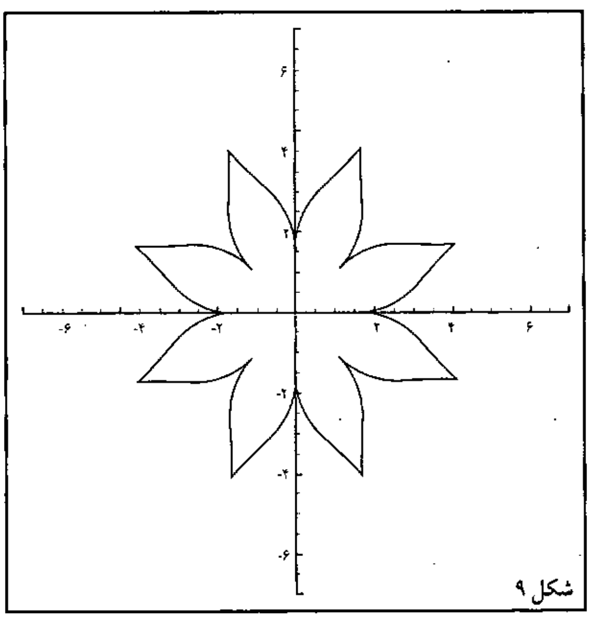
چون طول هر یک از این بازه‌ها برابر $2/a$ است، وقتی که دامنه‌ای به طول 2π درنظر بگیریم (چون یک دور کامل، محیط دایره است که طول آن 2π است)، آن‌گاه تعداد گل‌ها برابر $\pi a = k$ می‌باشد. درنتیجه، اگر بخواهیم تعداد گل‌برگ‌ها k باشد، ضریب a برابر $\frac{k}{\pi}$ خواهد بود.

بنابراین، اگر بخواهیم ترنجی با k گلبرگ داشته باشیم، فرمول آن به صورت

$$T_{(k,R)}(x) = R + \operatorname{Arcsin}(2(\left|\frac{k}{\pi}x - 2\left[(\frac{k}{\pi}x+1)/2\right]\right| - 1/2))$$

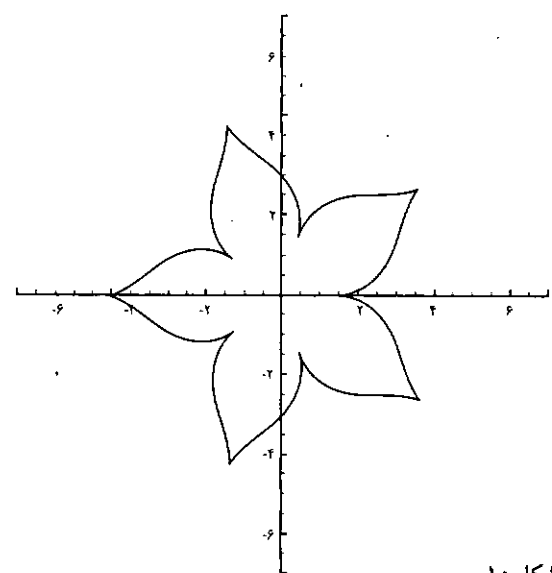
می‌باشد.

برای نمایان شدن نقش R در این تابع، مثال بالا را با $a = 3$ نیز رسم می‌نماییم (شکل۹):



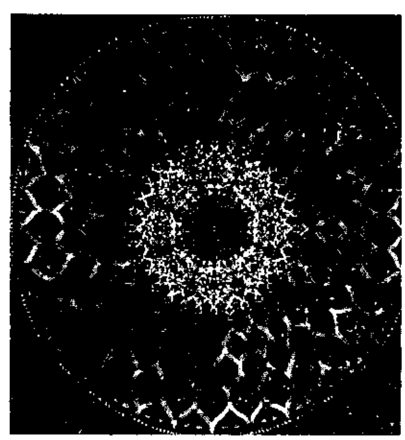
شکل ۹

هم‌چنین، آن را با $k = 5$ و $R = 3$ نیز رسم می‌کنیم تا شکل (۱۰) به دست آید.



شکل ۱۰

بنابراین، یک ترنج، نمودار یک تابع در مختصات قطبی است. اما این پایان کار نیست، چرا که تابع T، کارهای بسیار جالبی انجام می‌دهد و نقوش زیبایی رسم می‌کند، به شرطی که با سایر توابع ریاضی ترکیب، جمع یا تفریق گردد یا تحت تبدیلات هندسی قرار گیرد. به‌عنوان نمونه فرش زیبای شیخ لطف‌الله را با ترنج مشهور آن در نظر بگیرید. شکل (۱۱)



شکل ۱۱

این طرح، از کنار هم قرار گرفتن چند ترنج به‌وجود آمده است. توابع این ترنج‌ها که تبدیلاتی از تابع T هستند، عبارتند از:

$$13+\operatorname{Arcsin}\left(2\left(\left|\frac{32}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{32}\right)-2\left[\left(\frac{32}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{32}\right)+1\right)/2\right]\right|-1/2\right)\right),$$

$$13+\pi+\operatorname{Arcsin}\left(2\left(\left|\frac{32}{\pi}(x)-2\left[\left(\frac{32}{\pi}(x)+1\right)/2\right]\right|-1/2\right)\right),$$

$$13+2\pi+\operatorname{Arcsin}\left(2\left(\left|\frac{32}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{32}\right)-2\left[\left(\frac{32}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{32}\right)+1\right)/2\right]\right|-1/2\right)\right),$$

$$13+3\pi+\operatorname{Arcsin}\left(2\left(\left|\frac{32}{\pi}(x)-2\left[\left(\frac{32}{\pi}(x)+1\right)/2\right]\right|-1/2\right)\right),$$

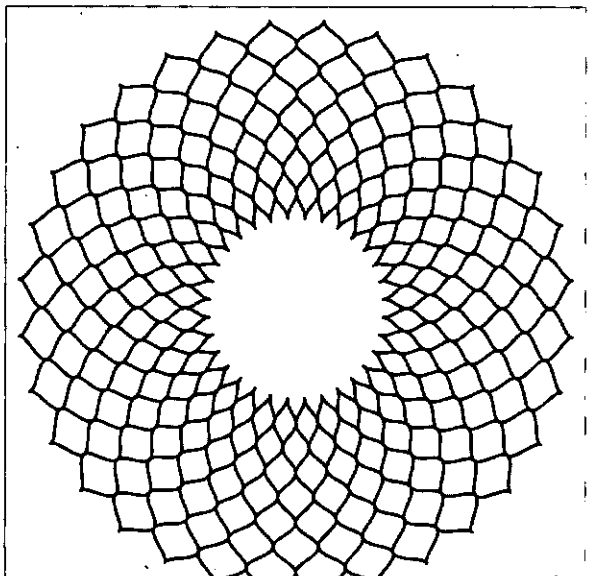
$$13+4\pi+\operatorname{Arcsin}\left(2\left(\left|\frac{32}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{32}\right)-2\left[\left(\frac{32}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{32}\right)+1\right)/2\right]\right|-1/2\right)\right),$$

$$13+5\pi+\operatorname{Arcsin}\left(2\left(\left|\frac{32}{\pi}(x)-2\left[\left(\frac{32}{\pi}(x)+1\right)/2\right]\right|-1/2\right)\right),$$

$$13+6\pi+\operatorname{Arcsin}\left(2\left(\left|\frac{32}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{32}\right)-2\left[\left(\frac{32}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{32}\right)+1\right)/2\right]\right|-1/2\right)\right),$$

$$13+7\pi+\operatorname{Arcsin}\left(2\left(\left|\frac{32}{\pi}(x)-2\left[\left(\frac{32}{\pi}(x)+1\right)/2\right]\right|-1/2\right)\right).$$

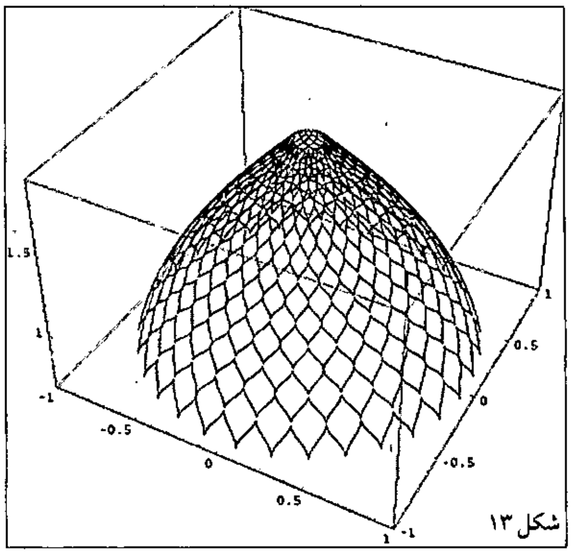
اگر نمودار آن‌ها را با هم رسم کنیم، شکل (۱۲) را خواهیم داشت:



شکل ۱۲

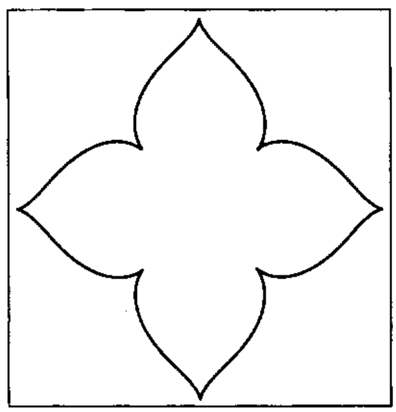
طرح فرش شیخ لطف‌الله، برگرفته از طرح زیر گنبد مسجد شیخ لطف‌الله است که طرحی سه‌بعدی و منحصر به فرد است. با یک تبدیل، می‌توانیم آن را به صورت سه‌بعدی ترسیم کرد. شکل (۱۳).

نکته‌ی مهم این که در این‌جا نرم‌افزار متمتیکا، فقط نقش رسام را دارد. البته تمام فرایند حل مسئله در انجام این کار رعایت می‌شود و متمتیکا تنها به‌عنوان ابزاری قوی است که کارها را آسان کرده و سرعت کار را بالا می‌برد.



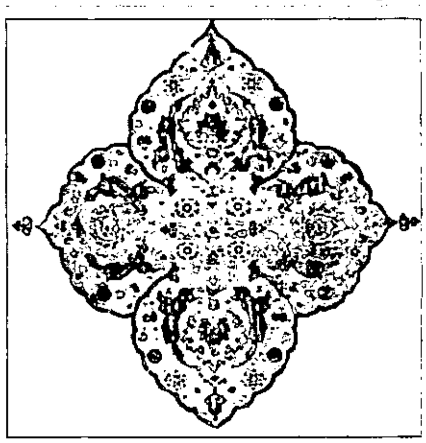
شکل ۱۳

دوباره به تابع T و اهمیت آن برمی گردیم. در این تابع، حالت $k = ۴$ و $r = ۳$ را رسم می کنیم که نمودار آن در شکل (۱۴) نشان داده شده است:



شکل ۱۴

حال آن را با شکل (۱۵) مقایسه کنید که ترنج مرکزی یک فرش است (شکل (۲۳) را نیز ببینید).



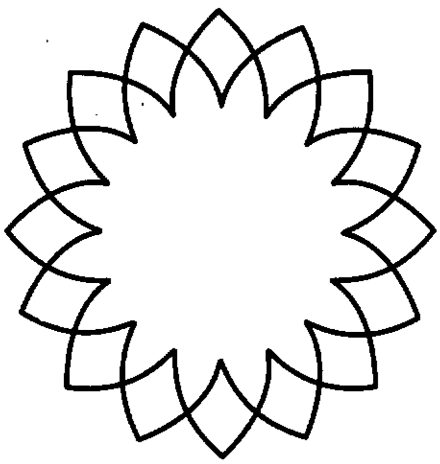
شکل ۱۵

حال نمودار دو تابع

$$f(x)=۱/۵+\sin(\mathrm{Arcsin}(۲(\left|\frac{۸}{\pi}x-۲\left[(\frac{۸}{\pi}x+۱)/۲\right]\right|-۱/۲)))$$

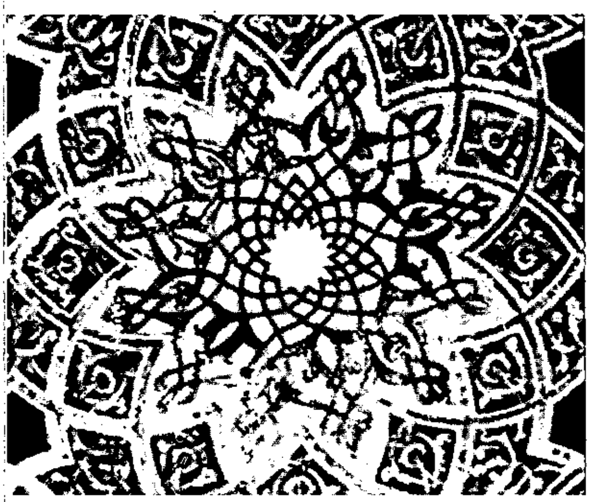
$$g(x)=۱/۵+\sin(\mathrm{Arcsin}(۲(\left|\frac{۸}{\pi}(x-\frac{\pi}{۸})-۲\left[(\frac{۸}{\pi}(x-\frac{\pi}{۸})+۱)/۲\right]\right|-۱/۲)))$$

را با هم ترسیم می کنیم تا شکل (۱۶) به دست آید:



شکل ۱۶

اینک آن را با شکل (۱۷) که یک طرح گچ بری است مقایسه کنید:

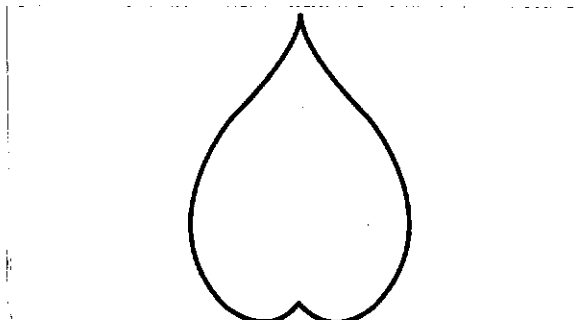


شکل ۱۷

می توان گفت که می توانیم با کمک تبدیلاتی که روی تابع T ایجاد می کنیم، نمودارهای مختلفی را به وجود آوریم که در طرح فرش های ایرانی وجود دارد. در این راستا، نمودار تابع

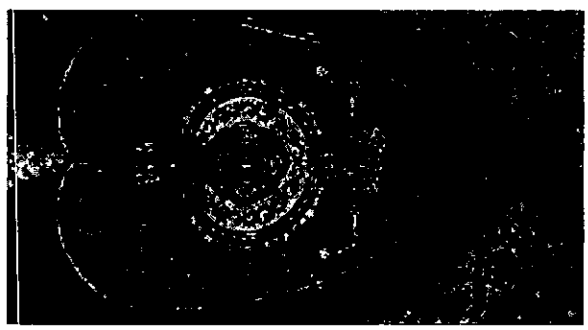
$$f(x)=1+\operatorname{Arcsin}\left(2\left(\left|\frac{1}{2\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-2\left[\left(\frac{1}{2\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1\right)/2\right]\right|-1/2\right)\right)^2+\sin(x)$$

را رسم می‌کنیم. شکل (۱۸)



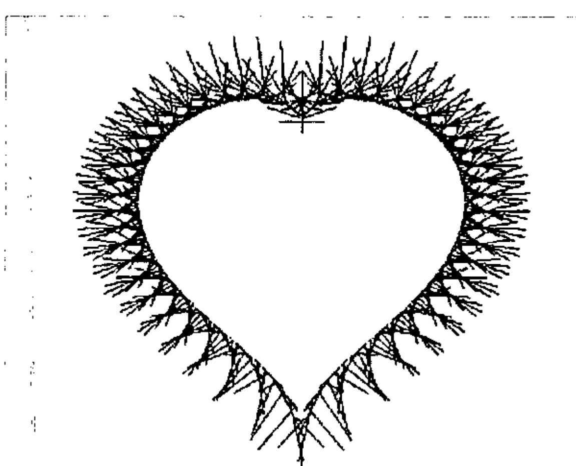
شکل ۱۸

شکل (۱۹)، در یکی از فرش‌های موزه‌ی فرش تهران را نشان می‌دهد [۳]:



شکل ۱۹

بر روی طرح شکل (۱۸) نیز می‌توان کارهای زیادی انجام



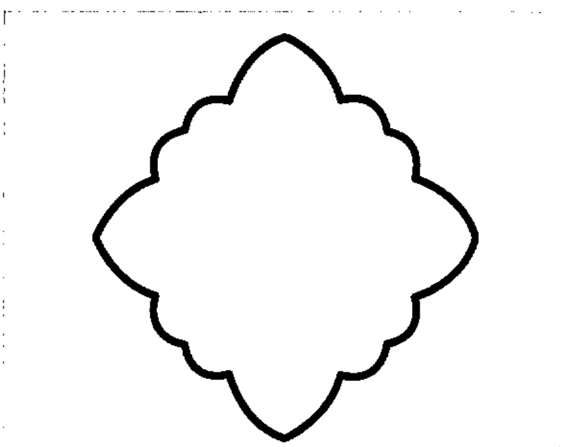
شکل ۲۰

داد (شکل ۲۰). این طرح از جمله طرح‌هایی است که در طرح‌های سنتی ایرانی وجود نداشته است، ولی با ترکیبی از طرح‌های ذکر شده و طرح‌های هندسه‌ی نقوش، ایجاد شده است [۴].

با رسم نمودار تابع

$$f(x)=8+2(/5^{\operatorname{Arcsin}\left(2\left(\left|\frac{8}{\pi}(x)-2\left[\left(\frac{8}{\pi}(x)+1\right)/2\right]\right|\right)\right)^2})+$$
$$\operatorname{Arcsin}\left(2\left(\left|\frac{4}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-2\left[\left(\frac{4}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right)/2\right]\right|-1/2\right)\right))$$

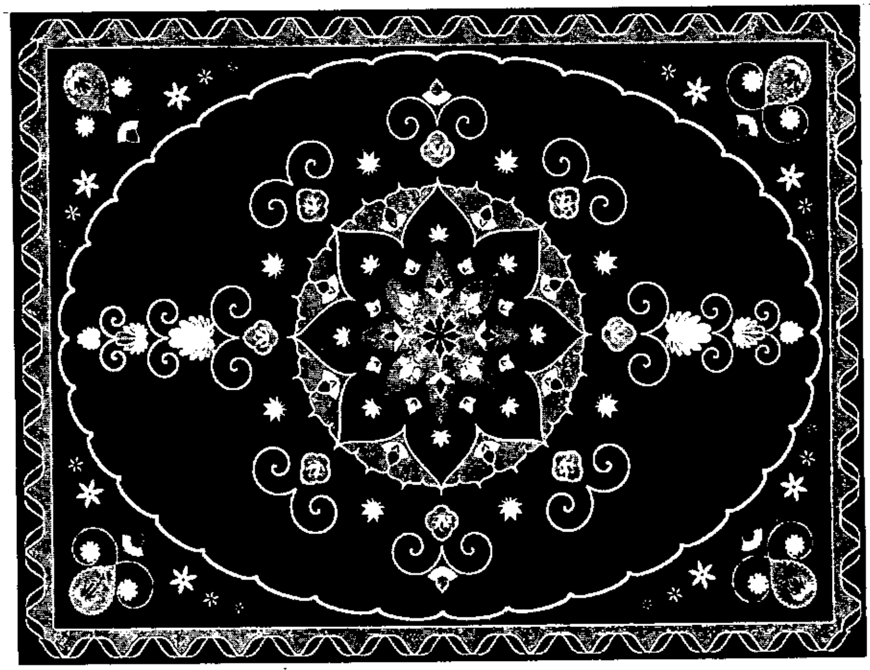
ترنج فرش شکل (۱) رسم می‌شود (شکل ۲۱).



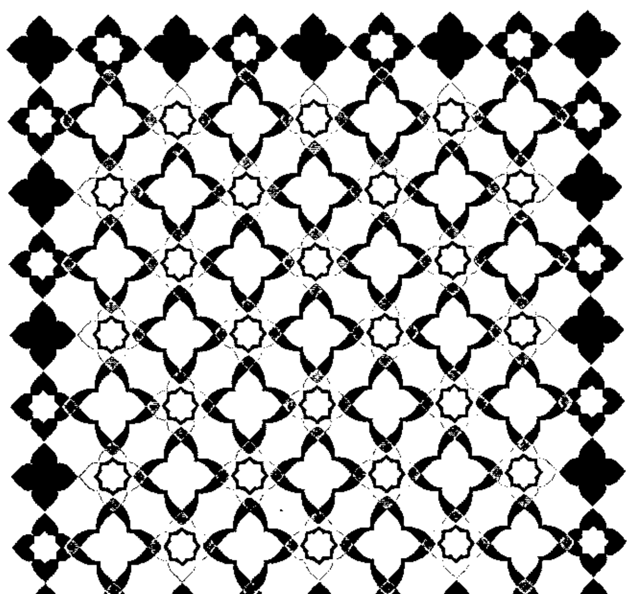
شکل ۲۱

البته با این روش، کارهای بزرگ‌تری هم می‌توان انجام داد. از جمله می‌توان با کمک این تابع، یک فرش را به طور کامل طراحی کرد یا این که به بازآفرینی نقوش کاشی‌کاری مساجد پرداخت. البته هدف در این کار، طراحی فرش نیست، بلکه هدف نشان دادن انسجام و زیبایی کاری است که می‌توان با استفاده از ریاضی انجام داد. (شکل ۲۲ و ۲۳ صفحه ۲۹)

با توجه به مطالب بالا، می‌توان نتیجه گرفت که بین نقوش سنتی ایرانی، وحدت و انسجام خاصی وجود دارد که تابع T این انسجام را نمایان می‌کند. شایسته است که به این نقوش، توجه بیش‌تری شود که این توجه، می‌تواند از راه ارائه‌ی آن در کتاب‌های درسی به صورت مطالعه‌ی آزاد، مجله‌ی خواندنی‌ها و نظایر آن صورت گیرد. به‌عنوان حسن‌ختام این نوشته، برای مقایسه‌ی زیبایی کار، پیچ ارشمیدس را با ترنج مسجد شیخ لطف‌الله مقایسه کنید.



شکل ۲۲ . فرش طراحی شده به کمک تابع T



شکل ۲۳ . بازآفرینی کاشی کاری مسجد جامع اصفهان به کمک تابع T

پانویس

1. Mathematica

منابع

۱ . دادگر، لیلا . (۱۳۸۰). فرش ایران. موزه‌ی فرش ایران.

۲ . قنبری، قاسم حسین . (۱۳۸۳). مدل ریاضی طرح ترنج و طرح سقف مسجد شیخ لطف‌الله. مقاله‌ی ارایه شده به سی و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران، اهواز.

۳ . قنبری، قاسم حسین . ریاضیات هنری و انیمیشن سازی همراه با نرم افزار متمتیکا. انتشارات یکان.

۴ . قنبری، قاسم حسین . هندسه‌ی نقوش، مدل سازی ریاضی و تعمیم آن‌ها. مجله‌ی کارافن. شماره‌ی چهاردهم.

به‌دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیک‌تری با معلمان ر باضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به‌تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به‌عمل در می‌آیند و مجدداً عمل به‌نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به‌اهمیّت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به‌غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

«آقا پس سؤال دوم چی؟ جواب‌ها رو بررسی نمی‌کنیم؟» تقریباً پنج دقیقه به پایان کلاس باقی مانده بود که مطالعه و دسته‌بندی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال اول به پایان رسید و دانش‌آموزان با نگاه کردن به ساعت، این سؤال را از من پرسیدند. پاسخ من هم این بود که «الان نمی‌رسیم پاسخ‌ها را کامل بررسی کنیم، اما برای این‌که یک اطلاع کلی از نظراتتان

آقا!؟ پس سؤال دوم چی؟!

علی جعفر آبادی
کارشناس ارشد آموزش ریاضی

پیدا کنید، فقط از روی یادداشت‌ها یک بار سریع می‌خوانم»؛... و تا پایان کلاس مشغول صحبت در این باره بودیم.

❊❊❊

ماجرا از این قرار بود که مدرسه از من خواسته بود که امسال، مسئولیت تدریس درس آمار و مدل‌سازی سال دوم را قبول کنم و من هم پذیرفته بودم. دلم می‌خواست با روش و برنامه‌ای غیر از توضیحات و تعاریف رایجی که به‌طور سلسله مراتبی و تقریباً فراگیر در مدارس استفاده می‌شود، کلاس را شروع کنم. اما تا ساعاتی قبل از آغاز کلاس، روش قابل قبولی پیدا نکرده بودم و خودم را در معرض تکرار روش سال گذشته و روش سابق می‌دیدم. شب قبل از کلاس هم تا صبح بیدار و مشغول چند کار مهم از جمله مطالعه و فکر برای کلاس فردا بودم.

اما ناگهان ورق برگشت. ایده‌ای به ذهنم خطور کرد که باعث شد یادداشت‌های قبلی را کنار بگذارم و از نو برنامه‌ریزی کنم. فکر جدید این بود:

«پس از معرفی و خوش‌وبش و تذکرات و پرسش و پاسخ‌های اولیه، به هر دانش‌آموز ۲ تکه کاغذ کوچک می‌دهم و از آن‌ها می‌خواهم که بدون ذکر نام، پاسخ دو سؤال من را در برگه‌های جداگانه بنویسند. پس از چند دقیقه، پاسخ‌ها را جمع کرده، بلند می‌خوانیم و دسته‌بندی می‌کنیم و... .

سؤالات من از این قرار بودند:

۱. آمار چیست؟ شما از آمار چه تعریفی دارید؟

۲. توقع شما از آمار چیست؟ از آمار چه می‌خواهید؟»

ساعت آمار فرا رسید و من هم همان برنامه را اجرا کردم. پس از این که دانش‌آموزان به پرسش‌ها پاسخ دادند، از دو نفر خواهش کردم که هر کدام جواب مربوط به یک سؤال را جمع کند. سپس درخواست کردم که یک داوطلب به کمک من بیاید تا جواب‌ها را خوانده، مرتب کنیم و روی تابلو بچسبانیم.

پس از مطالعه‌ی برگه‌ها، با کمک دانش‌آموزان توانستیم نظرات آن‌ها را در چند ستون دسته‌بندی کنیم؛ بدین ترتیب که با مطالعه‌ی هر برگه، در صورتی که عنوان متناسب با محتوای پاسخ در ستون‌های قبلی وجود داشت، برگه را زیر آن عنوان می‌چسباندیم؛ در غیر این صورت، ستون جدیدی ایجاد می‌کردیم.

به‌عنوان مثال، در پاسخ سؤال اول (آمار چیست؟ شما از آمار چه تعریفی دارید؟)، در یکی از کلاس‌ها هفت ستون تشکیل شد که از هر ستون مثالی ذکر می‌کنم:

✓ علمی است که به مباحث نموداری و عددی می‌پردازد.

✓ چون اصولاً ما نمی‌توانیم از بین کلی مطلب مطالب مورد نیازمان را پیدا کنیم، لذا نیازمند به علمی هستیم که بتواند آن‌ها را به طور منظم به ما تحویل دهد که به آن آمار گویند.

✓ به نظر من، آمار یکی از رشته‌های ریاضی است که در دانشگاه به کار گرفته می‌شود.

✓ فکر می‌کنم کتاب آمار و مدل‌سازی کتابی است که به ما می‌آموزد چگونه درست اندازه بگیریم و طراحی کنیم و نقشه‌های ماشین‌های پیچیده را بخوانیم و غیره... .

✓ کاری است که به وسیله‌ی آن، تعداد جمعیت یا ازدیاد یک چیز را در یک منطقه اندازه می‌گیریم.

✓ از یک چیز سرشماری کردن و اطلاعات به‌دست آوردن است.

✓ هرچند سال یک بار یک آمار سرشماری فقط به گوش ما خورده است. فقط همین و اطلاع خاص دیگری ندارم.

همان‌طور که در شروع مقاله اشاره شد، به دلیل کمبود وقت، پاسخ‌های پرسش دوم (توقع شما از آمار چیست؟ از آمار چه می‌خواهید؟) را در آن جلسه بررسی نکردیم؛ اما این‌جا به چند نمونه از آن‌ها از همان کلاس، اشاره می‌کنم:

✓ توقع من آن است که چیزهای خوبی یاد ما دهد.

✓ اولاً: بتوان راه‌های ساده از آمارگیری را یاد گرفت. ثانیاً: نمره!

✓ به‌دست آوردن درصد فراوانی و دسته‌بندی و... .

✓ مغز من را تقویت کند و با بالا بردن سطح هوش و مهارت، قدرت انتقال مرا زیاد کند.

✓ کسالت‌آور نباشد و با مطالب ریاضی ادغام نشود.

✓ گرفتن نمره‌ی ۲۰ از این درس و لذت بردن بیش‌تر و بهتر یاد گرفتن درس آمار و استفاده از این درس در زندگی.

✓ توقع دارم که مشخص کند چه تعداد افراد در یک شهر یا روستا زندگی می‌کنند.

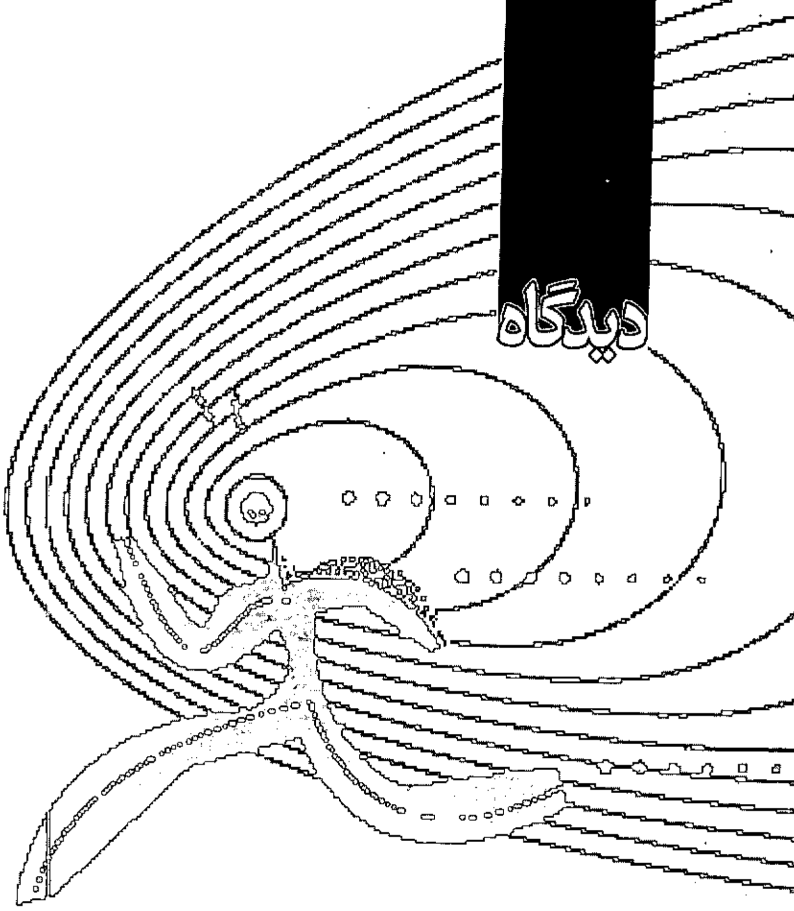
✓ بتواند درست آمار صحیح مردم را در بیاورد یا درست سرشماری کند و میانگین گرفتن را به ما یاد دهد.

✓ چون آگاهی ندارم، توقعی هم ندارم.

✓ ...

و عکس‌العمل دانش‌آموزان در پایان کلاس همان بود که در ابتدای مقاله آمد!

در پایان کلاس توانسته بودیم قدم به قدم نقشه راه را حداقل تا چند ماه آینده کشف کنیم و بر آن چراغی بیفکنیم. هم‌چنین، توانسته بودم دانسته‌ها و معلومات دانش‌آموزان را بیابم و حساسیت‌ها، دغدغه‌ها و اهدافشان را تا حدودی کشف کنم. فکر می‌کنم این تجربه شایسته‌ی مطالعه‌ای مجزا حتی در ابعاد گسترده‌تر نیز هست.



به کجا چنین شتابان؟!!

مریم گویا
دبیر بازنشسته‌ی ریاضی منطقه ۲ تهران

اشاره

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، تداوم معنادار خود را مدیون تعامل و تبادل‌نظر دائمی با مخاطبان اصلی خود که معلمان ریاضی و دست‌اندرکاران آموزش معلمان ریاضی هستند، می‌داند. به همین دلیل، بیش‌ترین تلاش اعضای هیأت‌تحریریه‌ی مجله، جست و جو برای پیدا کردن راه‌های مختلف ایجاد چنین تعامل و تبادل‌نظری بوده است. خوشبختانه از سال ۱۳۸۱ که به همت مسئولان محترم دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، تولید و توزیع مجله، نظم بیش‌تری یافته و تیراژ آن نیز بالاتر رفته است، معلمان محترم ارتباط بیش‌تری با مجله‌ی خودشان برقرار کرده‌اند و بیش‌تر از گذشته، دیدگاه‌های خود را برای چاپ، ارسال دارند. به همین دلیل، آرزوی دیرینه‌ی دفتر انتشارات کمک‌آموزشی و هیأت‌تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی می‌رود تا تحقق یابد. درنتیجه، با نظر هیأت‌تحریریه‌ی مجله، قرار شد تا دیدگاه‌های ارسالی عیناً و بدون ویرایش چاپ شوند. در ضمن، از خوانندگان محترم استدعا داریم که پاسخ‌گو و منتقد دیدگاه‌ها باشند و تعامل و تبادل‌نظر را از طریق بازتاب بر آن‌ها، معنادارتر و کارآتر کنند.

البته لازم به توضیح است که دیدگاه‌های مطرح‌شده، الزاماً همسو با سیاست‌ها و دیدگاه‌های دفتر انتشارات کمک‌آموزشی و هیأت‌تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نیستند.

چندی پیش عزیزی به من گفت مدت‌ها است که دیگر برای مجله‌ی «رشد آموزش ریاضی» چیزی نمی‌نویسی، بی‌حوصله شده‌ای یا دیگر مطلبی نداری؟ جوابی ندادم و تنها به یک لبخند بسنده کردم. امّا همین سؤال کوتاه، هیاهویی در ذهنم ایجاد کرد.

با خود فکر کردم آیا من حق دارم درباره‌ی آموزش مطلبی بنویسم؟ یا این که نویسندگان چنین مطالبی باید معلمینی باشند که هنوز دستی بر آتش دارند و حداقل هفته‌ای ۲۰ یا ۲۴ ساعت تدریس می‌کنند و درگیر مسائل واقعی آموزش هستند؟ واضح است که باید تازه‌نفس‌ها و جوانان کارآمد و پرانرژی به جای من و امثال من که دیگر بازنشسته شده‌ایم، وارد کارزار شوند و سکّان این کشتی عظیم را به دست بگیرند. ما خوب یا بد، کارمان را کرده‌ایم و اگر لازم بوده است گفته‌ایم و نوشته‌ایم. دیگر نیازی به ما نیست. از این ماجرا مدت‌ها گذشته است و طی دو سه سال گذشته، بارها با مسائلی مواجه شده‌ام که تصمیم گرفتم بنویسم و اتفاقات ناگواری را که در حوزه‌ی آموزش رخ می‌دهد، با زبان قلم فریاد بزنم؛ شاید گوش شنوایی پیدا شود؛ امّا... مشاهده‌ی جزوه‌های درسی و تمرین‌های بچه‌های خانواده که گاهی برای رفع اشکال سری به من می‌زنند، آن قدر با آموزش واقعی فاصله دارد که در می‌مانی چه باید بکنی و نمی‌دانم برخی از معلمین عزیز ما و بعضی از مدارس ما با استناد به کدام یافته‌های پژوهشی مستدل و متقن، به ارائه‌ی مطالب خارج از برنامه‌ی درسی می‌پردازند؟ مطالبی که اغلب مربوط به یکی دو کلاس بالاتر است و چون در خور درک و فهم دانش‌آموز نیست، با گفتن چند فرمول و یکی دو جمله به عنوان توضیح در جزوه‌های آن‌ها، به انواع و اقسام تمرین‌هایی مبادرت می‌کنند که دانش‌آموزان ابزاری برای حل آن‌ها در اختیار ندارند. در نتیجه سفیل و سرگردان، دفتر به دست و کتاب کمک‌آموزشی در بغل، از هر کس که فکر می‌کنند ممکن است ریاضی بلد باشد کمک می‌گیرند تا تمرین‌های خارج از درس و برنامه را حل کنند و برای آزمون‌های ورودی مقاطع بالاتر یا دانشگاه آماده شوند! این جریان روز به روز ابعاد بزرگ‌تری پیدا می‌کند و دانش‌آموزان را خسته‌تر و دلزده‌تر می‌سازد. ممکن است تعدادی از دانش‌آموزان به هر وسیله مطالب اضافی را واقعاً یاد بگیرند، ولی تعدادشان زیاد نیست و آن‌هایی که درک کافی و دقیقی از مطالب و مسائل ندارند به مراتب بیش از گروه اول هستند. هنوز برایم جای سؤال است که دلیل یا لطف یا هنر این کار که مطالب سال‌های بعد را جلوتر تدریس کنند چیست؟ تا به حال چند کار پژوهشی انجام گرفته که ثابت کند تدریس پیش از موقع موفقیت‌آمیز بوده است؟ که اگر چنین باشد باید برنامه‌ریزان درسی و مؤلفین کتب درسی و... در نوع برنامه‌ها و محتوای دروس حتماً تجدیدنظر کنند و مطالب سنگین‌تر و سخت‌تری را در کتاب‌های درسی بگنجانند، تا بعضی از معلمین گرامی مجبور نشوند زحمت جمع‌آوری و ارائه‌ی چنین مطالبی را تقبل کنند.

از یک کتاب کمک‌آموزشی که به دانش‌آموزان سال سوم راهنمایی توصیه شده بود و باید تمرین‌های آن را حل می‌کردند چند نمونه ذکر می‌کنم. از دبیران ارجمند تقاضا دارم با توجه به سرفصل دروس سوم راهنمایی و قبل از آن، به تمرین‌ها نظر کنند. از جمله:

عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت خود بنویسید:

$$\frac{\sqrt{۱۲\sqrt{۱۲\sqrt{۱۲\sqrt{\cdots}}}}}{\sqrt{۱۲+\sqrt{۱۲+\sqrt{۱۲+\sqrt{\cdots}}}}}$$

$$\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}+۱+\cdots+۲^{۱۰۰}$$

برای حل چنین تمرین‌هایی، آیا ابزار لازم در اختیار دانش‌آموز هست؟ آیا دانش‌آموز سوم راهنمایی تصوری از بزرگی عدد $۲^{۱۰۰}$ دارد؟ آیا اجازه‌ی استفاده از ماشین حساب برای این که بتواند حداقل بزرگی چنین عددی را به تصویر بکشد و تصور کند به وی داده می‌شود؟

نمونه ای دیگر این است که به دانش‌آموز سال دوم دبیرستان (رشته‌ی تجربی) چند تابع داده شده و عملیات مختلف روی آن‌ها خواسته شده است و در چند مورد تابع مثلثاتی، مشتق آن‌ها ذکر شده است. جالب توجه این است که نماد مشتق به کار نرفته و تذکر داده شده که بعداً می‌فهمید که این مشتق است!! حال چه نیازی است که مشتق یک تابع معرفی شود بی‌آن که مفهوم آن توضیح داده شود؟ این هم از ابتکارات یا روش‌های مفیدی است که باعث شکوفایی استعدادهای دانش‌آموزان می‌شود!!!

واقعاً نمی‌دانم چرا هیچ‌کس به فکر کودکان و جوانان و نوجوانان ما نیست؟ یا به عبارتی چرا همه‌کس خود را محقّ و صاحب‌نظر در امر آموزش می‌داند؟ چرا دیواری کوتاه‌تر از آموزش‌وپرورش پیدا نمی‌شود که هر کس به خود حق بدهد از آن وارد شود؟ تا به کی باید تاوان ندانم‌کاری‌ها و اعمال سلیقه‌ها را پس بدهیم؟ تا کی باید روی دست هم بلند شویم و برای مطرح شدن و گوی سبقت را از رقیب ربودن، بچه‌های معصوم را بازیچه‌ی خواسته‌های خود قرار دهیم و تزهای به‌جا و بی‌جای خود را روی آن‌ها پیاده کنیم. طی چند سال گذشته آن‌قدر روش‌های متنوع و متفاوتی ابداع (بهتر است بگوییم تقلید) شده است و در مورد دانش‌آموزان به کار رفته که یک ناظر خارجی سرگیجه می‌گیرد که بالاخره کدام درست است و کدام نادرست؟ بهترین روش چیست؟ نتیجه‌ی این همه آشفتگی و تنوع چه بوده است؟ لحظه‌ای درنگ کنیم ونگاهی به پشت سر بیندازیم. راهی را که رفته‌ایم ارزیابی کنیم و اگر در آن خطا و اشتباهی ندیدیم، با اطمینان از راه رفته، راه را طی کنیم. در غیر این صورت، به تصحیح اشتباه بپردازیم و همراه خود عده‌ی زیادی را به بی‌راهه نکشانیم. کافی است مروری داشته باشیم بر طرح‌ها و لوایح و قوانین متعدد در طول حداقل ۱۵ سال گذشته که چگونه با تصمیم‌های خلق‌السّاعه‌ی هر روز آموزش‌وپرورش، دچار تغییر و تحول می‌شود. یک روز دوره‌ی دبیرستان ترمی واحدی می‌شود؛ وقتی دیگر سالی واحدی؛ یک روز آموزش از پرورش جدا می‌شود؛ روز دیگر ادغام می‌شود؛ یک روز برای ورود به دوره‌ی پیش‌دانشگاهی، کنکور برگزار می‌شود؛ دیگر بار همه می‌توانند به دوره‌ی پیش‌دانشگاهی بروند؛ زمانی دوره‌ی پیش‌دانشگاهی جدا از دبیرستان بود؛ بعدها در دبیرستان ادغام شد و... و به تناسب هر یک از این تغییرات در مدیریت‌ها و به تبع آن تدریس و کلاس و درس هم تغییر ایجاد می‌شود و معلوم نیست این خواب‌های آشفته تا به کی ادامه دارد؟

بگذریم از اظهارنظرهای عالمانه و کارشناسانه‌ی همه‌ی اقشار جامعه در امر آموزش‌وپرورش فرزندانشان و ارائه‌ی راه‌حل و روش تدریس به معلمین، که خود بحث مفصل دارد. می‌خواستم در مورد تدریس ریاضی و ارائه‌ی درس‌های نابهنگام سخنی بگویم که تا چه حدی می‌تواند مخرب باشد و به یادگیری دانش‌آموزان و علاقه‌ی آن‌ها به ریاضی لطمه بزند، امّا تغییرات پی‌درپی در قوانین آموزش‌وپرورش نیز همراه مسئله شد. شاید واقعیت همین باشد که نمی‌توان یک درس را مجزا از سیستمی که در آن تدریس می‌شود و مجرد از بدنه‌ی اصلی آموزش‌وپرورش و مسئولین و مدیران و مدرسه، مورد نقد قرار دارد. دروس مدرسه، اولیاء مدرسه، معلم و کلاس و اولیاء دانش‌آموز و جامعه و... همه حلقه‌های یک زنجیرند که در ارتباط با هم معنا پیدا می‌کنند و همین است که در تدریس هر درسی، مسائل دیگری هم مطرح می‌شود. به‌هر حال آن‌چه لازم است بدان توجه شود در درجه‌ی اول خود دانش‌آموز و فکر و روح و جسم و مقتضیات حال و روز و توانایی‌ها و ناتوانایی‌های اوست. او مرکز و محور همه‌ی این تغییرات و تحولات است. همه‌چیز به خاطر او و برای اوست. پس با ناآگاهی و بی‌اطلاعی و بی‌مهری به او ضربه نزنیم. همان‌طور که پیش‌تر آمد، به راه رفته نگاهی بیندازیم، نقاط قوت و ضعف را بررسی کنیم و ببینیم آیا راه را درست آمده‌ایم؟ به بی‌راهه نرفته‌ایم؟ به خاکی نزده‌ایم و برای زودتر رسیدن، راه‌های میان‌بُر و پرخطر را انتخاب نکرده‌ایم؟ فکر می‌کنم اگر تصمیم‌گیرندگان و طراحان ـ جای برنامه‌ریزان خالی است ـ صادقانه وقوفی داشته باشند و به آن‌چه گفته‌اند و کرده‌اند بیندیشند و عواقب کار را بررسی کنند، شاید به خود آیند و از اتخاذ تصمیم‌های شتاب‌زده بپرهیزند و راه صلاح در پیش گیرند. این موضوع شامل حال همه‌ی دست‌اندرکاران آموزش نیز می‌شود؛ چه آن‌ها که در رأس هستند، چه آن‌ها که صاحب و مسئول و مدیر مدارس هستند و چه معلمانی که با هدف کارآیی بهتر و بهره‌وری بیش‌تر، به تدریس می‌پردازند. اگر چنین اتفاقی بیفتد، شاید بتوان امیدی داشت. گرچه به نظر می‌رسد خیلی دیر شده است!

گزارشی از مدرسه‌ی تابستانی آموزش علوم و ریاضیات ۱۸ تا ۲۲ آگوست ۲۰۰۸

دانشگاه اوترخت-مؤسسه‌ی فرودنتال-هلند

گزارش گر: بهناز ساویزی - دانشجوی دکتری آموزش ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران

دانشگاه اوترخت با بیش از ۳۷۰ سال سابقه، ۲۹۰۰۰ دانشجو و ۵۷۰ پروفسور، بزرگ‌ترین و قدیمی‌ترین دانشگاه هلند است که از لحاظ رتبه‌ی علمی، اولین دانشگاه هلند و ششمین دانشگاه اروپا محسوب می‌شود. این دانشگاه در برگزاری مدارس تابستانی در رشته‌های مختلف، شهرت جهانی دارد.

امسال برای اولین بار مدرسه‌ی تابستانی در زمینه‌ی آموزش علوم و ریاضیات، توسط مؤسسه‌ی فرودنتال و به عنوان زیرمجموعه‌ای از مدارس تابستانی دانشگاه اوترخت برگزار شد. البته محور اصلی این کلاس‌ها، آموزش ریاضیات بود. سابقه‌ی تدریس در یکی از شاخه‌های علوم یا ریاضی و دارا بودن حداقل مدرک کارشناسی ارشد مرتبط با علوم و ریاضیات، از شرایط شرکت در این کلاس‌ها محسوب می‌شد. شرکت کنندگان، شامل ۱۴ نفر از کشورهای ایران، ترکیه، غنا و آفریقای جنوبی بودند که نویسنده، به‌عنوان دانشجوی دکترای آموزش ریاضی و دبیر ریاضی، یکی از آنان بود.

با وجود تنوع موضوعی، تم اصلی تمامی این کلاس‌ها که به‌شکل کارگاه برگزار می‌شد، آموزش واقع گرایانه[1] بود.

در هر روز دو، سه یا چهار کارگاه برگزار می‌شد و فاصله‌ی ساعات ۱۲ تا ۱، زمان ناهار و استراحت بود. ناهار مؤسسه، غذای سرد بود که برخی از آن استفاده می‌کردند و برخی ترجیح می‌دادند در آن زمان، از امکانات اینترنت رایگان مؤسسه استفاده کنند. دانشجویان به نوبت و در پایان هر کارگاه، پاورپوینتی از کارها، علایق و سوابق خود ارائه می‌دادند.

در ابتدا (اولین روز کلاس) سخنرانی‌های عمومی جهت آشنایی با سیستم مدرسه‌ای هلند و نوآوری‌ها و طراحی پژوهشی در آموزش ریاضیات و نیز آموزش ریاضی واقعیت‌مدار[2] انجام شد. محل برگزاری سخنرانی‌های صبح روز دوشنبه ۱۸ آگوست، ساختمان میناالخت در دانشگاه اوترخت بود.

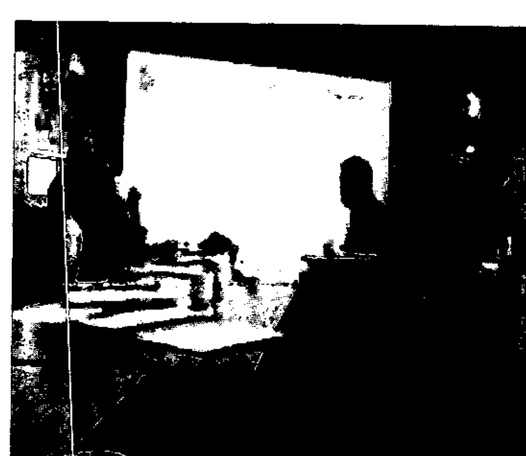
سخنرانان، پروفسور Eijkelhof، دکتر Hertog، مدیر اجرایی کارگاه تابستانه و خانم Dekker، محقق، معلم و عضو مؤسسه‌ی فرودنتال بودند که در رابطه با نوآوری‌ها و

دست‌آوردهای آموزشی و سیستم مدرسه‌ای در هلند صحبت کردند. ظهر همان روز، گروه ۱۴ نفره‌ی آموزش ریاضی به همراه سخنرانان و اعضای دیگر مؤسسه، ناهار را در محل غذاخوری دانشگاه صرف کردند. دانشجویان (که شاید حدوداً هزار نفر بودند) از تمام رشته‌ها و با ملیت‌های گوناگون در محل غذاخوری حضور داشتند. پس از ناهار، گروه آموزش ریاضی به همراه یکدیگر به سمت ساختمان مؤسسه‌ی فرودنتال که حدود ده تا پانزده دقیقه با اتومبیل تا آن‌جا فاصله داشت، حرکت کردند. بعد از ظهر آن روز، کارگاه آموزشی در مؤسسه برگزار شد.

در ادامه‌ی هفته، کارگاه‌هایی با همان تم اصلی یعنی RME و با تأکید بر نحوه‌ی تفکر ریاضی، نحوه‌ی تعامل بین معلم و دانش‌آموز و روش‌هایی که معلمان می‌توانند جهت درک مفاهیم ریاضیات توسط آنان به دانش‌آموزان یاری رسانند، برگزار شد.

نحوه‌ی برگزاری کارگاه‌ها به گونه‌ای بود که شرکت‌کنندگان در گروه‌های دو، سه یا چهار نفره، گاه در موضع دانش‌آموز و گاه معلم قرار گرفته و نحوه‌ی آموزش ریاضیات به روش واقع‌گرایانه را عملاً تجربه می‌کردند. در انتها، شرکت‌کنندگان و فرد برگزارکننده طی بحث گروهی از نقطه‌نظرات یکدیگر آگاه می‌شدند.

محیط مؤسسه‌ی فردنتال بسیار صمیمی و دوستانه بود. محل برگزاری کارگاه‌ها، مجهز، وسیع و آرام بود. طی مدت کلاس، دانشجویان از امکانات ماشین قهوه و گاه شیرینی و کیک بهره‌مند می‌شدند و چند بار نیز در جشن تولد برخی از اعضای مؤسسه در سالن طبقه‌ی پایین کلاس شرکت جستند.



تصویر ۱. کارگاه تاریخ ریاضی در آموزش ریاضیات، برگزارکننده: پروفسور جان ون‌متن

عناوین کارگاه‌ها به شرح زیر بود:

- روش تحقیقات آموزشی طرح مبنا، چرا و چگونه؟
- تفکر تابعی؛
- A-lympiad؛
- محیط دیجیتالی ریاضی؛
- آموزش همبستگی و رگرسیون؛
- تجربه‌ی آموزش در هلند: ادعا یا عمل؟
- اثبات کردن یا اثبات نکردن، پرسش این است؛
- نقش تاریخ در آموزش ریاضیات؛
- سیر طبیعی (واقعی) ساخت لگاریتم؛
- جبر معنادار؛
- چالشی در بازی‌های ریاضی؛
- مشاهده در کلاس درس.

در ادامه، توضیحاتی درخصوص هریک از کارگاه‌ها بیان خواهد شد؛ ولی پیش از آن مختصری از نظام مدرسه‌ای در هلند، تاریخچه و برنامه‌های مؤسسه‌ی فرودنتال و نیز آموزش ریاضیات واقعیت‌مدار آورده می‌شود.

آموزش و نظام مدرسه‌ای در هلند

هلند در آموزش علوم و ریاضیات، جزو کشورهای موفق جهان محسوب می‌شود، نتایج آزمون‌های بین‌المللی هم‌چون TIMMS و PIZA، مؤید این ادعاست.

نظام آموزش مدرسه‌ای در هلند مانند سیستم فرهنگی این کشور، متنوع و آزاد است. والدین مختارند فرزندان خود را به مدرسه‌ای متناسب با شرایط و عقاید فرهنگی ـ مذهبی خود بفرستند و اولیای مدرسه مختارند کتب درسی و نوع امتحانات را تعیین کنند. آموزش اجباری در سراسر کشور رایگان بوده و از سن ۴ سالگی آغاز می‌شود. در پایان دوره‌ی دبستان (حدوداً ۷ الی ۸ سال) یک آزمون ملی از دانش‌آموزان به‌عمل می‌آید؛ حدود ۸۰٪ مدارس، آزمون CITO (مؤسسه‌ی آزمون ملی هلند) و ۱۵٪، انواع دیگر آزمون را برگزار می‌کنند. مدارس متوسطه سه گروه هستند:

- آموزش متوسطه پیش‌حرفه‌ای VWBO[3] به مدت ۴ سال؛
- آموزش متوسطه عمومی HAVO[4] به مدت ۵ سال؛
- آموزش پیش‌دانشگاهی VWO[5] به مدت شش سال.

پس از اتمام دوره‌ی مدرسه‌ای، فارغ‌التحصیلان سه گروه فوق، به ترتیب در مقاطع تحصیلات تکمیلی زیر جذب

می‌شوند:

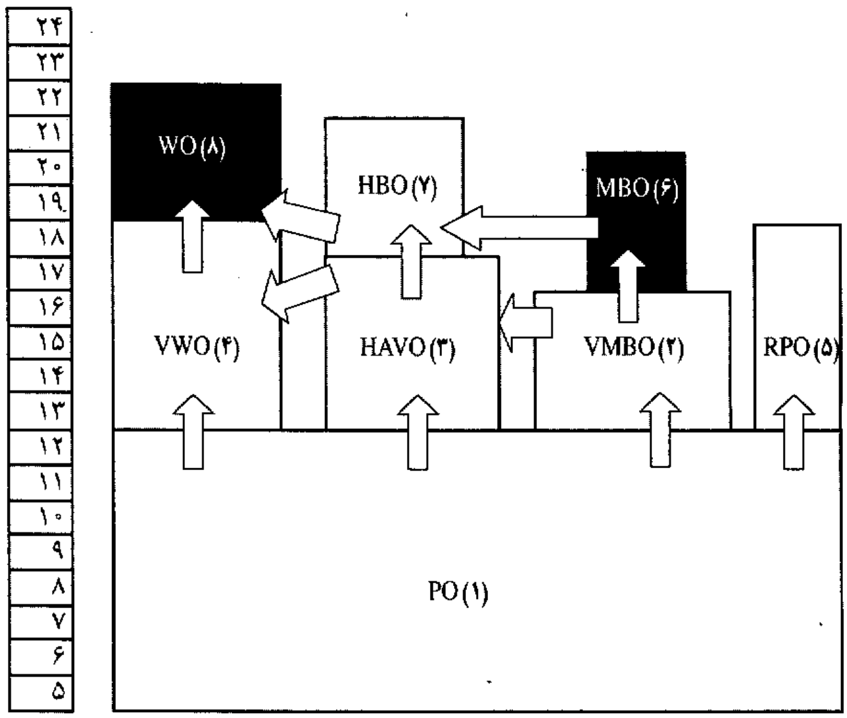
مدرسه عالی حرفه‌ای (حرفه‌وفن) MBO به مدت ۵ سال؛

آموزش تخصصی، کارشناسی HBO به مدت ۷ سال؛

دانشگاه، کارشناسی + کارشناسی ارشد WO به مدت ۸ سال.

افتخاری در ریاضیات و آموزش ریاضیات دریافت کرد.

شاید علت شهرت فرودنتال، بیش از آن‌که به نظرات خود وی در آموزش ریاضیات بازگردد، به مخالفت وی با سنت آموزش ریاضیات آن زمان (که ارتباطی با دنیای واقع برقرار نمی‌کرد) و نیز نظرات منتقدانه وی در رابطه با جنبش ریاضیات



آموزش اجباری = ☐

تصویر ۲. ساختار نظام آموزشی هلند، ۸-۲۰۰۷

آزمون نهایی دوره‌ی متوسطه، در دو بخش داخلی و ملی (با طراحی CITO و تحت نظارت وزارت آموزش) برگزار می‌شود. دانشگاه‌ها آزمون ورودی ندارند.

مؤسسه‌ی آموزش ریاضیات و علوم فرودنتال

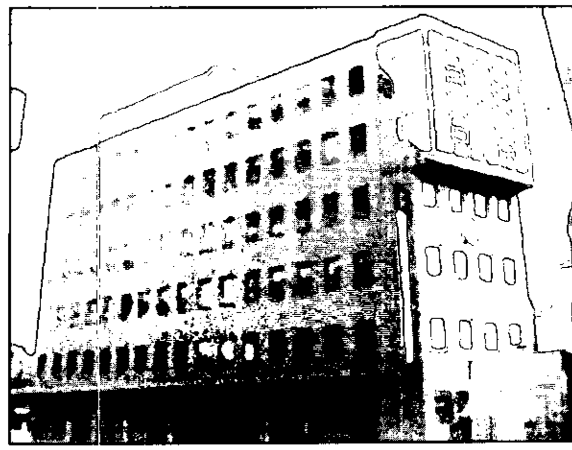
نام این مؤسسه، با نام هانس فرودنتال پیوند خورده است، ریاضی‌دان آلمانی تبار که در سال ۱۹۰۵ متولد شد و طی جنگ جهانی دوم به هلند مهاجرت کرد. او در سال ۱۹۴۶ به کرسی استادی دانشگاه اوترخت دست یافت و در زمینه‌ی توپولوژی، هندسه و نظریه‌ی گروه‌ها، ریاضی‌دانی برجسته محسوب می‌شد. او را می‌توان پایه‌گذار نظریه‌ی آموزشی «ریاضیات واقعیت‌مدار» که مبنای آن، مسائل معنادار از موقعیت‌های واقعیست، دانست.

وی در طول زندگی علمی و حرفه‌ای خود، شش دکترای

جدید که در آن دوره، از آمریکا آغاز شده و بر نظام آموزش ریاضیات بسیاری از کشورهای جهان سیطره یافته بود، مربوط باشد. به گفته‌ی خود اعضای مؤسسه، وی به نوعی احیاکننده‌ی هویت اروپایی در برابر نفوذ آمریکا بود.

در سال ۱۹۷۱، مؤسسه‌ی توسعه‌ی آموزش ریاضیات، IOWO، توسط فردنتال پایه‌گذاری شد و امروزه با نام مؤسسه‌ی آموزش علوم و ریاضیات فرودنتال (بخشی از دپارتمان علوم دانشگاه اوترخت) با ۵۰ الی ۶۰ عضو، به کار خود ادامه می‌دهد. حوزه‌ی فعالیت دپارتمان ریاضی این مؤسسه از مهدکودک تا دبیرستان و حتی ریاضیات شغلی ـ حرفه‌ای را در برمی‌گیرد. پس از حدود سی و اندی سال، هنوز اعضای این مؤسسه، دست‌آوردهای خویش را الهام‌پذیر از افکار و تلاش‌های فرودنتال در آموزش ریاضی می‌دانند و هنوز هم در زمان ناهار، قهوه یا در میان گپ زدن‌های دوستانه، خاطراتی از

شخصیت و نبوغ برجسته‌ی فرودنتال را مفتخرانه بیان می‌کند.



تصویر ۳. نمای بیرونی ساختمان مؤسسه‌ی فرودنتال.

مؤسسه‌ی آموزش علوم و ریاضیات فرودنتال[6] در کشورهای دیگر از جمله آمریکا، پروژه‌های تحقیقاتی خود را دنبال می‌کند. دانشگاه کلورادو در آمریکا میزبان شعبه‌ی دیگر این مؤسسه می‌باشد.

فعالیت‌های علمی این دپارتمان که بر توسعه و به‌کارگیری نظریه‌های پویا[7] در یادگیری و تدریس ریاضیات تأکید می‌ورزد، شامل موارد زیر است:

- پژوهش‌های تعلیماتی خُرد و کلان؛
- توسعه‌ی برنامه‌ریزی درسی؛
- توسعه‌ی ارزشیابی؛
- مطالعات تطبیقی در زمینه‌ی دست‌آوردها؛
- پژوهش و توسعه‌ی تکنولوژی آموزشی؛
- توسعه‌ی حرفه‌ای و تربیت معلم؛
- سازمان‌دهی شرکت در مجامع داخلی و بین‌المللی.

به گفته‌ی مدیر مؤسسه‌ی فرودنتال، پروفسور جان‌ون‌منن، ایجاد تعادل بین نیازهای جامعه و اهداف مؤسسه، اصول ریاضیات و ریاضیات تجربی، تحقیقات کمّی و تحقیقات کیفی و پژوهش‌های خُرد و کلان، از اهداف کلیدی این مؤسسه می‌باشد.

آموزش ریاضیات واقعیت‌مدار

آموزش ریاضیات واقعیت‌مدار (RME)، یک نظریه‌ی تدریس و یادگیری است که اولین بار توسط مؤسسه‌ی فرودنتال (۱۹۷۷) مطرح شده و توسعه یافت و هم‌اکنون در سیستم‌های آموزشی بسیاری از کشورهای جهان، از جمله انگلیس، دانمارک، آلمان، اسپانیا، پرتغال، آفریقای جنوبی، برزیل، آمریکا، ژاپن و مالزی پذیرفته شده است.

شکل جدید RME بر مبنای دو دیدگاه فرودنتال از آموزش ریاضی پدید آمده است: **آموزش ریاضیات باید متصل به واقعیت باشد و ریاضیات یک فعالیت انسانی است.**

ریاضیات یک دست‌آورد و فعالیت انسانی پویاست و نه یک سیستم بسته. از این رو مراحل ریاضی‌سازی یا ریاضی‌وارکردن[8]، مورد تأکید ریاضیات واقعیت‌مدار است. سیستم آموزشی باید فرصت‌های هدایت‌شده‌ای را برای بازسازی مفاهیم ریاضی توسط خود دانش‌آموزان فراهم آورد.

در سال‌های بعد، ترفرز[9]، (۱۹۷۸ و ۱۹۸۷) دو نوع از مراحل ریاضی‌سازی را فرمول‌بندی کرد: ریاضی‌سازی افقی[10] و ریاضی‌سازی عمودی[11].

در ریاضی‌سازی افقی، دانش‌آموز هدایت می‌شود تا مسئله‌ای از یک موقعیت واقعی را سازمان‌دهی و حل کند. ریاضی‌سازی عمودی، روند سازمان‌دهی مجدد داخل یک سیستم ریاضی می‌باشد. برای مثال، ایجاد اتصال و ارتباط بین مفاهیم و استراتژی‌ها، نوعی ریاضی‌سازی عمودی است.

به طور خلاصه و به نقل از فرودنتال (۱۹۹۱)، ریاضی‌سازی افقی، حرکت از جهان واقعی بیرونی به سمت دنیای ریاضیات است و ریاضی‌سازی عمودی، حرکت در دنیای نمادهای ریاضی است.

مرز بین ریاضی‌سازی عمودی و افقی، همواره ثابت و مشخص نیست و هر دوی آن‌ها در مراحل مختلف تفکر ریاضی رخ می‌دهد. فرودنتال معتقد بود که ریاضی‌سازی افقی و عمودی، هر دو از ارزش یکسانی برخوردارند.

نام ریاضیات واقعیت‌مدار این شبهه را در ذهن ایجاد می‌کند که آموزش ریاضی باید همواره با جهان واقعیت بیرونی در ارتباط باشد، در حالی که PME معنایی فراتر از این دارد. دلیل چنین ابهامی، شباهت ترجمه‌ی انگلیسی Realistic با عبارت Zich realisren (نام اصلی ریاضیات واقعیت‌مدار) است که معنای آن در زبان آلمانی، تصور کردن یا خیال‌پردازی کردن (imagine) می‌باشد.

جهان خیالی افسانه‌ها و حتی جهان ریاضیات صوری، اگر در ذهن دانش‌آموز معنادار و واقعی باشد، بستر مناسبی برای طرح یک مسئله است.

با توجه به پایه‌های نظری PME که ریاضیات را دست‌آوردی انسانی و پویا می‌انگارد، هیچ‌گاه نمی‌توان آن را یک نظریه‌ی آموزش ریاضی پایان‌یافته و تثبیت‌شده تلقی کرد.

در ادامه، شرح مختصری از هریک از کارگاه‌های آموزشی برگزار شده را از نظر می‌گذرانیم.

دوشنبه ۱۸ آگوست ـ بعد از ظهر:

مراسم خوش‌آمدگویی توسط پروفسور ون‌مَنِن، مدیر مؤسسه‌ی فرودنتال؛

کارگاه روش تحقیقات آموزشی طرح مبنا، چرا و چگونه؟ توسط پروفسور پیلوت[12]؛

معرفی دانشجویان.

روش تحقیقات آموزشی طرح مبنا، چرا و چگونه؟

اولین کارگاه توسط پروفسور پیلوت برگزار شد. این تنها کارگاهی بود که موضوع آن ریاضی نبوده و یک روش تحقق عمومی در آموزش علوم را معرفی می‌کرد. هدف کارگاه معرفی روش تحقیق طرح مبنا[13] یا EDBR در آموزش و تمرین عملی طراحی اصول برنامه‌ریزی درسی بود.

EDBR یک روش تحقیق دوری[14] برای مطالعه، طراحی و ترکیب اصول برنامه‌ریزی درسی است. در این روش، طراحی اولیه بر مبنای وجوه نظری و تجارب گروه تحقیق صورت می‌گیرد. در مراحل جزئی، انتظارات از نحوه‌ی عملکرد یک واحد (مورد تحقیق) بیان می‌شود. با توجه به این انتظارات، چارچوبی برای گردآوری و تجزیه و تحلیل داده‌ها (به‌منظور درک بهتر مراتب یادگیری و تدریس) تعیین می‌گردد. نتایج به‌دست آمده از داده‌ها، خودْ مبانی نظری برای شروعِ سیکلِ بعدیِ تحقیق است. این روش، یک اتصال و انتقال مداوم و پویا بینِ مبانی نظری تحقیق و تجارب عملی در کلاس درس ایجاد می‌کند.

پروفسور پیلوت مثالی از آموزش شیمی را بیان کرد که در آن ارتباط تفکر خرد ـ کلان[15] مورد نظر بود. سپس از گروه‌ها خواسته شد در رابطه با موضوع بازیافت و براساس روش EDBR، اصول برنامه‌ی درسی برای دانش‌آموزان ۱۷ ساله را طراحی کنند.

سه‌شنبه ۱۹ آگوست

صبح:

کارگاه تفکر تابعی؛

معرفی دانشجویان؛

ناهار؛

بعد از ظهر؛

کارگاه A-lympiad.

سه‌شنبه شب میهمانی شامی برای دانشجویان و اعضای مؤسسه در یکی از رستوران‌های شهر تدارک دیده شده بود.

تفکر تابعی

تابع یکی از مفاهیم نامأنوس و نسبتاً دشوار ریاضی برای دانش‌آموزان است. حتی اگر آن‌ها قادر به حل مسائل تابع باشند، باز درک عمیقی از آن نمی‌یابند.

در راستای دو اصلِ ریاضیات واقعی‌مدار؛ یعنی: اتصال با واقعیت و روند بازآفرینیِ هدایت‌شده؛ یک گروه مطالعاتی از مؤسسه‌ی فرودنتال، اقدام به انجام طرحی تحقیقاتی در رابطه با آموزش تابع نموده است.

تأکید عمده‌ی این پروژه، استفاده از ابزار (به‌ویژه نرم‌افزار کامپیوتری) برای ایجاد تفکر تابعی، آموزش مفهوم تابع و ارتباط آن با رشد شناختی و تجربه‌ی اجتماعی دانش‌آموزان است. گروه هدف، دانش‌آموزان ۱۳ یا ۱۴ ساله‌ی هلندی می‌باشند. طراح آموزشی، یک سری تکالیف و مسائلی را طرح می‌کند که طی فرآیند تدریجی و هدایت شده، زمینه را برای بازسازی مفهوم تابع در ذهن دانش‌آموز فراهم آورد.

در فاز طراحی این پروژه، از ایده‌ی کمان‌های جبری یا AA[16] استفاده شده است. این‌ها زنجیره‌هایی از خروجی‌ها و ورودی‌ها به همراه عملیات گوناگون هستند، هر ورودی می‌تواند یک عدد یا یک متغیر باشد.

اولین فعالیت کارگاه، تخمین مساحت یک چهار ضلعی (متوازی‌الاضلاع) با استفاده از یک کاغذ شطرنجی و یک متوازی‌الاضلاع بود که زوایای آن از محل رئوس قابل تغییر بودند. هدف این فعالیت، تأثیر تغییرات اندازه‌ی ارتفاع روی اندازه‌ی مساحت و قطر متوازی‌الاضلاع (بدون به‌کارگیری فرمول مساحت)، بود (مساحت به‌عنوان تابعی از اندازه‌ی ارتفاع).

قسمت بعدی فعالیت، مربوط به محاسبه‌ی تعرفه‌های موبایل و انتخاب سرویس مناسب با توجه به تعرفه‌های گوناگون بود. با انجام این فعالیت، دانش‌آموز به سمت ساخت رابطه و انجام محاسبات سوق داده می‌شود.

مثال بعدی، محاسبه‌ی مسافت طی‌شده پس از ترمز یک موتور و ارتباط آن با سرعت حرکت موتور را مطرح می‌کرد (مسافت طی شده پس از ترمز به‌عنوان، تابعی از سرعت موتور است.) در این جا از ابزار جدول و نمودار استفاده شده بود به‌طوری که دانش‌آموز در ایجاد ارتباط بین نمودار، جدول و محاسبات، توانایی یابد.

در فعالیت دوم، ایده‌ی زنجیره‌های کمان‌های جبری معرفی می‌شد: به‌جای محاسبات مکرر، می‌توان زنجیره‌ای از عملیات جبری را جایگزین کرد. (مثلاً پس از چندین بار محاسبه‌ی مساحت در فعالیت یک، می‌توان نتیجه گرفت که مساحت متوازی‌الاضلاع می‌شود حاصل ضرب قاعده (در مثال: ۱۰) در ارتفاع، یا به جای تکرار محاسبه تعرفه‌ی موبایل به قرار هر ماه ۷/۵ یورو شارژ ثابت و ۲۵ سنت برای هر دقیقه مکالمه، می‌توان برای موارد مختلف، زنجیره‌ی کمان‌های جبری را جایگزین کرد.)

در ادامه، تعدادی کارت در اختیار گروه‌ها قرار گرفت. درتعدادی از کارت‌ها جدول، در برخی نمودار، پرسش و یا زنجیره‌ی کمان‌های جبری (ورودی ـ خروجی) وجود داشت. افراد باید کارت‌های مربوط به پرسش، زنجیره‌ی کمان جبری، جدول و نمودار را با هم جور می‌کردند.

مرحله‌ی بعدی، کار با نرم‌افزار تهیه شده در این رابطه بود. در نرم‌افزار مربوطه، امکان تشکیل جدول و رسم نمودار نیز وجود دارد. نرم‌افزار به گونه‌ای طراحی شده است که به‌خوبی دانش‌آموز را در جهت انتقال از مرحله‌ی محاسبات عددی به مرحله‌ی استدلال، تعمیم و تجرید هدایت می‌کند. این نرم‌افزار دارای تکالیف مختلف و هر تکلیف دارای سطوح مختلفی از ساده به دشوار می‌باشد. فعالیت‌های دانش‌آموز در فایل مخصوصی به‌نام خود وی ذخیره شده و معلم قادر به بازبینی آن‌ها و ارزیابی کارهای دانش‌آموزان در کامپیوتر خود می‌باشد. چنین امکانی را محیط دیجیتالی آموزشی به‌وجود می‌آورد که خود، موضوع کارگاه دیگری از این دوره بود.

در این کارگاه، شرکت‌کنندگان به انجام تکالیف مختلف از این نرم‌افزار پرداخته و چگونگی ساخت تفکر، تابعی از ابزار کمان‌های جبری را مستقیماً تجربه کردند.

این کارگاه (و کارگاه‌های مشابه مثل DME)، بسیار جذاب بودند به‌طوری که هیچ‌یک از افراد در پشت کامپیوترها، متوجه پایان کلاس و ساعت ناهار نشدند.

A-lympiad

A-lympiad نوعی آزمون باز پاسخ است. صورت مسائل، اغلب یک موقعیت از جهان واقعی را تشریح می‌کند و داده‌های مسئله، بسیار زیاد و گیج‌کننده است. از آن‌جا که ممکن است هرگز به پاسخی کامل، صحیح و دقیق نرسیم، ارزیابی نتیجه‌ی کار برای داوران کاری دشوار است.

این آزمون از سال ۱۹۸۹ هر ساله در مدارس هلند در دو نوبت برگزار می‌شود. طراح و سازمان‌دهنده‌ی آزمون، مؤسسه‌ی فرودنتال می‌باشد.

آزمون نوبت اول، بین تقریباً هزار تیم دانش‌آموزی در داخل مدارس یک روز از صبح تا بعداز ظهر برگزار می‌شود. در نوبت دوم، شانزده تیم برگزیده از مدارس مختلف به رقابت می‌پردازند. در پایان هر آزمون، دانش‌آموزان نتایج کار خود را به شکل یک گزارش کتبی ارائه می‌دهند. این آزمون در گروه‌های سه یا چهار نفره‌ی دانش‌آموزی در رده‌ی سنی ۱۶ تا ۱۸ سال برگزار می‌شود.

چرا A-lympiad؟

برنامه‌ی درسی ریاضی در مدارس هلند تحت دو عنوان A و B ارائه می‌شود. از ابتدا بنابراین بود که ریاضیات A بیش‌تر با مدل‌ها، مسائل واقعی و ریاضیات کاربردی سر و کار داشته و کمتر به مباحث ریاضیات محض و استدلال ریاضی‌وار بپردازد علاوه بر آن به فرآیند پاسخ‌دهی بیش از پاسخ نهایی اهمیت داده شود. اما به مرور زمان، ریاضیات A اهداف و انگیزه‌های اولیه‌ی خود را از دست داد و آن‌چه در آزمون‌های نهایی و در مسائل باز پاسخ مطرح شده‌ی در آن‌ها مورد توجه قرار می‌گرفت، جواب نهایی و محاسبات بود. A-lympiad تلاشی است برای احیای اهداف اولیه‌ی ریاضیات A.

برخی از کشورهای خارجی این آزمون را در کشورهای خود برگزار کرده‌اند؛ از جمله خانه‌ی ریاضیات اصفهان که یک دوره برگزارکننده این آزمون در ایران بوده است.

یکی از هیجان‌انگیزترین کلاس‌ها، کارگاه A-lympiad بود. گروه‌ها سه یا چهار نفره، حدود ۴ ساعت به رقابت پرداختند تا تنها یک پرسش آزمون مقدماتی سال ۱۹۹۵-۱۹۹۶ را (آن هم با شرایط ساده‌تر مسئله)، حل کرده و فرآیند کار خود را به شکل یک گزارش، ارائه دهند. در این کارگاه با نوع سؤالات، نحوه‌ی برگزاری و نحوه‌ی ارزیابی نهایی این آزمون، آشنا شدیم.

چهارشنبه ۲۰ آگوست

صبح:

کارگاه محیط ریاضی دیجیتالی؛

کارگاه آموزش همبستگی و رگرسیون؛

ناهار؛

بعد از ظهر:

کارگاه تجربه‌ی هلند، ادعا یا عمل؟

کارگاه اثبات کردن یا اثبات نکردن؟

محیط ریاضی دیجیتالی

تسلط بر مهارت‌های ریاضی برای بسیاری از دانش‌آموزان امری دشوار است. برای کمک به چنین دانش‌آموزانی و برای معنادار ساختن مفاهیم ریاضی در دوره‌ی راهنمایی و دبیرستان، مؤسسه‌ی فرودنتال برنامه‌های مختلفی از جمله نرم‌افزارها و اَپلت‌های جاوا با قابلیت تعامل دو سویه را فراهم کرده است.

این برنامه‌ها دو قابلیت دارند:

الف. دانش‌آموزان را قادر می‌سازند تا فعالیت‌های صوری ریاضیات را با مفاهیم درونی، به طریقی معنادار پیوند زنند؛

ب. امکان انجام تکالیف و تمرین‌های مختلف توسط دانش‌آموز و نیز امکان دریافت پس‌خورد و امتیازدهی در یک فضای بازی‌گونه را فراهم می‌آورد.

این برنامه‌های جاوا در یک محیط یادگیری مجازی یا DME[17] به کار گرفته شده‌اند که در آن، اطلاعات مربوط به نتایج فعالیت‌های دانش‌آموزان، گردآوری و نگه‌داری می‌شود.

در DME، هر دانش‌آموز به یک سرور مرکزی متصل شده و با یکی از اپلت‌های جاوا کار می‌کند و پس‌خوردی از فعالیت‌های خود دریافت می‌نماید، در عین حال، فعالیت‌های دانش‌آموز و نتایج تکالیف در سرور مرکزی ذخیره می‌شود.

در این محیط، دانش‌آموز می‌تواند هر زمان و هر جایی که به اینترنت دسترسی داشته باشد، کار خود را بازبینی، تصحیح و یا تکمیل کند.

معلم نیز می‌تواند کار دانش‌آموزان را ارزیابی کرده و بر مراحل یادگیری دانش‌آموزان نظارت داشته باشد. علاوه بر این، معلممی‌تواند تکالیف و تمرین‌های جدیدی را برای کل کلاس و یا گروه خاصی طراحی کرده و از طریق این محیط در اختیار آن‌ها قرار دهد.

در کارگاه DME، هر یک از ما یک‌بار در نقش دانش‌آموز به سرور اصلی وصل شده و تکالیفی را انجام می‌دادیم و بار دیگر در نقش معلم، کلاس خود را در فضای مجازی ایجاد کرده و نام دانش‌آموزان خود را در لیست کلاسی وارد کردیم. سپس نحوه‌ی ارزیابی کار دانش‌آموزان در محیط مجازی را تجربه نمودیم.

آموزش همبستگی و رگرسیون

پرسش این کارگاه این بود: آیا دانش‌آموزان می‌توانند حین بررسی تجارب واقعی، (با هدایت) به مفهوم رگرسیون و همبستگی برسند؟

فعالیت اول مربوط می‌شد به جابه‌جایی سطح خاکریزها. هلند کشوری‌ست پایین‌تر از سطح دریا. در نتیجه برای جلوگیری از نفوذ آب، خاکریزها و سدهایی در اطراف دریا ساخته می‌شود. پروژه‌های ملی متعددی در این رابطه تعریف شده است. از جمله دانشگاه دلفت[18] طی یک پروژه‌ی تحقیقاتی، از طریق ماهواره به جمع‌آوری داده‌های مربوط به تغییرات ارتفاع خاکریزها و میزان جابه‌جایی خاک در نقاط مختلف پرداخته است.

نمودارهایی از این داده‌ها (به شکل نقاط منفصل در صفحه) در اختیار گروه‌ها قرار گرفت. طی پرسش‌های مطرح شده در فعالیت، مفهوم خط رگرسیون و نیز همبستگی بین داده‌ها بازسازی می‌شد.

فعالیت‌های بعدی به علت ذیق‌وقت انجام نشد.

تجربه‌ی آموزش در هلند: ادعا یا عمل؟

رویکرد آموزش ریاضیات واقعیت‌مدار که مؤسسه‌ی فرودنتال، پیشگام طرح و اجرای عملی آن بوده است؛ در نظام مدرسه‌ای هلند جایگاه ویژه‌ای دارد.

معنای چنین رویکردی، چنان‌که پیش‌تر ذکر شد، تنها به معنی حل مسائل روزمره از جهان واقعی نیست. در این رویکرد، بنابراین است که دانش‌آموزان ابزار ادراکی و مفاهیم ریاضی خود را توسعه دهند تا از سطح درک غیر صوری[19] به درک پیش‌صوری[20] و سرانجام سطح درک صوری[21] برسند.

ولی همواره این ابهام وجود دارد که آیا نظام مبتنی بر آموزش ریاضیات واقعیت‌مدار تنها به ریاضیات کاربردی بسنده می‌کند؟ آیا تعلیم مفاهیم مجرد، ریاضیات صوری و ریاضیات محض با چنین رویکردی، تنها در حد یک ادعا باقی می‌ماند؟ و آیا خطر

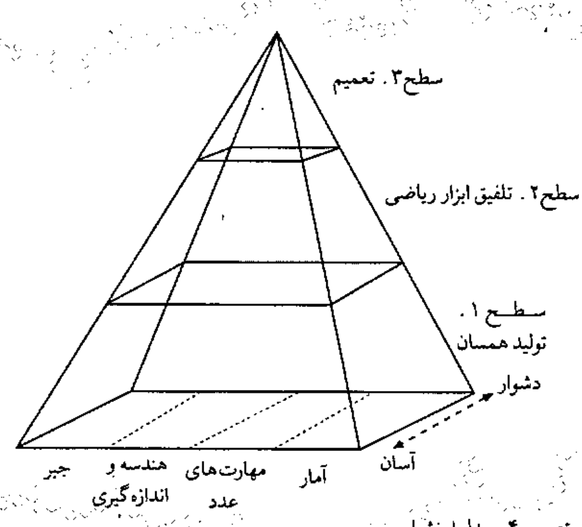
سطحی‌نگری در ریاضیات با چنین رویکردی وجود دارد؟

کارگاه «تجربه‌ی آموزش در هلند: ادعا یا عمل؟» مدلی برای ارزشیابی از سطوح بالاتر تفکر را معرفی نموده و به تجزیه و تحلیل برخی از سؤالات آزمون‌های ملی ریاضیات در مدارس هلند پرداخت. در این بررسی‌ها، تفاوت سطوح مختلف ریاضی در پرسش‌های امتحانی تبیین شد.

مدل ارائه شده به شکل هرمی است که سه سطح تفکر ریاضی را نمایش می‌دهد. پرسش‌های آزمون‌های ملی ریاضیات در هلند، چهار موضوع جبر، هندسه و اندازه‌گیری، مهارت‌های عددی و آمار را دربر می‌گیرد.

پرسش‌ها برای هر یک از این موضوعات در سح سطح تولید همسالان[22]، تلفیق ابزار ریاضی[23] و تعمیم[24] و از سطح آسان تا دشوار طراحی می‌شود. دشوار بودن یک سؤال به معنی این نیست که سطح بالاتری از ریاضیات را مورد سنجش قرار می‌دهد.

در بررسی برخی از پرسش‌های آزمون ملی ریاضی به این تفاوت‌ها پرداخته شد.



تصویر ۴. مدل ارزشیابی

اثبات کردن یا اثبات نکردن، پرسش این است

این کارگاه، اهمیت ریاضی سازی افقی و عمودی و مقایسه‌ی این دو را در **اثبات** بررسی می‌کرد. پرسش ابتدای کلاس چنین بود:

الف) آیا نامساوی زیر برقرار است؟

$$\frac{۱}{۳} < \frac{۱+۳}{۳+۷} < \frac{۳}{۷}$$

ب ـ آیا می‌توان نشان داد که همواره

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

پاسخ به قسمت(ب)، نیاز به اثبات دارد. اکثریت قریب به اتفاق شرکت کنندگان، دست به قلم شده و با جابه‌جایی نمادها، محاسبات کسرها و عملیات ریاضی، به اثبات آن پرداختند. (که البته کار دشواری نیست). اثبات‌ها به نظر بی‌نقص و کامل بود و قطعاً می‌شد به آن نام اثبات ریاضی را اتلاق کرد. عملیات و استدلال انجام شده بنا بر تعریف ریاضیات واقعیت مدار، ریاضی‌سازی عمودی محسوب می‌شود. آنچه اصلاً مورد توجه قرار نگرفت، ریاضی‌سازی افقی بود. دکتر هرتوگ، برای توضیح یا اثبات نامساوی فوق، از یک موقعیت واقعی (چنان‌چه متداول است، تقسیم پیتزا) استفاده کرد. توضیحات، روشن و قانع کننده بود ولی آیا می‌شد نام اثبات ریاضی بر آن گذاشت؟ در ادامه روی این موضوع بحث شد که اثبات می‌تواند در دو سطح محسوس و مجرد اتفاق بیفتد.

پنج‌شنبه ۲۱ آگوست

صبح: کارگاه تاریخ در آموزش ریاضی؛

ناهار؛

بعد از ظهر:

کارگاه ساخت لگاریتم با روند طبیعی؛

معرفی دانشجویان.

تاریخ در آموزش ریاضی

در این کارگاه، که توسط رئیس مؤسسه‌ی فرودنتال، پروفسور جان ون منن ارائه شد، اهمیت استفاده از تاریخ ریاضیات در آموزش ریاضیات مورد بررسی قرار گرفت. نسخه‌ای از تصویر پاپیروس ریند که متعلق به ۱۸۰۰ سال پیش از میلاد مسیح است در اختیار هرگروه قرار گرفت و از افراد خواسته شد تا علائم موجود در آن را رمزگشایی کنند. این پاپیروس حاوی صورت و راه‌حل یک مسئله‌ی ریاضی است. پس از این‌که معنای نمادهای مربوط به اعداد و عملیات ریاضی، کمابیش و با زحمت بسیار آشکار شد، معلوم شد که قصد نویسنده از این محاسبات عریض و طویل، به‌دست آوردن یک کسر ساده، برحسب کسرهای شناخته شده‌ی آن دوره بوده است.

بحث‌های بعدی، حول این موضوع بود که تاریخ ریاضیات تا چه اندازه در تقویت انگیزه، تعمیق یادگیری و ارتباط بین مفاهیم گوناگون، مؤثر است.

ساخت لگاریتم با روند طبیعی[25]

کسانی که کتاب ریاضی(۲) سال دوم دبیرستان را تدریس کرده‌اند به خوبی آگاهند که ایجاد ارتباط بین مبحث لگاریتم و تجارب شخصی دانش‌آموزان، امری دشوار است. کارگاه لگاریتم، یکی از مفیدترین و جالب‌ترین کلاس‌های این دوره بود. باز هم محور اصلی فعالیت‌ها، ریاضی‌سازی گام به گام و حرکت از محسوسات به مجردات بود. گروه‌ها روی هر یک از دو فعالیت A و B تقریباً ۲۰ دقیقه کار کرده و پس از پایان هر فعالیت حدود ۱۰ دقیقه بحث می‌کردند. طی انجام این فعالیت‌ها، شرکت کنندگان مراحل یادگیری تدریجی و سیر طبیعی ساخت مفهوم لگاریتم در ذهن را تجربه می‌نمودند.

در هر یک از فعالیت‌ها، مسئله‌ای طرح شده بود که تفاوت‌های بین رشد خطی و رشد نمایی را نمایش می‌داد. در فعالیت اول، مفهوم رشدنمایی از طریق محاسبه‌ی مقادیر عددی، پر کردن جدول و رسم نمودار نمایانده می‌شد. از طریق مقایسه‌ی مقادیر عددی، جدول و نمودارها می‌شد به تفاوت مفهوم رشد خطی و رشد نمایی یک تابع پی برد. در فعالیت دوم خواص، قوانین و حتی معادله‌ی لگاریتمی، طی تمرین‌ها و محاسبات عددی معرفی می‌شد. ایجاد مهارت در نمودارخوانی، استفاده از حدس و محاسبات تخمینی از فواید دیگر این دو فعالیت بود. نکته‌ی قابل توجه این که تا پایان هر دو فعالیت که عملاً به مفاهیم، قوانین و خواص لگاریتم پرداخته بود، نامی از لگاریتم دیده نمی‌شد.

صورت مسئله و بخشی از فعالیت A ذیلاً آورده شده است.

A ـ اندی و فرد هر یک کره اسبی را در یک روز خریداری می‌کنند، هر ماه، کره اسب فرد ۱۰ کیلوگرم و کره‌اسب اندی ۲۰٪ وزن اولیه رشد می‌کند.

A1 ـ با همان روند رشد، پس از دو ماه وزن هر کره اسب چه‌قدر خواهد بود؟

A3 ـ با همان روند رشد، جدول زیر را پر کنید.

A4 ـ با استفاده از مقادیر جدول، نمودار رشد هر یک را رسم کنید.

سؤالاتی که در ادامه مطرح می‌شد، تمرینی بود برای بالاتر بردن مهارت نمودار خوانی، استدلال تخمینی، استفاده از حدس و گمان و عقل سلیم دانش‌آموزان در رابطه با مفهوم لگاریتم.

جمعه ۲۲ آگوست

صبح:

کارگاه

جبر با معنا؛

بازی و ریاضی؛

ناهار؛

بعد از ظهر:

مشاهده در کلاس درس؛

معرفی دانشجویان؛

مراسم پایانی.

تعداد ماه‌هایی که از خرید اسب گذشته است	وزن کره‌اسب فِرِد	وزن کره‌اسب اَندی
۰	۵۰	۵۰
۱	۵۰+۱۰=۶۰	۵۰+۰/۲۰×۵۰=۶۰
۲	۶۰+۱۰=	۶۰+۰/۲۰×۶۰=
۳		
۴		
۵		
۶		

جبر با معنا

شعارهای جبر با معنا چنین است:

ریاضیات بدون مهارت هرگز

مهارت بدون بینش هرگز

تکالیف ریاضیات با معنا، زمینه‌ای است برای پرورش این دو.

آن‌چه از جبر با معنا آموخته می‌شود این است که

ساختن یک قانون، مهم‌تر از به کارگیری یک قانون از پیش ساخته شده است

قوانین استاندارد هرگز جایگزین عقل سلیم نیستند

عجله نکنید! مسائل خوب طراحی شده، در گام‌های متوالی، به خودی خود منجر به فرمول‌سازی شده و به جای مهارت، بینش را رشد می‌دهند. *

در یک تحقیق انجام شده در مدارس هلند، از دانش‌آموزان خواسته شده بود به سؤالات زیر پاسخ دهند:

۱. نمودار مربوط به معادله‌ی $y=(x-2)^2+3$ سهمی است، چگونه این را از روی معادله می‌فهمید؟

۲. نمودار سهمی فوق محور طول‌ها را قطع نمی‌کند، چگونه این را بدون رسم نمودار در می‌یابید؟

۳. معادله‌ی سهمی قسمت ۱ را طوری تغییر دهید که محور طول‌ها را در دو نقطه قطع کند.

۴. معادله‌ی سهمی قسمت ۱ را طوری تغییر دهید که محور طول‌ها را در یک نقطه قطع کند.

۷۸٪ دانش‌آموزان به سؤالات ۱ و ۲، پاسخ صحیح داده بودند در حالی که به سؤالات ۳ و ۴ به ندرت پاسخ صحیح داده شده بود. در پاسخ به پرسش‌های ۱ و ۲، بیش‌تر از محاسبات استفاده شده بود تا از تجزیه و تحلیل خود فرمول معادله.

در یک فعالیت انجام شده در کارگاه، از گروه‌ها خواسته شد تا تعدادی از توابع و معادلات درجه دومی که در اختیارشان قرار گرفته بود را بنا بر الگوی خودشان دسته‌بندی کنند.

در جبر معنادار، فعالیت‌ها باید به گونه‌ای طراحی شود که دانش‌آموزان قدرت دسته‌بندی، الگویابی، استدلال و توضیح، خلاقیت و انجام تکالیف در جهت عکس را داشته باشند (مانند پرسش‌های ۳ و ۴).

تمرین‌های با معنا آن‌هایی هستند که استدلال و تمرین مهارتی را تواماً داشته باشند، ساختنی[26] و مفید باشند و کمتر به تولید هم‌سان[27] منجر شوند. در این راستا، کتاب جبر مثبت[28] از انتشارات مؤسسه‌ی فرودنتال، که برای گروه سنی دبستان تهیه شده است، در اختیار شرکت‌کنندگان قرار گرفت. (در این کتاب مفاهیم جبری به شکل شهودی و گاه هندسی بیان شده‌اند؛ از این رو با اعداد مثبت سروکار دارد و به همین دلیل نام کتاب را جبر مثبت گذاشته‌اند.)

در این کارگاه وسیله‌ای به نام Tangle (هدیه‌ای از شعبه‌ی آمریکایی مؤسسه) معرفی شد که از ۱۸ قطعه‌ی جداشدنی تشکیل شده است. اگرچه مورد مصرف این وسیله، از ابتدا ریاضی نبوده است؛ ولی می‌توان تمرین‌های جالبی را با آن طراحی کرد که مفاهیم عمیقی از ریاضیات را در برمی‌گیرند. مثلاً این که: **چرا تنها وقتی تعداد قطعات مضرب ۴ است می‌توان منحنی‌های مسطح ساخت؟ و یا برای n=۴، ۸، ۱۲، ۱۶، وقتی تعداد قطعات معلوم است، کمترین و بیش‌ترین مساحت محصور داخل منحنی‌ها چقدر است؟**

تصویر ۵. نمونه‌ای از یک Tangle،
نویسنده یکی از این وسیله‌ها را به رسم یادبود از مؤسسه دریافت کرد.

چالشی در بازی‌های ریاضی

آیا می‌توان بازی و آموزش را تلفیق کرد؟ این پرسش اصلی کارگاه «چالشی در بازی‌های ریاضی» بود. ابزار کار، هم‌چون اغلب اوقات، کامپیوتر بود. بر خلاف کارگاه DME و تفکر تابعی، در این جا آموزش با بازی، هدایت شده و کنترل شده نبود. حتی اغلب بازی‌های کامپیوتری به ظاهر ارتباطی با هیچ موضوع خاص ریاضی نداشتند. بازی‌های معرفی شده در سایت www.thinkle ts.nl موجود است. آموزش با اغلب این

بازی‌ها برای سال‌های پایین‌تر مناسب است، با این وجود بازی‌هایی نیز وجود دارد که مدت‌ها وقت افراد بزرگ‌سال را می‌گیرد. بازی‌ها برای گروه سنی ۱۰ تا ۱۲ سال جذاب است. این جذابیت تصادفی نیست. یک گروه تحقیقاتی از مؤسسه‌ی فرودنتال بر روی تعداد دفعات استفاده از سایت و از بازی‌ها، آمار استفاده از انواع بازی‌ها در مکان‌های مختلف (منزل، مدرسه و...) و نتایج نظرسنجی‌های کتبی و شفاهی از کاربران مطالعه می‌کنند. بازی‌ها به گونه‌ای طراحی شده‌اند که برای افراد استفاده کننده، ساده و خسته کننده یا دشوار و پیچیده نباشند.

مشاهده در کلاس درس

عنوان کارگاه، مشاهده در کلاس درس بود. کلیپ ویدئویی کوتاهی از یک کلاس پیش‌دبستانی پخش شد. چند کودک پنج ساله به همراه مربی خود، انعکاس تصویر یک شیء در دو آینه‌ی عمود بر هم را تجربه کرده و در مورد آن بحث می‌کردند. این ویدئو کلیپ چندبار پخش شد و از ما خواسته شد مشاهدات دقیق و تفسیر خود را پس از هر بار پخش، بیان کنیم. منظور از این کارگاه، بیان اهمیت استفاده از رسانه و مشاهده‌ی دقیق اتفاقات کلاس درس توسط آموزگاران بود. مشاهده‌ی دقیق، بحث بر روی مشاهدات، تعبیر و تجزیه و تحلیل آن‌ها، نتیجه‌گیری و تعمیم یافته‌ها، مهارت‌های مفیدی است که می‌توان آن‌ها را به آموزگاران آموخت و بدین طریق، فاصله‌ی بین کلاس درس و محیط تحقیقاتی؛ تئوری و عمل؛ و محقق و آموزگار را کم‌تر کرد.

مراسم خداحافظی

در بعد از ظهر روز ۲۲ آگوست، میهمانی خداحافظی برگزار شد. گروه ۱۴ نفره کلاس، به همراه اساتید و برخی از اعضای دیگر مؤسسه، در سالن طبقه‌ی پایین محل برگزاری کلاس‌ها، گرد هم آمدند. حین صرف عصرانه‌ای که مؤسسه تهیه دیده بود، پروفسور Eijkehhof، Tom Goris، دکتر Hertog و دکتر خردپژوه (رئیس خانه‌ی ریاضیات اصفهان) در یک فضای دوستانه سخنرانی کردند و مدارک حضور در این دوره توسط پروفسور Eijkelhof اعطا شد. مراسم پس از عکس‌های یادگاری و خداحافظی شرکت‌کنندگان پایان یافت.

پی‌نوشت

1. Realistic
2. Realistic Math Education, RME
3. Pre-Vocational Secondary Education
4. Senior General Secondary Educatiobn
5. Pre-University Education
6. Flsme
7. Dynamic
8. Mathematization
9. Treffers
10. Horizontal Mathematization
11. Vertical Mathematization
12. Pilot
13. Educational Design-Based Research
14. Cyclic
15. Micro-macro
16. Algebra Arrows
17. Digital Mathematic Environment
18. Delft
19. Informal
20. Pre-formal
21. Formal
22. Reproduction
23. Integrating Mathematical Tools
24. Generalizing

۲۵. این ساخت، قبلاً در کتاب ریاضی پایه‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی علوم انسانی آمده است.

26. Constructive
27. Reproduction

*: (متأسفانه برخی از کلاس‌های ریاضی در ایران با تسریع زمان یادگیری موجب تجرید زودرس حتی در مقطع دبستان شده و با معرفی فرمول‌های ریاضی دوره‌ی دبیرستان برای دوره‌ی راهنمایی و یا دوره‌ی راهنمایی برای دوره‌ی دبستان، مفتخرانه سواد ریاضی مدرسان آموزشگاه خود را به رخ والدین و دانش‌آموزان می‌کشند. چه بسیار والدین ناآگاهی که خوشحالند فرزندشان ریاضی دوم راهنمایی را در کلاس پنجم دبستان می‌خواند! و البته معلوم است که با صرف هزینه و وقت بسیار و با همکاری قاطعان طریق دانش‌آموزی، چه بر سر خرد درونی و عقل سلیم فرزندان خود می‌آورند!)

توضیح: شاید واژه‌ی مناسب‌تری از ترجمه‌ی «آموزش ریاضیات واقعیت‌مدار» برای Realistic Mathematics Education وجود داشته باشد، ولی نویسنده از آن ناآگاه است و از پیشنهاد خوانندگان سپاسگزار خواهد شد.

چکیده‌ی پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد آموزش ریاضی

موضوع: بررسی رفتار دبیران ریاضی دوره‌ی راهنمایی تحصیلی نسبت به تغییر کتاب‌های درسی ریاضی در شهرستان ساوه

نام پژوهشگر: زهره کتابدار
تاریخ دفاع: ۸۷/۶/۱۴
استاد راهنما: دکتر محمدرضا فدائی
استاد مشاور: دکتر نعمت‌ا... موسی‌پور
داوران: دکتر محمود محسنی‌مقدم و دکتر مهدی رجبعلی‌پور
دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد کرمان.

چکیده

ریاضیات در برنامه‌های درسی، جایگاه ویژه‌ای دارد. حجم، نوع رویکرد، روش‌ها، محتوا، و... دائم در حال تغییر هستند. ولی آن‌چه ثابت می‌باشد، حضور مؤثر و همیشگی ریاضی در برنامه‌های درسی است. با توجه به اهمیت برنامه‌ی درسی ریاضی در برنامه‌ی آموزشی، متخصصین آموزشی دائماً برنامه‌های درسی ریاضی را مورد بازنگری قرار می‌دهند و تغییراتی جهت اصلاح در برنامه‌های درسی ایجاد می‌کنند. از آن جمله تغییرات در سال ۸۲-۱۳۸۱ در کتاب درسی ریاضی سال اول دوره‌ی راهنمایی و سال بعد در کتاب ریاضی سال دوم راهنمایی و سال بعد از آن در کتاب ریاضی سال سوم راهنمایی ایجاد شد. این تغییرات شامل افزوده شدن قسمت‌هایی به نام حل مسئله و فعالیت می‌باشد، که هدف از ایجاد تغییرات، حرکت از سوی معلم‌ـمحوری به سمت دانش‌آموزـمحوری در کلاس‌های درس و ایجاد توانایی بیش‌تر حل مسئله در دانش‌آموزان می‌باشد.

تغییرات به‌وجود آمده در کتاب‌های درسی ریاضی دوره‌ی راهنمایی بر پایه‌ی دانش‌آموز ـ محوری است و نیازمند فعالیت دانش‌آموزان در کلاس می‌باشد. براساس این تغییرات، انجام بسیاری از فعالیت‌ها و حل مسئله‌ها بر پایه‌ی گروه‌های کوچک دانش‌آموزی صورت گرفته است.

در این پژوهش ابتدا به معرفی تغییرات کتاب‌ها و سپس به بررسی رفتار دبیران ریاضی دوره‌ی راهنمایی در برابر تغییرات اخیر کتاب‌ها پرداخته می‌شود. این پژوهش، به شیوه‌ی پژوهش پدیدارنگاری می‌باشد و در بین دبیران ریاضی با سابقه‌ی بیش از هشت سال در شهرستان ساوه صورت گرفته است. داده‌های این پژوهش از طریق مصاحبه و ضبط فیلم و صدا جمع‌آوری شدند که از طریق کدگذاری، تجزیه و تحلیل گردیدند. نتایج حاصل از تحلیل داده‌ها نشان داد که تغییرات کتاب‌های ریاضی در حالی صورت گرفته است که معلمان، اطلاع چندانی از تغییرات و نحوه‌ی اجرای آن‌ها در کلاس درس ندارند. در پایان پژوهش، پیشنهادهایی جهت رفع مشکلات معرفی شده است.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ی درسی، تغییرات کتاب‌های درسی، حل مسئله، فراشناخت، سومین مطالعه‌ی بین‌المللی ریاضی و علوم (TIMSS)، آموزش ضمن خدمت.

موضوع: بررسی تأثیر تدریس راهبردهای شناختی و فراشناختی بر روی حل مسئله‌ی ریاضی در دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی شهرستان بم.

نام پژوهشگر: طیبه کاظمی نژاد

تاریخ دفاع: ۸۷/۷/۲۳

استاد راهنما: دکتر محمدرضا فدائی

استاد مشاور: دکتر داوود ریحانی

داوران: دکتر مهدی رجبعلی‌پور و دکتر محمود محسنی مقدم

دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد کرمان.

چکیده

با نگاهی به نتایج حاصل از پژوهش‌های مربوط به مهارت‌ها و راهبردهای شناختی و فراشناختی در ارتباط با یادگیری، به روشنی معلوم می‌شود که راهبردهای شناختی و فراشناختی در یادگیری و پیشرفت تحصیلی بسیار حیاتی هستند. هم‌چنین معلوم شده است که این مهارت‌ها، قابل آموزش و یادگیری‌اند. آموزش راهبردهای شناختی، یک رویکرد آموزشی است که بر توسعه‌ی مهارت‌های تفکر و فرایندها به منظور تسهیل در یادگیری تأکید می‌کند. هدف از آموزش راهبردهای شناختی، این است که همه‌ی دانش‌آموزان را در راهبردی‌تر شدن، اتکال به نفس و انعطاف‌پذیری، توانا سازد و تلاش‌های یادگیری‌شان را بارآور کند. هم‌چنین رویکردهای مختلفی برای آموزش فراشناختی و درگیری مؤثرتر یادگیرنده با دانش و فرایندهای شناختی و راهبردها و تجربه با شیوه‌ی استفاده از راهبردهای شناختی و فراشناختی و ارزیابی نتایج حاصل از تلاش‌ها (توسعه‌ی تنظیم فراشناختی) وجود دارد. با توجه به این‌که قسمت عمده‌ی این پژوهش، به منظور برقراری رابطه‌ی علت ـ معلولی میان متغیرها با انتخاب هدفمند گروه آزمایش و گواه بود، از طرح تحقیق شبه‌آزمایشی با گروه گواه استفاده شده است. آموزش راهبردهای شناختی و فراشناختی به‌عنوان متغیر مستقل، و عملکرد ریاضی یا به عبارت دیگر، یادگیری دانش‌آموزان به عنوان متغیرهای وابسته تعیین شدند. پرسش‌نامه‌ای مرکب از سؤال‌های شناختی و فراشناختی با مدد از مقالات لاتین و پرسش‌نامه‌ی موجود در پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد مرتبط با موضوع و براساس هدف‌ها و سؤال‌های تحقیق، تهیه شد و از نظر روایی و پایایی نیز مورد ارزیابی قرار گرفت. هم‌چنین بانک سؤالی شامل شاخصه‌های شناختی و فراشناختی موجود در پرسش‌نامه، ایجاد شد. در این پژوهش، ۲۸۲ دانش‌آموز دختر دوره‌ی راهنمایی تحصیلی شهرستان بم شرکت داشتند که به دو گروه آزمایش با ۱۳۰ نفر و گروه گواه با ۱۵۲ نفر تقسیم شدند. پس از آن، گروه آزمایش به مدت دو ماه تحت آموزش راهبردهای شناختی و فراشناختی قرار گرفت. سپس جهت بررسی فرضیه‌های تحقیق، از آزمون T همراه با نمودار جعبه‌ای برای مقایسه‌ی دو نمونه‌ی مستقل و آزمون پیرمن و اسپیرمن همراه با نمودار پراکنش استفاده شد. نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل داده‌ها نشان داد که آموزش راهبردهای شناختی و فراشناختی، باعث ارتقای توانایی‌های حل مسئله‌ی ریاضی در دانش‌آموزان می‌شود و باعث پیشرفت تحصیلی آن‌ها می‌گردد. با توجه به شناخت اولیه و ارزیابی‌های صورت گرفته نسبت به هر دو گروه آزمایش و گواه، دانش‌آموزان گروه آزمایش، در ارزشیابی پایانی، بهتر و موفق‌تر از دانش‌آموزان گروه گواه عمل کردند.

موضوع: نقش شهود در آموزش ریاضیات دبیرستانی

نام پژوهشگر: محمد ناظری

تاریخ دفاع: ۸۷/۱۰/۶

استاد راهنما: دکتر محمدرضا فدائی

استاد مشاور: دکتر سیدحسین علم‌الهدی

داوران: دکتر اسفندیار اسلامی و دکتر محمود فرهادیان
دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد کرمان.

چکیده

تقویت یادگیری معنی‌دار با استفاده از شهود، مواد، و وسایل آموزشی عینی و ملموس، هدف هر معلمی می‌تواند باشد. شهود به عنوان یک شمّ اولیه در فعالیت‌های ریاضی ظاهر می‌شود. بنابراین شهود، به عنوان مقدمه‌ای بر فعالیت‌های رسمی ریاضی، اهمیت خود را نمایان می‌سازد. پژوهش حاضر با موضوع «نقش شهود در آموزش ریاضیات دبیرستانی» در درس تابع سال دوم دبیرستان انجام شد. روش انجام پژوهش، شبه‌تجربی با محیط طبیعی کلاس درس بوده است. در کلاس شاهد، روش تدریس عادی درس تابع انجام شده است. در کلاس گواه، روش تدریس شهودی صورت گرفته است. هدف پژوهش، یافتن پاسخی برای این پرسش بود که «کاربرد مثال‌های شهودی در کیفیت‌بخشی آموزش درس تابع سال دوم دبیرستان چه میزان است؟»

این پژوهش دارای دو فرضیه‌ی اصلی و دو فرضیه‌ی صفر بوده است که فرضیه‌های اصلی عبارتند از:

۱. بین نمره‌ی ریاضی دانش‌آموزانی که بر مبنای شهود آموزش دیده‌اند با دانش‌آموزانی که تحت آموزش به شیوه‌ی غیرشهودی بوده‌اند (با کنترل عامل هوش)، تفاوت معنی‌داری وجود دارد.

۲. بین علاقه به درس ریاضی دانش‌آموزانی که آموزش شهودی دیده‌اند با دانش‌آموزانی که آموزش غیرشهودی دیده‌اند (با کنترل عامل شهودی) تفاوت معنی‌داری وجود دارد.

روش جمع‌آوری اطلاعات، ۲ آزمون محقق ساخته‌ی پیش‌آزمون و پس‌آزمون و هم‌چنین یک پرسش‌نامه‌ی احوال شخصی بوده است. برای تجزیه و تحلیل داده‌ها از نرم‌افزار Excel و Spss استفاده شده است.

فرضیه‌ی اول پژوهش در سطح ۰/۰۱ درصد معنی‌دار بود و فرضیه تأیید شد؛ یعنی پس از تدریس شهودی، تفاوت معنی‌داری میان میانگین دو گروه نمونه در کلاس گواه و آزمایش ایجاد شده است.

فرضیه‌ی دوم پژوهش که میزان علاقه به ریاضی در دو کلاس پس از انجام روش تدریس‌ها بود نیز با سطح معنی‌داری ۰/۰۰۲ تأیید گردید و این بدان معنی بود که علاقه به ریاضی پس از انجام روش تدریس شهودی بسیار بیش‌تر از روش تدریس غیرشهودی بوده است. نتایج پژوهش نشان داد که شهود در آموزش ریاضی نقش مؤثری دارد و بایستی از شهود به عنوان بال‌هایی جهت پرواز در عالم ریاضی استفاده کرد.

در این پژوهش، راهکارهایی جهت استفاده‌ی معلمین از شهود در درس تابع سال دوم دبیرستان ارائه شده است که از آن‌ها به عنوان تابلوی آموزشی یاد شده است.

موضوع: بررسی مقایسه‌ی روش‌های توضیحی، ساخت‌گرایی و تلفیقی در تدریس مفاهیم حدود انتگرال در دوره‌ی پیش‌دانشگاهی در شهرستان فردوس

نام پژوهشگر: سیدمهدی فروتن

تاریخ دفاع: ۸۷/۱۰/۶

استاد راهنما: دکتر محمدرضا فدائی

استاد مشاور: دکتر محمود فرهادیان

داوران: دکتر اسفندیار اسلامی و دکتر محمود محسنی مقدم
دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد کرمان.

چکیده

این تحقیق با هدف مقایسه‌ی اثرگذاری سه روش تدریس ساخت‌گرایی، توضیحی و تلفیقی در تدریس مباحث حد و انتگرال از موضوعات کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره‌ی پیش‌دانشگاهی در شهرستان فردوس، سال تحصیلی ۸۷-۸۶ انجام شده است.

جامعه‌ی مورد مطالعه، ۴۹ نفر از دانش‌آموزان پسر دوره‌ی پیش‌دانشگاهی در دبیرستان نمونه‌ی دولتی علامه طباطبایی شهرستان فردوس بود. با استفاده از ابزارهای مناسب، از بین ۴۹ نفر، سه گروه ۱۲ نفری همگن انتخاب شدند. برای گروه A روش

تدریس ساخت‌گرایی، گروه B روش تدریس توضیحی و گروه C روش تدریس تلفیقی توسط خود محقق اجرا شد.

فرضیه‌های تحقیق با توجه به هدف پژوهش برای مقایسه‌ی سه روش تدریس مذکور تدوین گردید. برای آگاهی از نتایج سه روش تدریس، آزمونی متشکل از ۷ سؤال در سطوح مختلف حیطه‌ی شناختی بلوم طرح شد و در اختیار دانش‌آموزان قرار گرفت. نمرات دانش‌آموزان در هر سه گروه با هم مقایسه شد. در تجزیه و تحلیل نمرات، از آمار توصیفی و نیز آمار استنباطی شامل تحلیل واریانس یک طرفه و آزمون توکی با بهره‌گیری از نرم‌افزارهای SPSS و Excel استفاده شد و نتایج زیر به دست آمد.

۱. بین نمرات دانش‌آموزانی که کلاس درس آن‌ها به روس ساخت‌گرایی یا تلفیقی رهبری شده بود، با دانش‌آموزانی که کلاس درس آن‌ها به روش توصیفی بود، در پاسخ به سؤالاتی که در حد بالای حیطه‌ی شناختی بودند، تفاوت معنی‌داری در سطح $P<0/05$ وجود دارد. لذا اثرگذاری روش‌های ساخت‌گرایی و تلفیقی در مقایسه با روش تدریس توضیحی در پاسخ‌گویی به چنین سؤالاتی بیش‌تر است.

۲. بین میانگین نمرات دانش‌آموزان گروه‌های A و B و C در پاسخ به سؤالاتی در سطوح اولیه‌ی حیطه‌ی شناختی، تفاوت معنی‌داری مشاهده نشد لذا اثرگذاری این سه روش در پاسخ به سؤالای در سطح کتاب درسی تقریباً یکسان است.

موضوع: درک دانش‌آموزان از مفهوم اصلی تابع

نام پژوهشگر: بی‌بی‌زکیه پرهیزگار

تاریخ دفاع: آبان ۱۳۸۷

استاد راهنما: دکتر زهرا گویا

استاد مشاور: دکتر امیرحسین اصغری

دانشگاه شهید بهشتی تهران.

چکیده

تابع، یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضیات است که گوناگونی تفسیرها و بازنمایی‌هایش شگفت‌آور است. سیر تحول توسعه‌ی مفهوم تابع، تاریخی طولانی و پرفراز و فرود دارد که منجر به ایجاد بازنمایی‌های مختلف تابع شده است. بدین جهت، محققین به این نتیجه رسیده‌اند که توانایی شناسایی و نمایش یک مفهوم ریاضی از جمله تابع در بازنمایی‌های مختلف، و انعطاف در حرکت از یک بازنمایی به بازنمایی دیگر، برای یادگیری آن مفاهیم ضروری هستند. این محققان دریافته‌اند که این فعالیت‌ها، همان‌طور که به دانش‌آموزان اجازه می‌دهد تا روابط غنی را ببینند، به همان اندازه نیز باعث توسعه‌ی درک عمیق‌تر مفاهیم می‌شود. بدین سبب، تحقیقات بسیاری با هدف شناخت دشواری‌های دانش‌آموزان در برخورد با بازنمایی‌های چندگانه و چگونگی تأثیر آن‌ها بر تعمیق فهم و درک مفاهیم ریاضی توسط آن‌ها انجام شده است. در همین راستا نیز، تحقیقی با دو هدف عمده‌ی زیر طراحی و اجرا شد:

الف) شناخت دشواری‌ها و پیچیدگی‌های احتمالی دانش‌آموزان در برخورد با بازنمایی‌های چندگانه‌ی تابع؛

ب) بررسی چگونگی استفاده‌ی دانش‌آموزان از ویژگی‌های تعریف تابع در بازنمایی‌های مختلف.

شرکت‌کنندگان در این تحقیق، دانش‌آموزان متوسطه بودند و جمع‌آوری داده‌های این تحقیق، از طریق پرسش‌نامه و مصاحبه انجام شد و شامل سؤال‌هایی در مورد بازنمایی‌های چندگانه‌ی تابع از جمله مجموعه‌ی زوج مرتب، نمودار، فرمول و عبارت بود.

تجزیه و تحلیل داده‌ها نشان داد که دانش‌آموزان در دیدن ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف تابع، ناتوان بودند. هم‌چنین، دانش‌آموزان از تعریف تابع برای نمایش تابع به صورت زوج مرتبی یا به صورت نمودارهای ون که جزو مدل‌های اولیه‌ی نمایش تابع هستند، استفاده کردند و در برخورد با دو بازنمایی نموداری و فرمول، بیش‌تر بر تجارب قبلی تکیه داشتند و عمدتاً با استفاده از تکنیک‌هایی که می‌شناختند به استدلال تشخیص تابع بودن پرداختند.

پژوهشگر با نتیجه‌گیری از یافته‌های این تحقیق، بر استفاده از مجموعه‌ای از مثال‌های متنوع از تابع‌های گوناگون برای تقویت تصور دانش‌آموزان نسبت به مفهوم تابع تأکید می‌کند. هم‌چنین، توصیه می‌شود که برای معرفی یک مفهوم جدید ریاضی، از بازنمایی‌های چندگانه استفاده شود زیرا این مطالعه نیز به این نتیجه رسید که برای یادگیری مفهوم تابع، اتصال، مقایسه و تبدیل از یک حالت بازنمایی به حالت دیگر بازنمایی ضروری است. این فعالیت باعث می‌شود تا دانش آموزان بتوانند مهارت‌های نمایش و تشخیص مفهوم تابع را در بازنمایی‌های مختلف کسب کنند و بین آن‌ها، اتصال و ارتباط برقرار نمایند.

تحقیقات در آموزش ریاضی

(گزارش یک کارگاه آموزشی) زمستان ۱۳۸۷

گزارشگر: سهیلا غلام‌آزاد، مؤسسه‌ی پژوهشی برنامه‌ریزی درسی و نوآوری‌های آموزشی

مؤسسه‌ی پژوهشی برنامه‌ریزی درسی و نوآوری‌های آموزشی، وابسته به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی، در زمستان سال ۱۳۸۷، کارگاه ۵روزه‌ای را با حضور عده‌ای از متخصصان ریاضی و آموزش ریاضی با مدرک دکترا، دبیران ریاضی، دانشجویان و فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، و مدرسان مراکز تربیت معلم با هدف **اشاعه‌ی فرهنگ تحقیق و آموزش علاقه‌مندانی که بالقوه توانایی انجام پژوهش در حوزه‌ی آموزش ریاضی را دارند**، برگزار کرد.

❊ در مراسم افتتاحیه، دکتر سهیلا غلام‌آزاد، دبیر کمیته‌ی پژوهش در برنامه‌ی درسی ریاضی، ابتدا به معرفی مؤسسه‌ی پژوهشی به اهداف و برنامه‌های آن به شرح زیر پرداخت:

مؤسسه‌ی پژوهشی در سال ۱۳۷۹ به منظور پاسخ‌گویی به بخشی از نیازهای پژوهشی کشور در زمینه‌ی برنامه‌های آموزشی و درسی دوره‌های مختلف تحصیلی و ارتقای سطح کیفی آن‌ها، تأسیس شد. این مؤسسه دارای دو پژوهشکده‌ی

۱. برنامه‌ریزی درسی

۲. ارزشیابی و نوآوری‌های آموزشی

و ده گروه پژوهشی است. گروه پژوهشی در برنامه‌های درسی علوم تجربی، ریاضی و فناوری، زیر مجموعه‌ی پژوهشکده‌ی برنامه‌ی درسی می‌باشد.

اهداف کلان این مؤسسه عبارتند از :

۱ . تولید دانش در حوزه‌ی برنامه‌ریزی درسی و نوآوری‌های آموزشی با تأکید بر تحقیقات علمی مبتنی بر مبانی اسلامی و فرهنگ ملی ؛

۲ . ارتقای کیفی برنامه‌های درسی دوره‌های مختلف تحصیلی ؛

۳ . ارتقای جایگاه علمی ـ پژوهشی مؤسسه در سطح ملی و بین‌المللی .

با توجه به اهداف ذکر شده، بررسی و شناسایی نیازهای پژوهشی کشور در ارتباط با اهداف سازمان، مدیریت و سامان‌دهی فعالیت‌های پژوهشی در زمینه‌ی برنامه‌ریزی درسی و نوآوری‌های آموزشی، انجام پژوهش‌های بنیادی، توسعه‌ای و کاربردی برای بهبود کیفی برنامه‌ها و ارائه‌ی طرح‌های لازم برای نوآوری در روش‌های آموزشی و پرورشی، از جمله وظایف مهم مؤسسه است .

در راستای اهداف مؤسسه و سازمان، کمیته‌ی ریاضی چندین عنوان پژوهش را با موضوع آموزش ریاضی به صورت فراخوان، اعلام عمومی کرد. از میان این عناوین، ۵ عنوان زیر جهت کار در کارگاه به شرح زیر مطرح شدند :

۱ . بررسی وضعیت موجود و چالش‌های پیش رو در آموزش ریاضی ایران در دوره‌های مختلف تحصیلی ؛

۲ . بررسی روش‌های ارتقای کیفیت یاددهی ـ یادگیری ریاضی در مدارس دوره‌ی متوسطه و آموزش عمومی و تعیین ملاک‌های مربوطه ؛

۳ . مطالعه‌ی سیر تحول برنامه‌ها و کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای ایران در یک قرن گذشته با توجه به تحولات اجتماعی و پیشینه‌ی تاریخی ؛

۴ . مطالعه‌ی تطبیقی محتوای برنامه‌های درسی ریاضی ایران و کشورهای هدف در دوره ی تحصیلی متوسطه ؛

۵ . بررسی چگونگی استفاده از ICT در آموزش ریاضی و ارائه‌ی راهبردهای کاربردی مناسب برای توسعه‌ی آن‌ها .

دکتر غلام‌آزاد، با اشاره به اهداف کارگاه، از شرکت کنندگان درخواست کرد که با توجه به علائق آموزشی و پژوهشی خود، یکی از ۵عنوان مطرح شده را انتخاب کرده و بحث‌های کارگاه را با هدف تهیه‌ی یک پیشنهاد طرح تحقیق بر اساس موضوع انتخابی خود دنبال کنند .

برنامه‌ی کارگاه بر اساس مراحل انجام تحقیقات آموزشی و بحث‌های زیربنایی آن‌ها تنظیم شده بود .

دکتر غلام‌آزاد، در ادامه، کلیاتی در مورد تحقیقات آموزشی، بالاخص در حوزه‌ی آموزش ریاضی ارائه کرد. وی، تحقیق آموزش ریاضی را این گونه معرفی کرد: تحقیق آموزش ریاضی، تحقیقی است که بر اساس روش‌های دقیق تحقیق، به دنبال شواهدی جهت درک طبیعت تفکر ریاضی و رابطه‌ی بسیاری از پدیده‌های مرتبط با تدریس و یادگیری ریاضی، به‌منظور ارتقای آموزش ریاضی باشد .

محور اصلی بحث وی در این جلسه، تفاوت عمده میان طبیعت تحقیقات ریاضی و تحقیقات در آموزش ریاضی بود. این بحث به صورت زیر جمع‌بندی شد :

● تحقیقات ریاضی متکی بر اثبات است .
● تحقیقات آموزش ریاضی متکی بر شواهد است .

دکتر علی‌رضا کیامنش، مدرس دو جلسه‌ی بعدی این کارگاه بود . وی بحث خود را با سؤال «**تحقیق چیست؟**» شروع کرد و ویژگی‌های تحقیق را به شرح زیر برشمرد :

۱ . فرایندی منظم است ؛

۲ . هدفمند است ؛

۳ . فعالیتی مداوم و گاه طولانی‌مدت است ؛

۴ . وقت‌گیر است ولی چشم‌گیر نیست ؛

۵ . فعالیتی تخصصی است ؛

۶ . در جست‌وجوی دانش تازه، گسترش دانش موجود و یا شناخت راه‌حل‌های مناسب برای مسائل است .

در ادامه، دکتر کیامنش بحث خود را روی تحقیقات به شیوه‌ی کمّی متمرکز کرد و هر یک از مراحل تحقیق کمّی را به تفصیل توضیح داد :

مراحل تحقیق کمّی (علمی)

۱ . جست‌وجوی دقیق در حوزه‌ی مورد نظر و آشنایی با زمینه‌های نظری و عملی آن حوزه ؛

۲ . مشخص کردن یک مسأله‌ی مبهم، ناشناخته یا غامض در حوزه‌ی مورد نظر (درگیر شدن ذهن با موقعیت ناشناخته) ؛

۳ . تعریف یا تدوین مسأله به کمک دانش موجود (دانش نظری و عملی) ؛

۴ . تدوین فرضیه یا فرضیه‌های تحقیق (ارائه‌ی راه‌حل‌های مقدماتی بر اساس دانش موجود)؛
۵ . جمع‌آوری اطلاعات دقیق و معتبر در مورد فرضیه‌های تحقیق؛
۶ . تجزیه و تحلیل اطلاعات و آزمودن فرضیه‌های تحقیق؛
۷ . تهیه‌ی گزارش از یافته‌ها، ارائه‌ی راه‌حل‌ها، بیان محدودیت‌های پژوهش و سؤال‌های جدید برای پژوهش‌های تازه.

در پایان، دکتر کیامنش سه مقاله‌ی پژوهشی خویش را که بر اساس یافته‌های سومین مطالعه‌ی بین‌المللی ریاضی و علوم (TIMSS) نوشته بود، به بحث گذاشت.

در این کارگاه بحث و بررسی تحقیقات کیفی را دکتر زهرا گویا و دکتر سهیلا هاشمی ارائه کردند. در جلسه‌ی اول این بخش، دکتر سهیلا هاشمی با اشاره به پدیدارشناسی و تعامل‌گرایی نمادی به‌عنوان زیربنای پژوهشی کیفی، ویژگی‌های این نوع پژوهش را به شرح زیر برشمرد:

۱ . طبیعت‌گرا؛
۲ . داده‌های توصیفی؛
۳ . اهمیت دادن به فرایند؛
۴ . استقراء؛
۵ . معنی.

سپس، بحث جلسه را به پاسخ‌گویی به سؤالات زیر اختصاص دادند:

۱ . آیا یافته‌های پژوهش کیفی قابل تعمیم می‌باشد؟
۲ . آیا یافته‌های پژوهش کیفی دارای سوگیری و ذهنی می‌باشد؟
۳ . آیا حضور پژوهشگر رفتار افراد مورد مطالعه را تغییر نمی‌دهد؟
۴ . آیا دو پژوهشگر که دو محیط یا آزمون‌های مشابه را مطالعه می‌کنند به یافته‌های مشابهی می‌رسند؟
۵ . چگونه پژوهش کیفی از آن‌چه که سایر افراد مانند معلمین یا خبرنگاران انجام می‌دهند متفاوت است؟
۶ . آیا رویکرد کمی و کیفی با هم می‌توانند استفاده شوند؟
۷ . آیا پژوهش کیفی واقعاً علمی است؟
۸ . هدف پژوهش کیفی چیست؟
۹ . چگونه پژوهش کیفی از پژوهش کمی متفاوت می‌شود؟
۱۰ . کدام رویکرد پژوهشی بهتر است، کیفی یا کمی؟

در ادامه‌ی بحث، دکتر هاشمی مثلث‌سازی را به‌عنوان یکی از روش‌های مورد استفاده برای بررسی اعتبار پژوهش کیفی معرفی کرد. وی در این بخش، فعالیت‌هایی را طراحی کرده بود که در آن‌ها از شرکت‌کنندگان خواسته شده بود در گروه‌های کوچک، یک موضوع پژوهشی را که از طریق روش پژوهش کیفی قابل اجرا باشد، پیشنهاد کنند و به‌منظور افزایش اعتبار آن، با استفاده از کارشناسان مختلف، از مثلث‌سازی استفاده نمایند. شرکت‌کنندگان پس از انجام این فعالیت، گزارش‌های خود را ارائه کردند که در جمع، مورد بحث و بررسی قرار گرفت.

در جلسه‌ی سوم از بحث تحقیقات کیفی دکتر زهرا گویا به بیان تفاوت ماهوی بین رویکردهای فلسفی دو روش تحقیق کمّی و کیفی پرداخت. سپس، وی با تأکید بر اهمیت نقش مبانی نظری در تحقیقات کیفی، تفاوت‌های تحقیق مبتنی بر نظریه (Theory Driven) و تحقیقی که به تولید نظریه منجر می‌شود (Theory Generating) را با ذکر مصداق‌های مورد بررسی قرار داد.

سپس به مرور چند کار پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی به عنوان نمونه‌هایی از پژوهش‌ای انجام شده به روش کیفی پرداخت.

بعد از مرور مبانی تحقیقات کمّی و کیفی، از شرکت‌کنندگان خواسته شد تا یکی از ۵ عنوان پژوهشی مورد نظر مؤسسه را برای انجام کار عملی خود انتخاب کنند. بر اساس عنوان‌های انتخابی شرکت‌کنندگان در گروه‌های کوچک‌تر تقسیم شدند و به‌عنوان کار عملی در این بخش شرکت‌کنندگان پیش‌نویسی از اهداف و سؤالات تحقیق مورد نظر خود تهیه کردند.

در دهه‌ی اخیر، نقش ابزار تکنولوژیک در فرایند تحقیق، توسعه‌ی چشم‌گیری داشته است. لذا در برنامه‌ریزی کارگاه، یک روز به کار عملی در سایت کامپیوتر اختصاص پیدا کرد.

در ابتدای این برنامه، دکتر یزدان منصوریان، مبانی جست‌وجو و بازیابی اطلاعات علمی در منابع و پایگاه‌های الکترونیکی را ارائه کرد. وی در سخنان خود موضوعات زیر را مورد خطاب قرار داده و به تفصیل به بحث در خصوص آن‌ها پرداخت:

● اصول و مبانی جست‌وجوی بهینه در منابع علمی؛
● تعریف سواد اطلاعاتی و شناخت مؤلفه‌های آن؛

● آشنایی با ابزارهای جست‌وجوی عمومی و تخصصی؛
● تدوین استراتژی جست‌وجو و تبیین اهمیت آن؛
● دسترسی مؤثر و بهینه به منابع اطلاعات علمی؛
● مهارت‌های لازم برای ارزیابی منابع اطلاعاتی؛
● اهمیت ملاحظات قانونی و اجتماعی مربوط به استفاده و دسترسی به اطلاعات (مثل حقوق مؤلف و شیوه‌ی استناددهی).

پس از آن دکتر منصوریان چگونگی جست‌وجو در شبکه‌ی اینترنت با انتخاب کلید واژه‌ی مناسب را از طریق درگیر کردن شرکت‌کنندگان در یک‌سری فعالیت‌های عملی، توضیح داد.

در بخش بعدی، دکتر زهرا گویا و دکتر ابراهیم ریحانی ضمن معرفی مجله‌های آموزش ریاضی در کشورهای مختلف، چگونگی دسترسی به این مجله‌ها از طریق شبکه‌ی اینترنت را از طریق کار عملی توضیح دادند. علاوه بر آن، چندین وب‌سایت حاوی مطالب مفید در حوزه‌ی آموزش ریاضی در این بخش از کارگاه به شرکت‌کنندگان معرفی شد.

با توجه به کارایی نرم‌افزارهای SPSS و Excel در انجام کارهای آماری، بخشی از برنامه‌ی کارگاه به معرفی و کار با این نرم‌افزارها اختصاص یافت. دکتر احسان بهرامی سامانی، مسئولیت کارگاه SPSS و آقای فرهاد شکوهی، مسئولیت کارگاه Excel را برعهده داشتند. ایشان با نصب این برنامه‌ها روی دستگاه‌های کامپیوتر، امکان انجام فعالیت‌های مفیدی را از طریق این برنامه‌ها برای شرکت‌کنندگان مهیا ساختند.

تهیه‌ی یک پیشنهاده‌ی پژوهشی (Proposal)، اولین قدم در انجام هر کار تحقیقی است. در پیشنهاده‌ی پژوهشی انتظار می‌رود که محقق، چرایی و ضرورت انجام تحقیق مورد نظر خود را با بیان مسأله و اهداف کار صریحاً توضیح دهد.

هم‌چنین با بیان پیشینه‌ی موضوع و ارائه‌ی روش تحقیق مناسب، نشان دهد که با ادبیات مرتبط با موضوع آشنا است و توانایی انجام کار پژوهشی را دارد. نظر به اهمیت این مرحله، روز چهارم کارگاه به چگونگی تهیه‌ی پیشنهاده اختصاص یافت.

در این روز، ابتدا دکتر حسن پاشاشریفی، اهمیت و ضرورت تحقیق در تعلیم و تربیت را با ذکر موارد زیر مورد خطاب قرار داد:

● ارزشیابی تکوینی از مواد و برنامه‌های درسی در فرایند تهیه و تدوین؛
● ارزشیابی از برنامه‌های اجرا شده و بررسی میزان تحقق اهداف آن‌ها؛
● مطالعه‌ی جنبه‌های مثبت و نارسایی‌های احتمالی در برنامه‌ها، روش‌ها و سایر عناصر آموزش و پرورش؛

● ایجاد هماهنگی بین محتوای برنامه‌های آموزشی، روش‌ها و تجهیزات با توانایی‌های رشدی به علایق و نیازهای دانش‌آموزان، سطح مهارت معلمان و امکانات مدارس؛
● مطالعه‌ی راه‌هایی برای افزایش سطح کیفی فرایندها و روش‌های آموزشی و پرورشی.

در ادامه وی، پیشنهاده‌ی تحقیق را نقشه‌ی اجرای تحقیق با اهداف، پاسخ دادن به پرسش‌های پژوهشی و کنترل واریانس متغیرهای اصلی و اثرگذار معرفی کرد. دکتر شریفی، محتوای پیشنهاده‌ی پژوهش به شیوه‌ی کمّی را به شرح زیر ارائه و به تفصیل مورد بحث قرار داد:

* **مقدمه**، شامل اشاره ای کوتاه به مبانی نظری تحقیق و معرفی کلیات تحقیق؛
* **بیان مسأله‌ی تحقیق**، شامل طرح مشکل موجود یا بیان انگیزه‌ی انجام تحقیق و طرح پرسش‌های پژوهشی به صورت کلی؛
* **اهداف تحقیق**، شامل اهداف کلی و اهداف جزیی؛
* **اهمیت و ضرورت تحقیق**، شامل اثربخشی تحقیق در بهبود کیفی وضع موجود و موارد کاربردی تحقیق در حوزه‌های مختلف مربوط؛
* **مروری کوتاه بر پیشینه‌ی تحقیق**، شامل معرفی و نقد پژوهش‌های مرتبط، بیان استفاده از پژوهش‌های پیشین در تحقیق حاضر؛
* **بیان فرضیه‌ها و یا پرسش‌های پژوهشی**؛
* **تعریف متغیرهای تحقیق**، شامل تعریف مفهومی و تعریف عملیاتی؛
* **جامعه، نمونه و روش نمونه گیری**؛
* **ابزارهای اندازه گیری متغیرها**، شامل چگونگی استفاده از ابزارهای استاندارد و محقق ساخته و روش‌های برآورد روایی و اعتبار آن‌ها؛
* **مراحل اجرای تحقیق**، شامل معرفی طرح تحقیق، نحوه‌ی جمع‌آوری داده‌ها، روش تجزیه و تحلیل آماری داده‌ها و آزمون فرضیه‌ها؛
* **تقویم زمانی مراحل اجرای تحقیق**؛
* **برآورد اعتبار مالی اجرای تحقیق**.

دکتر زهرا گویا بحث چگونگی تهیه‌ی پیشنهاده‌ی پژوهشی را با تأکید بر پژوهش‌های کیفی پی گرفت. وی ابتدا بحثی در خصوص اهمیت تصریح رویکرد فلسفی نسبت به انسان در کار پژوهشی و رابطه‌ی بین نظریه و عمل و سیر تکوینی ایده را ارائه کرد.

مقایسه‌ی قابلیت اعتماد تحقیق کیفی و قابلیت اعتماد تحقیق کمّی، بحث دیگری بود که وی عنوان کرد. سپس موارد زیر را به عنوان محتوای یک پیشنهاده‌ی تحقیق کیفی به تفصیل شرح داد:

● بیان مسأله؛
● اهمیت و ضرورت انجام تحقیق؛
● اهداف تحقیق؛
● سؤال‌های تحقیق؛
● چارچوب نظری تحقیق؛
● چگونگی شکل گیری تحقیق؛
● شرکت‌کنندگان در تحقیق؛
● ابزار جمع‌آوری داده‌ها؛
● روش کاهش داده‌ها؛
● مثلثی‌سازی؛
● روش تجزیه و تحلیل داده‌ها؛
● تعمیم‌پذیری.

در آخرین جلسات (روز چهارم)، دکتر شریفی بحث مبسوطی در خصوص چگونگی ساخت ابزارهای اندازه‌گیری کمّی متغیرها و سنجش روایی و اعتبار آن‌ها ارائه کرد. وی در بحث خود، اندازه‌گیری را به عنوان نسبت دادن اعداد به مقادیر مختلف یک متغیر بر اساس قاعده‌ی معین تعریف کرد؛ سپس پرسش‌نامه را به عنوان ابزاری برای اندازه‌گیری متغیّرهایی مانند توانایی‌های شناختی، استعداد، نگرش، ویژگی‌های شخصیتی و نظایر آن معرفی کرد و در ادامه‌ی بحث، با ذکر نمونه‌های عملی، چگونگی سنجش روایی و اعتبار پرسش‌نامه را توضیح داد.

بعد از پایان این برنامه‌ی ۴ روزه، یک ماه به شرکت‌کنندگان فرصت داده شد تا بر اساس بحث‌های کارگاه، در گروه‌های کوچک برای موضوعات پژوهشی انتخابی خود، یک پیشنهاده تهیه کنند. پیشنهاده‌های تهیه شده، در یک برنامه‌ی یک‌روزه توسط شرکت‌کنندگان و تیمی از اعضای کمیته‌ی پژوهش در آموزش ریاضی، مؤسسه مورد نقد و بررسی قرار گرفتند و در صورت دارا بودن استانداردهای لازم، به شورای پژوهشی مؤسسه ارائه خواهند شد.

معرفی نشریه

هفتمین شماره‌ی «سالنامه‌ی ریاضی»، کاری از انجمن معلمان ریاضی استان قم، به دستمان رسیده است. در این شماره، مطالب زیر آمده است:

- سخن سردبیر؛
- دادگاهی که به کلاس درس ریاضی تبدیل می‌شود؛
- خاطراتی از اردوی آبعلی؛
- حل چند مسئله؛
- چرا باید ریاضیات خواند؟
- یک اثبات بسیار جالب؛
- چگونگی حرکت ماه و رؤیت آن؛
- نقد و بررسی کتب راهنمای ریاضی؛
- اختراع ظل (تانژانت) توسط پیامبر (ص)؛
- اصلاح دو قضیه؛
- با هر پایانی، شروعی تازه آغاز می‌شود؛
- روش خلاقانه تدریس؛
- ویژگی اشکال فرکتالی؛
- کارهایی از گاسپار مونژ؛
- رساله‌ای بر نظریه‌ی هندسی هسته‌ای؛

و

سخن پایانی.

IN THE NAME OF GOD
Ministry of Education
Organization of Research& Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office

Mathematics Education Journal 96

Vol. 26 No. 4 2009 ISSN: 1606 - 9188

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585
E-mail: riazi@roshdmag.ir
roshd_riazi@yahoo.com

برگ اشتراک مجله های رشد

شرایط:

۱. واریز مبلغ ۳۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شماره‌ی ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست

۲. ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک

- **نام مجله :** ....
- **نام و نام خانوادگی:** ....
- **تاریخ تولد:** ....
- **میزان تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

....

پلاک: .... کدپستی: ....

- **مبلغ واریز شده:** ....
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ....
- **آیا مایل به دریافت مجله درخواستی به صورت پست پیشتاز هستید؟ بله☐ خیر☐**

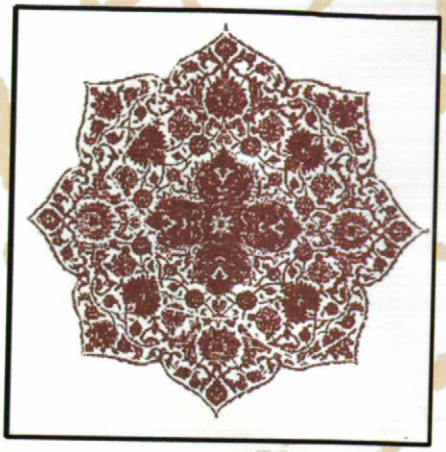
امضا:

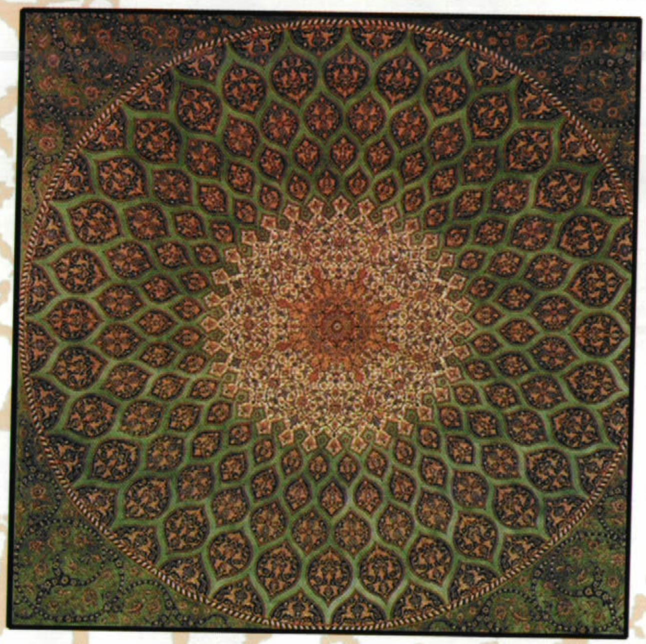
نشانی: تهران - صندوق پستی ۱۶۵۹۵/۱۱۱
نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir
پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir
امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶_۷۷۳۳۵۱۱۰
پیام‌گیر مجلات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲_۸۸۸۳۹۲۳۲

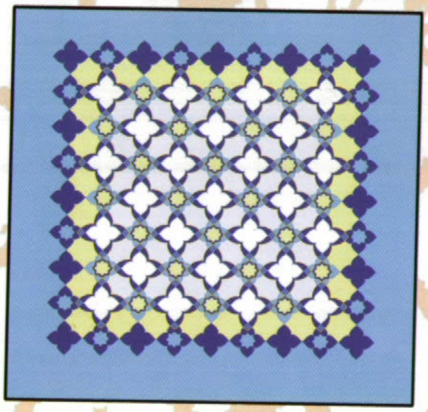
یادآوری:

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک می‌باشد.
- برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است)

تصاویر مقاله « توابع زیبا در فرش های زیبا »؛ به صفحه ی ۳۰ مراجعه کنید.







صدمین

شماره ی مجله ی آموزش ریاضی
تابستان سال آینده منتشر می شود

آموزش ریاضی

از کلیه ی خوانندگان مجله دعوت می کنیم تا پایان تابستان، برای این شماره مطلب بفرستند