وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

ISSN:1606-9188

رشد آموزش

ریاضی ۱۳۷

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی | برای معلمان، دانشجومعلمان و کارشناسان وزارت آموزش و پرورش |
دورهٔ سی و هشتم | شمارهٔ ۲ | زمستان ۱۳۹۹ | ۴۸ صفحه | ۵۰۰۰۰ ریال | پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵ |
www.roshdmag.ir

- تا کی شود قرین حقیقت مجاز من
- از حساب به جبر
- مربع‌های لاتین
- چگونه آموزش ریاضی را مسئله‌محور کنیم؟

جبر و مقابلهٔ خوارزمی

بابی از میراث ۱۲۰۰ سالهٔ خوارزمی

کتاب «المختصر فی‌الحساب الجبر و المقابله» یکی از شاهکارهای محمدبن موسی خوارزمی (درگذشتهٔ حدود ۲۳۲ ق) در زمینهٔ ریاضیات است که همچون نگینی در میراث علمی ۱۲۰۰ سالهٔ او می‌درخشد.

بسم الله الرحمن الرحیم
اللهم صلی علی محمد و ال محمد
وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش‌وبرنامه‌ریزی‌آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

رشد آموزش
ریاضی
۱۳۷

فصلنامۀ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای معلمان، دانشجومعلمان و
کارشناسان وزارت آموزش‌وپرورش

نشانی دفتر مجله: تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶. صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۴۳۰) نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ وبگاه: www.roshdmag.ir
پیام‌نگار: riyazi@roshdmag.ir پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵ :roshdmag
نشانی امور مشترکین: تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱ تلفن امورمشترکین: ۸۸۸۶۷۳۰۸ - ۰۲۱

تا کی شود قرین حقیقت مجاز من

تعطیل‌شدن مدارس در ایام همه‌گیری جهانی (پاندمی) «کووید-۱۹»، احتمالاً اندکی از نگرانی والدین در مورد سلامتی فرزندان‌شان کم کرده باشد، اما نگرانی‌ها بابت کیفیت آموزش‌های غیرحضوری را افزایش داده‌است. در واقع، نشاندن دانش‌آموزان پای لپ‌تاپ، تبلت یا تلفن همراه برای شرکت در کلاس و یا انجام تکالیف درسی توسط آن‌ها به یکی از دغدغه‌های مهم خانواده‌ها تبدیل شده است. «صندوق کودکان سازمان ملل متحد» اعلام کرده است که در پی شیوع کرونا و تعطیلی مدارس، یک‌سوم دانش‌آموزان جهان از امکان دسترسی به آموزش از راه دور مناسب محروم هستند. ازهمین رو دربسیاری ازکشورها، آخرین مراکزی که براثرشیوع پاندمی تعطیلی می شود مدارس آن‌ها هستند.

شگفت آنکه تا چندی پیش ورود هر نوع گوشی تلفن همراه به مدارس ما ممنوع بود. اما امروزه دسترسی تمام ۱۴/۵ میلیون جمعیت دانش‌آموزی کشور به این وسیله آن هم از نوع هوشمند، اجباری تلقی می‌شود؛ چرا که این ابزار، در دسترس‌ترین وسیله برای انجام آموزش‌های الکترونیکیِ هم‌زمان یا ناهم‌زمان محسوب می‌شود. اکنون سؤال این است که: «آیا حضور دانش‌آموزان در شبکه‌های پیام‌رسان برای دسترسی به آموزش‌های مجازی می‌تواند خلأ حضور آنان در مدرسه را پر کند و ضامن خلق فرصت‌های یادگیری اثربخش برایشان باشد؟» صرف‌نظر از موضوعات مهمی مانند رشد عاطفی و هیجانی کودکان و همچنین پرورش مهارت‌های ارتباطی و اجتماعی آن‌ها که در جای خود باید بررسی شود، لازم است روش‌ها، فرایندها و استانداردهای آموزش و یادگیری و تعاملات کلاسی نیز مورد توجه قرار گیرد.

در سال تحصیلی جاری به واسطهٔ داشتن درس کارآموزی مهارت‌آموزان دبیری ریاضی دانشگاه فرهنگیان، و همچنین درس کارورزی دانشجو-معلمان رشتهٔ آموزش ریاضی این دانشگاه، با بیش از ۴۰ مهارت‌آموز و دانشجو-معلم پراکنده در استان‌های مختلف کشور، در ارتباط مداوم بودم و به‌طور هفتگی گزارش آن‌ها را از کلاس درس خودشان یا کلاس معلمان راهنمایشان دریافت می‌کردم. براساس مشاهدات این تجربهٔ میدانی محدود، اکثر معلمان این کلاس‌ها نه تدریس برخط (آنلاین)، بلکه تدریس برون‌خط (آفلاین) داشتند. به این معنا که محتوایی را از قبل آماده می‌کنند که ممکن است ویدیو، فایل صوتی یا توضیحاتی روی «پی‌دی‌اف» کتاب یا اسلایدهایی مرتبط با موضوع مورد تدریس باشد که آن را از قبل در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌دهند تا ببینند. سپس، در ساعات آموزش غیرحضوری، به سؤالات آن‌ها جواب می‌دهند و به اصطلاح، «رفع اشکال» می‌کنند. غالباً هم تلاشی برای ایجاد ارتباط قوی‌تر با دانش‌آموزان صورت نمی‌گیرد. به عبارت دیگر، تعامل دوسویه رفت و برگشتی و خصوصاً ایجاد تعاملات گروهی و کلاسی بین دانش‌آموزان دیده نمی‌شود. در واقع مهم‌ترین مشکل تدریس برون‌خط همین فقدان یا نقصان تعامل بین معلم و دانش‌آموز و نیز بین خود دانش‌آموزان است. این نوع تدریس شباهتی به کلاس درس واقعی نخواهد داشت.

از مشکلات عمدهٔ آموزش‌های مجازی فعلی، بمباران اطلاعاتی دانش‌آموزان توسط منابع مختلف مثل معلم، تلویزیون، شبکهٔ شاد و سایت‌ها و برنامه‌های جانبی و ... است که باعث سردرگمی و ایجاد اضطراب در آن‌ها می‌شود. مشکل دیگر آن است که گویا این نوع آموزش‌ها از جانب دانش‌آموزان چندان جدی گرفته نمی‌شوند. شاید لازم باشد که اولیا و دست‌اندرکاران مدرسه با تأکید بیشتری، جدی بودن فضای آموزش‌های غیرحضوری را به دانش‌آموزان گوشزد کنند.

از طرف دیگر کندی پیام‌رسان‌ها یا اینترنت و قطعی مداوم ارتباط، گاهی ساعت‌ها به طول می‌انجامد و باعث کاهش تمرکز دانش‌آموزان می‌شود. علاوه بر این‌ها، بی‌توجهی و یا به اصطلاح عامیانه، بازیگوشی برخی از دانش‌آموزان که در زمان حضور فیزیکی در مدارس هم وجود داشت و نیازمند مدیریت از سوی معلمان بود، با آموزش غیرحضوری بیشتر شده است، به صورتی که برخی از آن‌ها هیچ توجهی به کلاس و درس مجازی ندارند.

حتی اگر فرض کنیم که محتوای آموزشی با کیفیت بالا در بستر آموزش‌های مجازی وجود دارد، می‌توان گفت دانش‌آموزان در این شکل از آموزش‌ها به سه دسته کلی تقسیم می‌شوند:

- گروه اول کسانی هستند که تجهیزات لازم و اینترنت قابل قبولی در دسترس دارند و همچنین از مسئولیت‌پذیری و انگیزهٔ لازم برای دنبال‌کردن مباحث درسی در این بستر (هرچند به کمک خانواده) نیز برخوردارند. انتظار می‌رود این گروه، آموزش‌های لازم را تا حدود قابل قبولی فرا بگیرند.
- دستهٔ دوم دانش‌آموزانی هستند که به دلیل دسترسی‌نداشتن به سخت‌افزار، نرم‌افزار یا اینترنت‌مناسب، نمی‌توانند آموزش‌های مجازی را تعقیب کنند و طبیعتاً حل این معضل برای نزدیک‌شدن به مساوات آموزشی و کاهش «شکاف دیجیتالی» ضروری است.
- اما در میانهٔ دو طیف فوق، دسته سومی از دانش‌آموزان هستند که هرچند ابزارهای لازم مانند لپ‌تاپ، تبلت و یا گوشی هوشمند و همچنین اینترنت مورد قبول برای برخورداری از این‌گونه آموزش‌ها را در اختیار دارند، اما انگیزهٔ لازم و یا مسئولیت‌پذیری کافی برای تعقیب این آموزش‌ها را ندارند. حتی با فرض حضور والدین در خانه، چه بسا آنان نیز واجد فرصت، توان یا انگیزهٔ کافی برای کمک به آن‌ها نیستند

به هر حال در مورد آموزش‌های از راه دور نباید این مطلب را فراموش کنیم که پیش از

شـــیوع جهانی کووید-۱۹، دانشگاه‌ها و سایر نهادهای آموزشی، این‌گونه آموزش‌ها را برای داوطلبان و افراد علاقه‌مند و غالباً بزرگســـال طراحی کرده بودند. اکنون که این شـــکل از آموزش‌ها در ســـطح همگانی و برای کودکان هم مورد اســـتفاده قرار می‌گیـــرد، حتماً لازم است برای ایجاد علاقه و انگیزه در فراگیرندگان فکر کرد و برنامه داشـــت. سؤال این است که: «به‌عنوان یک معلم چه کارهایی می‌توانیم انجام دهیم تا آموزش مجازی ما اثرگذارتر شـــود؟» البته که معلمان ما برای این شـــرایط آموزش مناسب ندیده‌اند. بنا بر گزارش‌های بین‌المللی، بیش از دوسوم معلمان دنیا با این چالش مواجه هستند که از سال ۲۰۲۰ برای اولین بار درگیر آموزش‌های الکترونیکی شده‌اند.

در فضای مجـــازی برای دســـت‌یابی به آمـــوزش و یادگیری با کیفیـــت، تنها فراهم ساختن دسترسی به متون درسی و محتوای علمی کافی نیست. یک آموزش مجازی موفق نیازمند فعالیت پویا و کارآمـــد دانش‌آموزان، نظارت و همراهی خانواده‌ها، و البته نوآوری‌های معلمان و سازمان های آموزشی است.

در مـــورد آموزش‌های الکترونیکی گاهی این باور غلط وجود دارد که ســـاخت محتوای الکترونیکی پایان کار تدریس است و می‌شود یک محتوای الکترونیکی تولید شـــده را بارها و بارها اســـتفاده کرد. البته که در نگاه اول این کار، از نظـــر اقتصادی مقرون بـــه صرفه و به نوعی نیز صرفه‌جویی در زمان است. اما بیشتر و پیش‌تـــر از آن، در آموزش‌های غیرحضوری و الکترونیکی، پایـــش فراگیرندگان و در واقع ردیابی و رصدکـــردن دانش‌آموزان و بازخورد گرفتن از آن‌ها و نیز بازخورد دادن به ایشـــان اهمیت ویژه‌ای دارد. همچنان که در کلاس‌های حضوری «همهٔ دانش‌آموزان» باید «به حساب بیایند» و صدایشـــان شنیده شود، این مطلب حتمـــاً در آموزش‌هـــای غیرحضوری اهمیت دوچندان پیدا می‌کند.

صرف‌نظـــر از امکانـــات کلانـــی کـــه پیشرفت‌های فناوری از جمله هوش مصنوعی در اختیارگذاشـــته، ما معلمان نیز می‌توانیم از تمام امکانـــات ســـخت‌افزاری و نرم‌افزاری موجود و شـــیوه‌های ممکن کمک بگیریم تا تدریس ما با کلاس واقعی و حضوری شباهت و تطابق بیشتری داشته باشد. برای مثال، اگر دانش‌آمـــوزان تصویر ما را ببیننـــد، اثرگذاری تدریس، بیشتر از آن است که تنها صدایمان را بشنوند و اگر به تناوب بتوانیم صدا یا تصویری از آن‌ها دریافت و بررسی کنیم، حتماً تدریس ما موفقیت‌آمیزتر خواهد بود. در جریان تدریس، حتماً لازم است پرســـش‌های متوالی برای دانش‌آموزان طرح شـــود و پاسخ آن‌ها، از افراد داوطلب و بقیه، خواسته شود، به‌طوری که طرح پرسش از اکثر دانش‌آموزان با مخاطب قراردادن تک‌تک آنان به اسم، صورت پذیرد. کار گروهی دانش‌آمـــوزان نیز باید بخش مهمی از فرایند تدریس باشد. شاید بهتر باشد، گاهی کلاس را به دانش‌آموزان واگذار کنیم، تا با هم در مورد موضوع مورد تدریس بحث کنند و ما هدایتگر بحث یا حتی فقط نظاره‌گر باشیم.

پرداختـــن به مســـائل و مشـــکلات بالا، البتـــه در حوزهٔ آموزش ریاضی کـــه در آن با فرایندهای مهمی مثل حل مسئله و استدلال مواجه هستیم، اهمیت دوچندان پیدا می‌کند. در سراســـر جهان، ریاضیات نقش مهمی در دســـت‌یابی به آرمان‌های آموزشـــی و توسعهٔ جوامع دارد. ریاضیات مدرسه‌ای باید به بستری بـــرای پیونـــد دادن مطالب مـــورد تدریس با مهارت‌های حل مسئله در زندگی واقعی تبدیل شود و در نگاه کلان، فراهم‌کنندهٔ زمینهٔ رشد و بالندگی همه‌جانبهٔ کودکان باشد. تلاش برای آموزش ریاضی به شکل مناسب و مؤثر با هدف ایجاد خلاقیـــت و افزایش توانایی به‌کارگیری آموخته‌ها از جانب فراگیرندگان، چالشی مداوم برای اکثر کشورهاست. اکنون نیز درک عمیق‌تر چگونگـــی فرایند یادگیری ریاضیات توسط دانش‌آموزان در بستر آموزش‌های الکترونیکی، همراه با کاربردهای مؤثر ریاضیات، می‌تواند به یادگیری معنادار این درس منجر شود.

از انتهای ســـال تحصیلی قبل و با وجود غیرمترقبه بودن حادثه و فقدان تجربهٔ قبلی، وزارت آموزش‌وپـــرورش کشـــورمان کارهایی را در ایـــن زمینه انجام داد کـــه از آن جمله، اســـتفادهٔ گسترده از پیام‌رســـان شاد (شبکهٔ اجتماعی دانش‌آموز) بود. البته لازم است بین «پیام‌رسان» و «سامانهٔ یادگیری الکترونیکی» (LMS) تمایز قائل شد. از پیام‌رسان نمی‌توان انتظـــار خیلی زیادی داشـــت. محدودیت‌ها و کارکردهای آن مشـــخص اســـت و اصولاً کار پیام‌رسان «آموزش الکترونیکی» نیست.

ســـامانه‌های یادگیـــری الکترونیکـــی، تعاملی‌ترند و بـــرای مثال، تکالیف ارســـالی دانش‌آموزان به شکلی طبقه‌بندی‌شده در آن‌ها ذخیره می‌شود و معلم راحت‌تر می‌تواند پیگیر

کار شاگردان خود باشد. یا اینکه امکان گروه‌بندی دانش‌آموزان در آن فراهم اســـت. ولی در پیام‌رسان‌ها این موارد به خوبی مقدور نیســـت. ابزارها و ســـامانه‌های یادگیری الکترونیکی داخلی متعددند و همچنین نمونه‌های خارجی آن موجودند. بیشتر دانشگاه‌ها نیز از این دست سامانه‌ها استفاده می‌کنند و هر کدام می‌کوشند با خلاقیت‌هایشان، بر کیفیت تعاملی آموزش‌های الکترونیکی بیفزایند؛ آن هم در سطح دانشجویان که نسبت به دانش‌آموزان احتمالاً مسئولیت‌پذیرتر و البته با تجربه‌ترند.

در این مدت، معلمان و مدیران مراکز آموزشـــی نیز به فراخور انگیـــزه، دانش و ذوق خود کارهای پراکنده‌ای در این حوزه انجام داده‌اند که لازم است چنین تجربیاتی مدون شود و داده‌های حاصل، در قالب پژوهش‌های اصیل تجزیه و تحلیل شوند و نتایج آن در کنار یافته‌های سایر پژوهش‌های جهانی و بومی در این زمینه مورد استفاده قرار گیرند. به این ترتیب، از آزمون ـ خطاهای بعدی بی‌نیاز خواهیم شد.

اکنون تغییرات مرتبط با این نوع آموزش، تأثیرات خود را بر تمام ابعاد نظام آموزشـــی و ذی‌نفعان گذاشته است و در آینده نیز خواهد گذاشت؛ از دانش‌آموزان که به نظر می‌رسد مشکلات کمتری در استفاده از ابزارهای نوین داشته باشند، اما مسئولیت‌پذیریشان جای تردید دارد، تا معلمان که باید بیش از پیش خود را با شرایط جدید تطبیق دهند، و توسعه‌دهندگان برنامه‌هـــای درســـی و همچنین انواع روش‌هـــای تدریس و ارزشیابی. حتی به نظر می‌رسد باید در تعاریفی که از یادگیری در ذهـــن خود داریم نیز تجدیدنظر کنیم. در عصر دیجیتال، نظریه‌های یادگیری ریاضی، ضمن باز تعریف مفاهیم قبلی باید نگاه نوینی به فرایند یادگیری این علم داشته باشند.

همان‌گونه که در برخورد بـــا دوران ریاضیات جدید در دههٔ ۶۰ میلادی، واکنش‌های متفاوتی از جانب کشـــورهای مختلف در زمینهٔ تدوین برنامهٔ درســـی ریاضیات مدرسه‌ای هر کشور صورت گرفت، اکنون نیز شاهدیم که مواجههٔ اولیه نظام‌های آموزشی مختلف با همه‌گیری‌های اخیر از تنوعی چشم‌گیر برخوردار است. البته این مسئلهٔ نوپدید باعث شده اســـت، آموزش‌های الکترونیکی به‌طور جدی در کانون توجه متولیان آموزش قرار گیرد. تهدیدهای همه‌گیری جهانی کرونا برای کیفیت آموزش زیاد بوده، اما فرصت‌هایی هم پدید آورده است. چالش‌های کرونا در آموزش‌وپرورش می‌تواند به بیداری و بهره‌گیری از فرصت‌های نو منجر شود.

امیدواریم که معلمان و آموزشگران عزیز ریاضی سراسر کشـــور، تجربیات خود را از تدریس‌های کارآمدشان در این دوران مستندکرده و برای مجله ارسال کنند. اشتراک‌گذاری این تجربیات می‌تواند موجی از هم‌افزایی و یادگیری بیشتر از یکدیگر را به دنبال داشته باشد.

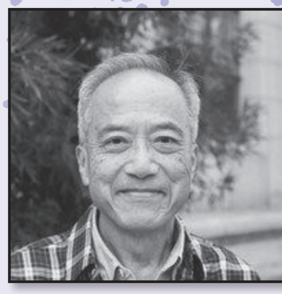
نقشی بر آب می‌زنم از گریه حالیا
تا کی شود قرین حقیقت مجاز من

(حافظ)

رضا حیدری قزلجه

از حساب به جبر

جبر، حساب تعمیم‌یافته است[1]
چگونه حساب را بهتر درس دهیم؟



● هانگ هسی وو

مترجمان:
● **امیرحسین اصغری**؛ دانشیار دانشگاه جان مورس لیورپول انگلیس
● **نازنین حسن‌نیا**؛ دبیر ریاضی تهران

برنامهٔ ریاضیات مدرســه‌ای ســاختاری طبیعی دارد: از مفاهیم ســاده، به پیچیده و از مفاهیم ملموس به مفاهیم مجرد و مصنوع رشد می‌کند. غیر از این نمی‌تواند باشد؛ چون مهم‌ترین کارکردش این است که دانش‌آموزان را کمک و هدایت کند تا اولین گام‌هایشــان را برای یادگیری ریاضی بردارند. فراموش نکنیم که دانش ریاضی هم، در طول تاریخش از ساده به پیچیده رشد کرده است.

متأســفانه در روند تکامل ریاضیات مدرسه‌ای[2]، گسست‌های نالازمی وجود دارند که یادگیری دانش‌آموزان را مختل می‌کنند. یک نتیجهٔ این گســـست، ترس و دلهره‌ای‌ست که دانش‌آموزان از یادگیری جبر دارند. موضوع این نوشته، گسستی است که در عبور از موضوع حساب به جبر در ریاضیات مدرسه وجود دارد. در اینجا منظور از «حساب» مباحثی اســت که به عددهای صحیح، اعشاری‌های با بسط متناهی و عددهای کسری مربوط می‌شود و «جبر» همان جبر مقدماتی‌ای است که در ریاضیات مدرسه‌ای وجود دارد و موضوعاتی را مانند عددهای گنگ، استفادهٔ گسترده از نمادهای ریاضی، معادلات خطی یک یا دو متغیره و معادلهٔ درجهٔ دوم، شامل می‌شود. در اینجا به مفاهیم پیچیده‌تر جبری مانند توابع نمایی و لگاریتمی، یا عملیات جبری روی چندجمله‌ای‌ها [اشــمید و وو (۲۰۰۸)، وو (۲۰۱۶b) و وو (در دســت انتشار) را ببینید] کاری نداریم؛ در عوض به دو شاخصهٔ مهم ریاضیات مدرسه‌ای، یعنی تعمیم و تجرید می‌پردازیم. اجازه دهید به جای اینکه وقتمان را صرف تعریف دقیق مفاهیم اخیر کنیم، بحث را ادامه دهیم. مفهوم دقیق این واژه‌ها در مسیر بحث، آشکار خواهد شد.

پیام اصلی این نوشــته آن است که جبر مدرسه‌ای در واقع، همان حسابِ تعمیم‌یافته است. احتمالاً در این لحظه خواننده برداشت خودش را از عبارت حسابِ تعمیم‌یافته دارد. در ادامهٔ متن، تا حد امکان توضیح می‌دهم، منظور از حسابِ تعمیم‌یافته چیســت. حساب با محاسبات دقیق روی عددهای مشخص و معلوم ســروکار دارد. به‌طور معمول، ریاضیات مدرسه‌ای طوری تدریس می‌شود که دغدغهٔ اصلی دانش‌آموزان در ریاضی، انجام دادن تمرین‌هاست. به این معنی که به‌دست‌آوردن جواب درست ۶۷-۱۵۱ یا $\frac{۳}{۸}+\frac{۵}{۶}$ برایشان راضی‌کننده است و به دنبال چیزی ورای جواب نیستند. **اما جبر، اولین برخورد دانش‌آموزان با ریاضیات به معنی واقعی کلمه است و تازه اینجاست که شمایی از «تصویر اصلی» [ریاضیات] را می‌بینند.**

در جبر از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که بعد از انجام هر محاسبه، به این فکر کنند که: آیا این محاسبه، حالت خاصی از یک قانون عمومی است یا نه؟ یا اینکه آیا می‌شود این محاسبه را در زمینه‌ای گسترده‌تر دید تا شاید ویژگی‌های آن بهتر درک شود؟ حالا دانش‌آموزی که در حوزهٔ حساب به‌خوبی کارش را انجام می‌داد و از نتیجه راضی بود، باید توجیه شود که چرا باید خودش را برای حساب تعمیم‌یافته آماده کند. در واقع چرا باید به این دردسر بیفتد.

هر برنامهٔ درســـی که بخواهد گذار دانش‌آموزان را از (حوزه) حســـاب به جبر هموار کند، باید جوابی برای این سؤال داشته باشد. اما چه جوابی می‌توان به این سؤال داد؟

برای پاســـخ به این سؤال، دو مسئلهٔ جبری را بررسی می‌کنیم: یکی مسئلهٔ حاصل جمع متناهی جمله از یک سری هندسی و دیگری حل یک معادله از درجهٔ یک. امیدواریم که در خلال این بحث، ماهیت حساب تعمیم‌یافته هم مشخص‌تر شود. پیشاپیش می‌گویم بحث پیش‌رو مقداری محاسبات دقیق ریاضی دربردارد، با اینکه در مقالاتی از این دســـت مرسوم نیست؛ البته این مقدار ریاضی برای پیشـــبرد بحث ضروری است. همچنین نمی‌توان از این واقعیت فرار کرد که قلب بحث‌های آموزش ریاضی، ماهیت ریاضی دارد.

فرض کنید از یک کلاس هشتمی خواسته‌ایم حاصل عبارت زیر را به دست آورد (استفاده از ماشین حساب مجاز است).

$۱+۳+۳^{۲}+...+۳^{۱۰}$

حســـاب به ما می‌گوید حاصل این جمع ۸۸۵۷۳ اســـت و تمام. ولی آیا این مســـئله یک مسئلهٔ خیلی خاص محاســـباتی است؟ یا اینکه مثلاً گروهی مسئلهٔ شـــبیه به آن وجود دارد؟ آیا می‌توان راه‌حل این مسئله را جزئی از یک قانون عمومی به حساب آورد؟ هشتمی‌ها ابتدا باید متوجه الگو یا ساختار موجود در این جمع شوند: توان‌های متوالی عدد ۳ با هم جمع شده‌اند. (فرض کنیم آن‌ها می‌دانند که $۳^{۰}=۱$ و $۳^{۱}=۳$). اولین چیزی که به ذهن می‌رسد این اســـت که می‌توان حاصل جمع توان‌های عدد ۳ را نه‌تنها تا ۱۰، بلکه تا هر توان طبیعی دیگری حســـاب کرد. بعد، چرا توان‌های عدد۳؟ چرا توان‌های عددهای دیگر نه؟ همین که این ســـؤالات به ذهن می‌رسند، یعنی حساب را پشـــت سر گذاشـــته‌ایم. می‌خواهیم حاصل جمع توان‌های متوالی عددی را که نمی‌دانیم چند است، تا توانی که نمی‌دانیم چند اســـت، حساب کنیم. حســـاب و کتاب با عددهای مشخص هیچ کمکی به ما نمی‌کند. حتی قبل از اینکه شروع به حل کنیم، با مسئله‌ای مهم‌تر روبه‌رو می‌شویم: عبارتی که این قدر کلی است (حاصل جمع توان‌های متوالی عددی که نمی‌دانیم چند اســـت، تا توانی که نمی‌دانیم چند اســـت) را چطور به شکلی خلاصه‌تر و در عین حال دقیق بیان کنیم؟

اینجا می‌توانیم به کلاس‌هشتمی‌ها بگوییم که ریاضی‌دانان قدیم بیش از هزار سال درگیر این موضوع بودند که چطور چنین مسئلهٔ کلی‌ای را بیان کنند. تا اینکه حدود ۱۶۰۰ میلادی، بالاخره روشی کارا پیدا کردند تا به کمک نمادها، این‌گونه عبارت‌ها را بیان کنند. با این دستاورد ریاضی، مسئله را به این شکل مطرح می‌کنیم: حاصل جمع $۱+r+r^{۲}+...+r^{n-۱}+r^{n}$ را بیابیم، وقتی که r وn عددهای دلخواه ($n \in \mathbb{N}$) باشند. با صرف‌نظر کردن از کار با عددهای معلوم و مشـــخص، تنها ابزاری که برای حل این مسئله داریم، خاصیت شرکت‌پذیری و جابه‌جایی دو عمل جمع و ضرب و نیز خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نســـبت به جمع اســـت که می‌دانیم برای همهٔ عددها درست است، و فرقی نمی‌کند که آن عددها معلوم‌اند یا مجهول. این مسئله به کلاس‌هشتمی‌ها کمک می‌کند تا شاید برای اولین بار به اهمیت قوانین عملگرهای جمع و ضرب پی ببرند.

به جای اینکه مدتی طولانی را صرف این مســـئلهٔ کلی کنیم، شـــاید بهتر باشد که مرحله‌به‌مرحله پیش برویم و ابتدا حاصل جمع $۳^{۲۴}+...+۳^{۲}+۳+۱$ را حســـاب کنیم. این عبارت، حاصل جمع ۲۵ عدد مشخص و معلوم است و بنابراین شبیه یک مسئلهٔ حساب متداول است. اما از آنجا که انجام این محاسبات با دست خالی، به صبر و حوصله‌ای بیش از توانِ کلاس‌هشـــتمی‌ها نیاز دارد، پس به چیزی بیش از مهارت‌های متداولِ حساب نیاز داریم تا آن را حل کنیم. یک راه پرداختن به این مسئله آن است که کل این عبارت را به‌صورت یک عدد ببینیم؛ نمی‌دانیم این عدد دقیقاً چند است، با این حال نام آن را S می‌گذاریم. بی‌درنگ از مزایای این نمادگذاری بهره‌مند می‌شویم. این یک قدم بســـیار مهم اســـت، چون با این کار، ما دیگر درگیر محاسبات قدیمی نیستیم که می‌باید جواب هر عملیات را به صورت عددی مشـــخص محاســـبه می‌کردیم و قدم‌به‌قدم پیش می‌رفتیم. حالا محاسباتمان را با S به‌عنوان یک عدد پیش می‌بریم. از آنجا که S جمع توان‌های متوالی عدد ۳ است، انگار بد نیست ۳ را درS ضرب کنیم. به کمک خاصیت توزیع‌پذیری (ضرب نسبت به جمع) می‌بینیم که عبارتی خیلی شبیه به خود S به دست می‌آید. داریم:

$$
\begin{aligned}
۳S &= ۳\times۱+۳\times۳+۳\times۳^{۲}+...+۳\times۳^{۲۳}+۳\times۳^{۲۴}\\
&= ۳+۳^{۲}+۳^{۳}+...+۳^{۲۴}+۳^{۲۵}\\
&= (۱+۳+۳^{۲}+...+۳^{۲۴})-۱+۳^{۲۵} = (S-۱)+۳^{۲۵}
\end{aligned}
$$

بنابراین:

$$۳S = S+۳^{۲۵}-۱ \qquad (۱)$$

«حساب» مباحثی است که به عددهای صحیح، اعشاری‌های با بسط متناهی و عددهای کسری مربوط می‌شود و «جبر» همان جبر مقدماتی‌ای است که در ریاضیات مدرسه‌ای وجود دارد و موضوعاتی را مانند عددهای گنگ، استفادهٔ گسترده از نمادهای ریاضی، معادلات خطی یک یا دو متغیره و معادلهٔ درجهٔ دوم، شامل می‌شود

باز هم بدون اینکه بدانیم مقدار S دقیقاً چند است، قرینهٔ آن (S-) را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم و داریم:

$$(-S)+3S=(-S)+S+3^{25}-1$$

در سمت چپ تساوی از خاصیت پخشی (توزیع‌پذیری) استفاده می‌کنیم:

$$(-S)+3S=(-1+3)S=2S$$

به این ترتیب:

$$S=\frac{1}{2}(3^{25}-1) \qquad (2)$$

و به کمک ماشین‌حساب حاصل را به دست می‌آوریم: $S=423,644,304,721$. باید به کلاس‌هشتمی‌ها یادآور شویم که این جواب بدون سختی زیاد به دست آمد.

این اولین ثمرهٔ تفکر مجرد بود: جوابی که به جای انجام محاسبات کورکورانه روی عددهای مشخص، با افزودن استدلال و به رسمیت شناختن الگوهای انتزاعی در انجام محاسبه با عددها در حالت کلی به دست آمده است. برای مثال، ایدهٔ ضرب کردن ۳ در S که معادلهٔ (۱) را نتیجه داد، به اندازهٔ جواب نهایی، مهم و پرفایده بود. ایده از آنجا نشئت گرفت که حاصل جمع توان‌های متوالی عدد۳ اساساً بعد از این ضرب تغییر چندانی نمی‌کند و اکثر جملات، عیناً تکرار می‌شوند. به یک معنا، کاری که برای حل مسئله انجام دادیم، مطلقاً حساب است. چون کاری به جز انجام عملیات حسابی روی عددها (و تنها عددها) انجام نداده‌ایم. در عین حال، به کمک قوانین جمع و ضرب، این عملیات را روی عددهای نامعلوم انجام داده‌ایم. پس در واقع ما حساب تعمیم‌یافته انجام داده‌ایم.

آنچه در عددهای طبیعی یاد می‌گیرند، به آن‌ها کمک خواهد کرد که کسرها را یاد بگیرند؛ چرا که این موضوع‌ها شبیه به هم هستند مدتی باور بر این بود که «کسرها، عددهایی بسیار متفاوت از عددهای طبیعی هستند». این باورِ نادرست مانعی برای یادگیری کسرهاست

این مثال نشان می‌دهد که **اگر قدم را از محاسبه با عددهای مشخص فراتر بگذاریم و برای شناخت الگوهای کلی‌تر سعی کنیم، حتی در مسئله‌های معمولی محاسباتی، نتایج بیشتری به دست خواهیم آورد**. به مسئلهٔ اصلی برگردیم و حاصل $1+r+r^2+...+r^{n-1}+r^n$ را برای r و n دلخواه ($n\in\mathbb{N}$) به دست آوریم. اگر r=۱ باشد، حاصل عبارت n+۱ است و مسئله جذابیتی ندارد. پس از این به بعد فرض کنیم $r\neq 1$ است. اگر استدلال قبل را با دقت مرور کنیم، دیده می‌شود که اگر عدد ۳ را با r و توان ۲۴ را با n جایگزین کنیم، همهٔ استدلال جمله‌به‌جمله درست خواهد بود. پس هرگاه $r\neq 1$ عددی دلخواه و n عددی دلخواه و طبیعی باشد:

$$1+r+r^2+...+r^{n-1}+r^n=\frac{r^{n+1}-1}{r-1} \qquad (3)$$

این همان رابطه‌ای است که برای محاسبهٔ حاصل جمع متناهی جمله از یک دنبالهٔ هندسی داریم. رابطهٔ (۲) حالت خاصی از فرمول (۳) است، وقتی که r =۳ و n =۲۴ باشد. برای اینکه طعم این تعمیم را بهتر بچشیم، بیایید جمع زیر را به‌دست آوریم:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{27}}+\frac{1}{2^{28}}$$

این حاصل جمع، سمت چپ تساوی (۳) است، وقتی که: $r=\frac{1}{2}$ و $n=28$. بنابراین:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{27}}+\frac{1}{2^{28}}=\frac{(\frac{1}{2})^{28+1}-1}{\frac{1}{2}-1}=2-(\frac{1}{2})^{28}.$$

حالا دربارهٔ تساوی (۳) می‌توانیم از خودمان بپرسیم که: آیا این تساوی بخشی از یک قانون عمومی‌تر در ریاضی است یا نه؟ آیا می‌توانیم آن را در یک زمینهٔ وسیع‌تر ببینیم تا آن را بهتر درک کنیم؟ به راستی که چنین است، به شرطی که برای به دست آوردن این «زمینهٔ وسیع‌تر» از تور بزرگ‌تری استفاده کنیم. کلاس‌هشتمی‌ها اتحاد

مشهور $(x-y)(x-y)=x^2-y^2$ را می‌شناسند که برای هر مقدار x و y درست است. می‌توان از آن‌ها خواست که به‌عنوان تمرین خاصیت توزیع‌پذیری، نشان دهند تساوی زیر برای هر مقدار طبیعیn و هر عدد x و y درست است.

$$(x-y)(x^n+x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+...+xy^{n-1}+y^n)=x^{n+1}-y^{n+1} \qquad (4)$$

حالا تساوی $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$، حالت خاصی از تساوی (۴) است وقتی که قرار می‌دهیم: $n=1$. حتی تساوی (۳) هم حالت خاصی از تساوی (۴) است؛ کافی است قرار دهیم: $y=1$ ، $x=r$ و $r\neq 1$. به این ترتیب رابطهٔ (۳) که مجموع متناهی جملهٔ دنبالهٔ هندسی را به دست می‌دهد. با تساوی آشنای $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ ارتباط پیدا می‌کند و این تازه اول داستان است. عدد ۶۴,۳۳۹,۲۸۰,۴۹۱ را در نظر بگیرید. سخت بتوان گفت عددی به این بزرگی اول است یا نه (عدد اول عددی است که فقط بر خودش و یک بخش‌پذیر است). این عدد برابر است با 35^7-4^7 و این یعنی می‌توانیم تساوی (۴) را برای آن استفاده کنیم:

$$64,339,280,491=35^7-4^7=31\times(35^6+35^5\times 4+...+35\times 4^5+4^6)$$

یعنی عدد ما بر ۳۱ بخش‌پذیر است و در نتیجه اول نیست! به همین ترتیب، می‌توان نشان داد که اگر x و y عددهای صحیح مثبت باشند و: $x-y>1$، برای $n\geq 1$ عدد x^n-y^n هیچ‌گاه اول نیست. توجه کنید که ما همچنان درگیر حساب هستیم؛ ولی با استفاده از نمادها به جای عددها و درک، پذیرش و انجام تعمیم در هنگام محاسبات. جمع تعدادی جمله از یک دنبالهٔ هندسی، به کمک تساوی (۴)، به مسئلهٔ تعیین اول یا مرکب بودن عددها مربوط می‌شود. باید چنین مثال‌هایی را از قدرت تعمیم، در کلاس هشتم مورد توجه قرار داد.

موضوع دیگری که در برنامهٔ درسی جبر مهم به‌شمار می‌آید، حل معادله است. موضوعی که در تاریخ جبر هم نقش مهمی در پیشبرد این علم داشته است. معادلهٔ خطی $4x+1=2x-3$ را در نظر بگیرید. معمولاً در جبر مدرسه‌ای، x را متغیر در نظر می‌گیریم و با انجام کارهای زیر، معادله را حل می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: $(-2x)+4x+1=(-2x)+2x-3$

مرحلهٔ دوم: $2x+1=-3$

مرحلهٔ سوم: $2x+1+(-1)=-3+(-1)$

مرحلهٔ چهارم: $2x=-4$

مرحلهٔ پنجم: $x=-2$

ما بر این باوریم که راه‌حل ساده‌تر این است که روی آموزش حساب سالم متمرکز شویم، به جای اینکه سعی کنیم آنچه را که هست دست‌کاری کنیم. باور ما این نیست که آموزش حساب سالم، هدف نهایی است (هر چند هیچ شکی در اهمیت آن وجود ندارد). سودمندی حساب سالم در این است که سکویی برای شروع جبر خواهد شد

جواب ۲-، جواب درستی است، اما با کمی دقت مشخص می‌شود که این پنج مرحله هیچ معنایی ندارند. برای مثال، مرحلهٔ اول را در نظر بگیرید. از آنجا که x مقداری است که تغییر می‌کند، چگونه می‌توانیم بگوییم دو مقدار $4x+1$ و $2x-3$ که هر کدام با تغییر x تغییر می‌کنند، با هم برابرند[3]؟ و چطور می‌توانیم بگوییم که این دو مقدار پس از اضافه کردن $-2x$ (چیزی که خودش مقداری متغیر است) به هر کدام، همچنان با هم برابر می‌مانند؟ در واقع برای عبور از مرحلهٔ ۱ به مرحلهٔ ۲، در هر دو طرف تساوی از خاصیت شرکت‌پذیری جمع و نیز خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع استفاده کردیم. در هر طرف تساوی جملات شامل x را با هم جمع کردیم. دانش‌آموزان این قوانین را در حساب خوانده‌اند، اما آنجا این قوانین برای عددها درست بود. کجا برای آن‌ها توضیح داده شده است که می‌توان از این قوانین برای مقدارهای متغیر هم استفاده کرد؟ **این تغییر ناگهانی از محاسبه با عددهای مشخص، به محاسبه با عددهای نامعلوم، ممکن است در درک دانش‌آموزان ناسازگاری ایجاد کند**. ریاضیات قرار است طریقهٔ استدلال کردن را به دانش‌آموزان بیاموزد، یا از بر کردن و تکرار آنچه را که می‌بینند؟

این مورد، یکی از مثال‌های بسیاری است که نشان می‌دهد، ریاضیات مدرسه‌ای چطور در گذر دانش‌آموز از حساب به جبر گسست ایجاد می‌کند. در اینجا مقصر اصلی رویکردی در آموزش جبر است که پای «متغیرها» را وسط می‌آورد. این رویکرد برای ادامهٔ کار، ناگزیر به سوءاستفاده از خاصیت‌هایی می‌شود که در حساب کاربرد داشتند. این گسست توجیه‌ناپذیر را می‌توان به کمک ایدهٔ حساب تعمیم‌یافته، به‌صورت زیر اصلاح کرد.

اول باید مشخص کنیم که یک «معادله» چیست. معادلهٔ $4x+1=2x-3$ به این معناست که سؤالی داریم: آیا

برنامهٔ درسی باید هرجا که امکانش هست، فرایند تجرید را در حساب مدرسه‌ای بگنجاند تا فاصلهٔ میان حساب و جبر کم شود. استفاده از نمادها هرجا که موقعیتش فراهم باشد، یکی از گام‌های تجرید است. از همه مهم‌تر این نکته است که استنتاج به کاری جاری و روزمره در حساب بدل شود، چرا که ساختار ریاضیات (در هر سطحی) بر پایهٔ استنتاج بنا شده است

عـــددی چون x وجود دارد که ۳-۲x=۱+۴x؟ چنین عددی را جواب معادلهٔ ۳-۲x=۱+۴x می‌نامیم. دقت کنید که هیچ حرفی از «متغیر» به میان نیامده اســـت و تنها با عددها ســـروکار داریم. برای حل معادله، فرض کنیم چنین عددی وجود دارد. تأکید می‌کنم که x اینجا یک عدد است. پس داریم تساوی دو عدد ۳ − ۲x و ۱+ ۴x را بررسی می‌کنیم و مراحل ۱ تا ۵، گزاره‌های پی‌درپی در مورد عددها هستند و هر کدام نتیجه‌ای منطقی از مرحلهٔ قبل. در آخر به این نتیجه می‌رســـیم: اگر معادلهٔ ۳-۲x=۱+۴x جوابی داشـــته باشد، این جواب ۲- است. اما این جواب به ما نمی‌گوید ۲- جواب معادله است، بلکه برای اثبات این موضوع باید در معادله x را با ۲- جایگزین کنیم و ببینیم که واقعاً دو طرف تســـاوی با هم برابر هستند یا خیر. به این ترتیب، تمام مراحل ۱ تا ۵ به‌عنوان عملیات حسابی روی عددهای معلوم یا نامعلوم قابل توضیح‌اند؛ عملیاتی که از درستی آن‌ها اطمینان داریم. پس حل معادله (همان‌طور که مشخص شد هر نوع معادله‌ای) بخشی از حساب تعمیم‌یافته است.

باز هم تأکید می‌کنم که در این راه‌حل، «متغیری[۴]» وجود ندارد (برای توضیح بیشـــتر در این موضوع بخش ۱ ،۳ و (۲۰۱۶ b) را ببینید).

امیدوارم توضیحات قبل مشـــخص کرده باشـــد که چرا می‌گویم جبر مدرسه‌ای همان حساب تعمیم‌یافته است: این جبر همان حســـاب است در ســـطحی مجردتر. **برنامهٔ درسی باید هرجا که امکانش هســـت، فرایند تجرید را در حساب مدرسه‌ای بگنجاند تا فاصلهٔ میان حساب و جبر کم شود. استفاده از نمادها هرجا که موقعیتش فراهم باشد، یکی از گام‌های تجرید اســـت. از همه مهم‌تر این نکته است که استنتاج به کاری جاری و روزمره در حساب بدل شود، چرا که ساختار ریاضیات (در هر سطحی) بر پایهٔ استنتاج بنا شده است.** شکست برنامهٔ درسی معمول آمریکا[۵] در بر آورده کردن این پیش‌نیازها، علت به‌وجود آمدن گسســـت بین حساب و جبر مدرسه‌ای است و این گسست به یادگیری جبر آسیب می‌رساند. در ادامه، به این امر خواهیم پرداخت که حساب را چگونه بهتر درس دهیم.

● چگونه حساب را بهتر درس دهیم؟

اشاره کردیم که تاکنون تمرکز اصلی حساب در برنامهٔ درسی ریاضیات مدرسه‌ای بر انجام محاسبه‌های دقیق با عددهای معلوم بوده اســـت. از طرف دیگر، در مدرسه تمرکز جبر مقدماتی نیز بر محاسبات است، ولی محاسبات با عددهای معلوم و نامعلوم و با تکیه بر قوانین جابجایی، شرکت‌پذیری جمع و ضرب و توزیع‌پذیری. علاوه بر این، جبر شروع توجه به الگوهای کلی است که در مورد همهٔ عددهای درست‌اند. اکنون، به مشکل دانش‌آموزان در گذر از حساب به جبر می‌پردازیم.

برنامهٔ معمول ریاضیات مدرسه‌ای چندان توجهی به این مشکل ندارد. بعضی از آموزشگران، با آگاهی از سختی این گذر، پیشنهاد کرده‌اند که «تفکر جبری» در سال‌های اولیه آموزش مدرسه‌ای مورد توجه قرار گیرد (برای مثال: بلانتون، ۲۰۱۸؛ کاپوت، ۲۰۰۸؛ و کایرن، ۲۰۰۴). نمی‌توان در نیت خوب آن‌ها شک کرد، ولی همچون همهٔ موارد دیگر در آموزش ریاضی، نیت خوب کافی نیست. چرا که کیفیت چگونگی انجام آن در جزئیات نهفته است. با توجه به اینکه برنامهٔ آموزش مدرســـه‌ای جبر در آمریکا اساساً نادرست است (به وو، ۲۰۱۶ b به‌خصوص بخش‌های ۱,۱ ، ۱,۲ ، ۳,۴، ۱,۵، ۲,۷، ۸,۴، و ۴,۱۰ نـــگاه کنیـــد)[۶]، اولین قدم ما این خواهد بود که دریابیم معنی «تفکر جبری» در زمینهٔ چنین برنامهٔ نادرستی چه می‌تواند باشد، چرا که «چگونگی درک ما از جبر، چگونگی جبرورزی ما را تعیین خواهد کرد.» (کاپوت، ۲۰۰۸، ص. ۸) علاوه بر این، توصیه‌های مرســـوم برای تشـــویق به تفکر جبری در مدرسه، معمولاً با اضافه کردن عناصر جدید به برنامهٔ جاری حســـاب (برای مثال، مســـئله‌های مرسوم به فکری) همراه‌اند و آنچه معیوب است، همان‌گونه که بود، دست نخورده باقی می‌ماند.

ما بر این باوریم که راه‌حل ســـاده‌تر این است که روی آموزش حساب سالم متمرکز شویم، به جای اینکه سعی کنیم آنچه را که هســـت دست‌کاری کنیم. باور ما این نیست که آموزش حساب سالم، هدف نهایی است (هر چند

هیچ شکی در اهمیت آن وجود ندارد). سودمندی حساب سالم در این است که سکویی برای شروع جبر خواهد شد (هفت توصیه زیر با هدف روشن کردن این نگاه نوشته شده‌اند). علاوه بر این، قابلیت یادگرفته شدن حساب سالم بیشتر از حساب معیوب است و نیاز به یادآوری این امر نیست که دانش‌آموزانی که حساب را به درستی یادگرفته‌اند، آمادگی بیشتری برای یادگیری جبر دارند.

در ادامه تلاش خواهم کرد که از کلی‌گویی در مورد برنامهٔ درسی حساب بپرهیزم و فقط به موارد اساسی‌ای اشاره کنم که باید در آموزش حساب تغییر کنند. به همین دلیل ناگزیرم که به شش کتابی[7] که با هدف چنین تغییری نوشته شده‌اند، به‌طور پی‌درپی اشاره کنم (وو، ۲۰۱۱، a ۲۰۱۶، b ۲۰۱۶، در دست انتشار). در واقع، این کتاب‌ها با هدف ایجاد تغییرات کلی و همه‌جانبه در محتوای ریاضیِ ریاضیات مدرسه‌ای نوشته شده‌اند[8]. اما تمرکز نوشتهٔ حاضر فقط روی تغییراتی[9] است که باید در آموزش حساب ایجاد شوند تا مسیر آشنایی دانش‌آموزان با جبر هموار شود.

۱. باید برای الگوریتم‌های استاندارد حساب (علاوه بر تصویرها و قیاس‌ها) توضیحات ریاضی متناسب با هر پایهٔ تحصیلی ارائه شود. به‌طور خاص باید بر اهمیت قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری جمع در الگوریتم‌های استاندارد جمع و تفریق (وو۲۰۱۱، ص. ۶۸؛ وو۲۰۰۰،ص.۴۶ و ص.۴۹) و همچنین بر نقش اساسی قانون توزیع‌پذیری در الگوریتم‌های استاندارد ضرب و تقسیم طولانی (وو۲۰۱۱، ص.۸۵؛ وو ۲۰۰۰، ص.۶۲، و ص.۸۲) تأکید کرد. پس از آشنایی با چرایی درستی الگوریتم‌ها، دانش‌آموزان درک بهتری از آن‌ها و چگونگی عملکرد آن‌ها پیدا خواهند کرد. (وو، ۲۰۱۱، فصل۲؛ وو۲۰۰۰، فصل۲). در حال حاضر، یکی از دلایلی که معلم‌ها و دانش‌آموزان این قوانین را جدی نمی‌گیرند، این است که برنامهٔ حساب هیچ استفادهٔ ریاضی جدی از آن‌ها نمی‌کند. در نتیجه تنها خاصیت این قوانین آن است که برای کسب نمرهٔ خوب در آزمون‌های سراسری حفظ شوند.

۲. **حتی در حساب، دانش‌آموزان باید تجربه‌ای از تجرید و ساختار کسب کنند. در واقع، پیغام اصلی چهار الگوریتم استاندارد این است که اگر یاد بگیریم چگونه با عددهای تک‌رقمی محاسبه کنیم، قادر خواهیم بود هر محاسبه‌ای را با دیگر عددهای طبیعی، هر چقدر هم که بزرگ باشند، انجام دهیم** (وو، ۲۰۱۱، فصل۳ و در سراسر فصل‌های ۴ تا ۷؛ وو۲۰۰۰، صص.۳۸-۴۰). اگر این پیغام را به دانش‌آموزان یادآوری و در موقعیت‌های مختلف به آن اشاره کنیم، آن‌گاه آن‌ها نه‌تنها متوجه ارزش یادگیری الگوریتم‌ها خواهند شد، بلکه تجربه‌ای از تفکر مجرد به دست خواهند آورد و وقتی به جبر می‌رسند کمتر شوکه خواهند شد (در واقع، اگر معلم‌ها مجبور بودند که پیغام اصلی را به‌طور مکرر در تدریس خود یادآوری کنند، شاید در قانع کردن دانش‌آموزان برای حفظ کردن جدول ضرب موفق‌تر بودند).

حتی در حساب، دانش‌آموزان باید تجربه‌ای از تجرید و ساختار کسب کنند. در واقع، پیغام اصلی چهار الگوریتم استاندارد این است که اگر یاد بگیریم چگونه با عددهای تک‌رقمی محاسبه کنیم، قادر خواهیم بود هر محاسبه‌ای را با دیگر عددهای طبیعی، هر چقدر هم که بزرگ باشند، انجام دهیم

۳. به همین ترتیب باید برای دانش‌آموزان، بر اهمیت معنای برابری کسرها (وو،۲۰۱۱، فصل ۱۳؛ وو a ۲۰۱۶، بخش ۱٫۳، وو ۲۰۰۱، بخش ۳) تأکید و نقش آن را در همهٔ آنچه به کسرها مربوط است، پررنگ‌کنیم: نقش صریح آن در مقایسهٔ کسرها (وو a ۲۰۱۶، صص. ۳۱-۳۵؛ وو ۲۰۰۱، بخش۵)، جمع و تفریق کسرها (وو a ۲۰۱۶، بخش۱٫۴؛ وو ۲۰۰۱، بخش۶) و ضرب و تقسیم کسرها (وو a ۲۰۱۶، بخش‌های ۱٫۵ و ۱٫۶؛ وو a ۲۰۱۰، صص. ۳۳-۳۷ و ص. ۷۲). بدون درک نقش محوری مفهوم مجرد برابری کسرها، محاسبه‌های مربوط به کسرها مهارت‌هایی جدا از هم خواهد بود و دانش‌آموزان می‌پندارند که تنها استفاده از قضیه برابری کسرها، در ساده‌کردن کسرهاست.

۴. اعشاری‌های متناهی باید به‌عنوان دستهٔ خاصی از کسرها (کسرهای اعشاری) تعریف و آموزش داده شوند (وو ۲۰۱۱، بخش ۱۲٫۳؛ وو a۲۰۱۰، صص. ۲۰-۲۲). این روش هم از لحاظ تاریخی و هم از لحاظ آموزشی صحیح است؛ فقط از این نقطه‌نظر که چهار عمل اصلی روی اعشاری‌ها و به‌خصوص ضرب اعشاری، واضح خواهد شد و البته که وضوح، شرط لازم برای قابل یادگیری بودن است (وو ۲۰۱۱، بخش۱۴٫۲، ص.۲۵۶، ص.۲۶۹؛ وو۲۰۱۱، بخش ۱۸٫۴؛ وو a ۲۰۱۰ صص. ۴۸-۴۹، ۵۶-۶۶ و ۷۶-۷۹). **درک اینکه دو دستهٔ به نظر متفاوت از عددها، اساساً یک چیز هستند، فرصت دیگری را برای دانش‌آموزان فراهم می‌کند که اهمیت تجرید و ساختار را تجربه کنند.**

۵. باید تأکید شود، اعمال مربوط به کسرها در راستای اعمال مربوط به عددهای طبیعی قرار دارند (وو، ۲۰۱۱، صص. ۱۷۳-۱۷۴،۲۲۱، ۲۶۲ و ۲۸۴-۲۸۶؛ وو ۲۰۰۱، صص. ۴۶-۶۳، ۸۱-۸۲). اینکه درک این هم‌راستایی، قابلیت یادگیری کسرها را افزایش خواهد داد، چنان آشکار است که به هیچ توضیحی نیاز نیست. آنچه

به همان اندازه اهمیت دارد ولی کمتر آشکار است، این موضوع است که این هم‌راستایی، تجربهٔ دیگری از درک تجرید و ساختار را برای دانش‌آموزان فراهم می‌کند: آنچه در عددهای طبیعی یاد می‌گیرند، به آن‌ها کمک خواهد کرد که کسرها را یاد بگیرند؛ چرا که این موضوع‌ها شبیه به هم هستند. مدتی باور بر این بود که «کسرها، عددهایی بسیار متفاوت از عددهای طبیعی هستند». این باورِ نادرست مانعی برای یادگیری کسرهاست (در سال‌های اخیر تلاش‌هایی برای کم‌رنگ کردن این باور انجام گرفته است؛ به Common Core، 2010 نگاه کنید).

۶. آموزش کسرها باید به روشی متناسب با پایه تحصیلی به تجرید و عمومیت موضوع وفادار باشد. هم‌اکنون تقریباً باور عمومی بر این است (برای مثال Common Core، 2010) که از لحاظ آموزشی، مؤثرتر است که کسرها به‌طور مشخصی تعریف شوند. مثلاً به‌عنوان نقطه‌ای روی محور عددها (جنسن، ۲۰۰۳؛ وو، ۲۰۰۱) به جای اینکه به دانش‌آموزان بباورانیم که یک کسر، هم یک قطعه پیتزاست، هم تقسیم است، و هم نسبت. اگر تلاش کنیم که واقعیت‌های متفاوت مربوط به کسرها را به‌طور موجز و دقیق ارائه دهیم، دانش‌آموزان به‌طور طبیعی (و به تدریج) با عمومیت و استفاده از نمادها آشنا خواهند شد. می‌توان با ریاضیاتی سالم کسرها را این‌چنین ارائه داد[۱۰] (جنسن، ۲۰۰۳؛ وو ۲۰۱۱، قسمت۲). برای مثال، قضیهٔ تساوی کسرها، گزاره‌ای است که بیان می‌کند، برای هر کسر $\frac{m}{n}$ و برای هر عدد طبیعی c، داریم:

$$\frac{m}{n}=\frac{cm}{cn}$$

به همین ترتیب «ضرب ضربدری» صورت و مخرج دو طرف یک تساوی را (که یکی از مهم‌ترین مهارت‌ها در کار با کسرهاست)، می‌توان به این شکل بیان کرد که برای هر دو کسر، $\frac{m}{n}$ و $\frac{k}{l}$، رابطهٔ $\frac{m}{n}=\frac{k}{l}$ هم‌ارز است با $ml=kn$ (و همچنین، در فرایند یادگیری این مهارت است که دانش‌آموزان معنای «هم‌ارز است» را یاد خواهند گرفت). فرمول جمع دو کسر دلخواه به شکل زیر است:

$$\frac{m}{n}=\frac{k}{l}=\frac{(ml+kn)}{nl}$$

و به همین ترتیب برای فرمول‌های دیگر. دانش‌آموزانی که در معرض چنین بیان نمادینی از کلیت قرار دارند، مسیر هموارتری را به سمت جبر طی خواهند کرد.

۷. بالاخره، ما باید همهٔ تلاش خود را به این امر معطوف کنیم که برای هر ادعایی در حساب، دلیلی ارائه دهیم. در حساب می‌توان با حفظ و تمرین کردن مهارت‌ها، محاسبات را به درستی انجام داد. اما به سختی می‌توان جبر را با حفظ کردن یاد گرفت. جبر حساب تعمیم‌یافته است و موضوع کلیدی آن بیان گزاره‌های کلی دربارهٔ عددهاست (بیشتر اوقات همهٔ عددها). استدلال تنها وسیله برای پیمودن قلمرو جبر است و بنابراین ما ناچاریم از همان روز اول دانش‌آموزان را در معرض استدلال قرار دهیم (وو ۲۰۱۱، a ۲۰۱۶، b ۲۰۱۶).

در این نوشتهٔ کوتاه، ما تلاش کردیم که معنای جبر را به‌عنوان حساب تعمیم‌یافته روشن کنیم و برای بهبود برنامهٔ درسی حساب پیشنهادهایی ارائه دهیم که عبور دانش‌آموزان را از حساب به جبر هموار می‌کند. نباید تظاهر کنیم که انجام چنین اصلاحاتی آسان است، چرا که نیازمند توسعهٔ حرفه‌ای و پایدار معلمان و خلق کتاب‌های درسی خوب برای دانش‌آموزان است؛ اما باید تلاش کرد.

ما باید همهٔ تلاش خود را به این امر معطوف کنیم که برای هر ادعایی در حساب، دلیلی ارائه دهیم. در حساب می‌توان با حفظ و تمرین کردن مهارت‌ها،محاسبات را به درستی انجام داد. اما به سختی می‌توان جبر را با حفظ کردن یاد گرفت جبر حساب تعمیم‌یافته است و موضوع کلیدی آن بیان گزاره‌های کلی دربارهٔ عددهاست (بیشتر اوقات همهٔ عددها). استدلال تنها وسیله برای پیمودن قلمرو جبر است و بنابراین ما ناچاریم از همان روز اول دانش‌آموزان را در معرض استدلال قرار دهیم

یک موضوع روشن است. راهبرد حذف تجرید از حساب، با این هدف طراحی شده است که به دانش‌آموزان القا کند می‌توانند در نبرد با محاسبات پیروز شوند، بدون اینکه به انجام تفکر انتزاعی نیاز داشته باشند. متأسفانه این راهبرد باعث می‌شود دانش‌آموزان در مواجه با نمادها، تجرید و تعمیم دچار شوک شوند. این راهبرد باعث شکست دانش‌آموزان در مواجه با جبر می‌شود. اگر ما برنامهٔ درسی حساب را اصلاح نکنیم، ما هم در همان مواجه شکست می‌خوریم.

تذکر: مقاله حاضر از «ویکی‌نوشت آموزش ریاضی»، شماره ۹ و ۱۰ آن، اقتباس شده است.

«ویکی‌نبشـــته» یا «ویکی‌نوشت» نوعی «کتابخانه دیجیتال آزاد» شامل کتاب‌ها، مطبوعات، سندها و دیگر نوشتارهای آزاد است که به عنوان منابع کلاسیک و بدون دگرگونی و تحریف در دسترس عموم قرار می‌گیرند. «ویکی‌نوشت آموزش ریاضی» به آدرس https://maths4maryams.org/mathed/farsi نیز در سال ۱۳۹۶ و پس از درگذشت پروفسور مریم میرزاخانی، با تأسیس وبگاه maths4maryams.org توسط دکتر امیرحسین اصغری ایجاد شد. این وبگاه، ویکی‌نوشته‌ها را ترکیبی غنی از تجربه و تحقیق توصیف کرده است که برای اولین بار منتشر شده‌اند. این سایت امکان تبادل نظر دربارهٔ این نوشته‌ها را نیز فراهم کرده است.

پی‌نوشت‌ها

* مایلم از لری فرانســـیس به خاطر بحث‌ها و تصحیح‌ها و از امیرحســـین اصغری برای پیشنهادهای ارزشمندش تشکر کنم.

۱. وو، هانگ (دی‌ماه ۱۳۹۷)، از حساب به جبر، قسمت اول: جبر، حساب تعمیم‌یافته است، ویکی نوشت شمارهٔ ۹.

۲. باید تأکید کنیم که اشارهٔ ما به گسست برنامهٔ درسی ریاضیات مدرسه‌ای در آمریکا مربوط است، نه به خود ریاضیات.

۳. برای مثـال، چون x تغییر می‌کند، می‌تواند مثلاً صفر باشـــد؛ در این صورت: $4x+1=1$ و $2x-3=-3$ و در نتیجه: ۳- =۱ !!!

۴. تأکید می‌کنم که متغیر یک مفهوم ریاضی نیســـت، نقطه، سرخط! اگر دانش‌آموزان به‌گونه‌ای آموزش داده شـــوند که با نمادها درست کار کنند، نیازی نخواهند داشت نگران این باشند که «متغیر» چیست (وو b ۲۰۱۶، بخش ۱و ۱).

۵. تلاش کرده‌اند از ســـال ۲۰۱۸، بیشـــتر مدارس آمریکا تلاش خواهند کرد که از برنامهٔ درسی مشترکی (Common Core) استفاده کنند. اینکه نتیجهٔ این تصمیم چه خواهد بود، هنوز معلوم نیست.

۶. همیـــن حرف را می‌توان دربارهٔ کلیت برنامهٔ درســـی کنونی ریاضی در آمریکا گفت (وو، ۲۰۱۸، بخش ۳. ۲. و پیوست۲). اگر چه به نظر نمی‌رسد آمریکا تنها کشوری باشد که دارای چنین مشکلاتی در برنامهٔ درسی است.

۷. نسخه‌های اولیهٔ این کتاب‌ها به‌طور رایگان در فضای مجازی در دسترس است (وو، ۲۰۰۰؛ ۲۰۰۱؛ a ۲۰۱۰؛ b ۲۰۱۰).

۸. هدف این است که آنچه من ریاضیات کتاب درسی مدرسه (وو ۲۰۱۸، بخش ۳. ۲ و پیوســـت۲) می‌نامم، به‌طور کلی از تمام دوره‌های تحصیلی حذف شود. شـــش کتاب مورد اشاره با این هدف نوشته شده‌اند که نشان بدهند می‌توان ریاضیات کتاب درســـی را با ریاضیات سالم و در عین حال متناسب با دورهٔ تحصیلی موردنظر جایگزین کرد.

۹. چون این مقاله کوتاه اســـت، به ناچار، بعضی از مفاهیم مهم در برنامهٔ حســـاب مدرسه، به‌خصوص مفاهیم سرعت ثابت (b ۲۰۱۶، بخش ۲٫۷) و شیب (b ۲۰۱۶، بخش ۴. ۳). در اینجا مورد بحث قرار نمی‌گیرند.

۱۰. روش معرفی کســـرها در وو (a ۲۰۱۶) اندکی پیچیده‌تر اســـت. ولی ناچار بودم آن را ذکر کنم، چون همان روش، مورد استفادهٔ استانداردهای برنامه درسی قرار گرفت.

منابع

1. Common Core (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Retrieved from: http://www.corestandards.org/Math/
2. Schmid, W. and Wu, H. (2008) The major topics of school algebra (March 31, 2008). https://math.berkeley.edu/~wu/NMPalgebra7.pdf
3.Wu, H. (2016b). *Teaching School Mathematics: Algebra*. Providence, RI: American Mathematical Society. Its *Index* is available at: http://tinyurl.com/haho2v6
4. Wu, H. (to appear). *Rational Numbers to Linear Equations, Algebra and Geometry, and Pre-Calculus, Calculus, and Beyond.*
5. Blanton, M. L. (2018) Empowering Children to Think Algebraically. Retrieved from: https://tinyurl.com/ybs8sm9h
6. Jensen, G. (2003). Arithmetic for Teachers. Providence, RI: American Mathematical Society.
7. Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the Early Grades, 5-17. New York: Lawrence Erlbaum Associates.
8. Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? The Mathematics Educator, 8, 139-151. Retrieved from: https://tinyurl.com/ybsnlycr
9. Wu, H. (2000). Chapter 1: Whole Numbers (Draft) (July 15, 2000; Revised September 1, 2002). https://math.berkeley.edu/~wu/EMI1c.pdf
10. Wu, H. (2001). Chapter 2: Fractions (Draft) (June 20, 2001; Revised September 3, 2002). https://math.berkeley.edu/~wu/EMI2a.pdf
11. Wu, H. (2010a). Pre-Algebra (Draft of textbook for teachers of grades 6-8) (April 21, 2010). https://math.berkeley.edu/~wu/Pre-Algebra.pdf
12. Wu, H. (2010b). Introduction to School Algebra (Draft of textbook for teachers of grades 6-8) (August 14, 2010).
13. Wu, H. (2011). Understanding numbers in elementary school mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society.
14. Wu, H. (2016a). Teaching School Mathematics: Pre-Algebra. Providence, RI: American Mathematical Society. Its Index is available at: http://tinyurl.com/zjugvl4Wu, H. (2016b). Teaching School Mathematics: Algebra. Providence, RI: American Mathematical Society. Its Index is available at: http://tinyurl.com/haho2v6
15.Wu, H. (2018). The content knowledge mathematics teachers need, in Mathematics Matters in Education. Essays in Honor of Roger E. Howe, Y. Li, J. Lewis, and J. Madden (eds.). Springer, Dordrecht (2018). 43-91. https://math.berkeley.edu/~wu/Contentknowledge1A.pdf

مربع‌های لاتین

قسمت دوم

محمود نصیری
مؤلف کتاب‌های درسی

اشاره

مبحث مربع‌های لاتین یکی از بخش‌های جدید در ریاضیات گسسته پایه دوازدهم رشته ریاضی فیزیک است. در این مقاله که از دو قسمت تشکیل شده است، در قسمت قبل سعی کردیم مفهوم‌های اساسی در مورد مربع‌های لاتین و کاربردهایی از آن را بیان کنیم. سپس مربع‌های لاتین متعامد و روش‌های ساختن آن‌ها را همراه با کاربرد آن بررسی کردیم، سعی شده بود علاوه بر روش کتاب درسی روش‌های دیگری نیز بیان شوند. همچنین به مسئله‌های کتاب نیز اشاره‌ای شد. در قسمت دوم، کاربردی از مربع‌های لاتین را در مورد ساختن مربع‌های جادویی بیان می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها: مربع‌های لاتین، اویلر، جدول کیلی، مربع‌های لاتین متعامد

تمرین:

۱. خانه‌های خالی شکل ۱ را چنان پر کنید که این مربع به یک مربع لاتین تبدیل شود.

شکل ۱

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳

۲. در صورت امکان مربع‌های شکل‌های ۲ تا ۵ را به یک مربع لاتین تبدیل کنید.

شکل ۲

۱			
			۲
		۳	

شکل ۳

۲	۱			
			۳	۴
				۳
۱				

شکل ۴

۱				
	۱			
		۱		
			۱	
				۲

شکل ۵

			۴
	۳	۴	
۳			

مربع‌های جادویی و مربع‌های لاتین متعامد[1]

تعریف: یک مربع جادویی از مرتبهٔ $n>1$، یک مربع (ماتریس) $A=(a_{ij}), n\times n$ از n^2 عدد متمایز از مجموعهٔ S هستند. و چنان مرتب شده‌اند که مجموع عددهای هر سطر، هر ستون و هر دو قطر برابر باشند.

در شکل ۶ یک مربع جادویی از مرتبهٔ ۴ دیده می‌شود که شامل ۱۶ عدد متمایز $1, 2, 3, \ldots, 16$ است. مجموع عددهای هر سطر، هر ستون و هر یک از دو قطر برابر ۳۴ است.

شکل ۶

۷	۱۲	۱	۱۴
۲	۱۳	۸	۱۱
۱۶	۳	۱۰	۵
۹	۶	۱۵	۴

هر گاه یک مربع جادویی شامل عددهای از ۱ تا n^2 باشد، آن را مربع جادویی نرمال از مرتبهٔ n می‌نامیم $(n>1)$.

با توجه به این تعریف در مربع جادویی نرمال می‌توانیم S، مجموع عددهای هر سطر یا هر ستون یا قطرها را محاسبه کنیم. کافی است مجموع عددهای از ۱ تا n^2 را بر n تقسیم

کنیم؛ چرا؟

$$S=\frac{۱+۲+\cdots+n^{۲}}{n}=\frac{n^{۲}(n^{۲}+۱)}{۲n}=\frac{n(n^{۲}+۱)}{۲}$$

از فرمول مجموع دنبالهٔ حسابی استفاده کرده‌ایم.

هر گاه در یک مربع جادویی مجموع عددهای هر سطر و هر ستون برابر باشند، آن را مربع نیمه جادویی یا شبه جادویی می‌نامند.

در ادامه خواهیم دید که چگونه به کمک مربع‌های دوبه‌دو متعامد می‌توان مربع‌های جادویی ساخت.

ساختن مربع‌های جادویی

ساختن مربع‌های جادویی به ویژه نیمه‌جادویی به کمک مربع‌های لاتین متعامد امکان‌پذیر است.

اولین روش آن توسط **اویلر** بیان شده است.

فرض کنیم A و B دو مربع لاتین از مرتبهٔ سه به صورت شکل ۷ باشند.

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} \gamma & \beta & \alpha \\ \alpha & \gamma & \beta \\ \beta & \alpha & \gamma \end{bmatrix}$$

شکل ۷

اگر $a=۰$، $b=۳$ و $c=۶$، همچنین $\alpha=۳$، $\beta=۲$ و $\gamma=۱$ را اختیار کنیم، به دو مربع لاتین زیر می‌رسیم (شکل ۸).

$$A_{۱}=\begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۶ \\ ۳ & ۶ & ۰ \\ ۶ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \qquad B_{۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

شکل ۸

اکنون $A_{۱}+B_{۱}$ یعنی جمع معمولی درایه‌های متناظر را می‌نویسیم. حاصل این یک مربع نیمه جادویی نرمال است (شکل ۹).

$$M=A_{۱}+B_{۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۹ \\ ۶ & ۷ & ۲ \\ ۸ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \qquad I_{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

شکل ۹

اگر دو مربع لاتین $L_{۱}$ و $L_{۲}$ را مطابق شکل ۱۰ در نظر بگیرید و $M_{۱}=۳L_{۱}+L_{۲}+I_{۳}$ را محاسبه کنید، به همان مربع نیمه جادویی نرمال M می‌رسیم. اگر $L_{۱}+۳L_{۱}+I_{۳}$ را تشکیل دهید، چه تفاوتی با M و $M_{۱}$ دارد؟ اکنون حالت $n=۴$ را بررسی می‌کنیم.

تذکر: منظور از ضرب یک عدد در یک مربع لاتین یا جمع دو یا چند مربع لاتین هم‌مرتبه، مشابه همان است که در ماتریس‌ها تعریف می‌کنیم.

شکل ۱۰

$$L_{۱}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad L_{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \qquad M_{۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۹ \\ ۶ & ۷ & ۲ \\ ۸ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

دو مربع لاتین متعامد $L_{۱}$ و $L_{۲}$ را در شکل ۱۱ در نظر می‌گیریم.

مشابه مثال قبلی، $M=۴L_{۱}+L_{۲}+I_{۴}$ را تشکیل می‌دهیم.

$$L_{۱}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \qquad L_{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۳ & ۲ \end{bmatrix} \qquad I_{۴}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۱۱ & ۱۶ \\ ۷ & ۴ & ۱۳ & ۱۰ \\ ۱۲ & ۱۵ & ۲ & ۵ \\ ۱۴ & ۹ & ۸ & ۳ \end{bmatrix}$$

شکل ۱۱

M یک مربع نیمه جادویی نرمال است.

اگر $M_{۱}=L_{۱}+۴L_{۲}+I_{۴}$ را تشکیل دهید، چه ارتباطی با M مشاهده می‌کنید؟

در تمام این مثال‌ها، $I_{۳}$ یا $I_{۴}$ و یا کلاً I_{n} نقش اضافه کردن یک واحد به هر درایه را دارند. یعنی اگر $۳L_{۱}+L_{۲}$ یا $۴L_{۱}+L_{۲}$ را تشکیل دهیم و به هر درایه یک واحد اضافه کنیم، به همان نتیجه می‌رسیم. به همین روش می‌توانیم مربع‌های نیمه جادویی نرمال از مرتبهٔ n بسازیم؛ یعنی قضیهٔ زیر را داریم:

قضیه: فرض کنیم $L_{۱}$ و $L_{۲}$ دو مربع لاتین متعامد و متمایز از مرتبهٔ n باشد که روی مجموعهٔ $S=\{۰,۱,۲,\ldots,n-۱\}$ تعریف می‌شوند و I_{n} یک ماتریس $n\times n$ باشد که همه درایه‌های آن یک باشند. در این‌صورت $M=nL_{۱}+L_{۲}+I_{n}$ یک مربع نیمهٔ جادویی نرمال است ($n\geq ۲$).

روش دیگری در ساختن مربع‌های نیمه‌جادویی نرمال

می‌توانیم روش دیگری را نیز برای ساختن مربع‌های نیمه جادویـــی نرمال بیان کنیم. آن را بـــرای حالت n=۴ در ادامه مشاهده می‌کنید. دو مربع لاتین A و B به صورت مربع‌های شکل ۱۲ هستند.

این دو مربع لاتین متعامدند. زیرا در مربع AB (شـــکل ۱۳) هیچ دو درایه یکســـان نیستند. در واقع AB به فرم یک مربع «گریگو» لاتین است.

A=

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱

B=

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۲	۱	۴	۳

شکل ۱۲

شکل ۱۳

AB=

۱۱	۲۲	۳۳	۴۴
۲۳	۱۴	۴۱	۳۲
۳۴	۴۳	۱۲	۲۱
۴۲	۳۱	۲۴	۱۳

هر گاه یک مربع جادویی شامل عددهای از ۱ تا $n^۲$ باشد، آن را مربع جادویی نرمال از مرتبهٔ n می‌نامیم (n>1)

در ســـاختار جدول شکل۱۳ مجموع عددهای هر سطر و مجموع عددهای هر ســـتون برابر و برابر۱۱۰ است. این یک مربع نیمه جادویی است، زیرا درایه‌ها ۱۶ عدد اولیه نیستند. اما چنانچه مشاهده می‌کنیم، به سادگی شرایط تبدیل به یک مربع جادویی را دارد. اگر ارقام را به پیمانهٔ ۴ محاسبه کنیم، به مربع شبه جادویی شکل ۱۴ می‌رسیم که همهٔ رقم‌های آن ۰، ۱، ۲ یا ۳ هستند.

شکل ۱۴

۱۱	۲۲	۳۳	۰۰
۲۳	۱۰	۰۱	۳۲
۳۰	۰۳	۱۲	۲۱
۰۲	۳۱	۲۰	۱۳

حال اگر این اعداد را در مبنای ۴ در نظر گرفته و معادل آن‌ها را در مبنای ۱۰ بنویســـیم به مربع شکل ۱۵ می‌رسیم؛

مثلاً:

$$(۳۳)_۴ = ۳\times۴+۳=(۱۵)_{۱۰}$$

$$(۳۲)_۴ = ۳\times۴+۲=(۱۴)_{۱۰}$$

شکل ۱۵

۵	۱۰	۱۵	۰
۱۱	۴	۱	۱۴
۱۲	۳	۶	۹
۲	۱۳	۸	۷

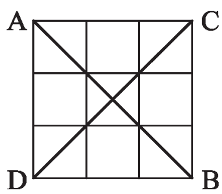
در شکل ۱۵مربعی داریم که به یک مربع جادویی نزدیک است، اما عددهای از ۰ تا ۱۵ در آن به کار رفته‌اند. کافی است به هر کدام از عددها یک واحد اضافه کنیم تا به یک مربع نیمه جادویی نرمال از مرتبهٔ ۴ برسیم (شکل ۱۶).

شکل ۱۶

۶	۱۱	۱۶	۱
۱۲	۵	۲	۱۵
۱۳	۴	۷	۱۰
۳	۱۴	۹	۸

ساختن مربع‌های جادویی نرمال

اکنون مسئلهٔ مهم‌تر آن است که: آیا می‌توانیم به همین روش مربع‌هـــای جادویی نرمال بســـازیم؟ یا به عبارت دیگر، مربع‌های لاتین متعامد انتخاب شده دارای چه ویژگی باشند تا به جای مربع‌های نیمـــه جادویی نرمال، خود به مربع‌های جادویی نرمال تبدیل شـــوند. ابتدا بـــرای حالت‌های n=۳ و n=۴، آن را بررسی می‌کنیم.



شکل ۱۷

قبل از بررســـی به یک قرارداد نیـــاز داریم: در یک مربع (شـــکل ۱۷) کـــه خود شـــامل مربع‌های کوچک‌تر اســـت، مربع‌هایی را که یک قطر آن‌ها روی قطر AB از مربع اصلی اســـت، مربع‌های روی قطر اصلی می‌نامیم و مربع‌هایی را که یک قطر آن‌ها روی قطر CD از مربع اصلی است، مربع‌های روی قطر فرعی می‌نامیم.

دو مربـــع لاتین دوبه دو متعامـــد $L_۱$ و $L_۲$ از مرتبهٔ ۳ را روی مجموعهٔ $\{۲و۱و۰\}$ در نظر می‌گیریم (شکل ۱۸).

هر گاه در یک مربع جادویی مجموع عددهای هر سطر و هر ستون برابر باشند، آن را مربع نیمه جادویی یا شبه جادویی می‌نامند

تذکر: منظور از ضرب یک عدد در یک مربع لاتین یا جمع دو یا چند مربع لاتین هم‌مرتبه، مشابه همان است که در ماتریس‌ها تعریف می‌کنیم

شکل ۱۸

$L_1=$

۰	۲	۱
۲	۱	۰
۱	۰	۲

$L_2=$

۱	۰	۲
۲	۱	۰
۰	۲	۱

ایـــن دو مربع لاتین به غیـــر از متعامد بودن چه ویژگی دیگری دارند؟ در L_1 درایه‌ها یا عددهای مربع‌های روی قطر فرعی و در L_2 درایه‌ها یا عددهای مربع‌های روی قطر فرعی دارای چه ویژگی هستند؟

اکنـــون مانند مثال‌هـــای قبلی، $M = 3L_1 + L_2 + I_3$ را تشکیل می‌دهیم. مشاهده می‌کنیم که M یک مربع جادویی نرمال ۳×۳ اســـت (شـــکل ۱۹). تمام عددهای ۱، ۲، ... و ۹ در آن به کار رفته‌اند و مجموع عددهای روی هر ســـطر، هر ستون و هر دو قطر برابر ۱۵ است.

شکل ۱۹

$M=$

۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

در اینجا عدد $\frac{n-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$ در تشکیل مربع جادویی نرمال نقـــش اساســـی دارد. اکنون حالت n=۴ را بررســـی می‌کنیـــم. در شـــکل ۲۰، L_1 و L_2 دو مربع لاتین دوبه‌دو متعامد روی مجموعهٔ {۰،۱،۲،۳} هستند.

شکل ۲۰

$L_1=$

۰	۱	۲	۳
۳	۲	۱	۰
۱	۰	۳	۲
۲	۳	۰	۱

$L_2=$

۰	۱	۲	۳
۲	۳	۰	۱
۳	۲	۱	۰
۱	۰	۳	۲

مانند مثال‌های قبلی، $M = 4L_1 + L_2 + I_4$ را تشـــکیل می‌دهیم، مشاهده می‌کنیم که M یک مربع جادویی نرمال ۴×۴ است (شـــکل ۲۱). مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر دو قطر مربع اصلی ۳۴ است و عددهای ۱، ۲، ۳، .... و ۱۶ در آن به کار رفته‌اند.

شکل ۲۱

$M=$

۱	۶	۱۱	۱۶
۱۵	۱۲	۵	۲
۸	۳	۱۴	۹
۱۰	۱۳	۴	۷

به مربع‌های لاتین دوبه‌دو متعامد L_1 و L_2 در شـــکل ۹۴ توجـــه کنید. آیا ویژگی را که در حالت n=۳ داشـــتیم، اینجا وجود دارد؟ مشـــاهده می‌کنیم که در حالت n=۴ ویژگی را که در حالت n=۳ وجود داشـــت، نداریم. اما اگر به قطرهای اصلی و فرعی توجه کنید. مشاهده می‌کنید که تمام عددها روی این قطرها عددهای مجموعهٔ {۰،۱،۲،۳} هســـتند. با ادامهٔ این روند مشاهده خواهیم کرد که وقتی n>۲ فرد باشد، مســـاوی بودن عددهای روی قطرهای اصلی از یکی و فرعی از دیگری برابر عدد ثابت $\frac{n-1}{2}$ است. واضح است که در هر دوی L_1 و L_2 عددهای روی هر دو قطر نمی‌توانند مســـاوی باشند؛ چرا؟

و در حالـــت دیگر، وقتـــی مربع لاتیـــن روی مجموعهٔ S={۰،۱،...،n-۱} تعریف می‌شـــود، عددهای روی هر دوی قطرهای اصلـــی و فرعی مربع همه عضوهایـــی از نمادها یا همان عددهای S هستند.

بـــا توجه به مثال‌های فوق و قضیهٔ قبلی می‌توانیم قضیهٔ زیر را در مورد ساختن مربع‌های جادویی نرمال ثابت کنیم:

قضیه: فرض کنیـــم L_1 و L_2 دو مربع لاتین دو به دو متعامد باشند که روی S={۰،۱،...،n-۱} تعریف می‌شوند و I_n ماتریســـی n×n باشد که همهٔ درایه‌های آن یک هستند. در این‌صورت $M = nL_1 + L_2 + I_n$ یک مربع جادویی نرمال است، اگر:

۱. n عددی فرد باشد و دو قطر اصلی و فرعی یکی از L_1 و دیگری از L_2 ثابت و برابر عدد $\frac{n-1}{2}$ باشند. یا:

۲. در هـــر دوی L_1 و L_2 عددهای روی قطرهای اصلی و فرعی شامل تمام عددهای S باشند.

پی‌نوشت

1. Magic square and Latin square orthogonal

بهره‌گیری از محیط اطراف خود به عنوان

راهبردی برای طرح مسائل دنیای واقعی

ابوالفضل رفیع‌پور
عضو هیئت علمی بخش آموزش ریاضی، دانشکدهٔ ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان
Email: Drafiepour@gmail.com & Rafiepour@uk.ac.ir

هدف اصلی این مقاله که در ادامهٔ مقاله‌ای با عنوان «راهبردهایی برای استفاده از رویکرد آموزش ریاضی واقعیت‌مدار در کلاس درس» آمده است، بهره‌گیری از مسائل مدل‌سازی و کاربردها در شرایط موجود کلاس‌های درس ریاضی است. در این مقاله، مثال‌های بیشتری برای رویکرد اول، یعنی «بهره‌گیری از محیط اطراف خود»، در قالب فعالیت ارائه می‌شود. اغلب این فعالیت‌ها، قبلاً در پژوهش‌ها و کارگاه‌های مرتبط با مدل‌سازی و کاربرد، توسط نگارنده مورد استفاده قرار گرفته‌اند. فعالیت‌های اول و دوم مرتبط با انتخاب‌هایی هستند که معمولاً در زندگی روزمره با آن‌ها مواجه هستیم. فعالیت‌های سوم و چهارم برگرفته از تجارب روزانه و خبرهایی هستند که در رسانه‌ها منتشر شده‌اند. فعالیت‌های پنجم و ششم در ادامهٔ فعالیت چهارم و مرتبط با آن هستند. این فعالیت‌ها به خوبی نشان می‌دهند که یکی از روش‌های مفید برای طراحی فعالیت‌های مدل‌سازی و کاربرد، توجه به محیط پیرامونی است.

فعالیت ۱. مسئلهٔ انتخاب بهترین سرویس اینترنت: با گسترش ویروس کرونا و همه‌گیری آن در جهان، آموزش در همهٔ سطوح به صورت مجازی و بستر اینترنت ارائه می‌شود. همهٔ خانواده‌ها به دنبال یافتن بهترین انتخاب (پرداخت کمترین هزینه-دریافت بهترین خدمات) از سرویس‌دهنده‌های اینترنتی هستند. برای ساخت یک مثال واقعی در هر منطقهٔ شهری یا روستایی می‌توان فهرستی از شرکت‌های ارائه‌دهنده اینترنت تهیه کرد و براساس آن مسئلهٔ مدل‌سازی و کاربرد را طراحی کرد. این گونه مثال‌ها برای اغلب خانواده‌های ایرانی معنا دارند، چرا که همهٔ آن‌ها به نوعی با این انتخاب درگیر هستند. برای مشاهدهٔ مثال مشابه این مسئله با جزئیات بیشتر، می‌توانید به مقاله‌های احمدی و رفیع‌پور (۱۳۹۲و ۱۳۹۳) مراجعه کنید.

فعالیت ۲. مسئلهٔ خرید خودرو: خانواده‌ای بودجهٔ مشخص و محدودی را برای خرید خودرو کنار گذاشته است. با توجه به امکانات، ایمنی، زیبایی و سایر عوامل مؤثر در خرید یک خودرو، این خانواده را در انتخاب خودروی مناسب، راهنمایی کنید. پاسخ شما باید مستدل باشد. (نمونه‌ای از این مسئله در کتابچهٔ سومین جشنوارهٔ خانهٔ ریاضیات کرمان، در سال ۱۳۹۰ چاپ شده است.)

فعالیت ۳. مسئلهٔ واردات زباله برای تولید برق: نقطهٔ شروع برای طراحی این مسئله، خبر رادیو در مورد واردات زباله برای تولید برق در کشور سوئد بود. در ادامه با جست‌وجوی واژهٔ تولید برق از زباله، متن کامل خبر به شرح زیر یافت شد[1].

کشور سوئد از روش سوزاندن زباله برای تولید برق مصرفی خانوارها استفاده می‌کند. در این کشور به دلیل کمبود زباله، از کشورهای همسایه زباله وارد می‌شود. در حالی که زباله از سال‌ها پیش به یکی از مشکلات کشورهای صنعتی تبدیل شده، سوئد به علت کمبود تولید زباله مجبور به واردکردن آن از کشورهای همسایه است. در سوئد تنها یک درصد زباله‌های خانگی قابل بازیافت نیستند. در این کشور ۳۶ درصد زباله‌ها بازیافت، ۱۴ درصد تبدیل به کود و ۴۹ درصد سوزانده می‌شوند. سوئد با استفاده از دستگاه‌های بسیار پیشرفتهٔ سوزاندن زباله،

۲۰ درصد از برق مورد نیاز دستگاه‌های گرمازای کشور و نیز ذخیرهٔ برق برای ۲۵۰ هزار خانوار از ۴۶۰۰۰۰۰ هزار خانوار را تأمین می‌کند. مشکل کنونی سوئد ظرفیت بالای دستگاه‌های سوزانندهٔ زباله است که بیش از میزان تولید زبالهٔ داخلی (دو میلیون تن در سال) است. دولت سوئد برای رونق این صنعت و پیشگیری از زیان‌دهی آن، به تازگی شروع به واردات زباله از کشورهای اروپایی کرده است. بر این اساس سوئد سالانه ۸۰۰ هزار تن زباله از نروژ وارد می‌کند.

با استفاده از اطلاعات داده‌شده می‌توان سؤالات زیر را مطرح کرد[۲]:

- چند درصد خانوارهای سوئدی از برق حاصل از سوزاندن زباله استفاده می‌کنند؟ اگر خانواده‌های سوئدی به طور متوسط ۱/۹۵ نفر باشند، چه تعداد از جمعیت سوئد از برق حاصل از سوزاندن زباله‌ها استفاده می‌کنند؟
- اگر شما در کشور سوئد زندگی می‌کردید، دوست داشتید از کدام نوع برق استفاده کنید؟ برق حاصل از زباله‌ها، برق حاصل از نیروگاه‌های سوخت فسیلی، برق حاصل از سدها؛ چرا؟
- فرض کنید شما یکی از دولت‌مردان کشور سوئد هستید. با توجه به کمبود سوخت‌های فسیلی، آیا این مقرون به صرفه است که تمام برق مصرفی کشور را از راه سوزاندن زباله‌ها تولید کنید؟ برای این کار چه میزان زباله نیاز دارید؟ بحث کنید.
- آیا واردات زباله از کشورهای آسیایی می‌تواند راه حل خوبی برای تأمین زباله برای سوخت و تولید برق باشد؟ به طور ریاضی‌وار بحث کنید.

فعالیت ۴. آتش‌سوزی ساختمان پلاسکو در تهران:

اطلاعات پیش‌زمینه‌ای: ساختمان پلاسکو، ساختمانی تجاری در ضلع شمال شرقی چهارراه استانبول تهران بود و از آن به‌عنوان اولین آسمان‌خراش و ساختمان مدرن خاورمیانه یاد می‌شد. این ساختمان ۱۷ طبقه با اسکلتِ فلزی که در سال ۱۳۴۱ افتتاح شده بود، یکی از مهم‌ترین مراکز تولید و فروش پوشاک در تهران بود. ساختمان پلاسکو در کنار ساختمان آلومینیوم از اولین آسمان‌خراش‌های تهران شمرده می‌شد. این ساختمان نماد تهران جدید و معماری مدرن در پایتخت و به عنوان یک نماد شاخص شهری محسوب می‌شد. ساختمان پلاسکو (تصویر ۱) با ارتفاع ۴۲ متر، در زمان اتمام ساخت در سال ۱۳۴۱ بلندترین ساختمان تهران بود.

ساختمان پلاسکو روز پنج‌شنبه ۳۰ دی ۱۳۹۵، پس

تصویر۱. ساختمان پلاسکو

از گذشت ۵۴ سال از زمان ساخت، بر اثر آتش‌سوزی فرو ریخت و ۵۶۰ واحد تجاری آن نابود شدند. تصویر۲، ساختمان پلاسکو را در حال سوختن در آتش نشان می‌دهد. این حادثه تا مدت‌ها سرتیتر خبرها بود و مردم اخبار آن را دنبال می‌کردند. ساختمان پلاسکو در حالی بعد از حدود چهار ساعت سوختن فرو ریخت که هنوز تعداد زیادی آتش‌نشان در حال مهار آتش در بیرون و داخل ساختمان بودند.

تصویر۲. ساختمان پلاسکو در آتش

نگارندهٔ مقاله، در همین روز در ساختمان «انجمن ریاضی ایران» جلسه داشت و از نزدیکی محل حادثه عبور کرد تا خود

را به جلسه برساند. من همواره به این فکر می‌کردم که از این حادثهٔ تلخ، چگونه می‌توان فعالیت‌های مدل‌سازی‌ای طراحی کرد که راه‌گشـــای نســـل آینده باشـــد. لازم به ذکر است که استفاده از تجارب مرتبط با حوادث طبیعی، همچون سونامی، برای طراحی فعالیت‌های مدل‌سازی در ادبیات پژوهشی حوزهٔ مدل‌سازی و کاربرد، پیش‌بینی شده است (برای مثال: آیسودا، ۲۰۱۲).

در بهمن ماه ســـال ۱۳۹۵، نگارندهٔ مقاله حاضر برای ارائهٔ مقاله در «دهمین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی اروپا»، به دوبلین (پایتخت کشور ایرلند) سفر کرد. محل برگزاری کنگره در ورزشگاه شهر دوبلین بود و اولین چیزی که در روز افتتاحیه به حضار ارائه شد، نحوهٔ خروج از ساختمان در زمان حادثه بود! این تجربه نشان داد که در بسیاری از موارد با اتخاذ تدابیر لازم می‌توان مانع بروز حوادث تلخ شـــد و راه اصلی برای اتخاذ این تدابیر، آموزش است.

طرح ســـؤال برای تخلیـــهٔ ســـاختمان در زمان آتش‌سوزی: برنامه‌ای مستدل و شفاف برای تخلیهٔ ساختمان پلاســـکو ارائه کنید. برنامهٔ شـــما باید با محاسبه و بحث‌های تحلیلی همراه باشد. استدلالتان باید شفاف و مبتنی بر واقعیت باشد، و کلی‌گویی و مبهم نباشد.

فعالیت ۵. نگرانی در مورد ســـاختمان آلومینیوم و سایر ساختمان‌های مشابه: ساختمان آلومینیوم در تهران قـــرار دارد. ارتفـــاع این برج ۱۳طبقهٔ اداری ۴۲ متر اســـت و قدمت آن به سال ۱۳۴۱ می‌رسد. ۶۰۰ نفر در این ساختمان مشغول به کار هستند. تعدادی آسانسور در ساختمان موجود است و یک دستگاه راه پله نیز در آن وجود دارد. در حالتی که بر اثر بروز سانحه نیاز به تخلیهٔ ساختمان باشد، همهٔ کارکنان باید از مسیر راه پله فرار کنند. زیرا آسانسور ممکن است در راه از کار بیفتد. واحد حوادث، اطلاعات زیر را در خصوص شرایط بروز حادثه ارائه کرده است:

- در هـــر طبقه فقط یک نفر در یک لحظه می‌تواند از در راه‌پله عبور کند.
- در هر طبقه جریان ثابتی از حرکت افراد وجود دارد: در هر ثانیه تعدادی به در راه‌پله می‌رسند.
- هر نفر ۱۵ ثانیه طول می‌کشد تا از یک طبقه به طبقه دیگر برسد.
- راه‌پله بسیار باریک است، طوری که حداکثر دو نفر شانه به شانه هم می‌توانند در راه‌پله حرکت کنند.
- زمانی که یک نفر در راه‌پله قرار می‌گیرد، حرکتش را تا رسیدن به طبقهٔ هم‌کف ادامه می‌دهد.
- موقعی که یک نفر به طبقهٔ هم‌کف می‌رســـد، مســـیری مشخص برای بیرون رفتن وجود دارد که پنج ثانیه طول می‌کشد.

مسئلهٔ اصلی: شما (دانش‌آموزان به عنوان ریاضی‌دانان کوچک در آتش‌نشـــانی) باید برنامه‌ای برای تخلیهٔ ساختمان (با این فرض که آسانسور کار نمی‌کند) طراحی و ارائه کنید.

مسئلهٔ ســـاده‌تر: دانش‌آموزان می‌تواننـــد ابتدا به یک مســـئلهٔ ســـاده‌تر فکر کنند. مثلاً فقط طبقهٔ پنجم را در نظر بگیرند و فرض کنند بقیهٔ ساختمان خالی است. در این حالت، چقدر طول می‌کشـــد تا افراد حاضر در طبقهٔ پنجم ساختمان آلومینیوم ساختمان را ترک کنند؟

فعالیت ۶. ارائهٔ پیشـــنهادی برای حفاظت از یک ساختمان: پیشـــنهادی بـــرای مدیران ســـاختمان‌های بلند بنویسید که در آن‌ها حداقل یک برنامهٔ مؤثر و کارا برای تخلیهٔ ساختمان مطرح شده باشد. نوشـــتهٔ شما باید با محاسبات و بحث‌های مســـتدل به منظور تأیید کارا بودن راه‌حلتان همراه باشد. برای این تعریف شما به معیارهایی نیاز دارید؛ معیارهایی همچون زمان کلی تخلیه، زمان کل انتظار افراد، زمان میانگین و حداکثر انتظار افراد، تعداد افراد منتظر در لحظات متفاوت، و ... البته از معیارهای دیگری نیز ممکن اســـت استفاده شود. همهٔ این معیارها می‌توانند برای کل ســـاختمان یا در یکی از طبقات محاسبه شوند.

پی‌نوشت‌ها

1.http://www.khabaronline.ir/detail/245937/others/other

۲. لازم به ذکر اســـت که نســـخهٔ کامل‌تری از این مســـئله در پایان نامهٔ کارشناسی ارشد خانم سمیرا مهرآیین (۱۳۹۱، تحت راهنمایی نگارنده) مورد استفاده قرار گرفته است.

منابع

۱. احمدی، حمیـــده. و رفیع‌پور، ابوالفضـــل. (۱۳۹۳). «انتخاب اپراتور تلفن همراه: یک مســـئله مدل‌سازی ریاضی». مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. شـــمارهٔ ۱۱۶. دفتر انتشـــارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۲. احمدی، حمیده. و رفیع‌پور، ابوالفضـــل. (۱۳۹۲). «ریاضیات و تلفن همراه». مجلهٔ رشـــد آموزش ریاضی. شـــمارهٔ ۱۱۲. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۳. خانهٔ ریاضیات کرمان (۱۳۹۰). کتابچهٔ سومین جشنوارهٔ خانهٔ ریاضات کرمان. آبان ۱۳۹۰.

4. Isoda, M. (2012). Tsunami: Mathematical modelling and problem solving on earthquake and Tsunami-Scientific Researchers for Disaster. Retrieved from http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/museum/dbook_site/ by 15 July 2020.

باب مساحت از کتاب

جبر و مقابلهٔ خوارزمی

بابی از میراث ۱۲۰۰ سالهٔ خوارزمی

عباس قلعه پوراقدم
دبیر ریاضی ارومیه

چکیده

در این مقاله، به باب مساحت از کتاب «جبر و مقابله» **خوارزمی** می‌پردازیم. خوارزمی در این باب، پس از تعریف واحد سطح، اندازه‌گیری مساحت شکل‌هایی چون مربع، مستطیل، مثلث، لوزی و دایره را شرح می‌دهد. درخصوص دایره، تقریب $\frac{۲۲}{۷}$ را برای عدد پی به‌کار می‌بندد و پس از توضیح نظر هندیان در مورد نحوهٔ محاسبهٔ محیط و مساحت دایره، نظر خود را بیان می‌دارد و چند حکم را در این مورد مطرح می‌کند. در مقالهٔ حاضر برای دو مورد از این احکام، به زبان امروزی برهان ارائه می‌کنیم. خوارزمی در پایان این باب، مسئله‌ای را مطرح و حل می‌کند که حل آن را به‌همراه صورت امروزی آن و نیز اثباتی دیگر بر آن ارائه می‌دهیم.

کلیدواژه‌ها: محمدبن موسی خوارزمی، جبر و مقابله، باب مساحت

کتاب «المختصر فی‌الحساب الجبر و المقابله» یکی از شاهکارهای محمدبن موسی خوارزمی (درگذشتهٔ حدود ۲۳۲ ق) در زمینهٔ ریاضیات است که همچون نگینی در میراث علمی ۱۲۰۰ سالهٔ او می‌درخشد. اینکه اکنون در ایران به ترجمهٔ فارسی این کتاب ارزنده دسترسی داریم، مرهون تشویق ریاضی‌دان فرزانه، زنده‌یاد **پرویز شهریاری**، و همت عالی ادیب وارسته، شادروان **حسین خدیوجم** است. کتاب، حاوی باب‌های متفاوتی همچون تعریف جبر و مقابله، تقسیم معادلات درجهٔ اول و دوم به انواع شش‌گانه، ضرب و تقسیم عبارت‌های رادیکالی، مسئله‌های مربوط به معاملات، وصیت و مقاسمه (تقسیم اموال مشترک) است.

فصل نهم کتاب «باب مساحت» نام دارد که در این مقاله قصد دارم به اختصار به آن بپردازم. خوارزمی در آغاز این باب، واحد سطح را چنین تعریف می‌کند:

«بدان که معنی **یک ضرب در یک** تعیین مساحت است و مفهوم آن یک ذراع ضرب در یک ذراع است. پس هر سطح متساوی‌الاضلاع و الزوایا را که ضلع آن از هر طرف واحد باشد، واحد می‌گویند.»

نکتهٔ ۱: «ذراع» واحدی قدیمی برای اندازه‌گیری طول است.

نکتهٔ ۲: مقصود خوارزمی از «سطح متساوی‌الاضلاع و الزوایا»، همان شکلی است که آن را با نام «مربع» می‌شناسیم.

خوارزمی، شرح محاسبهٔ مساحت مربع را این‌چنین ادامه می‌دهد:

«اگر هر ضلع در سطحی دو ذراع و آن سطح متساوی‌الاضلاع و الزوایا باشد، تمام سطح آن چهار برابر سطحی است که هر ضلعش یک ذراع باشد. همچنین است سه ضرب در سه یا بیشتر از آن یا کمتر، نیز چنین است «نصف ضرب در نصف» که می‌شود یک‌چهارم و دیگر کسرها بر همین نحو است.»

نکتهٔ ۳: اگر طول ضلع مربعی را k برابر کنیم، مساحت آن $k^۲$ برابر می‌شود.

وی در ادامه پس از تعریف مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع و لوزی محیط دایره را شرح می‌دهد:

«هرگاه، قطر مُدَوّرة را در «سه و یک‌هفتم» ضرب کنی، حاصل ضرب عبارت است از دَور که بر آن دایره محیط است و این اصطلاحی است که در میان مردم، بدون چون و چرا، رایج است.»

نکتهٔ ۴: واژه‌های «مُدَوّرة» و «دَور» به ترتیب به معنای دایره و محیط (پیرامون) هستند. در محاسبهٔ محیط یا پیرامون دایره که برابر قطر ضرب در عدد پی (π) است، در دوره‌های متفاوت، مقدار تقریبی π عددهایی همچون $\sqrt{۱۰}$، ۳/۱۴۱۶، $\frac{۶۲۸۳۲}{۲۰۰۰۰}$، $\frac{۲۲}{۷}$ و ... گرفته شده است. خوارزمی در حاشیهٔ متن، نظر خود را درخصوص تقریب مناسب برای عدد پی این‌گونه بیان می‌دارد:

«مقدار آن تقریبی است نه تحقیقی، و جز خدا هیچ‌کس بر حقیقت آن آگاه نیست. کسی مقدار دقیق پیرامون دایره را نمی‌شناسد، زیرا این خط مستقیم نیست که بتوان اندازهٔ دقیق آن را دریافت، بلکه این عدد تقریبی است. همچنان که مقدار جذر اصم تقریبی است نه تحقیقی، زیرا جذر اصم را جز خدا کسی نمی‌داند. بهتر از تمام این اقوال آن است که قطر را در **سه و یک‌هفتم** ضرب کنی که این شیوه نیکوتر است.»

نکتهٔ ۵: $\frac{۲۲}{۷} = ۳\frac{۱}{۷}$

سپس عقاید هندیان را در مورد نحوهٔ محاسبهٔ محیط دایره چنین شرح می‌دهد:

«اهل هند در این مورد دو عقیده اظهار کرده‌اند: یکی آنکه هرگاه قطر در مانند خودش ضرب شود و حاصل آن در ده ضرب گردد، آن‌گاه جذر حاصل‌ضرب را بگیرند، مقدار این جذر برابر است با دور یا پیرامون دایره.»

نکتهٔ ۶: $\sqrt{۲r\times ۲r\times ۱۰} = ۲r\times\sqrt{۱۰}$

مقصود آن است که اهل هند تقریب $\sqrt{۱۰}$ را برای عدد پی به‌کار می‌بستند.

«عقیدهٔ دیگر از منجمان هند است. این گروه می‌گویند: باید قطر را در **شصت و دو هزار و هشتصد و سی و دو** ضرب کنی. سپس بر **بیست هزار** تقسیم نمایی که خارج‌قسمت هرچه باشد، مقدار دور یا پیرامون دایره است. تمام این روش‌ها به یکدیگر نزدیک است.»

نکتهٔ ۷: $\frac{۶۲۸۳۲}{۲۰۰۰۰} = ۳/۱۴۱۶$

پس از بیان نظر هندیان، به‌صورت زیر عدد «سه و یک‌هفتم» یا $\frac{۲۲}{۷}$ را تقریب مناسب‌تری برای پی می‌داند:

«هرگاه دور یا پیرامون دایره را بر **سه و یک‌هفتم** تقسیم کنی، مقدار قطر به‌دست می‌آید. مساحت هر دایره عبارت است از حاصل‌ضرب **نصف قطر ضرب در نصف دور**.»

نکتهٔ ۸: $\frac{۲r}{۲}\times\frac{۲\pi r}{۲} = \pi r^۲$

وی در ادامه با فرض مقدار تقریبی $\frac{۲۲}{۷}$ برای عدد پی، مساحت دایره را طی حکمی چنین تعریف می‌کند:

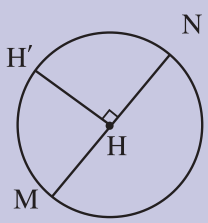
«اگر در هر دایره قطر را در مانند خودش ضرب کنند و از حاصل‌ضرب **یک‌هفتم** و نصف **یک‌هفتم** همین حاصل‌ضرب را کم کنند، مساحت دایره به‌دست می‌آید و این شیوه با باب اول موافق است.»

نکتهٔ ۹: $\text{قطر}\times\text{قطر} = ۲r\times ۲r = ۴r^۲ , \frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۷}) = \frac{۳}{۱۴}$

$$۴r^۲ - \frac{۳}{۱۴}(۴r^۲) = \frac{۲۲}{۷}r^۲$$

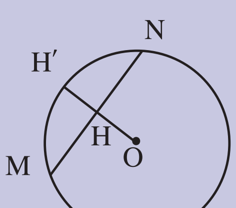
«سهم قوس» اصطلاحی است که خوارزمی در ادامهٔ مبحث دایره به آن اشاره می‌کند:

«هر قطعه از دایره با قوسی متناظر است. پس آن قطعه یا به اندازهٔ نصف دایره است، یا کمتر از نصف دایره، یا بیشتر از نصف



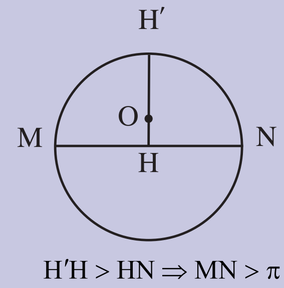
شکل ۱

$H'H = HN \Rightarrow MN = \pi$



شکل ۲

$H'H < HN \Rightarrow MN < \pi$



شکل ۳

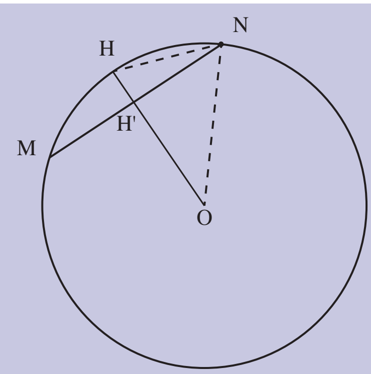
دایره. دلیل بر درستی این موضوع مقدار سهم قوس است. اگر سهم قوس با نصف وتر برابر باشد، مقدار قوس درست نیمی از دایره است. اگر از نصف وتر کمتر باشد، مقدار قوس از نصف دایره کمتر است. اگر سهم از نصف وتر بیشتر باشد، مقدار قوس از نصف دایره بیشتر است.»

نکتهٔ ۱۰: امروزه غالباً به جای واژهٔ قوس، از «کمان» استفاده می‌کنیم. سهم قوس، طول عمودی است که از نقطهٔ منتصف (وسط) قوس بر وتر وارد می‌شود. شکل‌های ۱ تا ۳، سه حالتی را که خوارزمی به آن‌ها اشاره می‌کند، نشان می‌دهند. در این شکل‌ها، طول 'HH همان سهم قوس است.

بحث با حکم زیر ادامه می‌یابد:

«اگر بخواهی بدانی که قوسی از کدام دایره است، نصف وتر را در مانند خودش ضرب و حاصل‌ضرب را بر سهم تقسیم می‌کنی و سپس خارج‌قسمت را بر سهم می‌افزایی که حاصل جمع عبارت است از قطر دایره‌ای که این قوس جزئی از آن است.»

نکتهٔ ۱۱: در این حکم به نحوهٔ محاسبهٔ مقدار عددی قطر دایره‌ای که کمانی از آن به همراه وتر نظیرش داده شده است، اشاره می‌شود. اجازه دهید آن را به‌صورت امروزی طی حکمی اثبات کنیم:



شکل ۴

در دایرهٔ به مرکز O، وتر نظیر کمان MN را در نظر بگیرید (شکل ۴). نشان دهید، قطر دایره برابر است با مجموع مربعات نصف وتر MN و سهم کمان MN تقسیم بر سهم کمان MN؛ یا به عبارت دیگر به قول خوارزمی:

$$\frac{H'N \times H'N}{HH'} + HH' = 2OH$$

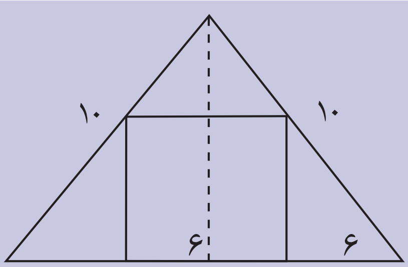
اثبات: 'HH سهم کمان MN است. N را به O (مرکز دایره) وصل می‌کنیم. با دو بار استفاده از قضیهٔ **فیثاغورس** داریم:

$$HN^2 = HH'^2 + H'N^2 \qquad (1)$$
$$ON^2 = OH'^2 + H'N^2 \qquad (2)$$
$$\begin{aligned}(1), (2) \Rightarrow HN^2 &= HH'^2 + ON^2 - OH'^2 \\ &= HH'^2 + ON^2 - (ON - HH')^2 \\ &= HH'^2 + ON^2 - ON^2 \\ &\quad - HH'^2 + 2ON.HH' \\ &= 2ON.HH'\end{aligned}$$

پس $\frac{HN^2}{HH'} = 2ON$ یا $\frac{HH'^2 + H'N^2}{HH'} = 2ON$. به‌عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$\frac{H'N^2}{HH'} + HH' = 2ON = \text{قطر دایره}$$

باب مساحت با بحث در مورد نحوهٔ محاسبهٔ حجم مخروط و تعریف انواع مثلث ادامه می‌یابد. خوارزمی در پایان این فصل مسئله‌ای جالب را مطرح می‌کند که این قسمت از مقاله را با آن زینت می‌دهم و سپس صورت امروزی راه‌حل وی را به همراه اثباتی دیگر که ماهیت مثلثاتی دارد، ارائه می‌کنم. خوارزمی مسئله را این‌گونه طرح و حل می‌کند: «اگر گفته شود: زمینی مثلث‌شکل داریم که هر یک از دو ضلع جانبی آن ده ذراع و قاعدهٔ آن دوازده ذراع است. در میان این مثلث زمینی است چهارگوشه، طول هر ضلع این چهارگوشه چقدر است؟ (شکل ۵).



شکل ۵

راه‌حل آن چنین است: اول باید ارتفاع مثلث را به‌دست آوریم. یعنی نصف قاعده را که عبارت است از شش، در مانند خودش ضرب می‌کنی، می‌شود: سی‌وشش. این عدد را از مجذور یکی از دو ضلع کوتاه‌تر، که عبارت است از صد، کم می‌کنی، شصت‌وچهار

باقی می‌ماند. جذر آن را می‌گیری، می‌شود: هشت. این است ارتفاع مثلث و مساحت آن چهل‌وهشت ذراع است که از ضرب کردن عمود در نصف قاعده، یعنی از شش، به‌دست می‌آید. آن‌گاه یکی از اضلاع این چهارضلعی را شیء فرض می‌کنی و آن را در مانند خودش ضرب می‌کنی، می‌شود: مال. این مال را کنار می‌گذاری.

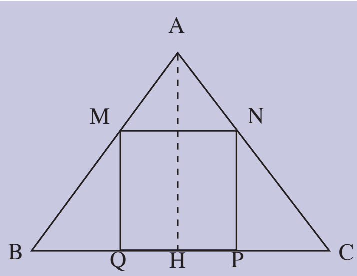
می‌دانیم که از تمام زمین دو مثلث در دو پهلو و یک مثلث در بالا باقی مانده است. دو مثلثی که در دو پهلوی چهارضلعی واقع شده، با هم برابرند و ارتفاع آن دو یکی است و هر دو قائم‌الزاویه هستند. پس برای تعیین مساحت آن‌ها شیء را در شش منهای نصف شیء ضرب می‌کنی، حاصل‌ضرب می‌شود: شش شیء منهای نصف مال که برابر است با مساحت آن دو مثلثی که در دو پهلوی چهارضلعی واقع شده است.

اما برای تعیین مساحت مثلث بالایی باید هشت منهای شیء را که عبارت است از ارتفاع، در نصف شیء ضرب کنی. حاصل‌ضرب می‌شود: چهار شیء منهای نصف مال. پس مساحت چهارضلعی به اضافهٔ مساحت مثلث‌های سه‌گانه می‌شود ده شیء و این ده شیء برابر است با چهل‌وهشت که عبارت است از مساحت مثلث بزرگ. پس یک شیء از آن برابر است با چهار ذراع و چهارپنجم ذراع، و آن اندازهٔ هر ضلع از مربع است.»

با این توضیح که مقصود جناب خوارزمی از واژه‌های «شیء» و «مال» به ترتیب x (مجهول و در اینجا طول ضلع مربع) و $x^۲$ (مربع مجهول و در اینجا مساحت مربع) است، مسئله را به‌صورت امروزی می‌نویسم و راه‌حل خوارزمی را بازنویسی می‌کنم:

مربع MNPQ محاط است درون مثلث ABC با ابعاد AB=AC=۱۰ و BC=۱۲. طول ضلع مربع را بیابید (شکل ۶).

راه‌حل: ارتفاع نظیر رأس A را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ H و ضلع MN از مربع را در E قطع کند. طول ضلع مربع را x می‌گیریم.



شکل ۶

مثلث ABC متساوی‌الساقین است، لذا AH میانهٔ وارد بر ضلع BC نیز هست. پس داریم: BH=HC=۶. از طرف دیگر، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم: $AH^۲=AC^۲-HC^۲$ یا: $AH^۲=۱۰۰-۳۶=۶۴$. در نتیجه: AH=۸. دو مثلث BMQ و NPC بنا به حالت برابری (زض‌ز) با هم هم‌نهشت هستند، پس: BQ=PC. لذا: $QH = HP = \frac{x}{۲}$. در نتیجه: $BQ = PC = ۶ - \frac{x}{۲}$. همچنین، از هم‌نهشتی دو مثلث برابر بودن مساحت آن‌ها نتیجه می‌شود. چون مساحت مثلث NPC برابر $\frac{x}{۲}(۶-\frac{x}{۲})$ است، پس مجموع مساحت‌های دو مثلث NPC و BMQ برابر $x(۶-\frac{x}{۲})$ یا $۶x-\frac{x^۲}{۲}$ خواهد شد. حال به محاسبهٔ مثلث بالایی (ΔAMN) می‌پردازیم.

مساحت این مثلث عبارت است از حاصل‌ضرب نصف AE در MN؛ یا: $x \times \frac{(۸-x)}{۲}$، و یا: $۴x-\frac{x^۲}{۲}$. مساحت مثلث ABC هم برابر با $\frac{۸\times ۱۲}{۲}$ یا ۴۸ است. پس می‌توان نوشت:

$$(۶x-\frac{x^۲}{۲})+(۴x-\frac{x^۲}{۲})+x^۲=۴۸$$
$$\Rightarrow ۱۰x=۴۸$$
$$\Rightarrow x=۴\frac{۸}{۱۰}=۴\frac{۴}{۵}$$

راه‌حلی دیگر از نویسندهٔ مقاله: چون MN با BC موازی است، پس: $\angle ANE = \angle C$. با فرض $\angle C = \alpha$ و AE=y، در دو مثلث AEN و NPC داریم:

$$\Delta AEN: \tan\alpha = \frac{AE}{EN} = \frac{y}{\frac{x}{۲}} = \frac{۲y}{x} \qquad (۱)$$

$$\Delta NPC: \tan\alpha = \frac{NP}{PC} = \frac{x}{۶-\frac{x}{۲}} = \frac{۲x}{۱۲-x} \qquad (۲)$$

$$(۱)=(۲) \Rightarrow ۲y(۱۲-x)=۲x^۲ \qquad (۳)$$

از طرف دیگر: x+y=۸ با جاگذاری y=۸-x در (۳) خواهیم داشت:

$$۲(۸-x)(۱۲-x)=۲x^۲$$
$$\Rightarrow x=\frac{۱۹۲}{۴۰}=۴\frac{۴}{۵}$$

منبع
۱. خدیوجم، حسین (۱۳۶۳). ترجمهٔ جبر و مقابلهٔ خوارزمی. انتشارات اطلاعات. تهران. چاپ سوم.

جای خالی ریاضی شاد

در برنامه‌های رسمی آموزش ریاضی ایران (۱)

هوشنگ شرقی
معلم ریاضی

اشاره

به زعم نویسنده، مراد از «ریاضی شاد»[1] مجموعه‌ای از انواع مطالب است که هدف از طرح آن‌ها، جذاب‌تر کردن مباحث ریاضی برای دانش‌آموزان و سایر افراد است. بدیهی است که از این طریق به عمومی‌کردن ریاضیات هم کمک می‌شود. از بخش‌هایی از این مباحث می‌توان مستقیماً در آموزش ریاضی استفاده کرد که عمدهٔ آن‌ها به بحث «معماهای ریاضی»[2] مربوط می‌شوند و بسیاری از ریاضی‌دانان معتقدند، آموزش ریاضی بهتر است از طریق آن‌ها دنبال شود.

اما بخش‌هایی دیگر، مانند سفسطه‌ها و پارادوکس‌های ریاضی، در عین جذابیت و مفرح بودن، دقت ریاضی را در دانش‌آموزان تقویت می‌کنند. همچنین بازی‌های ریاضی می‌توانند به تقویت توانایی‌های محاسباتی و شهود ریاضی کمک شایانی کنند. از نقش بی‌بدیل «لطیفه‌های ریاضی»[3] و فکاهیات، طنز و کاریکاتورهای با موضوع ریاضیات هم نباید غافل شد که اگر خوب و هوشمندانه طراحی شوند، می‌توانند به تعمیق اطلاعات ریاضی دانش‌آموزان منجر شوند. روایت‌های تاریخی از زندگی ریاضی‌دانان و به‌خصوص برخی طنزپردازی‌ها از کارهای آن‌ها هم می‌توانند باعث علاقه‌مندی دانش‌آموزان به شرکت در این مباحث شوند.

اهمیت وافر این مجموعه مباحث زیبا از مدت‌ها پیش بر آموزشگران و دست‌اندرکاران ترویج ریاضیات در مغرب‌زمین و کشورهای توسعه‌یافته آشکار شده بود و آن‌ها را در نشریات و کتاب‌هایی مستقل قویاً دنبال می‌کردند، تا اینکه آن‌ها را به برنامهٔ رسمی آموزش ریاضی خود هم وارد کردند. متأسفانه، این مباحث جذاب که می‌توانند آموزش ریاضی مدرسه‌ای ما را به معنی واقعی متحول و دگرگون سازند، در کشور ما به دست فراموشی سپرده شده‌اند و از چنین منبع سرشاری، بیشتر به دلیل محافظه‌کاری و ترس از نتایج پیش‌بینی‌نشده، به آسانی می‌گذریم.

هدف مقالهٔ حاضر این است که ضمن ارائهٔ تاریخچه‌ای از این مباحث در کشورهای جهان و ایران، بخش‌های متفاوت آن و تأثیر آن‌ها را در آموزش بهتر مباحث ریاضی (با ارائهٔ مثال‌های گوناگون) نشان دهد و از این رهگذر شاید باعث تشویق و ترغیب مسئولان آموزش‌وپرورش به توجه بیشتر به این مباحث و گنجاندن آن‌ها در سرفصل‌ها و برنامه‌های آموزشی و نیز تشویق معلمان ریاضی به استفاده از این مباحث برای آموزش بهتر ریاضیات و علاقه‌مند کردن دانش‌آموزان بشود.

در این مقاله که بنا داریم آن را در دو قسمت و در دو شمارهٔ امسال مجله ارائه دهیم، می‌خواهیم ابعاد گوناگون مباحث ریاضی شاد را به تفصیل بیان کنیم و خوانندگان را با محتوای مطالب آن به روشنی آشنا سازیم. در این شماره به تاریخچهٔ تفصیلی ریاضی شاد در ایران و کشورهای دیگر می‌پردازیم، پیشگامان این رشته را معرفی می‌کنیم و از کارهایشان سخن می‌گوییم. در شمارهٔ آینده ان‌شاءالله به بخش اصلی ریاضی شاد، یعنی معماهای گوناگون و تأثیر بسزای آن‌ها در آموزش ریاضیات می‌پردازیم و با ارائهٔ نمونه‌های متعدد از معماها، نقش بی‌بدیل آن‌ها را در تفهیم مباحث گوناگون ریاضی آشکار می‌سازیم. در قسمت آخر به بخش‌های دیگر ریاضیات شاد، از جمله لطیفه‌های ریاضی، پارادوکس‌ها و ... و تأثیر مثبت آن‌ها در جذب دانش‌آموزان به ریاضیات می‌پردازیم.

کلیدواژه‌ها: ریاضی شاد، معماهای ریاضی، لطیفه‌های ریاضی، پارادوکس، سفسطه، بازی‌های ریاضی، تفریح اندیشه، معماهای منطقی

الف. تاریخچه

در کشور ما و در کارهای متقدمان، متأسفانه چندان اهتمامی به مباحث ریاضی شاد به چشم نمی‌خورد. در عوض ادبیات فارسی کهن مملو از چیستان‌های متنوع است که جای خالی

ادبیات فارسی کهن مملو از چیستان‌های متنوع است که جای خالی معماهای علمی و ریاضی را پر می‌کرده‌اند

معماهای علمی و ریاضی را پر می‌کرده‌اند. تنها اندک کارهایی از **شیخ بهایی** در «کشکول» او دیده می‌شود که آن هم در حد بررسی برخی ویژگی‌ها و نظم‌های موجود در عددهاست و شکل معمایی هم ندارند و به‌صورت گزاره‌ای بیان شده‌اند. شاید هدف از طرح آن‌ها توجه دادن خواننده به شگفتی‌های عددها بوده است که شاید بتوان آن را با اغماض به تفریحات ریاضی ارتباط داد؛ مانند این نمونه به نقل از کشکول شیخ بهایی: حاصل‌ضرب هر عدد در خودش، یک واحد بیشتر از حاصل‌ضرب دو عدد بالا و پایین آن است. مثلاً:

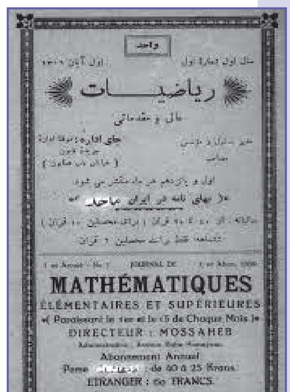
$$۱۰ \times ۱۰ = ۱۱ \times ۹ + ۱$$

که البته چیزی بیشتر از اتحاد مزدوج در حالت خاص آن نیست :

$$x^۲-۱=(x-۱)(x+۱)$$

در یک قرن اخیر اما، در پی گسترش مطبوعات، در مجله‌های عمومی و به‌خصوص نشریات علمی، معماهای ریاضی و منطقی به شکل‌های متفاوت منتشر شده‌اند که البته بیشتر آن‌ها ترجمه از منابع خارجی بوده‌اند. اکثر مجله‌ها از دیرباز صفحه‌ای با عنوان «تفریح اندیشه» یا عنوان‌های مشابه داشته‌اندکه در میان مطالب آن‌ها، معماهای گاه چالش‌برانگیز هم به چشم می‌خوردند، اما از لطیفه‌ها و طنز ریاضی کمتر چیزی مشاهده می‌شود. در واقع می‌توان گفت که شروع بحث ریاضی شاد در ایران، هم‌زمان با انتشار نخستین مجله‌های ریاضی در کشورمان است. با تحقیق در مورد تاریخچهٔ انتشار مجله‌های ریاضی در کشورمان، می‌توانیم نخستین آثار در این زمینه را بازیابی کنیم. زنده‌یاد دکتر **غلامحسین مصاحب** را می‌توان پیشگام این امر دانست.

سفسطه‌ها و پارادوکس‌های ریاضی، در عین جذابیت و مفرح بودن، دقت ریاضی را در دانش‌آموزان تقویت می‌کنند. همچنین بازی‌های ریاضی می‌توانند به تقویت توانایی‌های محاسباتی و شهود ریاضی کمک شایانی کنند


واحد
ریاضیات
عالی و مقدماتی
MATHÉMATIQUES
ÉLÉMENTAIRES ET SUPÉRIEURES
DIRECTEUR : MOSSAHEB
Abonnement Annuel
ÉTRANGER : 60 FRANCS

غلامحسین مصاحب در سال ۱۲۸۹ در خانواده‌ای فاضل و اهل علم و ادب به دنیا آمد. در سن ۱۷ سالگی، با کسب رتبهٔ نخست در شهر تهران، دیپلم خود را اخذ کرد. او از همان دوران نوجوانی (آن هم در آن فضای اجتماعی و فرهنگی یک قرن پیش) علاقهٔ وافری به ریاضیات داشت، به‌طوری‌که نخستین کتابش را با عنوان «علوم تفریحی» در سال ۱۳۰۸ (در ۱۹ سالگی) به چاپ رساند که به احتمال زیاد اولین کتاب «ریاضی شاد» در ایران است! مرحوم مصاحب همچنین اولین نشریهٔ مدون ریاضی را در کشورمان در سال ۱۳۰۹ و در ۲۰ سالگی منتشر کرد. نام این نشریه «واحد» و عنوان فرعی آن «مجلهٔ ریاضیات عالی و مقدماتی» بود و به‌طور مرتب هر ۱۵روز یک بار منتشر می‌شد. وی سپس در فاصله سال‌های ۱۳۱۰ تا ۱۳۱۷ بیش از هفت عنوان کتاب در زمینه‌های گوناگون ریاضیات، فیزیک و مکانیک به رشتهٔ تحریر در آورد.

زنده‌یاد مصاحب در کشورهای انگلستان و فرانسه ادامهٔ تحصیل داد و در سال ۱۳۲۷ موفق به اخذ درجهٔ دکترا شد. او در سال‌های بعد در گسترهٔ وسیعی به نشر علم و فرهنگ مشغول شد و آثار بسیار ارزشمندی از خود به جا گذاشت که از جملهٔ آن‌ها می‌توان به چندین دایرةالمعارف و فرهنگ، و نیز دو کتاب بسیار مشهور «آنالیز ریاضی» و «تئوری مقدماتی اعداد» اشاره کرد. به‌جز آن، ایشان ضمن استادی در دانشگاه تهران، «مؤسسهٔ ریاضیات دانشگاه تربیت معلم» (خوارزمی فعلی) را هم بنیان گذاشت و در آنجا ده‌ها تن از استادان فعلی ریاضیات کشورمان را تربیت کرد.

همان‌گونه که گفتیم، مجلهٔ ریاضی او نخستین مجلهٔ منظم و مدون ریاضی ایران به شمار می‌رود. پیش از آن مجله‌ای با عنوان «حل‌المسائل ریاضی» با مدیریت مرحوم **ناصر هورفر** در سال ۱۳۰۶ منتشر شده است. ولی اولاً همان‌گونه که از نام آن برمی‌آید، بیشتر به مجموعه مسائل و راه‌حل‌ها شباهت داشته و هر شمارهٔ آن فقط هشت صفحه بوده است. ثانیاً در انتشار تداوم و نظم نداشت. در حالی‌که مجلهٔ ریاضی مصاحب دارای سبک و سیاق یک مجلهٔ علمی بود و بخش‌های گوناگون و متنوعی هم داشت که به راستی ذوق و استعداد خارق‌العادهٔ یک جوان ۲۰ ساله را آن هم در آن دورهٔ زمانی نشان می‌داد. یکی از بخش‌های مجله، معماها و مسئله‌های تفریحی بود که مورد توجه خاص مرحوم مصاحب قرار داشت. در اینجا به دو نمونه از آن‌ها که در منابع گوناگون و در فرهنگ‌ها و میان ملل مختلف به شکل‌های متفاوت دیده می‌شوند، اشاره می‌کنیم:

معمای اول: زیرزمین علی‌بابا!

شربت‌فروش کوری موسوم به **علی‌بابا** در زیرزمین منزل خود، ۹ جعبه به طریقی گذاشته بود که در شکل ۱ می‌بینید. جعبهٔ وسط را برای شیشه‌های خالی معین کرده و در هر یک از چهار جعبهٔ گوشه‌ها سه شیشه و در چهار جعبهٔ دیگر، ۱۰ شیشهٔ شربت گذاشته بود. روزی نوکر علی‌بابا خانه را خالی یافت و چهار شیشه شربت از جعبه‌های مذکور دزدید. یکی از همسایگان

علی‌بابا که موضوع را ملتفت شده بود، وی را آگاه ساخت.

۳	۱۰	۳
۱۰		۱۰
۳	۱۰	۳

شکل ۱

علی‌بابـــا به زیرزمین سرکشـــی کرد و مشـــاهده نمود که شیشـــه‌های اطراف تغییر نکرده‌اند. بدین معنی که در هر طرف همان ۱۶ شیشـــهٔ شربت موجود است. لذا خیال کرد به نوکرش تهمت زده‌اند. نوکر از ســـادگی ارباب و این اتفاق استفاده کرد و سه دفعهٔ دیگر دزدی خود را تکرار کرد. هر دفعه هم که علی‌بابا به جعبه‌ها سرکشی کرد، موافق حساب خود نقصی در جعبه‌ها نمی‌دید. حال بگویید نوکر علی‌بابا چه حیله‌ای به‌کار برده و چگونه مکان شیشه‌ها را تغییر داده است.

این معمای زیبا بسیار شـــبیه معمای مشابهی است که در منابع اروپایی مربوط به دســـت‌کم هشـــت قرن پیش تاکنون، به صورت‌های گوناگون طرح شـــده اســـت. دربارهٔ **آرتورشاه** و شوالیه‌های او در کشور انگلستان، داستان‌های واقعی و افسانه‌ای بســـیاری طی قرن‌ها ســـاخته و پرداخته شـــده‌اند. یکی از این داستان‌ها که به شکل معمایی فولکلوریک در کشورهای اروپایی سینه به ســـینه نقل شده، ماجرای به شـــکار رفتن آرتورشاه و شـــوالیه‌هایش و اقامت آن‌ها در یک کلبهٔ جنگلی است. در این کلبه شـــاه در اتاق مرکزی می‌خوابید و ۲۴ شوالیهٔ نگهبان او در هشـــت اتاق دورادور شاه طوری اقامت می‌کردند که در هر ضلع کلبه ۹ نفر نگهبان به ترتیب شکل ۲ مستقر بودند:

۳	۳	۳
۳	شاه	۳
۳	۳	۳

شکل۲

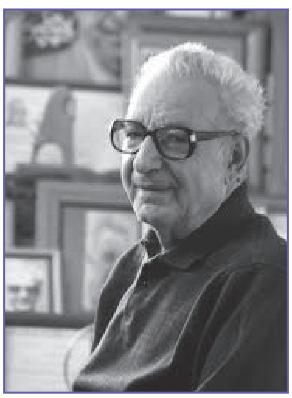
شـــوالیه‌ها از شـــاه خواســـتند که در صورت تمایل بتوانند به اتاق‌های یکدیگر بروند و شـــاه موافقت کرد؛ البته به شرطی که همیشـــه ۹ شوالیه در هر ضلع کلبه حضور داشته باشند. اما شوالیه‌ها طی چند شب اقامت در کلبهٔ جنگلی توانستند شاه را فریب بدهند و در شب اول، چهار نفر از آن‌ها به روستای نزدیک رفتند. در شب دوم چهار نفر از روستاییان را در لباس شوالیه، با خود به کلبه آوردند. در شب سوم چهار نفر مهمان به اتفاق شش شوالیه به روستا رفتند، و ... در همهٔ این شب‌ها شاه متوجه تغییر تعداد افراد نشد! آن‌ها چگونه این کار را انجام می‌دادند؟

حتماً متوجه شـــباهت این معما و معمـــای مجلهٔ زنده‌یاد مصاحب شـــده‌اید. اما اینکه مرحوم مصاحب این معما را به این صورت در مجله‌اش مطرح کرده اســـت، نشان از احاطهٔ کم‌نظیر او بـــر منابع مختلف، آن هم در آن دوره از تاریخ ریاضی و دانش کشورمان دارد که دسترسی به این منابع، آن هم برای یک جوان تازه به عرصه آمده، بسیار دشوار بوده است.

معمای دوم: از کتاب خلاصه‌الحساب شیخ بهاءالدین عاملی (شیخ بهایی)

این معما از کتاب «خلاصه‌الحساب» شیخ بهایی، حکیم قرن یازدهم قمری نقل شـــده است: چند نفر داخل باغی شدند. اولی یک انار چید، دومی دو انار، سومی سه انار و هکذا (یعنی به همین ترتیب). بعد همهٔ انارها را بالســـویه (یعنی به تساوی) بین خود تقســـیم کردند و به هر یک ۶ انار رسید. مطلوب است عدهٔ آنان. (آن‌ها چند نفرند؟)

در ســـال‌های بعد، به نام‌های بیشتری از کوشندگان در راه ترویج فرهنگ ریاضی شاد و تفریحی برخورد می‌کنیم که از میان معاصران، زنده‌یادان **عبدالحسین مصحفی** و **پرویز شهریاری** در این میان سهم زیادی داشته‌اند و با ترجمه و نشر مطالب مرتبط با ریاضی شاد در «مجلهٔ ریاضی یکان» و نیز ترجمه و انتشار کتاب‌های گوناگون، به ترویج این فرهنگ کمک بسیاری کردند.

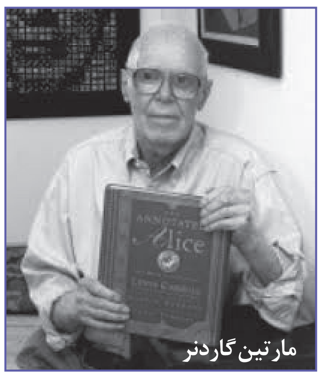


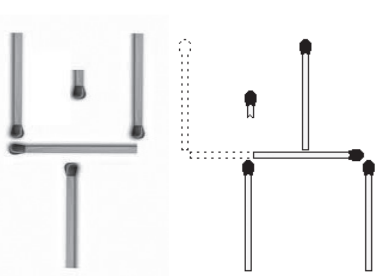

یاکوب اسیدرویچ پرلمان

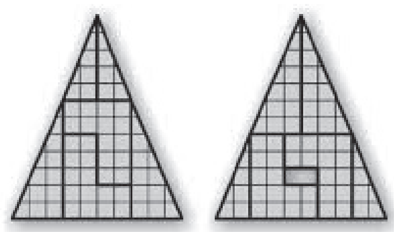
در سال‌های بعد، به نام‌های بیشتری از کوشندگان در راه ترویج فرهنگ ریاضی شاد و تفریحی برخورد می‌کنیم که از میان معاصران، زنده‌یادان عبدالحسین مصحفی و پرویز شهریاری در این میان سهم زیادی داشته‌اند و با ترجمه و نشر مطالب مرتبط با ریاضی شاد در «مجلهٔ ریاضی یکان» و نیز ترجمه و انتشار کتاب‌های گوناگون، به ترویج این فرهنگ کمک بسیاری کردند

مصحفی فصل‌های متفاوت کتاب «معماهای ریاضی»، نوشتهٔ **جی. گاموف** و **ام. استرن** را در سال‌های دههٔ ۱۳۴۰، از زبان فرانسه به فارسی ترجمه و آن‌ها را در مجلهٔ ریاضی «یکان» به تدریج منتشر کرد. در سال ۱۳۷۷ نیز آن‌ها را گردآوری کرد و در قالب کتابی با عنوان «داستان‌واره‌های ریاضی» توسط «انتشارات مدرسه» به چاپ رساند. همچنین مترجمان مجله، برای نخستین بار در همان سال‌ها، کارهای معمایی پازلیست‌های معروف دنیا، از جمله **سام لوید** را (که دربارهٔ او و کارهایش در ادامه بیشتر خواهیم گفت) به فارسی ترجمه و منتشر کردند که بسیاری از معماهای معروف در فرهنگ عامه از همین منابع نشئت گرفته‌اند؛ از جمله بسیاری از معماهای مربوط به وزن کردن، سکه‌های تقلبی و معماهای چوب کبریت‌ها.

همچنین، پرویز شهریاری با ترجمهٔ کتاب‌های معروف «سرگرمی‌های هندسه»، «سرگرمی‌های ریاضی» و «سرگرمی‌های جبر»، از **یاکوب ایسیدرویچ پرلمان**، خدمت شایسته‌ای به گسترش ریاضی شاد در ایران کرد. همچنین برادر وی، مهندس **هرمز شهریاری** هم دو کتاب از پازلیست نام‌دار معاصر، **مارتین گاردنر** (که دربارهٔ او هم بیشتر خواهیم گفت) به فارسی برگرداند و کارهای زیادی از او را هم در نشریات به چاپ رساند. در مورد کارهای زنده‌یاد شهریاری و نقش ویژهٔ او در


مارتین گاردنر





شروع بحث ریاضی شاد در ایران، هم‌زمان است با انتشار نخستین مجله‌های ریاضی در کشورمان. با تحقیق در مورد تاریخچهٔ انتشار مجله‌های ریاضی در کشورمان، می‌توانیم نخستین آثار در این زمینه را بازیابی کنیم. زنده‌یاد دکتر غلامحسین مصاحب را می‌توان پیشگام این امر دانست

همگانی کردن و ترویج ریاضیات در میان عامهٔ مردم، بسیار می‌توان نوشت. ایشان در مجله‌های «آشتی با ریاضیات» و «آشنایی با ریاضیات»، مطالب بسیار متنوعی اعم از معما، سرگرمی، تفریح اندیشه، و نیز کاریکاتور و لطیفهٔ ریاضی منتشر کرد و باعث گرایش صدها تن از جوانان این سرزمین به رشتهٔ ریاضی شد.

همچنین جا دارد که به یکی از همکاران ایشان که در مجله‌های متفاوت قلم می‌زد نیز اشاره‌ای هر چند گذرا داشته باشیم. **غلامرضا یاسی‌پور** که کارهایش در ریاضیات برای نخستین‌بار در دهه‌های ۱۳۴۰ و ۱۳۵۰ در مجلهٔ یکان معرفی شدند و سپس در مجله‌های «آشتی با ریاضیات»، «آشنایی با ریاضیات»، و «دانش و مردم» (به سردبیری زنده‌یاد شهریاری) قلم می‌زد. او همواره در کارهایش نگاهی به ریاضیات شاد داشت. از جمله کارهای ایشان، ترجمهٔ چند کتاب در زمینهٔ معماهای ریاضی و منطقی، همچون «۱۰۰ سرگرمی منطقی»، از **مارتین گاردنر**، «معماهای نه‌چندان ساده»، از **گرابارچوک** و «معماهای ممتاز ریاضی»، نوشتهٔ **هوراد پی** است.

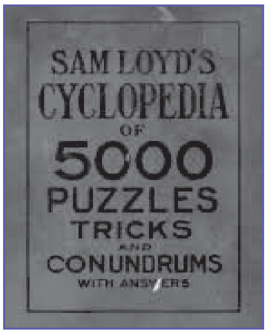
در میان معاصران نیز باید از **کاظم فائقی** یاد کنیم که ده‌ها کتاب در زمینهٔ انواع سرگرمی‌ها و تفریحات علمی و ریاضی ترجمه و منتشر کرده است. در سال‌های اخیر، نویسندهٔ این مقاله هم تلاش‌هایی برای گسترش این فرهنگ کرده است که شامل ترجمهٔ کارهایی از دیگر پازلیست آمریکایی معاصر، **ریموند اسمالین**، تألیف کتابی دو جلدی با عنوان «ریاضی شاد» (انتشارات مدرسه، ۱۳۹۸) و نیز مقالاتی در زمینهٔ سرگرمی‌های ریاضی در نشریات گوناگون می‌شود.

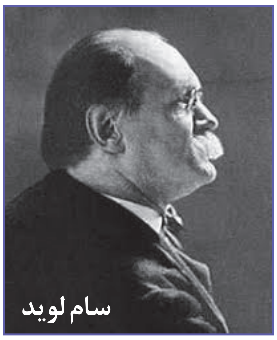
اما التفات به سرگرمی‌ها، معماها، تفریحات و شوخی‌های ریاضی در مغرب‌زمین پیشینه‌ای بس دیرینه دارد و به‌خصوص در یک قرن اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. شاید اغراق نباشد اگر بگوییم ده‌ها هزار عنوان کتاب در این زمینه‌ها منتشر شده‌اند. سابقهٔ طرح معما در اروپا به‌صورت غیررسمی به بیش از هزار سال پیش برمی‌گردد. از جملهٔ آن‌ها مجموعه‌ای از چند معمای به جا مانده از قرن هفتم میلادی به نام معماهای «اسقف کانتربری» است که به **آلکوین** (ا. آلبینوس) از «یورکشایر» انگلستان منسوب است. او در سال‌های ۷۳۵ تا ۸۰۴ میلادی می‌زیست. یکی از معروف‌ترین این معماها چنین است:

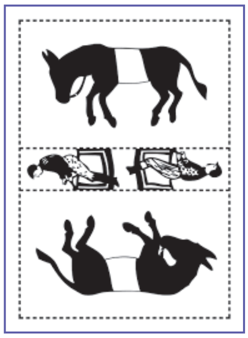
«۱۰۰ بوشل (پیمانه‌ای تقریباً معادل ۳۶/۴ لیتر) ذرت بین ۱۰۰نفر از مردم تقسیم شد؛ به‌طوری‌که به هر مرد سه بوشل و به هر زن دو بوشل و به هر بچه نیم بوشل رسید. همچنین می‌دانیم، عدهٔ زنان پنج برابر عدهٔ مردان است. عدهٔ بچه‌ها چند نفر است؟»

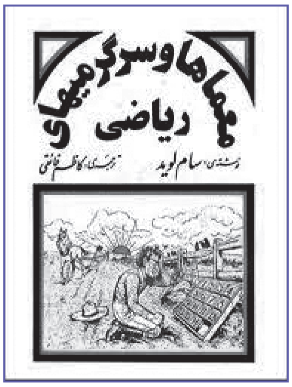
مجموعهٔ این معماها، همراه با تعدادی معمای تاریخی دیگر، توسط **هنری ارنست دیودونه**، پازلیست انگلیسی (از او هم بیشتر خواهیم گفت) در سال ۱۹۰۷ در کتابی با عنوان «معماهای کانتربری» آمده است. در قرن‌های بعد، در کشورهای

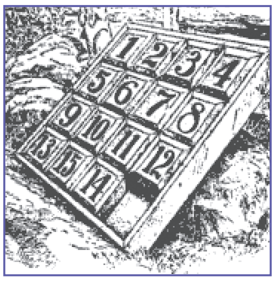

باشه دو مزیریاک




سام لوید







متفاوت به منابعی از این دست معماها برمی‌خوریم. از جمله در سال ۱۶۱۲، **باشه دو مزیریاک**[۴] (۱۶۳۸-۱۵۸۱)، ریاضی‌دان، زبان‌شناس و شاعر فرانسوی که تحقیقات وسیعی در زمینهٔ شعبده‌بازی، تفریحات ریاضی و نیز مربع‌های جادویی داشت، کتابی با عنوان «مسائل مطبوع و لذت‌بخش» نوشت که ۱۰سال بعد، خودش نسخهٔ کامل‌تری از آن را منتشر کرد و طی چهار قرن، مسائل آن در کتاب‌های بسیار دیگر بازنشر شدند. شاید این مجموعه یکی از نخستین کارهایی است که به معنی واقعی، به همان چیزی که امروزه ریاضی شاد می‌نامیم، نزدیک است. این کتاب مجموعهٔ ارزشمندی از ده‌ها معما و تفریحات و سرگرمی‌ها با محتوای ریاضی است. یکی از مشهورترین شعبده‌بازی‌های مطرح‌شده در آن، شعبده‌بازی با ساعت عقربه‌ای است که به آن اشاره خواهیم کرد. یکی دیگر از بازی‌های جالب آن چنین است:

«به A بگویید که پنهانی تعدادی مهره به دلخواه و بیش از ۵ تا، از بین تعداد زیادی مهره بردارد. به B بگویید که سه‌برابر آن را بردارد. سپس از A بخواهید که ۵ مهره به B بدهد و از B بخواهید که سه‌برابر تعداد مهره‌هایی که برای A باقی مانده‌اند، به A بدهد. اکنون می‌توانید به B بگویید که ۲۰ مهره دارد!»

در همان سال‌ها، فیزیک‌دان، منجم و ریاضی‌دان دیگر فرانسوی، **جین لورشون**[۵] (۱۶۷۰-۱۵۹۱)، کتابی با عنوان «تفریحات ریاضی عامه‌پسند» منتشر کرد. این روند همچنان ادامه داشت تا در سال‌های آغازین قرن بیستم، به نام‌های معروف دیگری در اروپا و آمریکا بر می‌خوریم که تنها به دو تن از مشهورترین آن‌ها اشاره‌ای گذرا خواهیم داشت:

۱. سام لوید[۶] **(۱۹۱۱-۱۸۴۱)** در سی‌ام ژانویهٔ ۱۸۴۱ در فیلادلفیای آمریکا متولد شد و تحصیلاتش را در نیویورک به پایان رساند. وی از کودکی دارای استعدادی شگرف در بازی‌های فکری و به‌خصوص شطرنج بود و در سراسر عمرش شطرنج‌بازی چیره‌دست به شمار می‌رفت. او که به مباحث و معماهای فکری علاقه‌مند بود، به تدریج هزاران معما در زمینه‌های متفاوت (و از جمله شطرنج) طراحی کرد و آن‌ها را در نشریات به چاپ رساند. شهرت او چنان است که در زمینهٔ معماهای فکری شاخه‌ای مستقل به نام «معماهای سام‌لوید» شناخته می‌شود! او پیش از مرگ مجموعهٔ بی‌نظیری از حدود ۵۰۰۰ معمای متفاوت به نام «دایرةالمعارف معماها» گردآوری کرد که در سال ۱۹۱۴، پس از مرگش، توسط پسرش به چاپ رسید. این معماها در فرهنگ‌ها و ملت‌های گوناگون به شکل‌های متفاوت تا به امروز بارها مطرح شده‌اند.

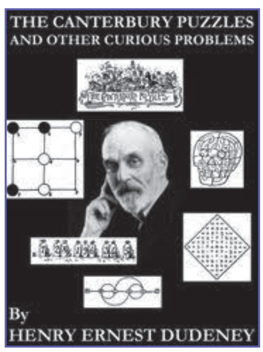
سام لوید همچنین مخترع ده‌ها بازی فکری با ابزارهای ساده بوده است. یکی از مشهورترین اسباب‌بازی‌های فکری دست‌ساختهٔ او، بازی معروف «۱۴ـ ۱۵» است که سال‌ها دست‌ابزار کودکان و نوجوانان کشورهای جهان و از جمله ایران بود و نویسنده تجربهٔ کار با آن را به خاطر می‌آورد. این ابزار ساده ابتدا به‌صورت قابی چوبی شامل ۱۵ مهرهٔ مربع‌شکل بود که درون ریل‌های ثابت افقی و عمودی می‌توانستند جابه‌جا شوند. روی مهره‌ها عددهای ۱ تا ۱۵ نوشته شده بودند و همه به ترتیب دنبال هم بودند؛ به جز دو عدد ۱۴ و ۱۵ که عامدانه جابه‌جا گذاشته شده بودند.

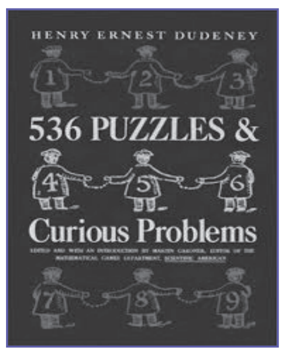
هدف بازی جابه‌جا کردن این دو مهره و بردن آن‌ها به جای

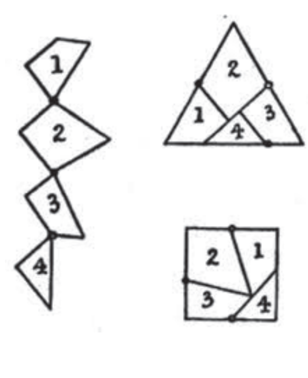
اصلی‌شان بود. البته امکان استفاده از جابه‌جایی مهره‌های دیگر در همهٔ ردیف‌های افقی و عمودی وجود داشت. خیلی زود صدها هزار عدد از این اسباب‌بازی مفرح در سراسر آمریکا به فروش رفت و مردم از پیر و جوان مشغول تلاش برای انجام این کار نشدنی شـــدند! خود ســـام لوید هم در آن زمان یک جایزهٔ هزار دلاری برای کســـی که موفق به این کار شود، تعیین کرده بود. سال‌ها بعد، ریاضی‌دانان ثابت کردند که این کار شدنی نیست، اما همین اسباب‌بازی با تغییراتی، سال‌ها در کشورهای دنیا رایج بود.

یکی دیگر از دســـت‌ابزارهای جالب ساخت او، بازی «دو خر و دو ســـوارکار» بود که مدت‌ها باعث سرگرمی عوام بود. در این بازی، روی یک تکه مقوا سه تصویر چاپی وجود داشت. این مقوا باید از روی نقطه‌چین‌ها به سه قطعهٔ مستطیل‌شکل بریده می‌شد و با چسباندن دوبارهٔ آن‌ها به هم، تصویری دیگر شکل می‌گرفت. علاقه‌مندان برای کســـب اطلاعات بیشـــتر می‌توانند به منابع اینترنتی در این‌باره مراجعه کنند. تأثیر ســـام لوید بر گسترش فرهنگ معماها در کشور آمریکا چنان بود که در سال ۱۸۹۸ یک مجلهٔ ماهانهٔ آمریکایی به نـــام «The Strand Magazine»، او را شاهزاده طراحان معما لقب داد. پازلیست معاصر، مارتین گاردنر هم او را بزرگ‌ترین طراح معما در آمریکا خواند. در ایران تنها یکی از کتاب‌های او با عنوان «معماها و سرگرمی‌های ریاضی» توسط کاظم فائقی در سال ۱۳۶۴ ترجمه و به چاپ رسید.

۲. هنری ارنست دیودونه[7] (۱۹۳۰-۱۸۵۷): انگلیسی و از معاصران سام لوید بود و اتفاقاً با او مکاتباتی هم در این زمینه‌ها داشـــت. او به‌طور خاص در زمینهٔ بازی‌های ریاضی و معماهای







منطقی کارهای چشم‌گیری انجام داد، وی البته در همهٔ زمینه‌ها معماهای بســـیاری را طرح کرد که مجموعه‌ای از آن‌ها سال‌ها بعد از مرگش، در ســـال ۱۹۶۷، با ویراستاری مارتین گاردنر، در کتابی با عنوان «۵۳۶ معما» به چاپ رسید. البته در زمان حیات، خودش هم کتاب‌هایی در زمینهٔ معماها، به نام‌های «معماهای کانتربری» (۱۹۰۷)، «سرگرمی‌های ریاضی» (۱۹۱۷)، «بهترین معماهـــای جهان» (۱۹۲۵) و «معماهای جدید» (۱۹۲۶) را به چاپ رساند. همچنین در سال ۱۸۹۰، یک مجموعه معماها را به اتفاق سام لوید در نشریات انگلستان منتشر کرد. سبک کار وی علمی‌تر از سام لوید بود و به تئوری‌های ریاضی پشت پردهٔ معماها توجه ویژه‌ای داشت؛ کاری که نسل بعدی پازلیست‌های آمریکا به آن اهتمام ویژه‌ای داشتند و در ادامه به دو تن از مشهورترین آن‌ها اشاره‌ای می‌کنیم:

پازلیست‌های معاصر

۱. مارتین گاردنر[8] (۲۰۱۰-۱۹۱۴): از نوابغ ریاضی، منطق و طراحی معما، و شـــاید مشـــهورترین آن‌ها در دنیا باشد و این به دلیل پشـــتکار فراوان و کار گســـتردهٔ او در طول بیش از نیم قرن بود. او که ابتدا به تحصیل در رشـــتهٔ فلســـفه پرداخته بود و به‌عنوان روزنامه‌نگار و ویراســـتار با نشـــریات همکاری داشت، از نیمهٔ دههٔ ۱۹۵۰ به معماها، ســـرگرمی‌ها و بازی‌های فکری و ریاضی به شـــدت علاقه‌مند شد و فقط یکی از فعالیت‌هایش، داشـــتن ســـتون بازی‌های ریاضی، به مدت ۲۵ سال در مجلهٔ «Sceintific American» بود.

علاوه بر آن، ده‌ها کتاب در زمینهٔ ســـرگرمی‌ها و تفریحات ریاضی و شـــعبده‌بازی و تردستی نوشـــت و در همگانی‌کردن ریاضیات در آمریکا نقشـــی غیرقابل‌تردید داشت. البته این غیر از داســـتان‌ها و رمان‌هایی بود که نوشـــت و یکی از آن‌ها به نام «تفسیر آلیس» که با الهام از کتاب‌های **لوئیس کارول** (آلیس در ســـرزمین عجایب و آلیس از میان آینه) نوشته شده بود، در سال ۱۹۶۰، با بیش از یک میلیون نسخه فروش، پرفروش‌ترین کار اوست. دو کتاب او به نام‌های «تفریحات ریاضی» و «ریاضیات و سرگرمی‌ها» توسط مهندس هرمز شهریاری به فارسی ترجمه و منتشر شده‌اند و کتاب «معماهای ابوالهول» از او هم، با ترجمهٔ حسن نصیرنیا، توسط «مرکز نشر دانشگاهی» منتشر شده است. اما بسیاری دیگر از کتاب‌های او هنوز ترجمه نشده‌اند.

مارتین گاردنـــر روی ترویج فرهنگ ریاضی شـــاد و نقش آن در آموزش موفق ریاضیات تأکید بســـیار داشـــت و به این منظور تلاش‌های بسیاری کرد. جمله‌ای از او در این‌باره گویای همین روحیهٔ اوست: «ریاضیات تفریحی و شاد، ریاضیاتی است که آمیخته به شـــوخی و مطالب ســـرگرم‌کننده باشد؛ آن‌طور کـــه مردم عادی هـــم بتوانند چیـــزی از آن درک کنند و مورد

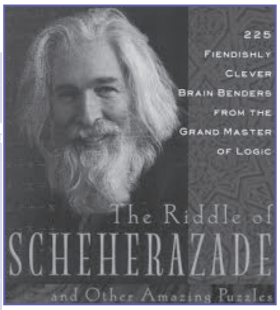
استقبال قرار گیرد. ریاضیات تفریحی شامل مسئله‌های سادهٔ ابتدایی با راه‌حل‌های ممتاز و در عین حال شگفت‌انگیز است. ریاضیات تفریحی، پارادوکس‌ها، بازی‌های زیرکانه، حقه‌بازی‌ها، شیرین‌کاری‌ها، نکته‌های انحرافی، و شگفتی‌های توپولوژی را در بر می‌گیرد.

مدت ۴۰ سال، بیشترین تلاش من به این منظور بود که دست‌اندرکاران آموزش‌وپرورش را به این حقیقت آگاهی دهم که شایسته است، از ریاضیات شاد به‌عنوان یک کار کمک‌درسی در دوران تحصیل بهره بگیرند. برای دل‌بسته نگه داشتن دانش‌آموزان به شگفتی‌های ریاضی، همواره باید در راه ریاضیات شاد حرکت کرد. ولی افسوس که تاکنون حرکت در این راستا بسیار به کندی انجام گرفته است. من بارها به داستانی که از دوران دبیرستان به خاطر دارم، اشاره کرده‌ام. این خاطره وضع نابسامان آن سال‌ها را به خوبی مجسم می‌کند. یک روز سر کلاس ریاضی، پس از آنکه تکلیف همیشگی خود را انجام دادم، برگهٔ کاغذ سفیدی برداشتم و کوشیدم تا مسئله‌ای را حل کنم که خیلی مرا به وسوسه انداخته بود؛ مسئله‌ای که برد و باخت یک بازی را معین می‌کرد. وقتی دبیر مرا در این حال دید، برگهٔ کاغذ را از دستم ربود و گفت: «آقای گاردنر، وقتی که در کلاس من هستید، انتظار دارم روی ریاضیات کار کنید، نه چیزی دیگر!»

۲. ریموند مریل اسمالین[9] **(۲۰۱۷-۱۹۱۹)**: به راستی از نوابغ و نوادر روزگار بود. او که دانشنامه‌اش را از دانشگاه شیکاگو اخذ کرده و درجهٔ پروفسوری منطق ریاضی را از دانشگاه پرینستون گرفته بود، در زمینه‌های گوناگونی چون فلسفه، منطق، ریاضیات، موسیقی، شطرنج، شعبده‌بازی، طنزنویسی و طراحی جدول و معما صاحب‌نظر بود و تا آخرین روزهای عمر در کار تدریس، سخنرانی و تألیف فعال بود و آخرین کتابش را با عنوان «راهنمای پسامقدماتی برای منطق ریاضی» در سن ۹۷ سالگی نوشت!

اسمالین نیز همچون گاردنر، بیش از نیم‌قرن به ترویج فرهنگ ریاضیات شاد پرداخت و ده‌ها مقاله و کتاب در این زمینه نوشت. اما شهرتش بیشتر بابت تألیف کتاب‌های متعدد (چهارده جلد) در زمینهٔ معماها، با محوریت معماهای منطقی است. **کورت گودل**[10]، ریاضی‌دان و فیلسوف اتریشی (۱۹۷۸-۱۹۰۶) شخصیت محبوب او بود و برای تبیین قضیهٔ اصلی او موسوم به «قضیهٔ ناتمامیت گودل»[11]، سلسله معماهایی را طراحی کرد تا بتواند به زبانی ساده و عامه‌فهم این قضیهٔ پیچیدهٔ فلسفی ـ ریاضی را فراگیر کند. به همین دلیل در اغلب کتاب‌های معمایی‌اش اشاره‌ای هر چند گذرا به این قضیه می‌کند. او به پارادوکس‌ها نیز علاقهٔ مفرط داشت.

کتاب‌های معمایی او غالباً تم داستانی دارند و به همین



اسمالین علاقه‌ای خاص به ترویج معماهای منطقی داشت. این علاقه را در بخشی از مقدمهٔ کتاب بانو یا ببر؟ می‌توان به‌عینه مشاهده کرد

دلیل بسیار جذاب هستند و می‌توانند باعث جذب عامهٔ جوانان و نوجوانان به مباحث جدی ریاضی شوند. کتاب‌هایی همچون: آلیس در سرزمین معما، بانو یا ببر؟ معماهای شطرنج شرلوک هلمز، معماهای شهرزاد، نام این کتاب چیست؟ تقلید از مرغ مقلد، شیطان ـ کانتور و بی‌نهایت، آرتورشاه در جست‌وجوی سگش، باغ جادویی جورج بی، و ... از میان کتاب‌های معمایی اسمالین، کتاب بانو یا ببر؟ با عنوان «معماهایی در منطق ریاضی» توسط **محمد شریف‌زاده** به فارسی ترجمه و منتشر شده است. کتاب‌های آلیس در سرزمین معما و معماهای شهرزاد نیز، توسط نویسندهٔ مقالهٔ حاضر به فارسی ترجمه و منتشر شده است (کتاب «نام این کتاب چیست؟» را هم به تازگی ترجمه کرده‌ام که در دست انتشار است).

اسمالین علاقه‌ای خاص به ترویج معماهای منطقی داشت. این علاقه را در بخشی از مقدمهٔ کتاب بانو یا ببر؟ می‌توان به‌عینه مشاهده کرد: «بسیاری افراد را دیده‌ام که می‌گفتند از ریاضیات متنفرند، اما وقتی یک مسئلهٔ منطق یا ریاضی را در قالب یک معما به آن‌ها می‌دادم، مشتاقانه به آن می‌پرداختند. شاید عجیب نباشد اگر یک کتاب معمای خوب را به‌عنوان بهترین درمان برای بیماری **عدم اشتیاق به ریاضی** تجویز کنیم. علاوه بر آن، هر رسالهٔ ریاضی می‌تواند در قالب یک کتاب معما نگاشته شود! من گاهی شگفت‌زده می‌شوم، وقتی می‌اندیشم: چه می‌شد اگر **اقلیدس** کتاب **اصول** خود را در چنین قالبی می‌نوشت! برای مثال، اگر به جای اینکه قضیهٔ برابری زوایای جانبی در مثلث متساوی‌الساقین را ابتدا مطرح و سپس اثبات کند، آن را این‌گونه معرفی می‌کرد: مسئله: مثلثی با دو ضلع برابر داده شده است.

آیـــا دو تا از زاویه‌های مثلث لزوماً برابرند؟ آری یا نه؟ برای دیدن راه‌حل به صفحهٔ ... مراجعه کنید. به همین ترتیب می‌توانســـت در مورد سایر قضایا عمل کند. چنین کتابی می‌توانست یکی از عامه‌پسندترین کتاب‌های معمایی تاریخ شود!»

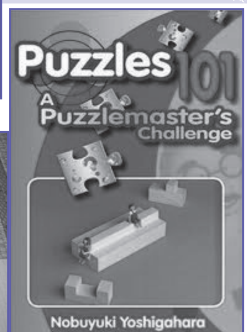
پازلیست‌های ژاپنی

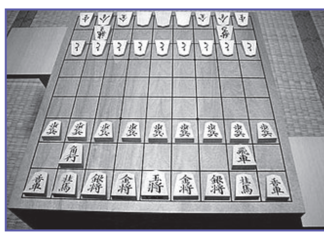
کشور ژاپن مهد ســـرگرمی، معما و انواع بازی‌های فکری، نه‌تنها در آســـیای دور، بلکه در سراسر جهان محسوب می‌شود. ژاپنی‌ها از دیرباز شیفتهٔ سرگرمی‌ها و بازی‌های متکی به خلاقیت بوده‌اند و از این حیث به راستی کم‌نظیرند. آنان مبتکر صدها نوع بازی فکری و معما، از قرن‌ها پیش تاکنون بوده‌اند. شطرنج ژاپنی یا «شوگی»[۱۲] از نخستین ابداعات آن‌هاست که سابقهٔ آن به اوایل هزارهٔ پیشـــین بر می‌گردد و یک بازی فکری تمام‌عیار است که معماهای بسیاری هم پیرامون آن شکل گرفته‌اند.

«اریگامـــی»[۱۳] (کاغذ و تا) هم که شـــهرتی جهانی دارد، از ابداعات ژاپنی‌هاســـت که سابقهٔ آن به حدود سال‌های آخر قرن هفدهم برمی‌گردد. اریگامی، ســـاختن اسباب‌بازی‌های کاغذی بدون اســـتفاده از برش و فقط به کمک تا زدن اســـت و مبانی ریاضی بســـیاری ورای ظاهر ســـاده‌اش دارد. در دهه‌های اخیر، ژاپنی‌ها دست به توسعهٔ دانش اریگامی زده‌اند و اولاً نوع خاصی از آن را که با برش زدن همراه اســـت، اختـــراع کرده‌اند، و ثانیاً «اریگامی فنی» را به وجود آورده‌اند که روش‌های دقیق ریاضی برای ســـاخت انواع ابزارها به کمک کاغذ و تا را فرموله می‌کند و حتی از برنامه‌های دقیق رایانه‌ای در این راه کمک می‌گیرد. در ژاپن هر ساله جشنواره‌ها و مسابقه‌های سراسری اریگامی برگزار می‌شود که تأثیر بسزایی در پرورش خلاقیت نوجوانان ژاپنی دارد.

ژاپنی‌ها از دیرباز شیفتهٔ سرگرمی‌ها و بازی‌های متکی به خلاقیت بوده‌اند و از این حیث به راستی کم‌نظیرند

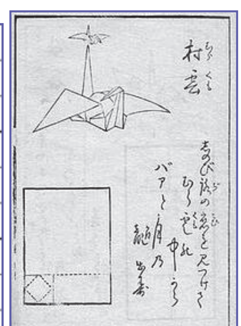

نابایاکی شیگاهارایو



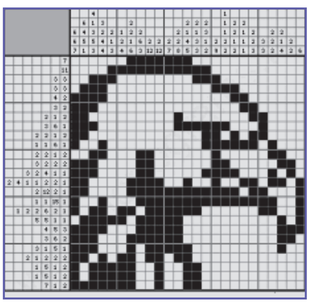

شوگی یا شطرنج ژاپنی

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

یک نمونه سودکو


دست‌نوشته‌ای قدیمی دربارهٔ اریگامی

جدول‌های ژاپنی هم شـــهرتی جهانی دارنـــد که نیازمند توضیح بیشتر نیستند و اکثر خوانندگان با آن‌ها آشنایی دارند؛ جدول‌هایی همچون «کاکورو» و «ســـودوکو» که در نشـــریات کشورمان بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند. علاوه بر آن‌ها، یک جدول طراحی پازلی، موسوم به «نانوگرام»[۱۴] وجود دارد که کمتر شناخته شده است و توسط **نان ایشیدا** در سال ۱۹۸۷ اختراع شـــد و جلوهٔ زیبایی از خلاقیت ژاپنی‌ها را به نمایش می‌گذارد. در این جدول‌ها، به کمک عددهای نوشـــته شـــده در سطرها و ســـتون‌های جدول می‌توان تعداد بسته‌هایی را که در هر سطر (یا ستون) باید سیاه شوند و نیز تعداد خانه‌های سیاه هر بسته را فهمید و از آنجا با رهیافتی منطقی (با مقایسهٔ عددهای ستون‌ها و سطرها) مشخص کرد که کدام خانه‌ها باید سیاه شوند و به این ترتیب در نهایت یک تابلوی زیبا نقاشی می‌شود! نمونهٔ حل شده یکی از این جدول‌ها را در شکل زیر می‌بینید:



گفته می‌شود که در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰، در اکثر قطارها و اتوبوس‌هـــای ژاپن، افراد زیادی در حال پرکردن خانه‌های این جدول‌ها مشاهده می‌شدند! در چنین فضایی طبیعتاً کتاب‌ها، مجله‌ها و نشریات زیادی دربارهٔ معماها و بازی‌های ریاضی منتشر شده‌اند و متخصصان زیادی هم به تولید محتوا برای این رسانه‌ها مشغول بوده‌اند. به دو تن از این افراد و کارهایشان اشاره‌ای گذرا می‌کنیم:

۱. کوزابورو فوجیمورا[۱۵] **(تولد ۱۹۰۳):** موســـوم به کوبون فوجیمورا، بعد از فارغ‌التحصیل شـــدن از کالج، در مغازهٔ پدرش که فروشگاه لوازم ســـرگرمی بود، مشغول به‌کار شد و از همین رهگذر به بازی‌های فکری خلاقانه علاقه‌مند شـــد و شـــروع به طراحی برخی معماهای ســـاده کرد. وی در سال ۱۹۲۶ نامه‌ای بـــرای **هنری ارنست دیودونه** که در آن زمان شهرتی جهانی

اسمالین: «بسیاری افراد را دیده‌ام که می‌گفتند از ریاضیات متنفرند، اما وقتی یک مسئلهٔ منطق یا ریاضی را در قالب یک معما به آن‌ها می‌دادم، مشتاقانه به آن می‌پرداختند. شاید عجیب نباشد اگر یک کتاب معمای خوب را به‌عنوان بهترین درمان برای بیماری عدم اشتیاق به ریاضی تجویز کنیم

داشت، فرستاد و تشویق‌های دیودونه باعث علاقه‌مندی بیشتر او به تحصیل در رشتهٔ ریاضی و در نهایت ورودش به جرگهٔ پازلیست‌های بین‌المللی شد. به علاوه ارتباط مستمری بین او و دیودونه برقرار شد که به ترجمهٔ اغلب آثار دیودونه توسط فوجیمورا به ژاپنی انجامید.

فوجیمورا خود به طراحی معماهای بسیار و تألیف کتاب‌هایی در این زمینه پرداخت که از جمله می‌توان به «معماهای ریاضی نوین» (۱۹۳۸)، «۱۰۰ معمای جدید ریاضی» (۱۹۴۰)، «مطالعه‌ای بر معماهای ریاضی» (۱۹۴۳)، معماهای استدلالی (۱۹۵۶)، معماهای جدید (۱۹۵۷)، معماها و مسئله‌ها (۱۹۶۹)، «منشأ معماها» (۱۹۷۵) و «معماهای توکیو» (۱۹۷۸) اشاره کرد که این آخری معروف‌ترین اثر اوست و توسط نگارنده به فارسی ترجمه شده است. او سال‌ها مجری برنامه‌ای تلویزیونی به نام «پازل شو» بود که از تلویزیون سراسری ژاپن پخش می‌شد.

۲. نابایاکی یوشیگاهارا[16] (۲۰۰۴ـ۱۹۳۶): پازلیستی معروف است که ابتدا به تحصیل در رشتهٔ شیمی پرداخت و سپس به دلیل علاقهٔ وافر به معماها، به ریاضیات گرایش پیدا کرد. یوشیگاهارا مبتکر ده‌ها معمای اختصاصی با زمینهٔ ریاضی بود و از این حیث شهرتی جهانی یافت. به‌طوری‌که به دلیل اختراعات و ابتکاراتش در ساخت سرگرمی‌های فکری، در سال ۲۰۰۳ از سوی «انجمن طراحان بازی و معما» جایزهٔ لوید را گرفت. وی علاوه بر تألیف کتاب‌های معمایی، همچون «۱۰۱ معمای چالش‌برانگیز» و نوشتن مطالبی در این زمینه و اجرای برنامه‌های تلویزیونی، اقدامات جالبی هم برای گسترش فرهنگ ریاضی و معما در کشورش انجام داد. از جملهٔ این اقدامات برگزاری مسابقه‌های معما به شکل‌های گوناگون در مدرسه‌ها و حتی برای عموم، از طریق نصب پوستر در ایستگاه‌های مترو بود! یکی از چالش‌برانگیزترین معماهای وی که در متروی «اوزاکا» نصب شده بود و مایهٔ توجه بسیاری از مردم شد، این بود:

۱۰ جای خالی در تساوی زیر را با ارقام مناسب (تکرار مجاز است) طوری پر کنید که تساوی برقرار باشد:

OOOOO × OOOOO = ۱۲۳۴۵۶۷۸۹

در سال‌های اخیر نویسندگان و پازلیست‌های جوان بسیاری به صحنه آمده‌اند و مشاهده می‌کنیم که در اکثر کشورهای توسعه‌یافته و در حال توسعه، با سرعت شگفت‌آوری کتاب‌های معمایی گوناگون در حال چاپ و نشر هستند و در این زمینه تبادل فرهنگی صورت می‌گیرد. به علاوه، انجمن‌های تخصصی متعددی برای ترویج معماها، بازی‌ها و تفریحات ریاضی تأسیس شده‌اند و سالانه صدها جلد کتاب در این زمینه منتشر می‌شوند. نشریات تخصصی متعددی هم به کار در این زمینه مشغول هستند. برنامه‌های کاربردی متعدد و متنوعی هم برای این منظور طراحی شده‌اند و بازی‌هایی با محتوای ریاضی تحت ویندوز یا اندروید (برای تلفن‌های همراه) همه‌روزه در حال تولید و طراحی‌اند. این‌ها به‌جز دست‌ابزارها و بازی‌های فیزیکی مرتبط با خلاقیت، هوش و تفریح اندیشه هستند. اما متأسفانه سهم ما از این مجموعه بسیار اندک و غیرقابل بیان است. در شمارهٔ بعد به توضیحاتی پیرامون بخش‌های گوناگون ریاضی شاد و نقش آن‌ها در آموزش بهتر ریاضیات اشاره می‌کنیم.

در سال‌های اخیر نویسندگان و پازلیست‌های جوان بسیاری به صحنه آمده‌اند و مشاهده می‌کنیم که در اکثر کشورهای توسعه‌یافته و در حال توسعه، با سرعت شگفت‌آوری کتاب‌های معمایی گوناگون در حال چاپ و نشر هستند و در این زمینه تبادل فرهنگی صورت می‌گیرد

پی‌نوشت‌ها

1. fun mathematics
2. math puzzles
3. math jokes
4. Bachet de Meziriac
5. Jean Leurechon
6. Sam Loyd
7. H.E.Dudeney
8. Martin Gardner
9. R.M.Smullyan
10. Kurt Godel
11. incompleteness theorem of godel
12. shogi
13. origami
14. nonogram
15. Kozaburo Fujimura
16. Nobuyuki Yoshigahara

منابع

۱. عاملی، شیخ بهاءالدین (۱۳۶۶). کشکول شیخ بهایی. ترجمهٔ بهمن رازانی. نشر زرین. تهران.

۲. گاموف، جی. و استرن ام. (۱۳۷۷). داستان‌واره‌های ریاضی، ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسهٔ برهان. تهران.

۳. ایوز، هاوارد و. (۱۳۶۰). تاریخ ریاضیات (ج ۱و۲). ترجمهٔ محمد قاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی. تهران.

۴. لوید، سام (۱۳۶۴). معماها و سرگرمی‌های ریاضی. ترجمهٔ کاظم فائقی. انتشارات امید یزدانی. تبریز.

۵. یاسی‌پور، غلامرضا (بی‌تا). تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران. مجلهٔ ریاضی برهان دبیرستان. شماره‌های ۳ و ۴.

6. smullyan, raymond (1982). the lady or the tiger? knopf press.

7. Fujimura, kobon (1978). tokyo puzzles. charles scribners sons press.

8. Yoshigahara, nobuyuki (2004). 101 puzzles. A . K PETER LTD.

روش‌هایی برای طرح مسئله در هندسه

لری هوهن*
مترجمان: ابراهیم ریحانی
دانشیار دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
مهدیه اجدادی
مدرس ریاضی و دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

حل مسئله در دههٔ ۱۹۸۰ مورد توجه چشمگیری قرار گرفت. در حالی‌که به همتای ضروری آن، **طرح مسئله** توجه چندانی نشد؛ اگرچه در این مورد برخی از استثناهای قابل ذکر، از جمله آثار **براون** و **والتر** (۱۹۸۳)، **کلامکین** (۱۹۸۶)، و البته **پولیا** (۱۹۷۳) وجود دارند.

در این مقاله از یک قضیهٔ معمولی هندسه استفاده شده است و مسائلی در مورد کاربرد آن مطرح شده‌اند. شیوه‌های ارائه شده در این مقاله به خوبی برای طرح مسائل امتحانات هندسه، مسابقات هندسه و مسائل روزمره (مورد نیاز در کلاس درس) برای یک معلم ریاضیات، مفید خواهد بود. اگرچه این روش‌ها را در درجهٔ اول برای معلمان مدرسه‌های دورهٔ متوسطه در نظر گرفته‌اند، با این حال دانش‌آموزان خلاق در هندسه می‌توانند از آن‌ها برای ساخت یافته‌های ریاضی خود استفاده کنند.

ابتدا فرض کنید که ما مطالعهٔ یک واحد درسی در دایره‌ها را به پایان رسانده‌ایم. در ادامه می‌خواهیم درک دانش‌آموزان خود را از قضیهٔ زیر بیازماییم:

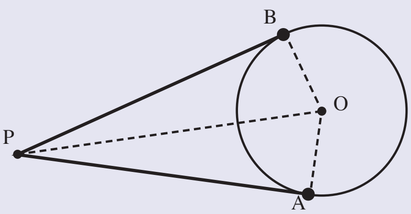
قضیه: اگر دو مماس از نقطه‌ای خارج از یک دایره بر آن دایره رسم شوند، دو قطعهٔ مماس هم‌نهشت هستند.

یک اثبات معمول این قضیه که در شکل ۱ می‌بینیم، این است که ثابت کنیم: $\overset{\Delta}{PAO} \cong \overset{\Delta}{POB}$ یک اثبات دیگر این است که نشان دهیم:

$$m\angle PAB = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{AB}) = m\angle PBA \quad ^{1}$$

(M به مفهوم اندازه است)

پس $\overset{\Delta}{APB}$ متساوی‌الساقین است. بنابراین: $PA=PB$.



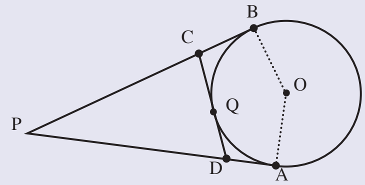
شکل ۱. اثبات $PA=PB$

مطمئناً می‌توانیم انواعی از تمرینات محاسباتی را برای ارزیابی درک دانش‌آموزان از این قضیه ارائه دهیم (و البته استفاده از برخی از آن‌ها خوب است). اما ما مسائلی را ترجیح می‌دهیم که بیشتر هندسی باشند تا حسابی. به عبارت دیگر، ما می‌خواهیم دانش‌آموزان از قضیه برای اثبات نتایج مرتبط استفاده کنند.

یک روش برای به دست آوردن «نتایج مرتبط» افزودن کمی پیچیدگی به شکل است. برای مثال، فرض کنید، مماس دیگری برای دایره، مانند آنچه در شکل ۲ نمایش داده شده است، رسم کرده‌ایم. سپس مسئله‌ای را ارائه می‌دهیم که می‌تواند در دو سطح متفاوت از دشواری بیان شود که هریک از آن‌ها برای حل، به استفاده‌های یکسان از قضیه نیاز دارند.

مسئلهٔ ۱. فرض کنید $\overline{PA}$ و $\overline{PB}$، $\overline{CD}$ مماس‌هایی بر دایره‌اند؛ همانند آنچه در شکل ۲ نشان داده شده است. نشان دهید:

$PA+PB=PD+DC+CP$



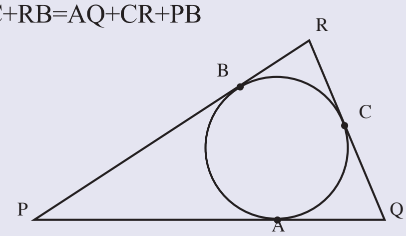
شکل ۲. اثبات PA+PB=PD+DC+CP

مسئلهٔ ۲. فرض کنید $\overline{PB}$ و $\overline{PA}$ مماس‌هایی بر دایره‌اند و Q یک نقطهٔ دلخواه روی کمان AB است. اگر CD مماسی بر دایره در نقطهٔ Q باشد، آن‌گاه محیط $\overset{\Delta}{PCD}$ ثابت است.

راه دوم برای افزایش پیچیدگی شکل ۱، افزودن یک مماس دیگر ولی در یک موقعیت متفاوت است؛ مانند آنچه در شکل ۳ می‌بینید. دو پیشنهاد، اما دوباره در سطوح کاملاً متفاوت از پیچیدگی، به سرعت به ذهن می‌رسد.

مسئلهٔ ۳. اگر A، B و C نقاط تماس اضلاع PQ، RP و QR از مثلث PQR بر دایره باشند، آن‌گاه:

PA+QC+RB=AQ+CR+PB

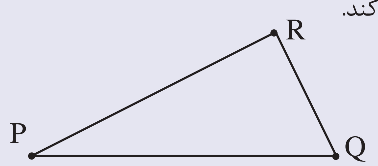


شکل ۳. اثبات PA+QC+RB=AQ+CR+PB

مسئلهٔ ۴. نقاط X، Y و Z را روی اضلاع مثلث دلخواه PQR در نظر بگیرید (شکل ۴)، به طوری که:

PX=PZ، QX=QY، RY=RZ

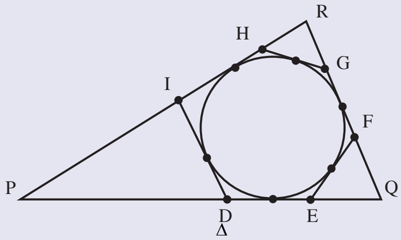
راه‌حل این است که دایره‌ای در مثلث PQR محاط کنید. شکل ۴ راه دیگری برای طرح مسئله پیشنهاد می‌دهد. شکل را ساده‌تر کنید. این ساده‌سازی، حل‌کنندهٔ مسئله را وادار می‌کند که نقاط ناپیدا را پیدا کند.



شکل ۴. تعیین X، Y و Z به‌طوری‌که PX=PZ، QX=QY، RY=RZ

راه سوم برای خلق یک مسئله، ترکیب دو یا چند نتیجه است. اینجا ما می‌خواهیم شکل ۲ و شکل ۳ را برای به دست آوردن مسئله‌های زیر ترکیب کنیم:

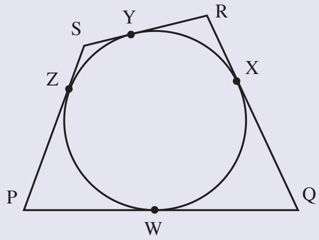
مسئلهٔ ۵. فرض کنید مثلث PQR و شش‌ضلعی DEFGHI بر یک دایره محیط شده‌اند؛ مانند آنچه در شکل ۵ نشان داده شده است. آن‌گاه مثلث PQR، محیطی برابر ترکیب محیط مثلث‌های RHG، QFE و PDI خواهد داشت. اثبات آن با سه بار به‌کار بردن مسئلهٔ ۱ حاصل می‌شود.



شکل ۵. محیط $\overset{\Delta}{PQR}$ برابر است با مجموع محیط‌های $\overset{\Delta}{RHG}$، $\overset{\Delta}{QFE}$، $\overset{\Delta}{PDI}$

روش چهارم برای طرح مسائل ریاضی تعمیم نتایج قبلی است. برای مثال، برای تعمیم مسئلهٔ ۳، با تغییر مثلث محیط بر دایره به چهارضلعی محیطی دایره شروع می‌کنیم. بدین ترتیب در شکل ۶ می‌بینیم که:

PW+QX+RY+SZ=WQ+XR+YS+ZP



شکل ۶. اثبات PQ+RS=QR+SP

در ادامه برای به دست آوردن نتایج قابل مقایسه، عبارت را به «nضلعی محیط بر دایره» تغییر می‌دهیم. با این توصیف، چهارضلعی به‌طور خاص مورد توجه است؛ چون از تساوی‌های:

PW+QX+RY+SZ=PW+WQ+RY+YS=PQ+RS

و

WQ+XR+YS+ZP=QX+XR+SZ+ZP=QR+SP

نتیجه می‌شود:

PQ+RS=QR+SP

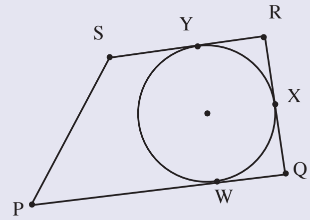
این نتیجه به‌صورت جالبی مسئلهٔ دیگری را طرح می‌کند:

مسئلهٔ ۶. اگر یک چهارضلعی بر دایره‌ای محیط شود، آن‌گاه مجموع طول‌های هر جفت از اضلاع مقابل با هم برابرند.

در تعمیم مسائل برخی مشکلات پیش می‌آیند. فرض کنید می‌خواهیم مسئلهٔ ۴ را برای چهارضلعی‌ها تعمیم دهیم.

مسئلهٔ ۷. نقطه‌های X، Y، Z و W را روی ضلع‌های چهارضلعی دلخواه PQRS چنان تعیین کنید که:

PZ=PW، QW=QX، RX=RY، SY=SZ



شکل ۷. تعیین Z,Y,X,W به‌طوری که:

$$PW+QX+RY+SZ=WQ+XR+YS+ZP$$

شکل ۷ نشان می‌دهد که مسئلهٔ ۷ همیشه قابل حل نخواهد بود. روش پنجمی برای طرح یک مسئلهٔ ریاضی، در نظر گرفتن عکس نتایج قبلی است. برای مثال عکس مسئلهٔ ۶ به قرار زیر است:

مسئلهٔ ۸. اگر مجموع طول‌های هر جفت از اضلاع مقابل یک چهارضلعی محدب برابر باشند، آن‌گاه می‌توان دایره‌ای در این چهارضلعی محاط کرد.

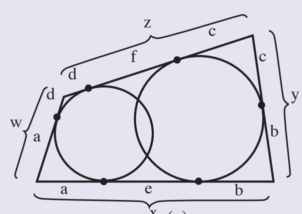
اثبات. ابتدا دایره‌ای در چهارضلعی داده شده محاط می‌کنیم، به‌طوری‌که بر سه ضلع از این چهارضلعی مماس شود. سپس دایرهٔ دیگری بر ضلع چهارم و دو تا از اضلاع قبلی مماس می‌کنیم. دو نمونه در شکل ۸ نشان داده شده‌اند. بخش‌های غیرمتداخل با a، b، c، d، e و f و اضلاع با x، y و w و z مشخص شده‌اند.

چون: $w+y=x+z$، در هریک از دو شکل خواهیم داشت:

$(a+d)+(b+c)=(a+e+b)+(c+f+d)$

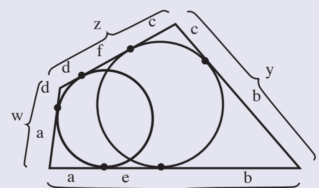
با ساده‌سازی داریم: $e+f=۰$ بنابراین: $e=f=۰$ در نتیجه دو دایره یکسان هستند که اثبات را تکمیل می‌کند.

در حل مسئلهٔ ۸، ما دو دایره را در یک چهارضلعی در نظر گرفتیم. حالا اگر دو دایره توسط یک خط مورب مجزا جدا شوند، چه پیش خواهد آمد؟ ممکن است دو دایره بر این خط مورب، مماس باشند.



(a)

شکل ۸. اثبات $e=f=۰$



(b)

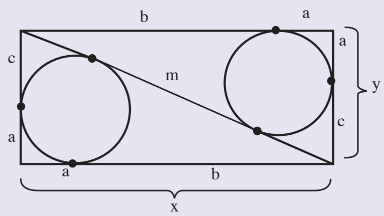
در طرح مسئله ابتدا نمی‌خواهیم خیلی کلی برخورد کنیم، بنابراین یک مستطیل مانند آنچه در شکل ۹ نشان داده شده است، با شرط $x>y$، در نظر می‌گیریم.

چون: $m+c=b$، بنابراین:

$m=b-c=(a+b)-(a+c)=x-y$

یعنی نتیجهٔ زیر را داریم:

مسئلهٔ ۹. اگر دایره‌هایی که در دو مثلث به وجود آمده، توسط یک قطر و دو ضلع مجاور یک مستطیل محاط شده باشند؛ طول قطعهٔ میانی (قطر) با تفاضل یک جفت از اضلاع مجاور مستطیل برابر است.



شکل ۹. اثبات $m=x-y$

از آنجا که از هیچ‌یک از خواص زاویهٔ قائمه در مسئلهٔ ۹ استفاده نشده است، ما می‌توانیم «متوازی‌الاضلاع» را به جای «مستطیل» برای به دست آوردن آنچه که ظاهراً یک مسئلهٔ تازه به نظر می‌رسد، جایگزین کنیم. آیا در ادامه می‌توانیم «ذوزنقه» یا بعضی چندضلعی‌های دیگر را با «متوازی‌الاضلاع» جایگزین کنیم؟ این سؤال در پیشنهاد بعدی پاسخ داده می‌شود.

مسئلهٔ ۱۰. نقطه‌های x، y، z و w طول‌های اضلاع یک چندضلعی محدب دلخواه هستند؛ همانند آنچه در شکل ۱۰ نشان داده شده است. فرمولی برای m برحسب اضلاع x، y، z و w بیابید.

با استفاده از قضیهٔ اصلی‌مان در مورد مماس‌ها داریم:

$e=f+m$، $b=c+m$

(توجه کنید که در شکل $b\geq c$ ، $e\geq f$ فرض می‌شود). این تساوی‌ها می‌توانند به‌صورت $m=e-f$ و $m=b-c$ دوباره‌نویسی شوند. بنابراین:

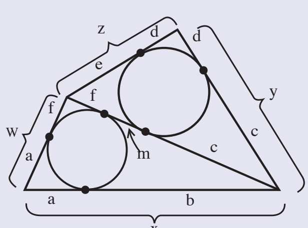
$۲m=(e-f)+(b-c)=(e+b)-(f+c)=(e+d+b+a)-(f+a+c+d)=(z+x)-(w+y)$

در نتیجه:

$$m=\frac{x+z}{۲}-\frac{w+y}{۲}$$

توجه کنید که اگر در شکل ۱۰، m برابر صفر باشد، آن‌گاه:

$w+y=x+z$



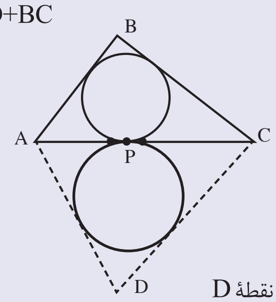
شکل ۱۰. اثبات $m=\frac{x+z}{۲}-\frac{w+y}{۲}$

بنابراین ما به‌صورت «تصادفی» مسئلهٔ پیشنهادی دیگری را کشف کرده‌ایم. چون مطالب تصادفی طبق تعریف بدون طرح قبلی هستند، ما نمی‌توانیم از این رویکردها به‌عنوان روش‌های قابل اعتماد برای طرح مسئله استفاده کنیم؛ ولی می‌خواهیم در مورد فرصت‌ها هوشیار باشیم (به‌عنوان مثال، ضدیخ به‌صورت تصادفی کشف شد). پیشنهاد ما به شرح زیر است:

مسئلهٔ ۱۱. اگر دایره‌های محاطی در دو مثلث به وجود آمده توسط قطر یک چهارضلعی بر هم مماس باشند، آن‌گاه دایره‌ای می‌تواند در این چهارضلعی محاط شود و برعکس. با ساده‌سازی شکل ۱۰ پیشنهاد دیگری خواهیم داشت:

مسئلهٔ ۱۲. اگر AC بزرگ‌ترین ضلع در مثلث ABC باشد، نقطهٔ D را بیرون مثلث ABC طوری مشخص کنید که:

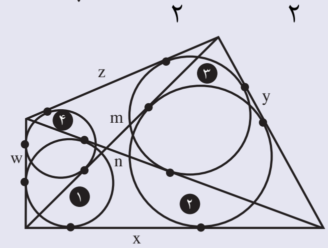
$$AB+CD=AD+BC$$



شکل ۱۱. تعیین نقطهٔ D

ابتدا دایره‌ای در مثلث ABC در شکل ۱۱ محاط می‌کنیم. فرض کنید P نقطهٔ تماس با ضلع AC باشد. در P دایره‌ای خارج از مثلث ABC، ولی مماس بر AC می‌سازیم. از A و C مماسی بر این دایره رسم می‌کنیم و آن‌ها را ادامه می‌دهیم تا در نقطهٔ D یکدیگر را قطع کنند. اگر این مماس‌ها موازی باشند، آن‌گاه دایرهٔ کوچک‌تری تضمین می‌کند که آن‌ها در نقطهٔ D یکدیگر را قطع می‌کنند؛ مانند آنچه در شکل ۱۱ نشان داده شده است، در حالی‌که دایره‌ای بزرگ‌تر به یک چهارضلعی غیرمحدب منجر می‌شود (به جز یک استثنا). در مسئلهٔ ۱۱، D یک نقطهٔ مطلوب است.

روش دیگر برای طرح مسئله، بهره‌گیری از «تقارن» در یک مسئلهٔ طرح شده است. برای مثال، در مسئله و شکل ۱۰، ما می‌توانیم از قطر دیگری از چهارضلعی استفاده کنیم (شکل ۱۲) و به‌طور مشابه $n=\frac{(x+z)}{۲}-\frac{(w+y)}{۲}$ به دست می‌آید. بدین



شکل ۱۲. اثبات m=n

ترتیب داریم: n=m. بنابراین ما به مسئله ۱۳ می‌رسیم:

مسئلهٔ ۱۳. فرض کنید ۱، ۲، ۳ و ۴ چهار دایرهٔ متداخل محاط در مثلث‌های به وجود آمده توسط قطر و دو ضلع متوالی یک چهارضلعی محدب باشند (مانند شکل ۱۲). m و n را طول قطعهٔ میانی قطر بین نقطه‌های تماس دایره‌های مماس بر همان قطر در نظر بگیرید. ثابت کنید: n=m.

همان‌طور که خواننده می‌تواند تشخیص دهد، مسائل پیچیده‌تر شده‌اند. بنابراین طراح مسئله ممکن است بخواهد در جهت دیگری کار کند. برای مثال، کدام‌یک از مسائل قبلی همتای متناظری در موارد زیر دارد؟

۱. چهارضلعی‌های غیرمحدب (مقعر)؛
۲. پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی‌های محدب و مقعر؛
۳. کره‌ها و چندوجهی‌ها؛
۴. قضیه: «اگر از نقطه‌ای خارج دایره، دو قاطع بر دایره رسم شوند، آن‌گاه حاصل یکی از این قاطع‌ها و بخش بیرونی‌اش برابر است با حاصل قاطع دیگر و بخش بیرونی‌اش.»

در طرح این مسائل ما از تکنیک‌هایی استفاده کرده‌ایم که به‌طور خاص برای حل مسئله مفید هستند؛ برای مثال: حالت‌های خاص، تعمیم، مسائل مرتبط، تقارن، معکوس‌ها، نمادگذاری مناسب، تصادف، نتایج قبلی، شکل‌های مفید، بازگشت به عقب، الگوها و غیره.

همهٔ آنچه که یک نفر نیاز دارد برای آنکه طراح مسئله شود، اول این است که حل‌کنندهٔ مسئله باشد. این دو فرایند تفکیک‌ناپذیر هستند.

پی‌نوشت

* لری هوهن، استاد ریاضی و رایانه در دانشگاه ایالتی آستین پی در کلارکس ویل است. او علاقهٔ خاصی به هندسه، تئوری عددها، حل مسئله و شجره‌نامه دارد.

منبع اصلی

Hoehn, L. (1991). Problem posing in geometry. *The Mathematics Teacher, 84*(1), 10-14.

منابع

Brown, Stephen I., and Marion I. Walter. *The Art of Problem Posing*. Philadelphia: Franklin Institute Press, 1983.
Klamkin, Murray S. "The Olympiad Corner: 80." Crux Mathematicorum 12 (December 1986): 263-81.
Polya, George. How to Solve It. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1973.

چگونه آموزش ریاضی را مسئله‌محور کنیم؟

نکتهٔ مهم همین است که فرایند آموزش نباید با «یاد دادن» آغاز شود

مجید میرزاوزیری
عضو گروه ریاضی محض و گروه مهندسی کامپیوتر دانشگاه فردوسی مشهد

مسیر تدریس می‌تواند جذاب یا خسته‌کننده باشد. این حقیقت مستقل از محتوای آموزشی است. همهٔ ما تجربهٔ یادگیری با استفاده از فناوری‌های جدید را داشته‌ایم؛ به‌ویژه در موقعیت فعلی که به‌دلیل شیوع بیماری، مجبور به استفاده از ابزارهای آموزش مجازی شده‌ایم. پس این تجربه برای ما حاصل شده است که شیوهٔ ارائهٔ موضوع می‌تواند بر میزان اشتیاق ما به یادگیری آن بسیار تأثیرگذار باشد. اگر یک سال پیش کسی قصد داشت شیوهٔ استفاده از زیرساخت‌های ارائهٔ «سمینار مبتنی بر وب»[1] را به ما یاد بدهد، برایمان ناملموس، بیهوده، خسته‌کننده و ناکارآمد جلوه می‌کرد. اما وقتی مسئلهٔ نیاز به شیوه‌های آموزش مجازی ایجاد شد، یادگیری این روش ارائه، جذاب و دوست‌داشتنی جلوه کرد.

نکتهٔ مهم همین است که فرایند آموزش نباید با «یاد دادن» آغاز شود. بحث من بر سر محتوای آموزشی نیست. با محتوایی یکسان می‌توان مسیر را از یاد دادن آغاز کرد و به حل مسئله رسید (که نامناسب است). یا اینکه از طرح مسئله شروع کرد و سپس نیاز به یادگیری را به‌وجود آورد (که می‌تواند بسیار دلپذیر باشد).

اگر فرایند یادگیری شیوه‌های آموزش مجازی با یاد دادن زیرساخت‌های ارائهٔ سمینار مبتنی بر وب در مهرماه ۱۳۹۸ آغاز می‌شد، به هیچ نقطهٔ امیدوارکننده‌ای ختم نمی‌شد. اما اکنون که مسئله نیاز به آموزش مجازی ایجاد شده، همان محتوا در مهرماه ۱۳۹۹ با اشتیاق بیشتری برای یادگیری بین معلمان مواجه شده است.

دانش‌آموزان ما نیز احساسی مشابه ما در برخورد با امر یادگیری دارند. مسیر آموزش باید با طرح مسئله آغاز شود و به یادگیری ختم شود. این نکتهٔ طلایی مستقل از آن است که محتوای آموزشی چه باشد. اجازه دهید با مثالی ساده در سطح دبستان این حقیقت را روشن‌تر سازم:

فرض کنید قرار است شما به‌عنوان یک معلم دبستان، مفهوم کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد را به شاگردان خود آموزش دهید. محتوای آموزشی مورد نظر شما کاملاً مشخص است. اکنون برای تدریس این محتوا شما می‌توانید دو رویکرد داشته باشید:

رویکرد اول این است که مفهوم کوچک‌ترین مضرب مشترک را به دانش‌آموز خود بگویید، او را با اصطلاحات کوچک‌ترین، مضرب و مشترک آشنا سازید، مثال‌های متنوعی را از محاسبهٔ ک‌م‌م برای عددهای ریز و درشت برایش روشن سازید و در نهایت با این سؤال همیشگی او مواجه شوید که؛ «بسیار خب، ولی این مطالب به چه دردی می‌خورد؟» و نهایتاً در مواجهه‌ای انفعالی در برابر این تهاجم وی پاسخ دهید: «خیلی به درد می‌خورد! می‌توانیم با این مطالبی که به شما درس دادم، ک‌م‌م دو عدد خیلی بزرگ را به دست بیاوریم!»

مطمئن باشید شاگرد شما با این پاسخ قانع نخواهد شد و جذابیتی را در یادگیری این محتوا حس نخواهد کرد.

رویکرد دوم این است که آموزش این محتوا را با مسئله‌ای آغاز کنید. بهتر است این مسئله، موضوع روز باشد و شاگرد شما در زندگی خود آن را حس کرده باشد. بیایید موضوع این روزهای جهان را به محتوای ک‌م‌م ارتباط دهیم. نباید کار

تدریس مسئله‌محور سخت نیست، اگر در جست‌وجوی داستان خوبی باشیم که حکایت یادگیری را برای شاگردانمان مرموز و ماجراجویانه کند

سختی باشد. داستان زیر را که مرتبط با یک مسئلهٔ المپیاد ریاضی قدیمی است، در نظر بگیرید.

شیوع بیماری در باغ دانایی

روزگاری در یک باغ، افراد دانشمندی زندگی می‌کردند. آن‌ها ادعا می‌کردند که می‌توانند با مطالعه و پژوهش، راه‌حل بسیاری از مشکلات را بیابند. تا اینکه روزی ویروس یک بیماری وارد باغ شد و افرادی به آن مبتلا شدند. مقاومت بدن افراد در برابر این ویروس، متفاوت بود و در نتیجه، هر کسی چند روزی به بیماری مبتلا می‌شد و پس از آن بهبود پیدا می‌کرد. مثلاً ممکن بود این دوره برای یک نفر سه روز و برای دیگری هشت روز باشد.

بنا بر یک رسم قدیمی، افراد باغ معتقد بودند: کسی که بهبود پیدا کرده، باید به عیادت کسانی برود که هنوز بیمار هستند. آن‌ها می‌دانستند که با رعایت این رسم، دوباره به بیماری مبتلا می‌شوند، اما چاره‌ای نداشتند. به هر حال یک راه و رسم اجدادی بود و نمی‌شد آن را نادیده گرفت.

به این ترتیب، مثلاً اگر فقط دو نفر در باغ حضور می‌داشتند که یکی سه‌روزه بهبود پیدا می‌کرد و دیگری هشت‌روزه، آن‌گاه اولی در روز سوم بهبود پیدا می‌کرد و با عیادت از دوستش مجدداً بیمار می‌شد و دوباره در روز ششم بهبود پیدا می‌کرد و مجدداً بیمار می‌شد. اما دوستش که در روز هشتم بهبود پیدا کرده بود، به عیادت او می‌آمد و مجدداً بیمار می‌شد و این کار ادامه پیدا می‌کرد. بنابراین اولی در روزهای

۳,۶,۹,۱۲, ...

و دومی در روزهای

۸,۱۶,۲۴,۳۲, ...

بهبود می‌یافت. مسئله این بود: با رعایت این رسم قدیمی، آیا قرار بود بیماری تا ابد ادامه پیدا کند، یا اینکه بالاخره روزی فرا می‌رسید که همهٔ ساکنان باغ بهبود پیدا کنند؟

بله! درست حدس زدید! در روز بیست‌وچهارم هر دو نفر به‌طور هم‌زمان بهبود پیدا می‌کردند و بیماری در باغ به پایان می‌رسید! آیا برای تعداد افراد بیشتر و روزهای بهبودی متفاوت هم می‌توان نظری ارائه داد؟

به این ترتیب، احتمالاً لحظه‌ای فرا می‌رسد که شاگرد شما با درک این مسئله، به مفهوم مضرب مشترک پی ببرد. اگر چنین شود، شما با شاگردتان وارد یک بازی مانند پینگ‌پونگ شده‌اید که با هر ضربه از سوی شما، پاسخی از طرف وی صادر می‌شود و در نتیجه، فرایند آموزش جذاب می‌شود.

داستان می‌تواند به این شکل ادامه پیدا کند:

برخی از دانشمندان در حال تحقیق برای یافتن واکسن بیماری بودند. اما متأسفانه واکسنی که ساخته بودند، فقط یک روز اثر داشت. علاوه‌بر آن، به قدری گران بود که فقط یک نفر می‌توانست برای یک روز از آن استفاده کند.

اکنون مسئله این بود که: آیا واکسن زدن این شخص (که به بقیه افراد فکر نمی‌کرد)، باعث می‌شد که بیماری زودتر تمام شود یا دیرتر؟ اصولاً آیا ممکن بود که بیماری تا ابد ادامه پیدا کند؟

حال این حالت را در نظر بگیرید که فقط دو نفر در باغ باشند که اولی ۴ روزه بهبود پیدا می‌کند و دومی ۱۲ روزه. اگر هیچ‌کدام از آن‌ها واکسن نزنند، در روز دوازدهم هر دو بهبود پیدا می‌کنند و بیماری به پایان می‌رسد. اما اگر اولی (بدون نگرانی از وضعیت سلامتی دوستش) واکسن گران با کارایی یک‌روزه را بخرد و در روز اول استفاده کند، آن‌گاه او در روزهای

۱, ۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ...

بهبود می‌یابد و دومی در روزهای

۱۲, ۲۴, ۳۶, ۴۸, ...

دارای سلامتی است. توجه کنید که روزهای مربوط به اولی، عددهای فرد هستند و برای دومی روزهای زوج. بنابراین هرگز بیماری به پایان نخواهد رسید.

در اینجا ممکن است شاگرد شما بپرسد: اگر اولی نگران سلامتی دوستش نیست، چرا به عیادت وی می‌رود؟ یک پاسخ می‌تواند این باشد که گرچه وی نگران سلامتی دوستش نیست، ولی بدون تفکر، از یک رسم قدیمی تبعیت می‌کند؛ بدون آنکه متوجه عواقب آن باشد!

مطمئن باشید شاگردان شما آموزشی را می‌پسندند که با مسئله‌ای آشنا شروع شود و به یادگیر ی بینجامد. همیشه برای هر محتوایی می‌توان داستانی مناسب را سر هم کرد، به‌طوری که ماجرای آموزش با مسئله آغاز شود. سعی کنیم همیشه در تدریس خود به دنبال مسئله‌های آغازگر مناسب باشیم. تدریس مسئله‌محور سخت نیست، اگر در جست‌وجوی داستان خوبی باشیم که حکایت یادگیری را برای شاگردانمان مرموز و ماجراجویانه کند.

پی‌نوشت

1. web-based seminar

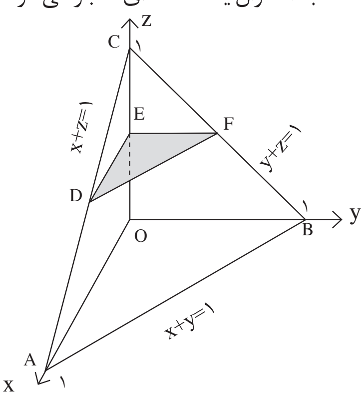
حل یک مسئله با استفاده از

انتگرال‌های یگانه، دوگانه و سه‌گانه

علی‌اکبر جاویدمهر
دبیر ریاضی استان قم

مســـئله: حجم چهاروجهی محدود به صفحه‌های مختصات و صفحهٔ $x+y+z=1$ را بیابید.

یگانه: انتگـــرال یگانه راه مناســـبی برای محاســـبهٔ حجم این چهاروجهی در اختیـــار ما قرار می‌دهد. در اینجا مســـئله را با روش «برش» (شکل ۱) که به محاسبهٔ انتگرال یگانهٔ ساده‌ای منجر می‌شود، حل می‌کنیم.



شکل ۱

در شـــکل ۱ واضح اســـت که صفحهٔ ثابت z= c (موازی صفحهٔ xoy) چهاروجهـــی OABC را در ناحیهٔ DEF قطع می‌کند و DEF یک مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الســـاقین به ضلع‌های $x=1-z$ و $y=1-z$ و مساحت $\frac{1}{2}(1-z)^2$ است.

لذا:

$$v=\frac{1}{2}\int_0^1(1-z)^2dz=-\frac{1}{6}(1-z)^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}$$

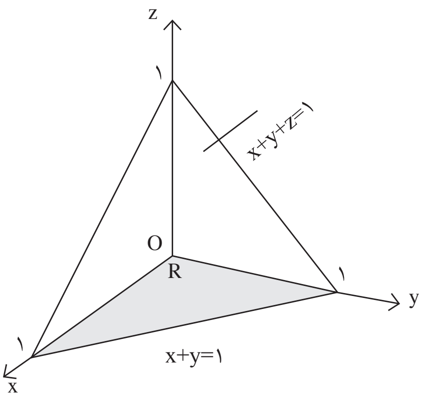
دوگانـــه: بـــا توجـــه بـــه شـــکل ۲ واضـــح اســـت کـــه:

$v=\iint_R(1-x-y)dA$ و در آن، R ناحیهٔ مثلثی‌شـــکل سایه‌دار اســـت که در صفحهٔ xoy به خط‌هـــای x=۰ و y=۰ و x+y=۱ محدود شده است و A مساحت ناحیهٔ R به ازای هر افراز ناحیهٔ R با خط‌های موازی با محورهای مختصات است.

بنابراین:

$$v=\int_0^1dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\int_0^1\left(\left[(1-x)y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2dx=-\frac{1}{6}(1-x)^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}$$



شکل ۲

تذکر: اگر f(x,y)=۱ را اختیار کنیم، در این صورت انتگرال دوگانهٔ $\iint_R dA$ دقیقاً همان مساحت ناحیهٔ مثلثی‌شکل R خواهد بود؛ زیرا:

$$\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy=\int_0^1(1-x)dx=$$

$$-\frac{1}{2}(1-x)^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

دوگانه: چهاروجهی جســـمی سه‌بعدی اســـت و از بالا به رویهٔ $z=\varphi_2(x,y)=1-x-y$ و از پاییـــن بـــه $z=\varphi_1(x,y)=0$ محدود اســـت. ناحیهٔ بســـته و محـــدود R در صفحـــهٔ xoy دارای انتگـــرال دوگانهٔ $\iint_R f(x,y)dxdy$ اســـت و می‌دانیـــم که رابطهٔ $z=\varphi_2(x,y)=1-x-y$ معادلهٔ یک سطح در دستگاه کارتزین اســـت. مرز ناحیهٔ بستهٔ R منحنی بســـته‌ای مانند C را بر این سطح مشـــخص می‌کند، به‌طوری که تصویر منحنی C همان مرز R است.

بنابراین:

$$v=\int_0^1\int_0^{1-x}(\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y))dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(1-x-y)dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

سه‌گانه: با در نظر گرفتن شکل ۲ فرض کنیم: $f(x,y,z)=۱$
و $z=f(x,y)=۱-x-y$

$$v=\int_۰^۱\int_۰^{۱-x}\int_۰^{۱-x-y}dz\,dy\,dx,\ \int_۰^{۱-x-y}dz=۱-x-y$$

$$\Rightarrow \int_۰^{۱-x}(۱-x-y)dy=(y-xy-\frac{۱}{۲}y^۲)\Big|_۰^{۱-x}$$

$$=\frac{۱}{۲}x^۲-x+\frac{۱}{۲}\Rightarrow v=\int_۰^۱(\frac{۱}{۲}x^۲-x+\frac{۱}{۲})dx\Rightarrow$$

$$v=(\frac{۱}{۶}x^۳-\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۲}x)\Big|_۰^۱=\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۶}$$

یا:

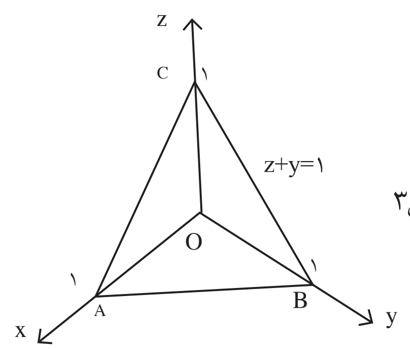
$$v=\int_۰^۱\int_۰^{۱-x}\int_۰^{۱-x-y}dx\,dy\,dz=\int_۰^۱(\int_۰^{۱-x}(۱-x-y)dy)dx$$

$$=\int_۰^۱\left[(y-xy-\frac{۱}{۲}y^۲)\Big|_۰^{۱-x}\right]dx$$

$$\Rightarrow\quad v=\int_۰^۱(\frac{۱}{۲}-x+\frac{۱}{۲}x^۲)dx=$$

$$(\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۶}x^۳)\Big|_۰^۱=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

عموماً محاسبهٔ انتگرال ســه‌گانه به محاسبهٔ سه انتگرال ساده و متوالی و یا یک انتگرال دوگانه و یک انتگرال ساده منجر می‌شود.



شکل۳

روش چهارم:

بــا توجه به شــکل ۳: $A(۱,۰,۰),\ B(۰,۱,۰),\ C(۰,۰,۱)$ کنج OABC قائمه اســت و صفحهٔ مثلث ABC با معادلهٔ x+y+z=۱ قاعدهٔ هرم (چهاروجهی) را می‌سازد. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و اندازهٔ هر ضلع آن $BC=AC=AB=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$ (یا $AB=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۰-۱)^۲+(۰-۰)^۲}=\sqrt{۲}$) است.

اگــر h را ارتفاع هرم فرض کنیم کــه از رأس O بر قاعده (یعنی مثلث ABC) رسم می‌شود، اندازهٔ فاصلهٔ O از صفحهٔ مثلث AB مقدار h خواهد بود.

$$O(۰.۰.۰)\Rightarrow h=\frac{|۰+۰+۰-۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲+۱^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳},$$

ارتفاع مثلث ABC $h'=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}, a=\sqrt{۲}$

$$h'=\frac{\sqrt{۲}\sqrt{۳}}{۲},\ S_{ABC}=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow S_{ABC}=$$

$$\frac{۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۲},\ V=\frac{۱}{۳}h.s_{ABC}\Rightarrow V=\frac{۱}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱}{۶}$$

روش پنجم، استفاده از ضرب خارجی بردارها:

حجم هرم OABC که کنج OABC قائمه نیز هست (در حالت کلی لازم نیست قائمه باشد)، با استفاده از حجم متوازی‌السطوح نیز به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{OA}=(۱,۰,۰),\overrightarrow{OB}=(۰,۱,۰),\overrightarrow{OC}=(۰,۰,۱),$$

$$\overrightarrow{AB}=(-۱,۱,۰),\overrightarrow{AC}=(-۱,۰,۱)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-۱&۱&۰\\-۱&۰&۱\end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(۱,-۱,۱)$$

حجم متوازی‌السطوح $V_۱=\left|\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\right|$

$$=|۱(۱)+۰(-۱)+۰(۱)|=۱$$

با توجه به اینکه:

$$\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}.\ \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC})،$$

$\overrightarrow{V_۱}$ را می‌توان از دترمینان زیر هم حساب کرد:

$$v_۱=\left|\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}\right|=\begin{vmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{vmatrix}=۱\Rightarrow$$

$$v=\frac{۱}{۶}v_۱\Rightarrow v=\frac{۱}{۶}\times۱=\frac{۱}{۶}$$

تمرین: حجم جسم محدود به رویه‌های زیر را حساب کنید.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱,\ x=۰,\ y=۰\ ,\ z=۰$$

جواب: $v=\frac{abc}{۶}$

منبع

حســاب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی جدید، سیلورمن، جلد سوم: کاربرد انتگرال‌های مضاعف، ص ۱۰۱۱ و ص ۱۰۵۸.

بررسی فصل مشتق از کتاب حسابان ۲ از نظر انطباق با سند برنامهٔ درسی ملی

یاسمن محمدی
دانشجوی کارشناسی آموزش ریاضی دانشگاه فرهنگیان
پردیس شهید هاشمی‌نژاد مشهد
سمیه قبدیان
کارشناسی ارشد ریاضی و دبیر ریاضی ناحیه دو مشهد

چکیده

در برنامهٔ درســـی ملی جمهوری اســـلامی ایران، اصول ناظر بر برنامه‌های درسی، ۱۱ مورد ذکر شده اســـت: دین‌محوری، تقویت هویت ملی، اعتبار نقش یادگیرنده، اعتبار نقش مرجعیت معلم، اعتبار نقش پایـــه‌ای خانواده، جامعیت، توجه بـــه تفاوت‌ها، تعادل، یادگیری مادام‌العمر، جلب مشـــارکت و تعامل، و بالاخره یکپارچگی و فراگیری. در این نوشته، به برخی از این اصول در یک فصل از کتاب درسی حسابان۲ (فصل مشـــتق) توجه کرده و مصداق‌هایی از این اصول را در فصل مورد بحث از کتاب درســـی آورده‌ایم. زیرا در نظام‌های آموزشی متمرکز، آنچه که مبنای عمل و مرجع تمام معلمان در کلاس درس محسوب می‌شود، کتاب درسی است و قبل از هر اقدامی در راستای سند تحول بنیادین آموزش‌وپرورش، لازم است محتوای کتاب و فرایندهای آموزشی به کار گرفته شده در آن، منطبق با سندهای بالادستی باشد. در این مقاله محتوای فصل مشـــتق از چاپ اول کتاب درسی حسابان ۲ (۱۳۹۷) با توجه به ۴ اصل از ۱۱ اصل بیان شده در سند برنامهٔ درسی مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده شد که این اصول مدنظر نویسندگان کتاب بوده است و به آن‌ها توجه کافی مبذول داشته‌اند.

کلیدواژه‌ها: برنامهٔ درســـی ملی جمهوری اســـلامی ایران، اصول ناظر بر برنامه‌های درســـی، کتاب حسابان ۲

مقدمه

«گذشـــت زمان، افزایش دانش فنی در زمینهٔ طراحی و تولید برنامهٔ درســـی و انباشـــت تجربیات مفید و انجام پژوهش‌هـــا و مطالعات داخلی و تطبیقی، ضرورت و امکان تدوین برنامهٔ راهبردی و جامع را برای ســـامان‌دهی بهینهٔ برنامهٔ درسی و تولید محتوای آموزشی در دوره‌ها و سطوح متفاوت یادگیری به ضرورت انکارناپذیر بدل کرده است (از پیشگفتار برنامهٔ درسی ملی). به همین لحاظ، تدوین سند تحول بنیادین آموزش‌وپرورش به مثابه قانون اساسی برای تحولات همه‌جانبه در دستور کار قرار گرفت و به تبع آن، تدوین سند برنامهٔ درسی ملی به‌عنوان یکی از زیرنظام‌های اصلی این ســـند به منزلهٔ نقشهٔ جامع یادگیری، زمینهٔ ایجاد تحول همه‌جانبه، گسترده و عمیق در مفاهیم و محتوای آموزشـــی را فراهم آورد که برنامهٔ درســـی ریاضیات مدرســـه‌ای نیز از این قاعده مستثنا نیست. در این راستا، بررسی

تطبیقی محتوای کتاب‌های درسی ریاضی با اسناد بالادستی اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند.

اصول ناظر بر برنامهٔ درسی

در سند برنامهٔ درسی ملاک‌ها و معیارهایی برای برنامهٔ درسی و محتوای آموزشی آن بیان شده‌اند که عبارت‌اند از: ۱. دین‌محوری؛ ۲. تقویت هویت ملی؛ ۳. اعتبار نقش یادگیرنده؛ ۴. اعتبار نقش مرجعیت معلم؛ ۵. اعتبار نقش پایه‌ای خانواده؛ ۶. جامعیت؛ ۷. توجه به تفاوت‌ها؛ ۸. تعادل؛ ۹. یادگیری مادام‌العمر؛ ۱۰. جلب مشارکت و تعامل؛ ۱۱.یکپارچگی و فراگیری.

این اصول به‌طور هماهنگ و درهم‌تنیده در سیاست‌گذاری برنامه‌ریزی و مدیریت برنامه‌های درسی و تربیتی از سطح ملی تا سطح مدرسه مورد نظر است (سند برنامهٔ درسی ملی، صفحه‌های ۹، ۱۰ و ۱۱). در این نوشته، چهار مورد از این اصول، یعنی موارد ۲، ۳، ۵ و ۸، از فهرست فوق بررسی و مصداق‌های آن‌ها در فصل «مشتق» کتاب حسابان ۲ بیان می‌شود. (تصویر ۱)

تقویت هویت ملی

برنامه‌های درسی و تربیتی باید زمینهٔ تقویت و پایداری هویت ملی را با تأکید بر تعمیق باورها و ارزش‌های اسلامی، فرهنگ و تمدن اسلام و ایران، زبان و ادبیات فارسی، ارزش‌های انقلاب اسلامی، میهن‌دوستی، وحدت و انسجام فرهنگی، استقلال ملی و هم‌بستگی اسلامی فراهم آورد (سند برنامهٔ درسی ملی، صفحهٔ ۹).

در این فصل، تصویرها و مطالب در ارتباط کامل با فرهنگ و تمدن اسلامی ایرانی هستند. آوردن تصویرهایی از پیشرفت کشورمان در صنعت راه‌سازی و پایگاه فضایی **امام خمینی (ره)**، به دانش‌آموزان حس افتخار و شعف می‌دهد و برایشان امیدبخش و شورانگیز است. نمونه‌هایی از این تصویرها را ملاحظه می‌کنید:

برنامه‌های درسی و تربیتی باید زمینهٔ تقویت و پایداری هویت ملی را با تأکید بر تعمیق باورها و ارزش‌های اسلامی، فرهنگ و تمدن اسلام و ایران، زبان و ادبیات فارسی، ارزش‌های انقلاب اسلامی،میهن‌دوستی، وحدت و انسجام فرهنگی،استقلال ملی و هم‌بستگی اسلامی فراهم آورد

تصویر ۱: کتاب: حسابان ۲، صفحهٔ ۷۱

تصویر ۲: کتاب: حسابان ۲، صفحهٔ ۱۰۲

همچنین، آمدن تصویرهای زیبا از طبیعت ایران به تقویت هویت ملی و میهن‌دوستی در دانش‌آموزان منجر می‌شود. (تصویر ۲ و ۳)

تصویر ۳: کتاب: حسابان ۲، صفحهٔ ۸۳

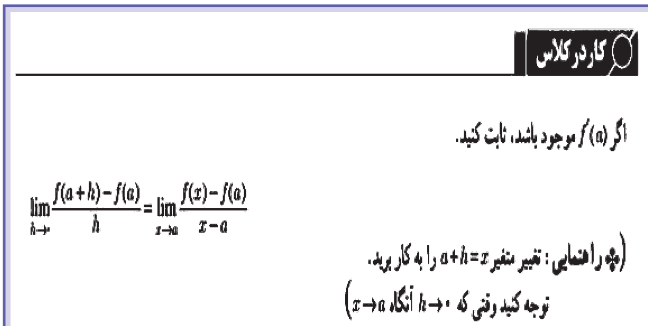
اعتبار نقش یادگیرنده

برنامه‌هـــای درســـی و تربیتی باید به نقش فعال، داوطلبانه و آگاهانهٔ دانش‌آمـــوز در فرایند یاددهی یادگیری و تربیت‌پذیری توجه کند و زمینهٔ تقویت و توســـعهٔ روحیهٔ پرسشـــگری، پژوهشگری، خلاقیت و کارآفرینی را در وی فراهم سازد (سند برنامهٔ درسی ملی، صفحهٔ ۹).

در این جهت، فصل مشـــتق حســـابان ۲ به گونه‌ای طراحی شده که شـــوق و علاقه به آموختن را در دانش‌آموز برمی‌انگیزد. چرا که در این فصل از ذکر مثال‌ها و تمرین‌های خشـــک و بی‌محتوا پرهیز شـــده اســـت و بسیاری از تمرین‌های این فصل به کاربردهای مشـــتق و همچنین رابطهٔ آن با محیط پیرامون اشـــاره دارد. از این نظر، میل و رغبت به آموختن را در آنان ایجاد می‌کند. (برای مثال، صفحه‌های ۱۰۳، ۱۰۵، ۱۰۷ و ...).

در فراینـــد بیان درس در کتاب، به‌طور ویژه به اهمیت فعال بودن دانش‌آموز حین درس و فرایند تدریس توجه شده است. مثلاً، برای تجربهٔ لذت کشف کردن و همچنین تمرین کار گروهی و برقراری تعامل با سایر دانش‌آموزان، در بعضی از مطالب مانند فعالیت صفحه‌های ۸۴ و ۸۵، از دانش‌آموزان خواســـته شده است که ابتدا خودشان برای یافتن پاســـخ ســـؤال تلاش کنند و سپس حاصل کار خود را با کار دوستانشـــان مقایسه کنند. این امر از یک طرف کلاس را از معلم‌محور بودن و تدریس یک طرفه به سمت دانش‌آموز محوری هدایت می‌کند، و از طرف دیگر باعث می‌شود، دانش‌آموز پاسخ دوستانش را بشنود و با دوستانش در آن مورد صحبت کند که خود تمرینی برای افزایش مهارت فرایندی گفتمان ریاضی است.

طراحی این فصل در بسیاری از مراحل به گونه‌ای است که دانش‌آموز غالباً خودش باید به دنبال پاسخ سؤال‌ها باشـــد. اثبات‌ها نیز طوری طراحی شـــده‌اند که در اغلب موارد، تمام مراحل آن‌ها مســـتقیماً ارائه نمی‌شـــوند، بلکه دانش‌آموز وادار می‌شود در مورد آن‌ها بیندیشد و اثبات را کامل کند. کلاً بخش‌های متفاوت فصل، به دانش‌آموزان در حد راهنمایی کمک می‌کند، به‌طوری که جرقه‌ای در ذهن دانش‌آموزان ایجاد شود. یک نمونهٔ مصداق این مطلب را می‌توان در کار در کلاس ابتدای صفحهٔ ۸۰ مشاهده کرد. (تصویر/۴)



کار در کلاس

اگر $f'(a)$ موجود باشد، ثابت کنید.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(راهنمایی: تغییر متغیر $x=a+h$ را به کار برید. توجه کنید وقتی که $h\to 0$ آنگاه $x\to a$)

تصویر ۴: کتاب: حسابان ۲، صفحهٔ ۸۰

برنامه‌های درسی و تربیتی باید به نقش فعال، داوطلبانه و آگاهانهٔ دانش‌آموز در فرایند یاددهی یادگیری و تربیت‌پذیری توجه کند و زمینهٔ تقویت و توسعهٔ روحیهٔ پرسشگری، پژوهشگری، خلاقیت و کارآفرینی را در وی فراهم سازد

یکی از مهم‌ترین هدف‌های آموزش ریاضی، آموزش و همچنین تمرین و تقویت انواع تفکر است. در این راستا در بعضی از مراحل، مثلاً صفحهٔ ۷۶(تصویر ۵) از دانش‌آموزان خواسته شده است که پاسخ سؤال را حدس بزنند. این کار موجب تفکر خلاق دانش‌آموزان می‌شود.

برنامه‌های درســـی و تربیتی باید زمینهٔ کسب شایستگی‌ها و مهارت‌های لازم برای استمرار و معنادار شدن یادگیری و پیوستگی تجربه‌های یادگیری را در زندگی برای دانش‌آموزان تأمین کند

تصویر ۵: کتاب: حسابان ۲، صفحهٔ ۷۶

بازه $[a,b]$	شیب خطی که از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌گذرد. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
$[۲,۲/۴]$	$\frac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=$ ______ $=$ ______ $=۵/۶$
$[۲,۲/۳]$	______ $=$ ______ $=$ ______ $=$
$[۲,۲/۲]$	$\frac{f(۲/۲)-f(۲)}{۲/۲-۲}=\frac{۱۷/۱۶-۱۶}{۰/۲}=\frac{۱/۱۶}{۰/۲}=۵/۸$
$[۲,۲/۱]$	$\frac{f(۲/۱)-f(۲)}{۲/۱-۲}=\frac{۱۶/۵۹-۱۶}{۰/۱}=\frac{۰/۵۹}{۰/۱}=۵/۹$
$[۲,۲/۰۱]$	$\frac{f(۲/۰۱)-f(۲)}{۲/۰۱-۲}=\frac{۱۶/۰۵۹۹-۱۶}{۰/۰۱}=\frac{۰/۰۵۹۹}{۰/۰۱}=۵/۹۹$
$[۲,۲/۰۰۱]$	$\frac{f(۲/۰۰۱)-f(۲)}{۲/۰۰۱-۲}=\frac{۱۶/۰۰۵۹۹۹-۱۶}{۰/۰۰۱}=۵/۹۹۹$

همچنین در بعضی قسمت‌ها، مانند فعالیت صفحهٔ ۸۴، از دانش‌آموزان می‌خواهد جواب‌های خود را با جواب‌های دیگران مقایسه کنند. بدین ترتیب دانش‌آموزان را به سوی تفکر انتقادی سوق می‌دهد.

تعادل

برنامه‌های درســـی و تربیتی باید زمینهٔ کســـب شایســـتگی‌ها و مهارت‌های لازم برای استمرار و معنادار شدن یادگیری و پیوستگی تجربه‌های یادگیری را در زندگی برای دانش‌آموزان تأمین کند (سند برنامهٔ درسی، صفحهٔ ۱۰)

در این فصل می‌توان نشانه‌ای از تعادل در برنامهٔ درسی و پایبندی به اهداف و محتوا را مشاهده کرد. برای مثال، در صفحه‌های ۸۹ و ۹۳ (تصویر ۶) حد و مرز ارزشیابی و هدف کتاب به‌طور دقیق مشخص شده است. این امر باعث آگاهی دانش‌آموزان و معلم می‌شود.

۱ــ همکاران محترم توجه دارند که ذکر مثال‌های پیچیده در این قسمت در زمره اهداف کتاب نیست.

کتاب: حسابان ۲، صفحهٔ ۸۹

* در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $\sqrt{f(x)}$ و $\sqrt[3]{f(x)}$ که $f(x)$ گویاست، موردنظر است، رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.

کتاب: حسابان ۲، صفحهٔ ۹۳

همچنین، مباحث این فصل به‌طور کاملاً قابل فهم هستند؛ به‌گونه‌ای که از تمرین‌ها و مثال‌های ساده شروع شده و کم‌کم به سمت مسائل اصلی پیش رفته‌اند. در این فصل از ذکر مفاهیم مجرد، به گونه‌ای که برای دانش‌آموز غیرقابل فهم باشـــد، پرهیز شده است. به‌علاوه، ســـاحت‌های مختلف نیز در نظر گرفته شده‌اند. مثلاً مفاهیم مهم در کادرهای سبز رنگ قرار گرفته‌اند که از نظر روان‌شناسی رنگ سبز باعث آرامش می‌شود. پس می‌توان گفت: در این فصل از نظر ساحت روانی تدابیری اندیشیده شده است.

اعتبار نقش پایه‌ای خانواده

برنامه‌های درسی و تربیتی باید ضمن تقویت بنیان خانواده و تحکیم مناسبات خانوادگی و صلهٔ رحم، زمینهٔ کسب شایســـتگی‌ها و مهارت‌های لازم را برای تشکیل و مدیریت خانواده مبتنی بر ارزش‌ها و معارف الهی و تعمیق آداب و سبک زندگی اسلامی - ایرانی دانش‌آموزان فراهم آورند (سند برنامهٔ درسی ملی، صفحهٔ ۱۰).

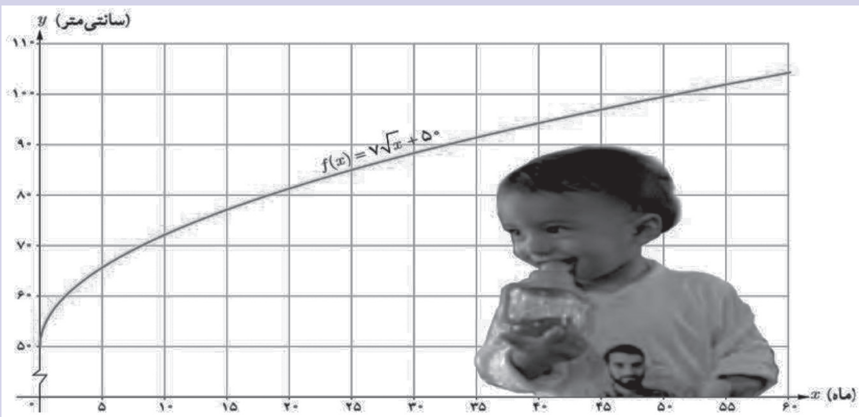
با توجه به شـــرایط کنونی و تهاجم فرهنگی که بر کشـــور ما ســـایه افکنده اســـت، اهمیت توجه به این اصل دو چندان می‌شـــود. میل به تشـــکیل خانواده و سپس حفظ بنیان آن و اهمیت فرزندآوری یکی از مهم‌ترین دغدغه‌های فرهنگی کشـــور اســـت. در این کتاب به صورت بسیار هوشمندانه، این نکته مورد توجه قرار گرفته و با ذکر مثال‌هایی توجه دانش‌آموزان به این موارد جلب شده است. از جمله می‌توان به صفحهٔ ۱۰۶ کتاب که به مبحث نرخ باروری در کشورمان پرداخته است، اشاره کرد (تصویر ۷).

خواندنی

نرخ باروری در ایران در سال‌های ۱۳۶۰ تا ۱۳۶۵ به حدود ۶/۵ فرزند رسید. با توجه به اینکه کشورمان امکانات لازم برای چنین رشد جمعیت بالایی را دارا نبود، سیاست‌های کاهش جمعیت و عوامل دیگر باعث شد که نرخ باروری تا سال ۱۳۸۵ به ۱/۹ کاهش یابد. بررسی‌ها نشان می‌دهند که کاهش باروری در ایران بزرگ‌ترین و سریع‌ترین کاهش باروری ثبت شده بود. کارشناسان معتقدند که باید سیاست‌های کاهش رشد جمعیت پس از کاهش نرخ باروری به حدود ۲/۵ فرزند متوقف می‌شد. کاهش رشد جمعیت مشکلات فراوانی نظیر کاهش نیروی کار و بحران سالمندی را درپی خواهد داشت. با ابلاغ سیاست‌های کلی «جمعیت» توسط رهبر معظم انقلاب اسلامی در سال ۱۳۹۳، و تغییر برنامه‌های وزارت بهداشت، براساس نتایج سرشماری عمومی نفوس و مسکن سال ۱۳۹۵، نرخ باروری به حدود ۲/۰۱ افزایش یافته است. با این حال نگرانی‌های مربوط به احتمال کاهش بیش از حد رشد جمعیت در سال‌های ۱۴۲۵ تا ۱۴۳۰ تأکید می‌کند که این سیاست‌ها تا دست‌یابی کامل به اهداف تعیین شده باید دنبال شود.

کتاب حسابان ۲، صفحهٔ ۱۰۶

همچنین در صفحهٔ ۱۰۵ برای عنوان کردن مثالی از نرخ رشـــد، از نمودار تابع قد متوســـط کودکان برحســـب سانتی‌متر استفاده شده است. (تصویر ۸)



کتاب حسابان ۲، صفحهٔ ۱۰۵

یکی از مهم‌ترین هدف‌های آموزش ریاضی، آموزش و همچنین تمرین و تقویت انواع تفکر است

نتیجه‌گیری

در کتاب‌های جدیدالتألیف، به اســـناد بالادســـتی آموزش‌وپرورش توجه زیادی شـــده است؛ هر چند، هنوز هم مواردی وجود دارند که به بررسی و اصلاح احتیاج دارند و می‌توانند با اصول و استانداردهای موجود، انطباق بیشتری پیدا کنند و از نظر محتوا، متنوع‌تر و غنی‌تر شـــوند. با بررســـی‌های انجام شده در این مقاله مشخص می‌شود که در تألیف این فصل از کتاب، معیارها و ملاک‌های ســـند برنامهٔ درســـی، به خصوص در قسمت اعتبار نقش یادگیرنده و اهمیت به نقش پایه‌ای خانواده، به خوبی مورد توجه قرار گرفته اســـت که مصداق‌های آن ذکر شـــد. در پایان قابل ذکر اســـت، متن حاضر تنها به یک فصل از کتاب درسی پرداخته و در آن چهار اصل از ۱۱ اصل ناظر بر برنامه‌های درسی، مورد تأکید در برنامهٔ درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، بررسی شده است. پژوهشگران علاقه‌مند می‌توانند جایگاه و مصداق‌های اصول دیگر را در این فصل از کتاب حســـابان ۲ و البته در دیگر فصل‌های آن و همچنین در دیگر کتاب‌های درسی ریاضی مورد مطالعه قرار دهند.

منابع

۱. ریحانی، ابراهیم و همکاران (۱۳۹۵). *تحلیل خط‌مشی‌ها، اسناد مصوب، پژوهش‌هـــا و منابع معتبر مرتبط با حوزهٔ یادگیری ریاضی*. واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

۲. داورزنی محمود و همکاران (۱۳۹۷). *حسابان ۲*. پایهٔ دوازدهم، دورهٔ دوم متوسطه. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش. تهران. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۳. گویا، زهرا (۱۳۷۸). «ســـیر *تحول و شکل‌گیری برنامهٔ درسی آموزش متوسطه در ایران*». فصلنامهٔ تعلیم و تربیت. شمارهٔ ۵۷.

۴. راهنمای عمل، مجموعه مستندات تحول بنیادین در آموزش‌وپرورش: تحول محتوا و استقرار ساختار ۳-۳-۶ (۱۳۹۰)، شمارهٔ ۱.

۵. دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درســـی (۱۳۸۹). راهنمای برنامهٔ درســـی ریاضی (اول ابتدایی تا آخر متوسطه). پیشنهادی و غیرقابل استناد.

توجه: مقالهٔ حاضر را سردبیر مجله، آقای دکتر رضا حیدری قزلجه پس از تصحیح، حذف و اضافاتی چند، بازنویسی کرده است.

تجربه تدریس

تدریس در کانکس با جئوجبرا

مسلم خدامی
دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید باهنر کرمان و دبیر ریاضی استان کرمان

پس از دانش‌آموختگی از دانشگاه فرهنگیان، اولین سال خدمتم در سن ۲۳ سالگی از مهرماه ۱۳۹۶، در یکی از دبیرستان‌های شهر «زهکلوت» آغاز شد. زهکلوت از جنوبی‌ترین مناطق استان کرمان است که شغل اغلب مردم آن دام‌پروری و کشاورزی است. علاوه بر دوری از مرکز استان، در آن زمان خشک‌سالی‌های پی‌درپی نیز بر محرومیت‌های منطقه افزوده بود، به‌طوری که مدارس نیز از ترکش‌های این محرومیت در امان نبودند.

من تدریس درس‌های ریاضی پایه‌های دهم و یازدهم رشته‌های علوم تجربی و علوم انسانی، و همچنین درس ریاضی پایهٔ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ انسانی این مدرسه را بر عهده داشتم. همچنین، به دلیل تکمیل‌نشدن ساعات موظف تدریسم، درس تربیت‌بدنی پایه‌های دهم و یازدهم این مدرسه هم با من بود. حضور هم‌زمان من به‌عنوان معلم ریاضی و تربیت‌بدنی، تعداد کم دانش‌آموزان، و نیز اختلاف سنی نزدیکم با دانش‌آموزان، عواملی بودند که باعث شدند از همان ابتدای سال، رابطهٔ دوستانه و خوبی را با آن‌ها برقرار کنم؛ هرچند که خونگرمی و بزرگ‌منشی مردم این منطقه و احترام آن‌ها به معلمان، غیرقابل وصف است.

کلاس دهم تجربی هفت دانش‌آموز داشت. موضوع فصل پنجم کتاب آن‌ها تابع بود. در بخش‌های اولیهٔ فصل، دانش‌آموزان باید با مفهوم تابع، و بازنمایی‌های متفاوت و مفاهیم اولیهٔ آن آشنا می‌شدند. بعد از ارائهٔ مطالب اولیه، در هفتهٔ سوم به سراغ رسم توابع با استفاده از انتقال در بخش سوم این فصل رفتیم.

در مورد وضعیت مدرسه و درجهٔ محرومیت آن باید بگویم: کلاس درس مورد بحث، یک کانکس در حیاط مدرسه بود که اوایل صبح بسیار سرد و هنگام ظهر بسیار گرم می‌شد. کل امکانات کلاس عبارت بود از تخته وایت‌بردی پر از خطوخش که روی دو صندلی قرار داشت، به همراه دو عدد ماژیک، یک صندلی برای دبیر و تعدادی صندلی سالم یا بدون‌دسته برای دانش‌آموزان. بعد از تدریس مبحث رسم توابع با استفاده از انتقال، هنگامی که سؤال‌هایی را روی تخته نوشتم، انتظار داشتم که تعدادی از دانش‌آموزان به این سؤال‌ها پاسخ دهند که این‌گونه نشد. پرسیدم: «خب بچه‌ها، الان نمودار تابع $f(x)=(x-۲)^۲+۳$ را چطوری رسم کنیم؟»

انتظار داشتم که دست‌کم یک نفر بگوید نمودار $y=x^۲$ را دو واحد به راست می‌بریم و سپس شکل حاصل را سه واحد به بالا منتقل می‌کنیم. اما آنچه که مشاهده کردم، سردرگمی دانش‌آموزان بود. آن‌ها عددهای ۲ و ۳ را در سؤال مشاهده می‌کردند و متوجه بودند که تابع باید به اندازهٔ ۲ و ۳ واحد به سمت راست یا چپ و بالا یا پایین برود، اما نمی‌دانستند کدام جهت را به چه اندازه انتخاب کنند. به همین دلیل یک‌بار دیگر مطالب را مرور کردیم و توضیح دادم. هنگام توضیح دوبارهٔ درس، به فکر نرم‌افزار «جئوجبرا» افتادم. از دورهٔ دانشجویی، نسخهٔ اندروید جئوجبرا را روی تلفن همراهم نصب کرده بودم.

بعد از آنکه مرور مطالب به پایان رسید، از شاگردانم خواستم که صندلی‌های خود را نزدیک بیاورند. بدون آنکه توضیحی در مورد نحوهٔ کارکرد نرم‌افزار بدهم، تابع روی تخته را با متغیرهای a و b و تعریف آن‌ها به‌عنوان لغزنده، در جئوجبرا رسم کردم. با متحرک‌کردن لغزندهٔ اول و سپس متحرک‌سازی لغزندهٔ دوم، دانش‌آموزان نحوهٔ رسم تابع را به ازای مقادیر متفاوت a و b به روشنی مشاهده کردند. چند بار این‌کار را تکرار کردم و مسیر طی‌شده را روی نمودار و چرایی آن را توضیح دادم. سپس تمرین دیگری روی تخته نوشتم. این‌بار یکی از دانش‌آموزان، به نام **میلاد**، همان ابتدای کار پاسخ صحیح داد و بقیه نیز پاسخ او را تأیید کردند. در این زمان، برای کسب اطمینان پرسیدم: «میلاد مطمئنی که باید این مقدار به چپ برویم؟»

او مطمئن بود، اما بقیهٔ کلاس به تأیید خود و به پاسخ میلاد شک کردند. اندکی که گذشت، دانش‌آموزان به دو گروه تقسیم شدند: تعدادی از آن‌ها روی پاسخ اولیهٔ خود (پاسخ میلاد) ایستادند و تعدادی دیگر نیز اعلام کردند که قادر به پاسخ‌گویی نیستند و نمی‌توانند نمودار را رسم کنند. اما همهٔ دانش‌آموزان به اتفاق تأکید داشتند که یک‌بار دیگر روی تلفن همراه شکل تابع را ببینند.

هادی با ذکر مدل گوشی خود پرسید: «آقا این برنامه روی گوشی ما هم نصب می‌شود؟»

وقت کلاس به پایان رسیده بود. به هادی گفتم: «با مدیر مدرسه صحبت می‌کنم که در صورت موافقت، فردا گوشی‌ات را به مدرسه بیاوری تا نرم‌افزار را برایت نصب کنم.» وقتی موضوع را با مدیر در میان گذاشتم، ابتدا خیلی راضی به این کار نبود. اما با توضیح جنبه‌های آموزشی نرم‌افزار، ایشان موافقت کرد.

مدیر فردی با سابقه، بومی زهکلوت و دارای مدرک کارشناسی ارشد بود. ابتدا فکر کردم که

دلیل مخالفت اولیهٔ ایشـــان با این درخواست، کم‌تجربگی من و اعتماد کافی نداشتن ایشان به یک معلم سال اولی است. اما ایشان روز بعد، دلیل مخالفت خود را گفت. تنبیه بدنی شدید یک دانش‌آموز و پخش‌شدن فیلم آن در فضای مجازی، اتفاقی ناگوار بود که در سال ۱۳۹۵ در همان شهرستان افتاده بود. همین موضوع دلیل بالابودن حساسـیت‌ها نسبت به حضور تلفن همراه در مدرسه بود.

جلسهٔ بعد هادی تلفن همراه خود را آورد. در آن کلاس، فقط یک نفر تلفن همراه داشت. وقتی وارد کلاس شدم، تلفن همراه روی دسته صندلـی بود و اولین جمله‌ای که او گفت، این بود: «آقا برنامه را برای ما نصب می‌کنید؟»

درون کانکـس همـهٔ هشـت نفـر، صندلی‌هایمان را به هم نزدیک کردیم. نرم‌افزار را برای هادی نصب کـردم و در مورد نرم‌افزار توضیح دادم. نحوهٔ تعریف توابع را شرح دادم و در مورد تعریف لغزنده برای متغیرها، توضیحات و مثال‌هایی آوردم و نمونه‌هایی را نشان دادم. با هر دو دســتگاه تلفن همــراه که در اختیار داشتیم، شروع به رسم انواع توابع، مانند توابع همانی، درجهٔ دوم و قدر مطلق کردیم.

در همین هنگام مدیر مدرســه نیز وارد کلاس شـد. ایشـان از دقایقی قبل شـاهد فعالیت‌های ما در کلاس بود و هنگامی که دید ما تنها دو تلفن همراه در اختیار داریم، دستگاه خودش را نیـز در اختیار دانش‌آموزان کلاس گذاشـت. با هم به بیرون از کانکس رفتیم و دلیـل مخالفت اولیهٔ روز قبل خودش را برایم توضیح داد. چند دقیقه‌ای در بیرون از کلاس صحبت کردیم. هنگامی که به محیط کلاس بازگشـتم، دانش‌آموزان هنوز مشـغول رسم توابع بودنـد. نکتهٔ جالب اینکه با تعریف یک تابع به شکل ax^2، یکی از دانش‌آموزان کشف کرده بود کـه به ازای مقادیر منفی a، نمودار تابع رو به پایین می‌شود. این مطلب را با بقیهٔ دانش‌آموزان نیز به اشتراک گذاشته بود.

این تجربه در کلاسی که کمترین بهره را از امکانـات روز دنیا داشـت، رقم خورده بود. تنها فناوری مورد اسـتفادهٔ ما، گوشی تلفـن همراهی بود کـه روی آن جئوجبرا نصب شده بود. اشـتیاق دانش‌آموزان برای کارکـردن با نرم‌افزار، یادگیـری کامل آن، و رفع بدفهمی‌ها و اشـکالات اولیه‌شان در مبحث رسـم توابـع با اسـتفاده از انتقال، برای شخص من بسـیار جالب بود. به نظر می‌رسـید یادگیری نسـبتاً عمیقی در این زمینه شـکل گرفته بود، به‌طـوری که در جلسهٔ بعدی، فقط با مطرح‌کردن شکل کلی تابع رادیکالی، دانش‌آموزان قادر بودند انواع آن‌هـا را به راحتی و در مدت زمان کوتاهی رسم کنند.

قدردانی: لازم می‌دانـم از آقای دکتر **ابوالفضل رفیع‌پور** تشـکر کنـم. چرا که اولین‌بـار در کلاس درس ایشـان در دورهٔ کارشناسی دانشگاه فرهنگیان کرمان با نرم‌افزار جئوجبرا آشنا شدم. همچنین، در جریان یکی از درس‌های دورهٔ کارشناسی ارشد در دانشگاه شهید باهنر کرمان، وقتی تجربهٔ فوق را بیان کردم، مرا تشویق کرد که این روایت را بنویسم و با بقیهٔ همکارانم به اشتراک بگذارم.

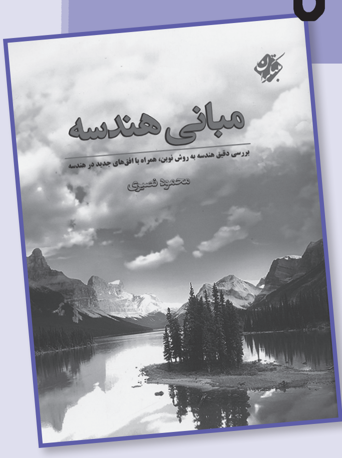
تذکـر: علاقه‌مندان به کسـب اطلاعات بیشتر در مورد نرم‌افزار جئوجبرا می‌توانند به سایت رسمی این نرم‌افزار یا شماره ۱۰۱ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی مراجعه کنند.

معرفی و نقد کتاب

کتاب مبانی هندسه

رضا حیدری قزلجه
استادیار دانشگاه فرهنگیان تهران

مبانی هندسه
نویسنده: محمود نصیری
شمارگان: ۳۰۰۰ جلد
ناشر: مبتکران
تاریخ انتشار: پاییز ۱۳۹۹



«طغیان سـالانهٔ رود نیل و به دنبال آن محو شـدن مرزهای زمین‌های کشاورزی، باعث شده بود تا مصری‌ها نقشـه‌برداران ماهری شوند. مصری‌ها و بابلی‌ها مهندسـان فوق‌العاده‌ای بودند. اهرام مصر، ساختمان‌های چندطبقهٔ بزرگ، زمین‌های کشاورزی طبقه‌بندی شده و سیستم آبیاری گسترده از شواهد این امر است. باستان‌شناسان مدارک زیادی از...»

این پاراگراف بخشی از مقدمهٔ تاریخی کتاب **مبانی هندسه**، تألیف استاد محمود نصیری است. در این کتاب، فقط هندسه محض یا کاربردی نمی‌خوانیم، بلکه در جای‌جای آن زمینه‌های پیدایش، شکل‌گیری و به‌طور کلی سـیر تطور مفاهیم هندسـی، بیان شده است که از این نظر، رویکرد مؤلف کتاب به لحاظ پرداختن به جنبه‌های تاریخی ستودنی است. برای مثال، در کتاب موضوع‌های تاریخی با جزئیات کافی مطرح شده‌اند؛ از اثبات قضیهٔ **خیام** در مورد چهارضلعی‌هایی که ۶۰۰ سال پس از او به نام «چهارضلعی

ساکری» معروف شدند، گرفته تا اثبات قضیهٔ مورلی توسط دکتر **امیدعلی کرم‌زاده**.

استاد نصیری دانش‌آموختهٔ سال ۱۳۵۸ «دانشگاه خوارزمی» تهران (تربیت معلم سابق)، از ابتدای خدمت به‌عنوان دبیر ریاضی به‌طور مستمر به تألیف و ترجمهٔ کتاب‌های مختلف در ریاضیات مدرسه‌ای، با توجه ویژه به هندسه، مبادرت کرد. در سال ۱۳۶۵ به عضویت هیئت تحریریهٔ مجلهٔ رشد آموزشی ریاضی درآمد؛ جایی که حدود ۱۰ سال با مرحوم **حسین غیور**، یکی از برجسته‌ترین و توانمندترین استادان هندسهٔ کشورمان همکار شد و حاصل آن چاپ مطالب و مسائل ارزنده‌ای، به‌ویژه در زمینهٔ هندسهٔ مدرسه‌ای در شماره‌های گوناگون این مجله بود. ایشان در سال‌های ۱۳۷۱ و ۷۲ به همراه دکتر **امیرخسروی** و **ابراهیم دارابی** از مؤلفان کتاب‌های درسی هندسهٔ۱و هندسهٔ۲ متوسطه بود. در نظام۶-۳-۳ فعلی نیز از مؤلفان کتاب‌های درسی هندسهٔ ۱ و هندسهٔ۲ است. تألیف بیش از ۲۰ عنوان کتاب برای معلمان ریاضی در کارنامهٔ ایشان قرار دارد. از جمله، کتاب «هندسهٔ متوسطه، مبانی و مفهوم‌ها» را در سال ۹۴ منتشر کرد که کتاب «مبانی هندسه» به نوعی نسخهٔ تکمیل شده و توسعه‌یافتهٔ آن محسوب می‌شود.

با توجه به جایگاه و اهمیت هندسه در برنامهٔ درسی ریاضیات مدرسه‌ای، بررسی دقیق مفاهیم و روش‌های هندسی، با توجه به روش‌های تدریس آن، برای هر مدرس هندسه ضروری است. کتاب حاضر در شکل‌گیری ذهنیتی یکپارچه از مفاهیم هندسه در خواننده می‌تواند مؤثر واقع شود. **هیلبرت** که بزرگ‌ترین دستاورد قرن نوزدهم را کشف هندسه‌های نااقلیدسی می‌داند، کتاب مبانی هندسهٔ خود را با این سخن از **کانت** شروع می‌کند که هر دانش بشری با شهود آغاز می‌شود، به‌صورت مفهوم تجلی می‌یابد و در نهایت به ایده ختم می‌شود. مؤلف کتاب حاضر هم تا حدامکان کوشیده است روند کتاب به‌گونه‌ای باشد که تا حدودی چنین خط سیری در ذهن خوانندگان طی شود.

هدف اصلی کتاب، بررسی هندسهٔ اقلیدسی از دیدگاهی جدید است. اما نویسنده به‌طور مختصر به هندسه‌های متناهی و همچنین هندسه‌های هذلولوی و بیضوی نیز پرداخته است. به ویژه توجه خاصی به هندسه روی کره به‌عنوان حالت خاصی از هندسهٔ بیضوی داشته است. از آنجا که تبدیل‌های هندسی از موضوع‌های نسبتاً جدید در تمام هندسه‌ها، در مقایسه با هندسه‌های اقلیدسی هستند، در این کتاب به‌طور مشروح به تبدیلات هندسی و به‌ویژه تبدیل‌های طولپا و مفهوم تقارن و فرش کردن پرداخته شده است.

ساختار کتاب، براساس اصول موضوعهٔ روش متریک، یعنی استفاده از عددهای حقیقی در بیان مفهوم‌های اساسی هندسه، مانند بینیت، هم‌نهشتی پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها و غیره است. در تدوین کتاب تلاش شده است که طبق استانداردهای موجود، ساختار هندسه از ابتدا، به شکلی رسمی و با رعایت اصل‌ها و پایبندی به ارائهٔ تعریف‌های دقیق و اثبات‌هایی ساده‌تر در مورد قضیه‌ها مطرح شود. کتاب با یک مقدمهٔ تاریخی شروع می‌شود که در آن، روند تاریخی هندسه از گذشته تا امروز مورد بحث قرار گرفته است. به‌دنبال آن، ۱۶ فصل کتاب به شرح زیر قرار دارند:

۱) دستگاه اصل موضوعی و هندسهٔ وقوع

۲) منطق ریاضی و اثبات

۳) ساختار هندسهٔ مسطحه

۴) هم‌نهشتی، نامساوی‌ها در مثلث

۵) موازی‌ها و سه نوع هندسه

۶) چهار ضلعی‌ها، همرسی خط‌های مهم مثلث

۷) مساحت و کاربردهای آن

۸) تصویرهای موازی و تشابه

۹) دایره

۱۰) مثلثات و هندسه، رابطه‌های طولی در مثلث

۱۱) چندضلعی‌های محاطی و محیطی، چندضلعی‌های منتظم، محیط و مساحت

۱۲) ترسیم‌های هندسی

۱۳) تبدیل‌های هندسی

۱۴) تبدیل‌های تشابهی و تجانس در هندسهٔاقلیدسی

۱۵) تقارن

۱۶) قضیه‌های مشهور و زیبای هندسی

عناوین، تنوع و ترتیب فصل‌ها، نشان از جامعیت، انسجام مطالب و ساختار مستحکم کتاب و همچنین تقسیم‌بندی حرفه‌ای آن دارد. آن‌چنان که از عناوین فصل‌ها برمی‌آید، یکی از اهداف اساسی کتاب، اشاعهٔ تفکر هندسی کل‌نگر در هندسه است. حل مسئله نیز مورد توجه قرار گرفته است و علاوه بر مثال‌های حل‌شدهٔ فراوان، در هر یک از فصل‌ها چندین مجموعه تمرین وجود دارد که حل همگی آن‌ها در بخش پایانی کتاب آمده است. تلاش شده است بیشتر به مسئله‌های هدف‌دار و کاربردی‌تر توجه شود و از مطرح کردن مسئله‌های پیچیده پرهیز شود. زیرا طرح این نوع از مسائل برای عموم دانش‌آموزان به لحاظ آموزشی مفید نیست.

یکی از ویژگی‌های مهم کتاب آن است که عکس تمام قضیه‌های مطرح شده مورد توجه قرار گرفته است؛ به این صورت که اگر عکس قضیه‌ای درست بوده، ثابت شده و در غیر این صورت، با مثال نقض نادرستی آن توضیح داده شده است. صفحه‌آرایی و حروف‌چینی حرفه‌ای و البته با اندکی اشتباهات املایی و همچنین شکل‌های زیبای کتاب، از دیگر نقاط قوت آن محسوب می‌شوند.

فصل‌های کتاب می‌توانند منبع درسی بسیار مناسبی برای درس‌های «مبانی هندسهٔ ۱» و «مبانی هندسهٔ۲» در دوره کارشناسی رشتهٔ آموزشی ریاضی دانشگاه فرهنگیان باشد. علاوه بر آن مرجعی غنی و در عین حال به دور از زیاده‌گویی است تا معلم علاقه‌مند و مدرس هندسه در صورت نیاز به هر مبحثی از هندسه، بتواند به‌راحتی به مطالب پایه‌ای و سودمند در آن موضوع دست یابد و در جریان تدریس خود از آن استفاده کند. برای دبیران ریاضی متوسطه، دانشجویان ریاضی و به‌ویژه دانشجو- معلمان رشتهٔ آموزش ریاضی دانشگاه فرهنگیان و حتی استادان ریاضی دانشگاه‌ها چنین کتابی منبعی ارزشمند و مغتنم محسوب می‌شود که در سطوح متفاوت تدریس، از دبیرستان تا دانشگاه، می‌توان از آن استفاده کرد. همچنین، کتاب می‌تواند به‌عنوان یک منبع تکمیلی، برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به هندسه مفید باشد.

IN THE NAME OF ALLAH

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning
Publications & Teaching Technology Office

137 Roshd Mathematics Education Journal

رشد آموزش ریاضی

vol.38 no.2 2021 ISSN:1606-9188

در کلاس درس

عکاس: اعظم لاریجانی

اول رجب سالروز ولادت امام محمد باقر(ع) گرامی باد