وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی
www.roshdmag.ir
دوره بیست و هشتم/ شماره ۱۳۱

رشد برهان ۱ ریاضی

اجتماعی و فرهنگی

ماهنامه آموزشی و تربیتی برای
دانش‌آموزان دوره اول متوسطه
۴۰ صفحه/ مهر ۱۴۰۱
پیامک: ۳۰۰۰۰۸۹۹۵۱۲
ISSN:1735-4943

مجله چندرسانه‌ای • شنیداری • دیداری • خوانشی

تخمین با تقریب حساب شده

تاریخ تولد

برای مشاهدهٔ پاسخ، رمزینه را پویش کنید.

تاریخ تولد این پسر چه روزی است؟

از راهنمایی‌های زیر استفاده کنید تا روز تولدش را پیدا کنید:

۱. مضرب ۳ یا ۵ نیست.

۲. عدد اول نیست.

۳. در روز یکشنبه نیست.

۴. به ۴ یا ۷ بخش‌پذیر نیست.

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
اردیبهشت	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۲۸	۲۹	۳۰	۳۱			

بســـــم الله الرحمن الرحيم

اللّهم صل علی محمد و آل محمد و عجل فرجهم

رشد برهان ۱ ریاضی

اجتماعی و فرهنگی

دوست هر کس عقل او، و دشمنش جهل اوست.

امام رضا علیه‌السلام «تحف‌العقول، ص ۴۶۷»

وزارت آمـوزش و پــرورش سازمان پــژوهش و برنامــه‌ریزی آموزشی
دفتــر انــتشـارات و فــناوری آمــوزشـــی www.roshdmag.ir
دوره بیســـت و هـشـتـم/شمـــــارۀ پی در پی ۱۳۱/مهـــر ۱۴۰۱
ماهنامه آموزشـی و تربیتـی بـرای دانـش‌آمـوزان دورۀ اول متـوسطـه
ISSN:1735-4943 / پیــامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲/۴۰ صفحه

مدیرمسئول: محمدصالح مذنبی/ **سردبیر:** حسین نامی‌ساعی/ **مدیرداخلی:** پری حاجی‌خانی
هیئت تحریریه: محرم ایردموسی، رضا حیدری قزلجه، روح‌الله خلیلی بروجنی، خسرو داودی، محمدرضا سیدصالحی، داود معصومی مهوار، محمود نصیری/ **ویراستار:** بهروز راستانی
مدیر هنری: کوروش پارسانژاد/ **طراح گرافیک:** حسین یوزباشی
تصویرگران: سام سلماسی/حسین یوزباشی

در این ماه؛ مهر ۱۴۰۱: ◀**اول:** آغاز سال تحصیلی ◀**سوم:** رحلت حضرت رسول اکرم(ص)، شهادت امام حسن مجتبی (ع) ◀**پنجم:** شهادت امام رضا (ع) ◀**نهم:** روز هم‌بستگی با کودکان و نوجوانان فلسطینی ◀**سیزدهم:** شهادت حضرت امام حسن عسکری(ع) و آغاز ولایت حضرت ولی‌عصر(عج) ◀**بیستم:** روز بزرگداشت حافظ ◀**بیست و دوم:** میلاد حضرت رسول اکرم(ص) و میلاد حضرت امام جعفر صادق(ع) ◀شرح مناسبت‌های ماه را با پویش رمزینۀ مقابل ببینید.

سی و سه سال پیش، وقتی در اردوی آمادگی المپیاد ریاضی شرکت می‌کردم، ایشان دربارۀ ریاضیات دبیرستانی برایمان سخنرانی کرد. بهترین معلم ریاضی بود که تا آن زمان سر کلاسش نشسته بودم ...

صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ را بخوانید.

قیمت ۷۵۰۰۰ ریال

خانوادۀ مجلات رشد همـۀ تلاش خود را کرده است تا این مجله در **دسترس عموم** جامعـۀ تربیتی کشور باشد و همـۀ مخاطبان در میهن عزیز اسلامی‌مان **امکان تهیـۀ** آن را داشته باشند.

برای مشاهده شرایط ارسال مطلب و همکاری با ماهنامه رشد ریاضی برهان متوسطه اول، رمزینه را پویش کنید.

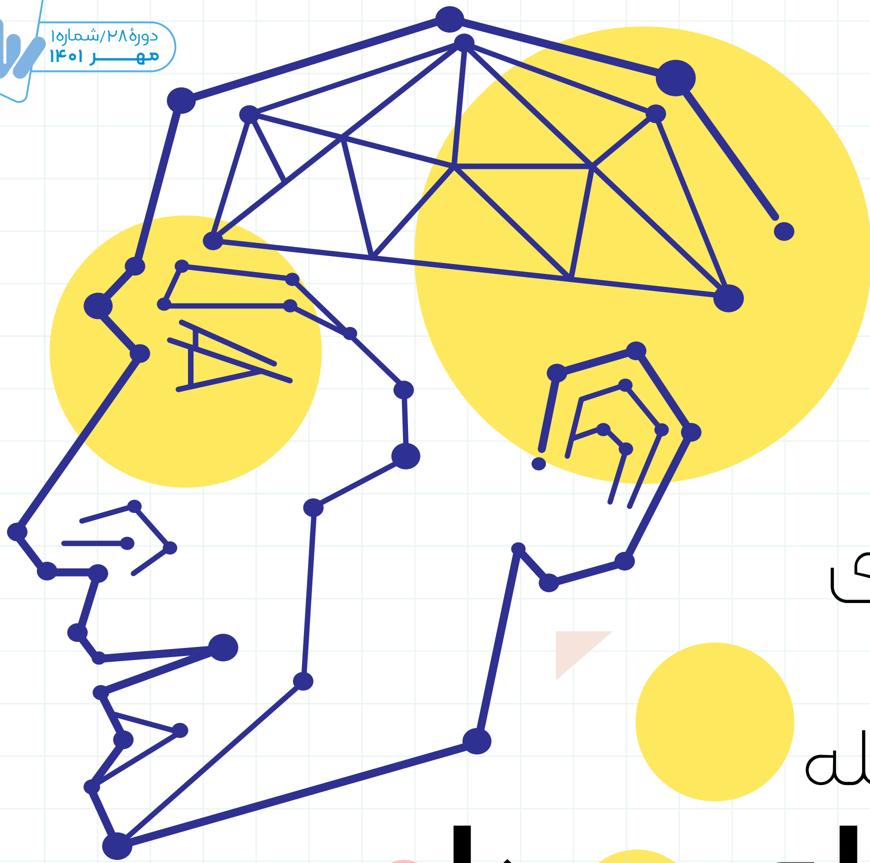
تخمین با تقریب حساب‌شده

حسین نامی ساعی

سلام. خیلی خوش‌حالیم که باز در شروع سال تحصیلی با هم هستیم و خرسندیم از حضوری‌شدن مدرسه‌ها و اینکه هر روز یکدیگر را می‌بینید، در فضای خوب کلاس و مدرسه با دوستان و معلمان خوبتان هم‌فکری و گفت‌وگو می‌کنید، مشکلاتتان را با هم در میان می‌گذارید و چاره می‌اندیشید. گپ می‌زنید و از حال و روز هم با خبر می‌شوید. می‌توانید با معلمانتان بحث علمی رودررو داشته باشید و موضوع‌های جدیدی مطرح کنید. در زنگ‌های تفریح در فضای مدرسه خاطره‌های خوبی را برای هم تعریف کنید و از همه مهم‌تر مهارت زندگی‌کردن با هم را تجربه کنید. برای شما سال تحصیلی خوبی را آرزومندیم. باز مثل قبل می‌خواهیم یک راست به سراغ ریاضیات و موضوع‌های مرتبط با آن برویم و با هم دربارهٔ این علم و اهمیتش صحبت کنیم. بدون تردید برای همه روشن است که ریاضیات در زندگی روزمرهٔ ما کاربردهای بسیار فراوان و مفیدی دارد. ریاضیات راهی است برای درک الگوها و رابطهٔ پدیده‌ها. ما از مفاهیم ریاضی و مهارت‌هایی که از آن یاد می‌گیریم، در زندگی بسیار استفاده می‌کنیم. این مفاهیم به ما کمک می‌کنند کارهای مهمی انجام دهیم. از جمله مفاهیمی که نقشی مهم و کاربردی دارند، «تخمین» و «تقریب» است. در زندگی واقعی، تخمین بخشی از تجربیات روزمرهٔ همهٔ ماست. تخمین‌زدن یک مهارت مهم است و آزمودن پیش‌بینی ماست. همهٔ ما دوست داریم به‌صورت تقریبی پاسخ نزدیک به صحیح یک محاسبهٔ پیچیده را تخمین بزنیم و دوست داریم بدانیم تخمینی که زده‌ایم منطقی بوده یا نه و خیلی خوش‌حال می‌شویم که بعد از دیدن جواب صحیح، بفهمیم محاسبه‌هایمان درست بوده‌اند. بله ما با استفاده از تقریب جواب نزدیک به صحیح را پیش‌بینی می‌کنیم، پاسخ حدودی یک محاسبه را قبل از انجام آن حدس می‌زنیم، در زمان صرفه‌جویی می‌کنیم و ... برای آنکه تخمین معقول باشد، باید بر مهارت‌های تخمین تسلط داشته باشیم. مهم‌ترین شرط برای یک تخمین خوب، یک «تقریب حساب‌شده» است. به چند مثال دقت کنید: فرض کنید مقداری پول دارید و برای خرید به یک مغازه رفته‌اید. شما با دانستن مقدار کل پولتان و قیمتِ جنس‌ها، به‌صورت تقریبی می‌توانید تخمین بزنید با میزان پولی که دارید، چه تعداد کالا و جنس می‌توانید بخرید، چه میزان باید بپردازید و حدوداً چقدر می‌توانید خرید کنید. در مثالی دیگر، فرض کنید مادر شما در آشپزخانه مشغول طبخ غذاست. او به‌صورت تقریبی می‌داند چه مقدار نمک و ادویه را هنگام آشپزی به غذا اضافه کند تا غذا مزهٔ خوبی داشته باشد. یا فرض کنید برای رسیدن به جایی، از خانه بیرون زده‌اید. حتماً زمان لازم برای طی‌کردن مسافت تا رسیدن به مقصد را قبل از خروج از خانه حدودی و تقریبی تخمین زده‌اید. حتی یک نقاش ساختمان مقدار تقریبی رنگ مورد نیازش را برای رنگ‌آمیزی یک ساختمان قبل از رنگ‌کردن تخمین می‌زند.

تخمین و تقریب چیست؟

تخمین گمان و پیش‌بینی است برای حدس زدن اندازهٔ چیزی و نتیجهٔ محاسبه‌های ذهنی است برای برآوردی آسان‌تر و سریع‌تر از محاسبه‌های واقعی. در ریاضیات، تخمین به معنای داشتن یک محاسبهٔ تقریبی از مقدار، تعداد، کمیت یا وسعت چیزی است. برای مثال، برآورد اندازه، ارزش، زمان،قیمت‌ها، تخفیف‌ها و نظیر این‌ها. تقریب هم نتیجه‌ای است که اگرچه دقیقِ دقیق نیست، ولی به اندازهٔ کافی به نتیجهٔ دقیق و درست نزدیک است. تفاوت تخمین و تقریب در این است که تخمین غالباً از روی اطلاعات و داده‌های فرضی به‌طور حدسی محاسبه می‌شود، در حالی که تقریب با داده‌های واقعی حاصل می‌شود. تقریب بیشتر قابل اعتماد و تا حد زیادی شبیه واقعیت است؛ ولی نه دقیقاً مشابه. تقریب در ریاضیات، عمل یا فرایند یافتن عددی است که به‌طور قابل قبولی نزدیک به یک مقدار دقیق باشد. عددی که در نتیجهٔ این فرایند به‌دست می‌آید، یک مقدار تقریبی است. در تقریب فن گردکردن بسیار مهم است. در واقع ما با هر تخمین و تقریبی در ذهنمان ناخودآگاه عمل گردکردن را انجام می‌دهیم. گردکردن مهارتی است که برای تخمین سریع یک عدد به آن نیاز داریم. با «گردکردن» عددها را بر حسب نزدیک‌ترین واحد، ده، صد، دهم یا تعداد معینی از رقم‌های اعشار ساده‌تر می‌کنیم. مثلاً ۱۲۷۴ به نزدیک‌ترین هزار برابر است با ۱۰۰۰، به نزدیک‌ترین ۱۰۰ عدد ۱۳۰۰ است و به نزدیک‌ترین ده ۱۲۷۰ است. یا گردشدهٔ عدد ۰/۴۵۶۳۹۴۸ با سه رقم اعشار برابر است با ۰/۴۵۶. هنگام گردکردن باید این موارد را انجام دهیم: ۱. رقمی را در جایی که می‌خواهیم گرد کنیم پیدا می‌کنیم. ۲. برای گردکردن رقم سمت راست آن را نگاه می‌کنیم: - اگر رقم سمت راست ۰ تا ۴ باشد، یعنی ۰، ۱، ۲، ۳ یا ۴، رقم را به حال خود رها می‌کنیم و گردکردن را رو به پایین انجام می‌دهیم. - اگر رقم سمت راست ۵ تا ۹ باشد، یعنی ۵، ۶، ۷، ۸ یا ۹، رقم را ۱ واحد افزایش می‌دهیم و گردکردن را رو به بالا انجام می‌دهیم. برخی از عددها را هرگز نمی‌توان به‌طور کامل به صورت اعشاری بیان کرد. در این موارد از تقریب استفاده می‌شود. برای مثال، عدد پی عدد اعشاری بدون پایان و بدون تکرار است: ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸ که می‌توان آن را به سادگی با کوتاه‌کردن به یک عدد گویا تقریب زد. بنابراین، عدد پی را می‌توان با ۳/۱۴ یا ۳/۱۴۱۶، یا ۳/۱۴۱۵۹۳ و غیره تقریب زد تا دقت مورد نظر به دست آید. دوستان عزیز سعی کنید قبل از انجام هر کاری تخمین درستی از فرجام آن کار داشته باشید. پیروز و سلامت باشید.

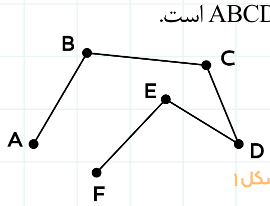


محمود نصیری

مفهوم‌های هندسی و حل مسئله
چندضلعی‌ها

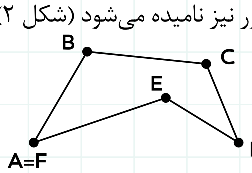
در هشت شمارهٔ قبلی این مجله مفهوم‌های اولیهٔ هندسه را که ساختار هندسه بر آن‌ها بنا می‌شود، بررسی کردیم. این مفهوم‌های اساسی عبارت بودند از: خط، پاره‌خط، نیم‌خط، زاویه، اندازهٔ پاره‌خط، اندازهٔ زاویه و انواع زاویه‌ها. خط‌های موازی و خط‌های عمود و ویژگی‌های آن‌ها نیز از مفاهیم اصلی هندسه هستند که بررسی کردیم. سپس، اصلی به نام «اصل زاویه‌های متبادل» را بیان کردیم که به کمک آن توانستیم ثابت کنیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر مثلث برابر 180° است. اکنون می‌خواهیم بخش دوم مفهوم‌های هندسی را شروع کنیم. این بخش که بر مبنای بخش‌های قبلی استوار است، از چندضلعی‌ها شروع می‌شود. هر چند یکی از ساده‌ترین چندضلعی‌ها را که مثلث است، قبلاً تعریف کردیم، اما در اینجا تعریفی کلی از چندضلعی بیان خواهیم کرد که شامل مثلث هم می‌شود. سپس یکی از کاربردی‌ترین مفهوم‌های هندسه را که هم‌نهشتی مثلث‌هاست، مورد بحث و بررسی قرار خواهیم داد. وقتی هم‌نهشتی یا همان انطباق مثلث‌ها را یاد بگیریم، با دنیای وسیعی از حل مسئله در هندسه روبه‌رو خواهیم شد.

به همین دلیل در عنوان این مقاله «حل مسئله» را می‌بینید. در واقع هندسه را با تکیه بر حل مسئله به پیش خواهیم برد. ساختمان چندضلعی‌ها از پاره‌خط‌ها تشکیل شده است. در واقع، چندضلعی‌ها که حداقل شامل سه پاره‌خط هستند، از دنبال هم چیدن این پاره‌خط‌ها پدید می‌آیند. نقطه‌های A، B، C، D، E و F در یک صفحه مفروض‌اند (شکل ۱). این نقطه‌ها را به همین ترتیب که نام می‌بریم به هم متصل می‌کنیم. در این صورت مسیری را داریم که A یک سر آن و نقطهٔ F سر دیگر آن است و آن را به‌صورت ABCDEF نشان می‌دهیم. مسیر FEDCBA همان مسیر ABCDEF است.



شکل ۱

در واقع روی هر مسیر می‌توانیم از یک سر آن شروع و از روی هر پاره‌خط فقط یک بار عبور کنیم تا به سر دیگر برسیم، و برعکس. اکنون اگر ابتدای یک مسیر به انتهای آن وصل شود، مسیر را «بسته» می‌نامند. ABCDEFA یک مسیر بسته است. این مسیر بسته یک دور نیز نامیده می‌شود (شکل ۲).

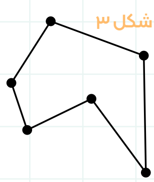


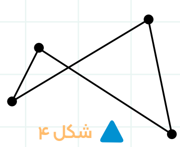
شکل ۲

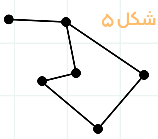
در صفحه در هر مسیر بسته، هر پاره‌خط فقط با دو پاره‌خط دیگر، در دو سر خود، نقطهٔ مشترک دارد.

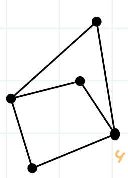
اکنون می‌توانیم چندضلعی را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

تعریف: در صفحه اگر یک مسیر بسته خودش را قطع نکند و هر دو پاره‌خط متوالی هم روی یک خط نباشند، آن را چندضلعی می‌نامند.


شکل ۳


شکل ۴

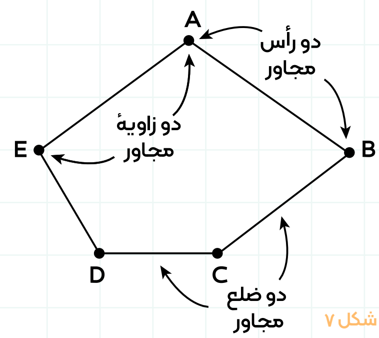

شکل ۵


شکل ۶

بین شـکل‌های ۳ تا ۶، فقط شکل ۳ چندضلعی اسـت. در واقـع از روی هـر نقطـهٔ چندضلعی می‌توانیم شروع به حرکت کنیم و از هر نقطه روی پاره‌خط‌هـا و هر رأس یک و فقـط یک بار عبور کنیم و دوباره به نقطهٔ شروع برسیم. در شکل‌های ۳ تا ۶ این ویژگی را آزمایش کنید. می‌توانیم بدون استفاده از مسیر نیز چندضلعی را تعریف کنیم، اما تعریف کمی طولانی‌تر می‌شود.

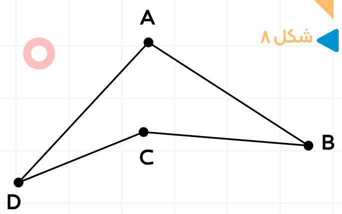
تعریف: nضلعی شـکلی در صفحه شامل n (n≥۳) پاره‌خط متوالی است، هرگاه:
۱. هر پاره‌خط دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقطه‌های انتهایی یا دو سر خودش قطع کند.
۲. هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند.

هر یـک از این پاره‌خط‌ها را یک ضلع چندضلعی می‌نامند. هر دو ضلع را که در یک انتها مشترک‌اند، دو ضلـع همسـایه یا مجـاور می‌نامنـد. نقطهٔ مشـترک «رأس چندضلعی» نـام دارد. بنابراین هـر چندضلعی بـا تعداد ضلع‌ها یـا رأس‌هایش شـناخته می‌شود؛ مثل سه‌ضلعی که مثلث است. هر زاویـه را کـه رأس آن روی رأس چندضلعی و دو ضلع آن شـامل دو ضلع چندضلعی اسـت، زاویهٔ چندضلعی می‌نامند. در شـکل ۷ هر یک از زاویه‌های $\angle ABC$، $\angle BCD$، $\angle CDE$، $\angle DEA$ و $\angle EAB$ یک زاویهٔ پنج‌ضلعی ABCDE هستند. برای سـاده بـودن گاهی آن‌ها را بـا حرف خود رأس بیـان می‌کنیم. پس هریک از این زاویه‌ها را به‌ترتیب به‌صـورت $\angle A$، $\angle B$، $\angle C$، $\angle D$ و $\angle E$ نیز نشان می‌دهیم.



شکل ۷

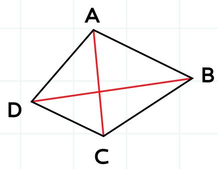
هر دو زاویهٔ چندضلعی را که یک ضلع چندضلعی در هر دو مشترک است، دو زاویهٔ مجاور یا همسایه می‌نامنـد. $\angle A$ و $\angle B$ و همچنیـن $\angle A$ و $\angle E$ مجاور هسـتند. در چهارضلعی شکل ۸ زاویه‌های آن را بنویسـید و رأس هرکـدام و ضلع‌هایی از چندضلعـی را کـه روی ضلع‌های ایـن زاویه‌ها هستند، مشخص کنید.



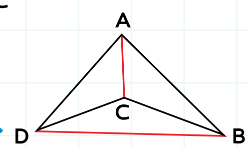
شکل ۸

قطر در چندضلعی
در هر چندضلعی، قطر پاره‌خطی است که دو سر آن روی دو رأس غیرمجاور چندضلعی قرار دارند.

آیا می‌توانید با تعریف قطر استدلال کنید که چرا مثلث قطر ندارد؟
در چندضلعی‌های شـکل‌های ۹ و ۱۰، پاره‌خط‌های $\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ قطر هستند.

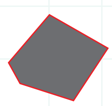


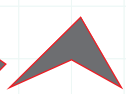
شکل ۹

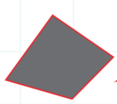


شکل ۱۰

مشاهده می‌کنیم که در شکل ۹ دو قطر درون چهارضلعی یکدیگر را بریده‌اند. اما در شکل ۱۰ چنین نیست. حتی یک قطر به جز دو سـر آن بیرون چندضلعی واقع است. تا اینجا درون و بیرون چندضلعی را هنوز تعریف نکرده‌ایم. به‌طور غیررسمی، مجموعه نقطه‌هایی را که در شکل‌های ۱۱ تا ۱۳ سـایه‌زده شده‌اند درون چندضلعی می‌نامیم. به‌طور شهودی، درون چندضلعی مجموعه نقطه‌هایی از صفحهٔ چندضلعی اسـت که توسـط ضلع‌های چندضلعی محدود شده‌اند.


شکل ۱۱


شکل ۱۲


شکل ۱۳

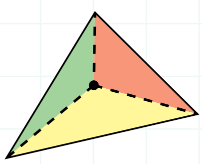
اگر درون به‌درستی تعریف شود، کاربرد خوبـی در هندسـه دارد و آن تعریـف ناحیه‌های چندضلعی است.

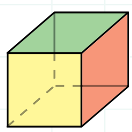
تعریف: مجموعـه نقطـه‌های درون و روی چندضلعی را ناحیهٔ چندضلعی می‌نامند.

نباید ناحیه‌های چندضلعی را با خود چندضلعی اشـتباه کنیم. خود nضلعـی مجموعه‌ای از نقطه‌های nپاره‌خطی هستند که ضلع‌ها نامیده می‌شوند، اما ناحیهٔ چندضلعی مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های روی چندضلعی و درون چندضلعی با هم هستند. ناحیه‌های چندضلعی در هندسه بسیار اهمیت دارند.

۱. وقتی مفهوم مساحت را در هندسه تعریف می‌کنیم، در اسـاس مساحت روی ناحیه‌های چندضلعی تعریف می‌شـود. وقتی از مساحت مثلث یا مسـاحت مسـتطیل حرف می‌زنیم، در واقع همان مسـاحت ناحیهٔ مثلث یا ناحیهٔ مسـتطیل اسـت، اما برای سـادگی با همان مساحت مثلث یا مسـتطیل بیان می‌شود. در واقع این ناحیه‌های چندضلعی هسـتند که با شـرایطی می‌توانیم عددهای حقیقی مثبتی را به آن‌ها نظیر کنیم و مسـاحت آن ناحیه را به‌دست آوریم. در فرصت‌های بعدی این موضوع را بیشتر توضیح می‌دهیم.

۲. ناحیه‌های چندضلعی در شکل‌های فضایی کاربرد دارند. از دوران ابتدایی با شکل‌هایی مانند هرم (شـکل ۱۴) و مکعب (شکل ۱۵) و غیره آشنایی دارید که آن‌ها را چندوجهی می‌نامند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:


شکل ۱۴

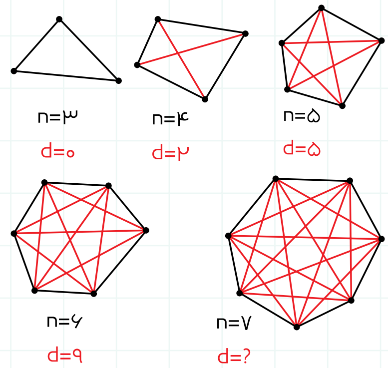

شکل ۱۵

تعریف: چندوجهی شامل چهار یا تعداد بیشتری از ناحیه‌های چندضلعی است که از همه طرف به قسمتی از فضا محصور است. هر دو ناحیهٔ چندضلعی حداکثر در یک ضلع مشترک‌اند و اشتراک هر دو ناحیه فقط روی رأس‌ها و ضلع‌هاست.

این بخش را نیز بعداً به‌طور مفصل بررسـی خواهیم کرد. فقط در اینجا خواستیم کاربردی از ناحیه‌هـای چندضلعـی را بیـان کنیم. ساده‌ترین چندوجهی، چهاروجهی است که از چهار ناحیهٔ مثلثی تشکیل شده است.
اکنون کـه با چندضلعی‌ها و ناحیه‌های آن‌ها آشـنا شـدیم، دوباره به خود چندضلعی‌ها برمی‌گردیم و می‌خواهیم تعداد قطرهای هر چندضلعی را محاسبه کنیم.

طرح مسئله

چگونه می‌توانید تعداد قطرهای هر nضلعی (شکل ۱۶) را محاسبه کنید؟



شکل ۱۶

وقتی تعداد ضلع‌ها کم باشد، به سادگی می‌توانیم تعداد قطرها را بشماریم، اما وقتی تعداد ضلع‌ها بیشتر می‌شوند، کار شمردن هم سخت‌تر می‌شود. مثلاً وقتی n=۷ و حتی n=۸ باشد نیز شمردن ساده نیست. اکنون باید به دنبال روشی برای شمردن تعداد قطرها در هر nضلعی باشیم. به این روش‌ها می‌توانیم نام ویژه‌ای بدهیم: «شمارش بدون آنکه بشماریم!»

روش اول: روش استقرایی

در کل ریاضی مسئله‌های فراوانی در رابطه با شمردن وجود دارند. مثلاً، با رقم‌های ۱، ۲، ۳ و ۵ چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت؟ مسلم است که نوشتن این عددها کار ساده‌ای نیست، اما روش‌هایی وجود دارند که می‌توانیم بدون آنکه همهٔ این عددها را بنویسیم و بشماریم، تعداد آن‌ها را شمارش کنیم. این روش‌ها به روش‌های شمارش و ترکیبیاتی معروفاند. در اینجا می‌خواهیم یک روش شمارش برای شمردن تعداد قطرهای هر چندضلعی بیان کنیم.

اولین نکته‌ای که در شمردن تعداد قطرها باید در نظر داشته باشیم این است که وقتی از یک رأس، مثلاً A، به رأسی مانند D خطی رسم می‌کنیم، یک قطر رسم شده است. حال اگر دوباره از D به A وصل کنیم، همان قطر قبلی است. یعنی اگر شمارش ما به‌گونه‌ای باشد که تعیین نکنیم کدام رأس را به کدام رأس متصل کرده‌ایم، قطرها دو بار شمارش می‌شوند. پس هر تعداد را که پیدا کردیم، باید بر دو تقسیم کنیم. آنچه در شکل ۱۶ مشاهده می‌کنیم، در جدول ۱ نوشته‌ایم. سعی می‌کنیم الگویی پیدا کنیم. با توجه به توضیح بالا تعداد قطرها هرچه محاسبه شده باشد، باید بر دو تقسیم شود. پس هر یک از عددهای سطر دوم جدول بر دو تقسیم شده‌اند و آن‌ها را به حالت اولی می‌نویسیم. اکنون می‌دانیم که این تعداد باید بر حسب رابطه‌ای از تعداد ضلع‌ها باشد. پس n تعداد ضلع‌ها را آزمایش می‌کنیم. سعی می‌کنیم صورت کسرها را بر حسب n تعداد ضلع‌ها ضرب در هر عدد دیگری که در صورت به‌وجود می‌آید، بنویسیم.

n تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶	۷	۸
d تعداد قطرها	۰	۲	۵	۹	۱۴	۲۰
تعداد قطرها به‌صورت $\frac{۲d}{۲}$	$\frac{۰}{۲}$	$\frac{۴}{۲}$	$\frac{۱۰}{۲}$	$\frac{۱۸}{۲}$	$\frac{۲۸}{۲}$	$\frac{۴۰}{۲}$
تعداد قطرها بر حسب جداکردن n تعداد ضلع‌ها	$\frac{۳\times ۰}{۲}$	$\frac{۴\times ۱}{۲}$	$\frac{۵\times ۲}{۲}$	$\frac{۶\times ۳}{۲}$	$\frac{۷\times ۴}{۲}$	$\frac{۸\times ۵}{۲}$
تعداد قطرها بر حسب الگویی از n در یک عدد	$\frac{۳\times(۳-۳)}{۲}$	$\frac{۴\times(۴-۳)}{۲}$	$\frac{۵\times(۵-۳)}{۲}$	$\frac{۶\times(۶-۳)}{۲}$	$\frac{۷\times(۷-۳)}{۲}$	$\frac{۸\times(۸-۳)}{۲}$

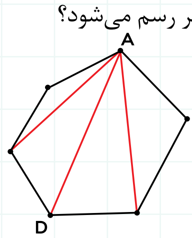
جدول ۱

مشاهده می‌کنیم که اگر n، تعداد ضلع‌ها باشد، n-۳ عدد ضرب‌شده در n است. بنابراین حدس می‌زنیم که تعداد قطرها در هر nضلعی از رابطهٔ $d_n=\frac{n(n-۳)}{۲}$ به دست می‌آید. البته در اینجا چیزی را ثابت نکردیم، فقط با یک روند الگویابی توانستیم به این رابطه برسیم. این روش را «روش استقرایی» نیز می‌خوانند، یعنی ما براساس رابطه‌ای که بین تعدادی از حالت‌های اولیه پیدا می‌کنیم، رابطهٔ کلی را حدس می‌زنیم. البته شاید روش ساده‌تری برای این مسئله وجود داشته باشد.

اکنون سعی می‌کنیم، شما را با روش دیگری از حل این مسئله آشنا کنیم که می‌توانیم از آن در مسئله‌های مشابه استفاده کنیم.

روش دوم: حل مسئله

شکل ۱۷ یک شش‌ضلعی است. از هر رأس آن چند قطر رسم می‌شود؟



شکل ۱۷

اکنون شش رأس داریم. از هر شش رأس چند قطر رسم می‌شود؟ پاسخ ۳×۶ قطر است. آیا این تعداد واقعی است؟ خیر. قبلاً نیز توضیح دادیم، وقتی دو رأس غیرمجاور مانند A و D را انتخاب می‌کنیم، $\overline{AD}$ و $\overline{DA}$ یک قطر هستند. پس این تعداد را باید بر ۲ تقسیم کنیم؛ یعنی $۹=\frac{۶\times ۳}{۲}$.

اکنون فرض کنید یک nضلعی (n≥۳) داشته باشیم. فکر می‌کنید از هر رأس nضلعی چند قطر می‌توانیم رسم کنیم؟ به تعریف قطر برمی‌گردیم: از n رأس یک رأس را انتخاب می‌کنیم.

از این رأس طبق تعریف قطر به دو رأس مجاور نمی‌توانیم وصل کنیم. پس این رأس انتخاب‌شده را به n-۳ رأس می‌توانیم وصل کنیم. بنابراین از هر رأس nضلعی n-۳ قطر رسم می‌شود. پس اگر هر n رأس را انتخاب کنیم، از این n رأس n(n-۳) قطر رسم می‌شود. اما هر قطر دو بار حساب شده است، پس تعداد را بر دو تقسیم می‌کنیم، بنابراین:

تعداد قطرها در هر nضلعی برابر $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است.

نشان دهید تنها یک nضلعی وجود دارد که تعداد قطرهای آن با تعداد ضلع‌های آن برابر است.

فعالیت: n نقطهٔ دلخواه و متمایز در صفحه داریم.

با چند پاره‌خط می‌توانیم این n نقطه را به هم متصل کنیم؟

می‌توانید از روش محاسبهٔ تعداد قطرها در چندضلعی الگو بگیرید. از هر نقطه به چند نقطهٔ دیگر می‌توانید وصل کنید؟ پس در کل با این روش تعداد پاره‌خط‌ها چقدر است؟

باید به جواب $\frac{n(n-۱)}{۲}$ برسید.

اکنون تعداد قطرهای یک nضلعی را با تعداد ضلع‌ها جمع کنید. به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟ چه ارتباطی بین این دو مسئله وجود دارد؟

مسئلهٔ سومی را مطرح می‌کنیم: ۱۰ نفر در یک میهمانی شرکت کرده‌اند. هر فرد با بقیهٔ افراد دست می‌دهد. تعداد دست‌دادن‌های این ۱۰ نفر چقدر است؟ به‌طور کلی در یک میهمانی n نفر شرکت کرده‌اند. هر نفر با بقیهٔ افراد دست می‌دهد. تعداد دست‌دادن‌ها چقدر است؟ چه رابطه‌ای بین این مسئله و دو مسئلهٔ قبلی برقرار است؟

داود معصومی‌مهوار

نتیجه را پیش‌بینی کنید

من: بچه‌ها امروز مبحث احتمال را شروع می‌کنیم. یادتان هست که سال‌های پیش با این موضوع آشنا شده‌اید. پس یک نفر شروع کند و از آنچه می‌داند یا نمی‌داند و ذهنش درگیر است بگوید.

زهرا: احتمال برایم عجیب است. با اینکه ظاهری بسیار ساده دارد، گاهی واقعاً وادارم می‌کند باور کنم که هیچ چیزی نمی‌فهمم! ساده است برای اینکه باید همهٔ پیشامدها را بشماریم و پیشامدهای مطلوب را نیز بشماریم و نسبت دو عدد را حساب کنیم. اما عجیب است برای اینکه نمی‌دانم چرا باید قبول کنم که این نسبت ربطی به رخدادهای آینده دارد.

من: امیدوارم امروز زهرا کمی روشن‌تر ببیند و احتمال را بهتر بفهمد. اما یکی از واژه‌هایی که او به کار برد بسیار مهم و کارساز است. کمتر کسی هم به آن توجه می‌کند. منظور من واژهٔ «آینده» است. کسی می‌تواند بیشتر دربارهٔ آن شرح بدهد؟

مریم: من فکر نمی‌کنم احتمال تنها دربارهٔ رخدادهای آینده باشد، یادم هست که پرسش‌هایی داشتیم که دربارهٔ گذشته بود. مثلاً تاسی را پرتاب کرده بودیم و می‌خواستیم بدانیم احتمال اینکه عدد رو شده مضرب ۳ باشد چیست؟

من: مریم درست می‌گوید. شاید منظور زهرا از آینده هم چیزی شبیه همین باشد. مهم این است که احتمال دربارهٔ یک آزمایش تصادفی است. یعنی آزمایشی که همهٔ نتیجه‌های ممکن آن قبل از انجام آزمایش معلوم و روشن باشند، ولی پیش از انجام آزمایش واقعاً معلوم نباشد که کدام نتیجه اتفاق خواهد افتاد. گر چه این بیان ممکن است خیلی پررنگ دربارهٔ آینده باشد، ولی مهم این است که همهٔ رخدادها معلوم باشند و ندانیم کدام واقعاً رخ داده است. این موضوع اهمیت دارد. همان‌طور که مثلاً در محاسبهٔ عبارت $6\div3(2+1)$ باید به تعریف‌ها و قراردادها دربارهٔ ترتیب انجام عملیات توجه کنیم، در موضوع احتمال هم باید به تعریف‌ها وفادار باشیم. سراغ یک مثال ساده می‌رویم. ببینید این دو تکه گچ را من برداشته‌ام و جز این دو چیز دیگری در دسترس نیست. یکی سفید است و دیگری قرمز. حالا به دور از چشمان شما یکی را انتخاب می‌کنم و در دستم نگه می‌دارم و می‌خواهم شما احتمال سفیدبودن آن را پیدا کنید. می‌دانم پرسش ساده‌ای است ولی خواهش می‌کنم خوب فکر کنید. وقتی من پرسش را مطرح می‌کردم، دستم را بالا گرفته و مشت کرده بودم، ولی فوراً آن را پایین آوردم و به عمد، گچ را بین انگشتانم گرفتم، به‌طوری که سه نفر از دانش‌آموزان ردیف جلویی کلاس، یعنی **زهرا**، و **بهاره** و **فریبا** سفیدی گچ را دیدند.

مریم و خیلی‌های دیگر: احتمال سفید بودن گچ یک دوم است. پرسش ساده‌ای است.

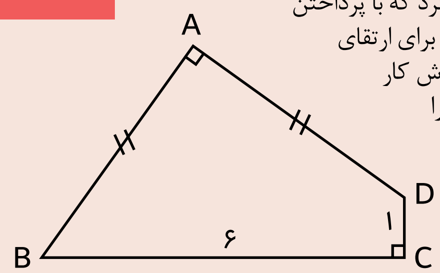
من: خب با شما موافقم، اما آیا کسی نظر دیگری دارد؟
لیلا: بعید است کسی نظر دیگری داشته باشد. چیز پیچیده‌ای وجود ندارد.
من: اما بهاره و فریبا دستشان بالاست و می‌خواهند چیزی بگویند!
بهاره: من به‌طور اتفاقی گچ را در دست شما دیدم و دیدم که سفید است. بنابراین فکر می‌کنم این سؤال برای من مطرح نباشد و من نتوانم احتمال سفیدبودن گچ را محاسبه کنم.
فریبا: من هم دیدم و فکر می‌کنم احتمال سفیدبودن گچ، یک، یعنی صد در صد است.
من: زهرا تو به چه چیزی فکری می‌کنی؟
زهرا: راستش من هم رنگ گچ را دیدم و الان گیج شده‌ام. از طرفی فکر می‌کنم احتمال یک دوم پاسخ درستی است. از طرف دیگر نمی‌توانم آن را بپذیرم و احتمال یک را درست می‌دانم. از همه عجیب‌تر دارم به این فکر می‌کنم که ممکن است احتمال یک پیشامد مشخص دو عدد متفاوت باشد! ولی پیش‌تر چیزی در این‌باره نشنیده‌ایم و نمی‌دانم چه جوری می‌توانم این اختلاف را توجیه کنم؟
لیلا: فکر کنم الان چیز مهمی را فهمیدم. تصادفی‌بودن آزمایش ربطی به گذشته و آینده ندارد. آنچه مهم است دانستن یا ندانستن نتیجهٔ آزمایش است. می‌دانم حرف عجیبی می‌زنم، ولی فکر می‌کنم احتمال سفیدبودن گچی که در دست شماست، برای زهرا، و فریبا و بهاره درست عدد یک است و برای دیگرانی که گچ را ندیده‌اند، دقیقاً عدد یک دوم است. حدسم این است که شما عمداً دستتان را برای عده‌ای رو کردید که همین موضوع را بفهمیم.
الهام: یعنی باید قبول کنیم که یک پیشامد مشخص ممکن است احتمال‌های متفاوتی داشته باشد؟ هر کس ممکن است احتمال آن را چیزی بداند و همهٔ آن‌ها هم درست بگویند؟ این دیگر خیلی عجیب است!
من: آنچه که دربارهٔ آزمایش تصادفی گفتم مهم بود. تمام نتیجه‌های ممکن باید مشخص باشند. خب بر اساس اطلاعات متفاوت افراد مختلف، ممکن است این مجموعهٔ نتیجه‌های ممکن، یکسان به نظر نرسند. مثال ساده همین سفیدبودن یا نبودن گچ در دست من است. کسانی اطلاعات بیشتری داشتند و احتمال یک را درست دانستند و دیگرانی که کمتر می‌دانستند، احتمال یک دوم را درست دانستند. هر دو عده هم درست فکر کردند.
زهرا: فکر کنم فهمیدم. مثلاً وقتی ۲۰ خانواده قرار است برای مهمانی بیایند و من می‌خواهم به بچه‌هایشان هدیه بدهم و می‌دانم این ۲۰ خانواده در مجموع ۴۲ بچه دارند، من باید تصور کنم که نصف این بچه‌ها دختر و نصفشان پسر هستند و احتمالاً باید نصف هدیه‌ها را دخترانه و نصفشان را پسرانه انتخاب کنم. ولی کسی که دقیقاً این خانواده‌ها را می‌شناسد یا می‌تواند بشناسد و آمار دقیقی از بچه‌ها در دسترس دارد، باید بر طبق آمار و اطلاعات خود هدیه تهیه کند.
من: کاملاً درست می‌گویی. این برداشت خوبی از آزمایش تصادفی است. نتیجهٔ وفاداری به آن هم، همیشه این‌قدر ساده نیست. گاهی مسئله‌های پیچیده را نیز می‌توان به کمک همین دقت و وفاداری، به سادگی حل کرد.
اعظم: یک چیز عجیب همیشه ذهنم را مشغول می‌کند. اینکه مثلاً در پرتاب چهار بار یک سکه احتمال روآمدن سکه در هر چهار بار برابر با $\frac{1}{2}$ ضرب در $\frac{1}{2}$ ضرب در $\frac{1}{2}$ ضرب در $\frac{1}{2}$ است. یعنی احتمال چهار بار روآمدن سکه برابر با $\frac{1}{16}$ است. اما وقتی که سه بار سکه را پرتاب کرده‌ایم و هر سه بار سکه رو آمده است و می‌خواهیم احتمال روآمدن سکه برای بار چهارم را بررسی کنیم، باز هم همان $\frac{1}{2}$ را می‌گوییم. گرچه الان احساس می‌کنم پاسخ این موضوع باید به چیزهایی که الان گفتیم مربوط باشد.
من: همین‌طور است. اگر آزمایشی «آزمایش تصادفی» است، نتیجهٔ آن از قبل معلوم نیست و می‌توان آن را بارها و بارها در شرایط یکسان انجام داد و هر بار باید نتیجه‌های ممکن همه مشخص باشند، ولی معلوم نباشد که واقعاً کدام اتفاق خواهد افتاد. نتیجهٔ آزمایش‌های گذشته نیز تأثیری بر آزمایش‌های بعدی ندارد. پس همین اتفاقی که اعظم به آن اشاره کرد، ممکن است چند جور دیده شود. مثلاً ممکن است کسی از نتیجهٔ سه آزمایش نخست آگاه نباشد. او واقعاً فکر می‌کند که احتمال روآمدن سکه در سه آزمایشی که انجام شده، برابر با یک هشتم است و احتمال روآمدن سکه در هر چهار بار را $\frac{1}{16}$ می‌داند. ولی کسی که از نتیجهٔ سه آزمایش اول آگاه است، احتمال روآمدن سکه در هر سه بار گذشته را یک یعنی صد در صد می‌داند و واقعاً احتمال روآمدن سکه در بار چهارم را $\frac{1}{2}$ می‌داند. برای بار چهارم هر دو نفر یک نظر دارند، زیرا اطلاعاتشان و دانششان از رخداد یکی است. ولی برای سه باری که قبلاً اتفاق افتاده است، اطلاعات یکسان ندارند و بنابراین نظر احتمالاتی یکسان نیز ندارند.
نرگس: در موضوع احتمال یک چیز بسیار عجیب و غریب هست که من نمی‌فهمم. اصل مطلب این است که با توجه به تعریف، محاسبه‌ها و ... کلی فکر می‌کنیم و دست آخر دربارهٔ رخدادهایی که ممکن است در آینده و در واقعیت اتفاق بیفتند، نظر می‌دهیم! این برای من عجیب است. اساساً مگر می‌شود؟ فکر ما چه ربطی به واقعیت‌های دنیا دارد؟ می‌توانیم تأثیری برای فکرمان در این زمینه تصور کنیم؟ برای من این عجیب‌ترین بخش احتمال است.
من: موضوع مهمی را مطرح کردی. ولی من کمی متفاوت فکر می‌کنم. من فکر نمی‌کنم که اتفاقات عالم منتظر محاسبات من هستند تا اتفاق بیفتند. بلکه فکر می‌کنم من محاسبه می‌کنم تا بتوانم نتیجه را حدس بزنم و برای آن‌ها آماده بشوم. خیلی ساده تصور کنید که می‌بینیم خودرویی در خیابان در حال حرکت است. خب هیچ ترسی نداریم. اما شخص دیگری در همین نزدیکی در طبقهٔ دهم یک ساختمان همین خودرو را می‌بیند و خودروی دیگری را نیز می‌بیند که در خیابانی عمود به همین خیابان در حال حرکت است و ترمز بریده است! خب ناظر طبقهٔ دهم حتی بدون محاسبه‌های پیچیده، با یک دید سطحی به سادگی پیش‌بینی می‌کند که این دو خودرو با هم برخورد می‌کنند. این پیش‌بینی باعث برخورد نیست. دید بستهٔ ما در خیابان هم باعث جلوگیری از برخورد نمی‌شود. اطلاعات و محاسبه‌های ما، تنها باعث می‌شوند که انتظار رخدادهای متفاوتی را داشته باشیم و برای آن‌ها آماده شویم. یا مثلاً در همین مثالی که گفتم ممکن است ناظر طبقهٔ دهم به روشی باعث جلوگیری از تصادف شود. چه می‌دانم؟ شاید با پرتاب یک آجر به سمت خودروی سالم بتواند آن را از حرکت باز دارد و با یک خسارت کم، از یک تصادف بسیار بزرگ پیشگیری کند. خلاصه اینکه تصور، فکر و محاسبه‌های ما نقشی در اتفاقات آینده ندارند، ولی ممکن است دست به اقداماتی بزنیم که مؤثر واقع شوند.

یک مسئله و چند راه‌حل

راه‌های جبری

● فاطمه معین‌الدین، جلال سرحدی و حسین کریمی

در ریاضیات شاخه‌های متفاوتی وجود دارند که استفاده از آن‌ها برای حل مسئله از جذابیت بالایی برخوردار است. مثلاً استفاده از جبر در حل مسئله‌های هندسی و یا استفاده از هندسه در حل مسئله‌های جبری، زیبایی کار را دو چندان می‌کند. در این قسمت از مجله سعی خواهیم کرد که با پرداختن به روش‌های متمایز حل مسئله، حواشی لازم برای ارتقای سطح آموزش ریاضی شما را فراهم کنیم. روش کار بدین صورت خواهد بود که ابتدا صورت مسئله را بیان خواهیم کرد و سپس مقدمات لازم برای حل آن را به روش‌های متفاوت فراهم می‌آوریم.



مسئله:
مساحت چهارضلعی ABCD را به‌دست آورید.

۱. حل مسئله به روش جبری

نکته:

۱. در مثلث قائم‌الزاویه، مجموع مجذور اندازهٔ دو ضلع زاویهٔ قائمه برابر است با مجذور اندازهٔ وتر. یعنی در مثلث داریم: $m^۲ + n^۲ = L^۲$ مانند ۳، ۴، ۵ و یا: ۵، ۱۲، ۱۳.

۲. اگر مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین باشد، مانند: (m=n، m=n، L) و آنگاه: $m^۲ + n^۲ = \frac{۱}{۲}L^۲$ و یا به عبارت دیگر: $L = \sqrt{۲}m = \sqrt{۲}n$

مانند: (۱، ۱، $\sqrt{۲}$) و یا: ($۳\sqrt{۲}$، $۳\sqrt{۲}$، ۶).

۳. مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازهٔ دو ضلع زاویهٔ قائمه.

مانند: (m، n، L) که داریم: $S_{\Delta} = \frac{m \times n}{۲}$.

بنابراین مسئله به روش جبری این‌گونه حل می‌شود:

$$\Delta BCD(\hat{C} : ۹۰^\circ) \xrightarrow{\text{نکتهٔ ۱}} BC^۲ + CD^۲ = BD^۲ \Rightarrow BD = \sqrt{۳۷}$$

$$\Delta ABD(AD = AB, \hat{A} = ۹۰^\circ) \xrightarrow{\text{نکتهٔ ۲}}$$

$$AB = AD = \frac{BD}{\sqrt{۲}} \Rightarrow AB = AD = \frac{\sqrt{۳۷}}{\sqrt{۲}}$$

$$S_{BCD} \xrightarrow{\text{نکتهٔ ۳}} \frac{۱}{۲} \times BC \times CD = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱ = ۳$$

$$S_{ABD} \xrightarrow{\text{نکتهٔ ۳}} \frac{۱}{۲} AB \times AD = \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۳۷}}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۳۷}}{\sqrt{۲}} = \frac{۳۷}{۴}$$

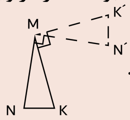
$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{۳۷}{۴} + ۳ = \frac{۴۹}{۴}$$

۲. حل مسئله به روش دوران

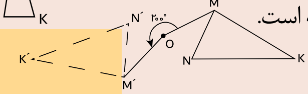
در مسئله خواسته شده است، مساحت چهار ضلعی ABCD را به دست آوریم.

نکته:

الف) اگر شکلی را حول نقطه‌ای و تحت زاویه‌ای دوران دهیم، شکل دوران‌یافته برابر (هم‌نهشت) با شکل اولیه خواهد بود (اندازهٔ زاویه‌ها، اندازهٔ ضلع‌ها، محیط، مساحت و ... تغییری نمی‌کنند).

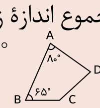


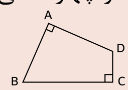
مانند شکل مقابل که در آن، مثلث $MN'K'$ حاصل دوران مثلث MNK حول مرکز M تحت زاویهٔ ۹۰ درجه است.



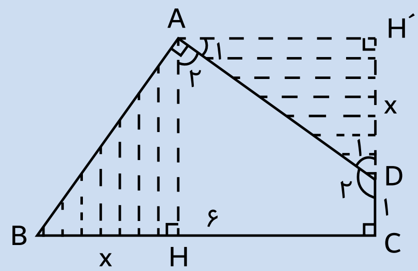
و یا: مانند شکل دوم که در آن، مثلث $MN'K'$ دوران‌یافتهٔ مثلث MNK تحت‌زاویهٔ ۲۰۰ درجه است.

ب) مجموع اندازهٔ زاویه‌های داخلی در هر چهار ضلعی برابر است با ۳۶۰ درجه؛





مانند: $\hat{C}+\hat{D}=۲۱۵^\circ$ و یا: $\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$.



● **راه‌حل اول**

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH را حول نقطهٔ A تحت زاویهٔ ۹۰ درجه در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا مثلث $\overset{\Delta}{ADH'}$ پدید آید. بنا به نکتهٔ الف داریم: $\overset{\Delta}{ABH}=\overset{\Delta}{ADH'}$ و در نتیجه: $BH=DH'$ و $AH=AH'$.

بنا به نکتهٔ ب داریم:

$$\hat{A}_۲+\hat{D}_۲=۱۸۰^\circ \quad (۱)$$

اما از طرف دیگر می‌دانیم:

$$\hat{D}_۱+\hat{A}_۱=۹۰^\circ \quad (۲)$$

و

$$\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ \quad (۳)$$

(AH' دوران یافتهٔ AH حول A تحت زاویهٔ ۹۰ درجه است.)

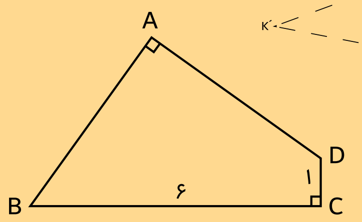
از (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم: $\hat{A}_۲=\hat{D}_۱$ که با توجه به (۱) داریم: $\hat{D}_۱+\hat{D}_۲=۱۸۰^\circ$. یعنی CD و DH' در یک امتداد هستند و چون اندازهٔ زاویه‌ها در چهارضلعی $AHCH'$ ۹۰ درجه است و دو ضلع مجاور AH و AH' برابرند، نتیجه می‌گیریم که $AHCH'$ یک مربع است.

$$CH=CH' \Rightarrow (۶-x)=(۱+x)$$

$$\Rightarrow x=۲/۵ \Rightarrow \text{اندازهٔ ضلع مربع}=\frac{۷}{۲}$$

$$S_{ABCD}=S_{ABH}+S_{AHCD}=S_{AHCD}+S_{ADH'}$$

$$=S_{AHCH'}=(\frac{۷}{۲})^۲=\frac{۴۹}{۴}$$



● **راه‌حل دوم**

چهار ضلعی ABCD را حول نقطهٔ A تحت زاویهٔ ۹۰ درجه در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا چهارضلعی $ADC'D'$ پدید آید.

با دوران ABCD حول A تحت زاویهٔ ۱۸۰ درجه $AD'C''D''$ حاصل می‌شود.

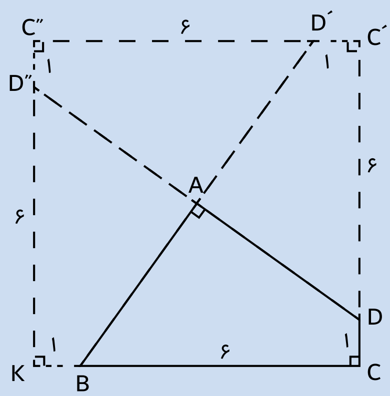
با دوران ABCD حول A تحت زاویهٔ ۲۷۰ درجه در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت $AD''KB$ پدیدار می‌شود.

تمرین:

۱. ثابت کنید CD و DC' در یک امتدادند و نتیجه بگیرید که $C'D'$ با $D'C''$ و نیز $C''D''$ با $D''K$ و در نهایت KB با BC در یک امتداد قرار دارند.

۲. نشان دهید $KCC'C''$ یک مربع است.

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۴}S_{KCC'C''}=\frac{۱}{۴}(۷)^۲=\frac{۴۹}{۴}$$



● **راه‌حل سوم**

در روش قبل فقط یک‌بار دوران ۹۰ درجه را انجام می‌دهیم که یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه خواهیم داشت:

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}S_{BCC'D'}=\frac{۱}{۲}\times(\frac{۶+۱}{۲})\times۷=\frac{۴۹}{۴}$$

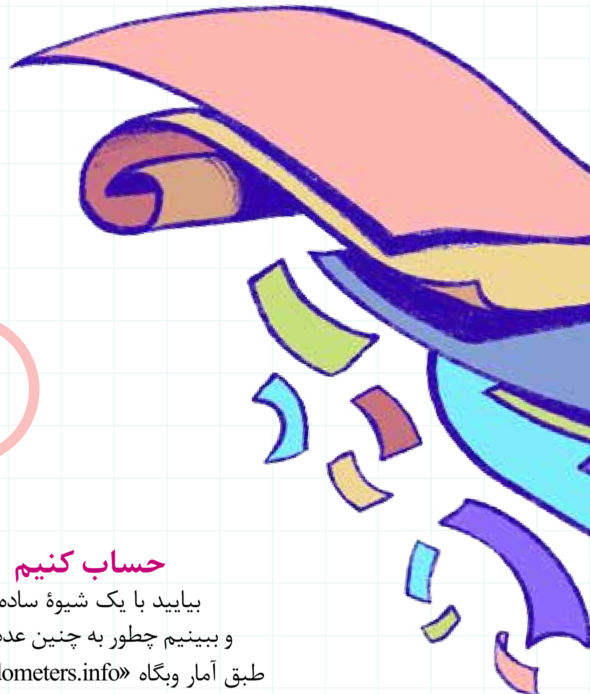
خسرو داودی

بیایید کمی فکر کنیم!
سیصد و شصت و پنج هزار کیلومتر **کاغذ کادو!**

کمی فکر کنیم

رسم هدیه دادن در بسیاری از کشورها و مذهب‌ها و آیین‌های متفاوت به مناسبت‌های گوناگون وجود دارد. در اسلام نیز به این کار توصیه شده است. برای تحکیم دوستی و ارتباطات، هدیه‌دادن یک سنت پسندیدهٔ الهی است. اگر بپذیریم که نفس هدیه‌دادن اهمیت دارد، باید مراقب باشیم که آداب و سنت‌های همراه آن به اصل موضوع غلبه نکنند. دست‌کم خوب است در این مورد کمی فکر کنیم. برای مثال، به این خبر که در شبکه‌های خبری کشور انگلستان در همین سال گذشته منتشر شد، توجه کنید: «بنا بر آمار شرکت مدیریت پسماند «بینا»، در بریتانیا ۳۶۵۰۰۰ کیلومتر کاغذ کادو در روزهای کریسمس دور ریخته می‌شود.»

یک بار دیگر متن خبر را بخوانید و در مورد ابعاد آن کمی فکر کنید. ۳۶۵۰۰۰ کیلومتر کاغذ کادو یعنی چه؟ این شرکت چگونه چنین آماری را به دست آورده است و چطور می‌توانیم حس بهتری نسبت به این موضوع داشته باشیم؟



حساب کنیم

بیایید با یک شیوهٔ ساده محاسبه کنیم و ببینیم چطور به چنین عددی می‌رسیم.
طبق آمار وبگاه «www.worldometers.info» در سال ۲۰۲۰ جمعیت بریتانیا ۶۷۸۸۶۰۱۱ نفر بوده است. فرض کنیم از این تعداد هر کدام یک هدیه دریافت کرده‌اند و فقط $\frac{1}{4}$ آن‌ها هدیه‌ای هم داده‌اند. به این ترتیب تعداد هدیه‌ها به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$1\frac{1}{4}\times 67886011 = 1/25\times 67886011 = 84357514$$

تعداد تقریبی هدیه‌های داده شده

فرض کنید برای هر هدیه یک عدد کاغذ کادو مصرف شده باشد. هر کاغذ کادو به طور معمول ۷۰×۵۰ سانتی‌متر است. پس هر کاغذ کادو ۷۰ سانتی‌متر طول دارد. بنابراین:

(طول کاغذ کادوها) سانتی‌متر $84357514\times 70 = 5905025980$

متر $5905025980 \div 100 = 59050260$

کیلومتر $59050260 \div 1000 = 59/050$

اگر بخواهیم به عدد مورد نظر نزدیک شویم، یا باید تعداد هدیه‌ها را افزایش دهیم و یا تعداد کاغذ مصرفی را بیشتر کنیم. بنابراین تعداد هدیه را ۳ برابر و تعداد کاغذ کادوهای مصرف شده برای هر هدیه را به‌جای یک عدد می‌توانیم ۲ تا کاغذ کادو در نظر بگیریم. پس:

$$1/25\times 3 = 3/75$$

یعنی به طور تقریبی چهار برابر تعداد جمعیت آن کشور هدیه تهیه شده است.

سانتی‌متر $70\times 2 = 140$

یعنی برای کادوی یک هدیه دو تا کاغذ کادو مصرف شده است.

سانتی‌متر $67886011\times 3/75\times 140 = 35640155775$

کیلومتر $35640155775 \div 100000 = 356401$

یعنی به همان عددی که شرکت بینا داده بود، نزدیک شدیم. طول کاغذ کادوها به طور تقریبی ۳۵۶۰۰۰ کیلومتر شده است. البته روش ارائهٔ آمار توسط آن شرکت با کاری که ما انجام دادیم، متفاوت است. آن‌ها آمار کاغذ کادوهای تولید شده توسط شرکت‌های متفاوت در بریتانیا و همچنین آمار واردات کاغذ کادو به بریتانیا را دارند و میزان فروش و مصرف کاغذ کادو در آمارهای آن‌ها وجود دارد. بنابراین با دقت بالاتری می‌توانند این نتایج را به‌دست آورند.

بیشتر فکر کنیم

به این موضوع از زاویه‌های مختلف می‌توان نگاه کرد. اول آنکه اهمیت به آمار و جمع‌آوری داده‌های دقیق برای برآوردهای کلان در یک کشور چقدر اهمیت دارد. داده‌های درست و دقیق زمانی که مورد توجه قرار می‌گیرند، نتایجی به بار می‌آورند که همه را به فکر وادار می‌کنند. در کشور ما هم «مرکز آمار ایران» وجود دارد، و امیدواریم شما دانش‌آموزان عزیز به اهمیت علم آمار و نقش تعیین‌کنندهٔ آن در تصمیم‌گیری‌ها و تصمیم‌سازی‌های کشور به تدریج پی ببرید. زمان پس از تحصیل و هنگام اشتغال به هر کاری، فراموش نکنید که اگر بخواهید کارتان را به طور درست و صحیح انجام دهید، باید درک درستی از آمار و اطلاعات مرتبط با کار خود داشته باشید.

مسئلهٔ دوم این است که این عدد ۳۶۵۰۰۰ کیلومتر کاغذ کادو مصرف شده فقط برای یک شب کریسمس در یک کشور حجم بسیار زیادی است. در ادامهٔ همان خبر آمده است که با این تعداد کاغذ کادو می‌توان هشت بار کل کرهٔ زمین را کادوپیچ کرد! حالا بزرگی این عدد برای شما بیشتر آشکار شد. اکنون بهتر می‌فهمید که چه مقدار کاغذ کادو در این کشور فقط برای هدیه دادن در یک شب مصرف شده است. (خوب است بدانید که با هر درخت به طور تقریبی ۸۳۳۳ برگه کاغذ A_4 تولید می‌شود.) همین موضوع را برای کشورهای دیگر از جمله آمریکا، کانادا، روسیه، اروپا و کشورهایی که کریسمس را به همین ترتیب جشن می‌گیرند و هدیه می‌دهند، توسعه دهید. آن‌ها چقدر کاغذ کادو مصرف می‌کنند؟ با این مقدار کاغذ کادو چند بار می‌توان کرهٔ زمین را کادوپیچ کرد؟

زاویهٔ سوم این است که: آیا مصرف این مقدار کاغذ کادو اسراف نیست؟ آیا حاشیهٔ موضوع از اصل آن مهم‌تر نشده است؟ اگر بخواهیم سنت عزیز و محترم هدیه‌دادن را کماکان حفظ کنیم، چه راه‌هایی برای جلوگیری از اسراف وجود دارد؟ چگونه می‌توانیم فرهنگ‌سازی درست داشته باشیم؟ واقعاً اگر یک هدیه را کادوپیچ نکنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟ آیا این کار ما بی‌احترامی به طرف مقابل است؟ از چه زمانی کادوکردن هدیه معنی احترام را پیدا کرده است که انجام‌ندادن آن نوعی بی‌احترامی محسوب شود؟

همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم، این موضوع ابعاد و زاویه‌های متفاوتی دارد که می‌توان به آن‌ها پرداخت و در مورد آن‌ها کمی فکر کرد.

گفت‌وگو با روزبه نوروزیان، خبرنگار امروز و مخاطب دیروز مجله

محمدحسین دیزجی

برهان ریاضی وسعت نگاه می‌دهد

اهل‌قلم است، نوشتن را درک می‌کند، مطالعه بخشی از زندگی اوست و با ریاضی هم رفاقت دارد. این ویژگی‌ها در کنار هم بهانه می‌شوند تا مجلهٔ برهان ریاضی را گسترده ببینند. در دبیرستان ریاضی- فیزیک خوانده و دانشگاه را در دورهٔ کارشناسی با مهندسی مکانیک به پایان برده است. متولد ۱۳۷۴ و فرزند ارشد خانواده است. پدر و مادرش هر دو اهل قلم بوده و هستند؛ یکی در حوزهٔ دانش ریاضی سال‌ها نوشته و تدریس می‌کند و دیگری مدت‌ها برای نوجوانان در رشتهٔ روان‌شناسی قلم زده است. روزبه نوروزیان راحت، صمیمی و صریح است. این گفت‌وگو را با هم می‌خوانیم تا بدانیم او چگونه بین ریاضی و نوشتن در حوزهٔ تخصصی خودرو ارتباط برقرار کرده است.

● کار و حرفهٔ فعلی شما چقدر با ریاضی در ارتباط است؟ یعنی آشنایی با دانش ریاضی تا چه اندازه در کار شما اثرگذار است؟

○ من شش سال است که خبرنگار هستم. خبرنگاری در حوزهٔ خودرو شاید در ظاهر خیلی با ریاضیات ارتباط نداشته باشد، اما اتفاقاً در باطن خود به این علم بسیار وابسته است. عددهایی که انجمن‌ها و مراکز برای سهم واردات، صادرات، تولید و بقیهٔ موارد اعلام می‌کنند، تمام و کمال به‌صورت خام ارائه می‌شوند. حداقل استفادهٔ ریاضیات در این شغل محاسبهٔ این داده‌ها برای ارائهٔ تحلیل است. علاوه بر این، استفاده از علم ریاضی برای برنامه‌ریزی، مدیریت امور و همچنین تعیین و تبیین راهبردهای کاری نیازی به مراتب مهم‌تر و پراهمیت‌تر از چهار عمل اصلی است که دانستن این علم می‌تواند به شما بدهد.

● در دوران مدرسه چقدر به مطالعهٔ مباحث درسی خارج از کتاب درسی توجه داشتید و دنبال یادگیری از طریق کتاب غیردرسی و مجله بودید؟

○ من در یک خانوادهٔ فرهنگی به دنیا آمده‌ام و به همین دلیل در طول سال‌های عمرم همیشه کتاب از اجزای جدایی‌ناپذیر زندگی‌ام بوده. اما در دوران مدرسه و حتی دانشگاه من بیشتر از هر چیز به شعر و ادبیات ماندگار (کلاسیک) علاقه داشتم و به همین دلیل همیشه در دورهٔ دبیرستان جزو شاگردان خوب در درس ادبیات فارسی شناخته می‌شدم. در دورهٔ دبیرستان معلمی داشتیم که ما را تشویق می‌کرد شعرهای **حافظ**، **سعدی**، **مولوی** و **فردوسی** را بخوانیم و یاد بگیریم. هر شعری که حفظ می‌کردیم و در کلاس می‌خواندیم، نمره‌ای داشت که قطعاً در امتحان پایان نیمسال کمکمان می‌کرد. در آن دوران من و خیلی از هم‌کلاس‌هایم حتی برای نمره هم شده، می‌نشستیم و شعر حفظ می‌کردیم. الان که بیش از یک دهه از آن روزها می‌گذرد، وقتی به حافظه‌ام رجوع می‌کنم، گنجینه‌ای بزرگ و ارزشمند از شعرهایی را می‌بینم که حفظ و یادگیری‌شان را اول مدیون فضای خانه و خانواده و بعد مدیون آن معلم گران‌قدر هستم.

● مجلهٔ رشد ریاضی برهان مطالب متنوعی دارد. شما اصولاً در وهلهٔ اول سراغ چه مطالبی در یک مجله می‌روید و چرا؟

○ معمولاً قسمت دانستنی‌ها را بیشتر از بقیهٔ قسمت‌ها می‌خواندم.

● به نظر شما یادگیری از طریق مجله و کتاب غیردرسی چه تفاوتی با یادگیری از طریق کتاب درسی دارد؟

○ کتاب‌های درسی در نظام آموزشی کشور ما بیشتر جنبهٔ اجباری دارند و آموزش همگانی را پوشش می‌دهند. کتاب‌های درسی شالوده‌ای از همه‌چیز هستند که مانند اقیانوسی به عمق یک سانتی‌متر، می‌توانند تصویری جامع از همه‌چیز را به خواننده نشان دهند، اما دانش کسب‌شده از کتاب‌های درسی عمق ندارد.

برای عمیق‌ترشدن در هر علمی همیشه باید علاوه بر کتاب‌های درسی(مدرسه یا دانشگاه) به سراغ مطالعهٔ جانبی هم رفت.

● در دوران مدرسه وضعیت درس ریاضی شما چطور بود و معمولاً چه نمره‌هایی می‌گرفتید؟

○ من هیچ‌وقت شاگرد اول نبودم، ولی شاگرد آخر هم نبودم! ریاضی‌ام همیشه متوسط رو به بالا بود، چرا که همیشه در یادگیری این درس به روش حفظ‌کردن فرمول‌ها و داده‌ها که از قضا روش اصلی آموزش در مدرسه‌هاست، مشکل داشتم. از نظر من هر علمی از جمله ریاضیات یک سلسله ظواهر دارد که عموماً در مدرسه‌ها و بر اساس کتاب‌های درسی مجبور هستند به آن‌ها بپردازند. در حالی که دانش ریاضیات از دید من با آنچه که در مدرسه یاد می‌گرفتیم، کاملاً متفاوت است.

● اگر دوست دارید، از یکی از معلمان درس ریاضی خودتان که در ایجاد علاقهٔ شما به این درس نقش داشته است، یاد کنید و بفرمایید چرا این شخص در زمینهٔ علاقهٔ شما به ریاضی مؤثر بوده است؟

○ سال اول دبیرستان یک دبیر ریاضی داشتیم که نامش را به خاطر ندارم. وقتی اولین بار سر کلاس او نشستم، احساس کردم تمام پیچیدگی‌هایی که در دورهٔ راهنمایی در درس ریاضی احساس می‌کردم، همه پوچ و بی‌اساس بوده‌اند. متوجه شدم که من این مباحث را بد یاد گرفته‌ام و یا شاید بد آموزش دیده‌ام. اما وقتی این دبیر شروع به درس‌دادن کرد، به مرور متوجه شدم مسئله‌های ریاضی آن‌قدرها هم که من فکر می‌کردم سخت نیستند.

● برخی این تصور را دارند که ریاضی درسی فرمولی و خشک است و خیلی در زندگی کاربرد ندارد. نظر شما چیست؟

○ همان‌طور که قبل‌تر هم اشاره کردم، از نظر من ظاهر ترسناک و پر از فرمول ریاضیات اصلاً با باطن آن قابل مقایسه نیست. وقتی شما مجبور باشید تمام روابط انتگرال‌ها را از حفظ بنویسید، قطعاً یادگیری این علم برای شما سخت و منزجرکننده خواهد بود. اما وقتی بدانید در مسیر این محاسبه‌های پیچیده چه چیزی را محاسبه می‌کنید، یادگیری آن روابط سخت و پر از قاعده برای شما معنی پیدا خواهد کرد.

● چطور شد شما برای ادامهٔ تحصیل در دانشگاه رشتهٔ مکانیک را انتخاب کردید و تا دورهٔ تحصیلی لیسانس پیش رفتید؟

○ انتخاب رشتهٔ دانشگاهی من بر اساس تصوراتی بود که در ذهنم داشتم. همیشه دوست داشتم صنعتگر بشوم. وقتی در دوران مدرسه در تلویزیون یک مستند یا فیلم و حتی گزارش خبری در مورد یک کارخانه می‌دیدم، احساس خوبی پیدا می‌کردم. برای همین به سراغ مهندسی مکانیک رفتم. در سال دوم تحصیل از سر ذوق به یکی از شرکت‌های بزرگ خودروسازی رفتم و چند دورهٔ تخصصی در مراکز آموزشی‌شان را پشت سر گذاشتم. این دوره‌ها دید و نگاه مرا نسبت به این رشته اصلاح کردند.

● نظرت به‌طورکلی دربارهٔ مطالعه چیست؟ چه در دوران تحصیل و چه در زمانی که دیگر کاری با درس و دانشگاه نداریم.

○ بدن انسان برای زنده‌ماندن به غذا و آب نیاز دارد و روح انسان هم برای زنده‌ماندن به مطالعه، دیدن فیلم، نقاشی و انواع و اقسام فعالیت‌های فرهنگی نیاز دارد. از دید من مفهوم مطالعه با درس خواندن متفاوت است و نباید این دو مورد را با هم یکی دانست. من همیشه مطالعه می‌کردم و اکنون هم که شغلم به خبر و اطلاع‌رسانی مربوط است، باید بیش از پیش مطالعه داشته باشم.

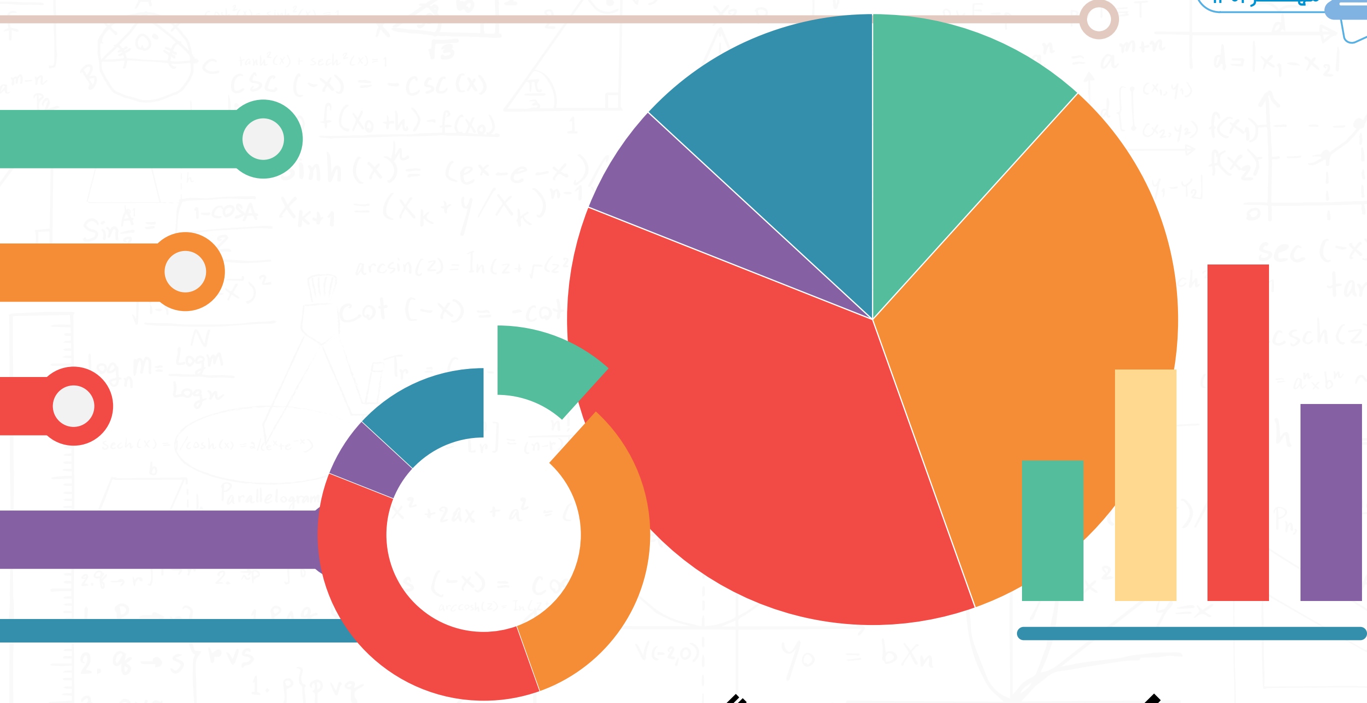
آیا در طول دوران تحصیل هیچ‌وقت به کسی درس هم داده‌اید؟ منظورم بیشتر در حوزهٔ ریاضی است.

○ من بیشتر به برادرم در مدرسه و دانشگاه، در زمینهٔ ریاضی کمک کردم. این تجربه و تسلط در آموزش ریاضی را مدیون همان دبیر ریاضی دورهٔ دبیرستانم هستم که خوب آموزش داد و مباحث در ذهن من ماندگار شدند.

● نسبت به مجلهٔ رشد ریاضی برهان چه نگاهی دارید؟

○ از نظر من مجلهٔ رشد ریاضی برهان، به‌عنوان نشریه‌ای نیمه‌تخصصی در حوزهٔ علم و دانش، رسالت بزرگی دارد که آن را به‌خوبی انجام داده است. این رسالت چیزی جز تغییر دیدگاه مخاطبان در زمینهٔ نگاه به علم ریاضیات نیست. کتاب‌های درسی به ما یاد می‌دهند که معادلات پیچیده و دستورالعمل‌های سخت را برای حل مسائل یاد بگیریم، اما رسالت چنین نشریاتی با رسالت کتاب‌های درسی بسیار متفاوت است. نگاه به ریاضیات با دید کاربردی بودنشان باعث می‌شود خواننده با مطالعهٔ این مطالب متوجه شود که آن معادله‌های سخت چه کاربردی دارند. عموماً در مدرسه و دانشگاه برنامه‌ریزی درسی به این صورت است که صرفاً یک علم را در قالب یک کتاب و یک عنوان به دانش‌آموز یا دانشجو یادمی‌دهند و یادگیرنده هم گاه از سر علاقه و یا بعضاً برای گرفتن نمره این روابط و معادله‌ها را یاد می‌گیرد یا حفظ می‌کند. نشریاتی مثل رشد ریاضی برهان در تمام این سال‌ها تلاش کرده‌اند دیدگاه خواننده را در مورد این مسائل وسیع کنند. وقتی خواننده بداند برای رسیدن به چه جوابی، این معادله‌های پیچیده را یاد می‌گیرد، این وسعت دید در نگاه به موضوع‌های تخصصی، در یادگیری‌اش تأثیر مثبت می‌گذارد و احتمالاً دیگر نمی‌پرسد «انتگرال کجای زندگی کاربرد دارد؟!»

● موفقیت‌های روزافزون برایتان آرزو داریم.



مرتب کنید، نتیجه بگیرید (قسمت اول)

روح‌الله خلیلی‌بروجنی

«داده‌ها»[۱] اطلاعاتی[۲] هستند که از نتایج آزمایش‌ها جمع‌آوری می‌کنیم. در اغلب موارد، داده‌های به‌دست‌آمده از آزمایش شامل مقدارهایی (عدد و یکا) هســتند که با اندازه‌گیری به دست آمده‌اند. برای مثال، وقتی طول کتابی را به کمک خط‌کش میلی‌متری اندازه می‌گیریم، مقدار[۳] به دست‌آمده به صورت ۲۳۴ mm بیان می‌شــود که این مقدار شــامل عدد (۲۳۴) و یکا (mm) می‌شود. سازمان‌دهی داده‌ها در جدول‌ها یا نمودارها (چارت‌ها) به ما کمک می‌کند درک بهتر و ســریع‌تری از تغییرات پیدا کنیم و الگوها و روندها را مشخص سازیم.

جدول

انتخــاب جدول[۴] به نوع داده‌هایی که جمع‌آوری کرده‌ایم بســتگی دارد. جدول‌ها برای ســازمان‌دهی داده‌ها و همچنین انجام محاسبات ساده، و مقایســهٔ مقدارهای میانگین مفیدند. جدول ۱ نتایج آزمایش اثر افزودن وزنه‌هایی با جرم‌های متفاوت را به یک ماشــین اســباب‌بازی و اثر این تغییرات را روی شتاب ماشین نشان می‌دهد.

متغیر مستقل

متغیر وابسته

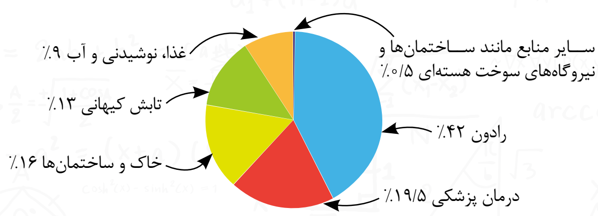
جرم اضافه شده به ماشین (kg)	شتاب ($\frac{m}{s^2}$)			
	آزمایش اول	آزمایش دوم	آزمایش سوم	میانگین
۰/۵	۹/۹	۱۰/۲	۱۰/۱	۱۰/۱
۱/۰	۶/۸	۸/۸	۶/۶	۶/۷
۱/۵	۵/۲	۴/۸	۵/۱	۵/۰

جدول‌ها بــه ما کمک می‌کنند داده‌هــای **غیرطبیعی** را تشــخیص دهیم. این مقدار از مقدارهای دیگر خیلی متفاوت است و ممکن است اشتباه باشد. این مقدار هنگام محاسبهٔ میانگین نادیده گرفته شد.

جدول ۱. نتایج آزمایش اثر افزودن وزنه‌هایی با جرم‌های متفاوت به یک ماشین اسباب‌بازی

نمودار دایره‌ای

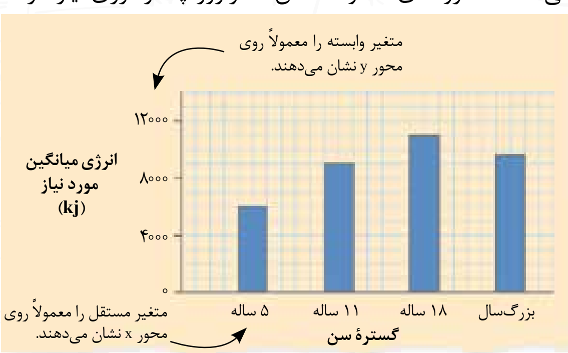
از نمودارهای دایره‌ای[۵] معمولاً برای نشان‌دادن درصد یا مقایسهٔ نسبت مقدارها استفاده می‌کنیم. مثلاً نمودار دایره‌ای ۱، برآوردی جهانی از تابش دریافتی است. همان‌طور که دیده می‌شود انسان این تابش را از منابع متفاوت دریافت می‌کند.



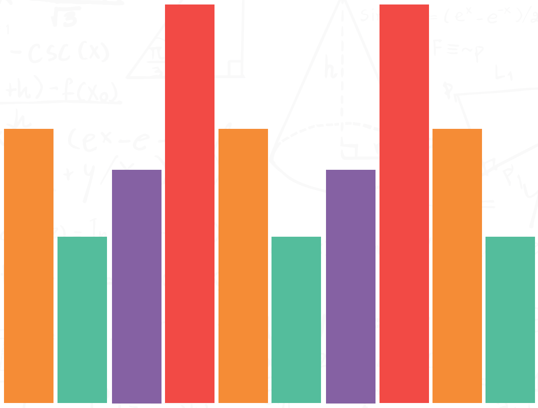
نمودار ۱. نمودار دایره‌ای

نمودار میله‌ای

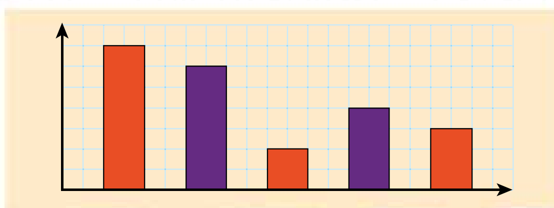
زمانی از نمودار میله‌ای[۶] اســتفاده می‌کنیم که متغیر مستقل مورد بررســی گسسته باشد. برای مثال در نمودار ۲، نمودار میله‌ای نشان می‌دهد که گروه‌های متفاوت انسان‌ها هر روز چقدر انرژی نیاز دارند.



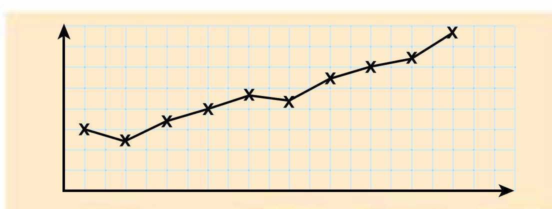
نمودار ۲. مقدار انرژی مورد نیاز روزانهٔ انسان



متغیرهای گسسته و پیوسته: متغیرهای گسسته[7] متغیرهایی هستند که فقط می‌توانند مقدار مشخصی داشته باشند؛ مانند تعداد دانش‌آموزان یک کلاس که فقط می‌تواند یک عدد طبیعی معین باشد. در حالی که متغیر پیوسته[8] می‌تواند هر مقداری داشته باشد؛ مانند طول قد و وزن دانش‌آموزان یک کلاس. نمودارهای ۳ و ۴ به ترتیب یک متغیر گسسته و یک متغیر پیوسته را به نمایش گذاشته‌اند و می‌توان آن‌ها را با هم مقایسه کرد.



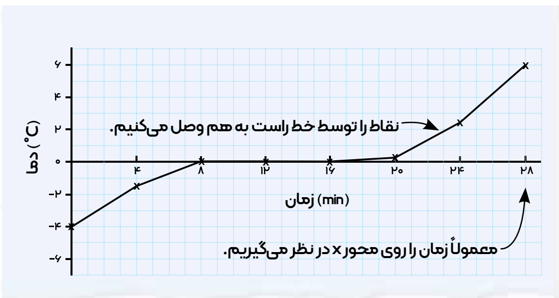
نمودار ۳. متغیر گسسته



نمودار ۴. متغیر پیوسته

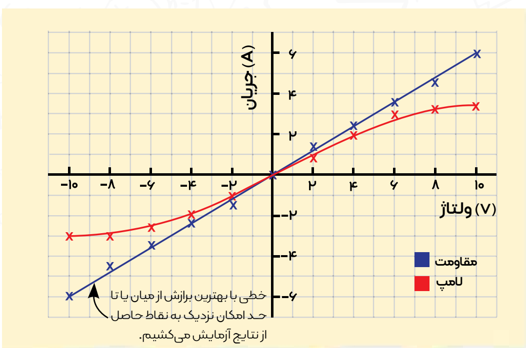
نمودار خطی

هنگامی از نمودارهای خطی[9] استفاده می‌کنیم که مقدارهای مربوط به هر دو محور به طور مداوم تغییر می‌کنند. در علوم معمولاً یکی از متغیرها زمان است که آن را روی محور x در نظر می‌گیریم. نمودار ۵ نمودار چگونگی تغییر دمای یک قطعه یخ را در حال دریافت گرما با گذر زمان نشان می‌دهد.



نمودار ۵. چگونگی تغییر دمای یک قطعه یخ در حال دریافت گرما

نمودارهای پراکندگی: معمولاً از نمودار پراکندگی[10] برای بررسی رفتار یک رابطه استفاده می‌کنیم. برای مثال در علوم هشتم با رابطهٔ مربوط به قانون اهم ($I = \frac{V}{R}$) آشنا شده‌ایم. اگر جریان عبوری (I) از مقاومت (R) را روی محور y و تغییرات ولتاژ (V) را روی محور x در نظر بگیریم، در این صورت نمودار I-V نشان می‌دهد چگونه جریان عبوری از یک مقاومت با تغییرات ولتاژ تغییر می‌کند. در نمودار ۶، نمودار پراکندگی نشان می‌دهد که چگونه جریان عبوری از یک مقاومت و یک لامپ با تغییر ولتاژ تغییر می‌کند. اگر نقطه‌های به‌دست‌آمده مربوط به نتایج آزمایش هنگام رسم روی نمودار، یک الگوی واضح مانند یک خط تشکیل دهند، می‌گوییم متغیرها هم‌بسته هستند. در این صورت، خط راست یا منحنی‌ای که از این نقطه‌ها عبور می‌کند، بهترین خط یا منحنی برازش‌شده از میان نقطه‌ها را به دست می‌دهد.

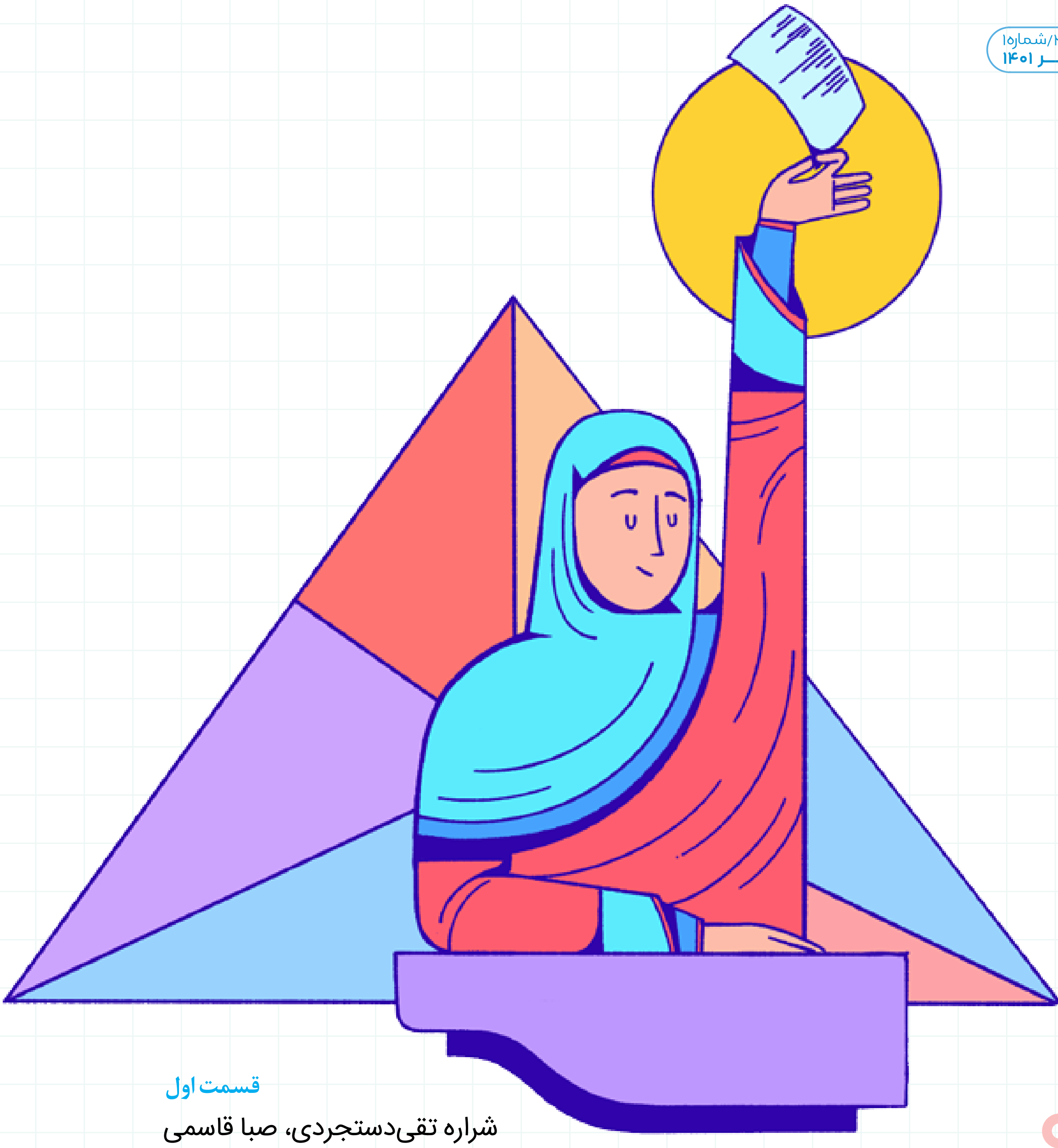


نمودار ۶. تغییر جریان عبوری از یک مقاومت و یک لامپ، با تغییر ولتاژ

ادامه دارد...

پی‌نوشت‌ها

1. data
2. information
3. quantity
4. table
5. pie charts
6. bar charts
7. discrete variables
8. continuous variables
9. line graphs
10. scatter graphs



قسمت اول

شراره تقی‌دستجردی، صبا قاسمی

استدلال‌های غلطِ درست‌نما

● روز امتحان:
یک بار دیگر پاسخ تمام مسائل را بازبینی کرد. به نظرش همه چیز درست بود. سرش را بالا گرفت و پر غرور گفت: «اجازه، می‌توانم برگه‌ام را بدهم؟»
– همهٔ مسئله ها را حل کردی؟
– بله، تمام شد.
– می‌خواهی یک دور دیگر جواب‌هایت را بخوانی؟
– اجازه، بازبینی کردم.
– بسیار خب. می‌توانی برگه‌ات را بدهی.
رها سربلند از اینکه که زودتر از همه امتحان ریاضی‌اش را تمام کرده و به تمام سؤال‌ها هم جواب داده است، برگه‌اش را تحویل داد و از کلاس بیرون رفت.

● یک هفته بعد:
معلم در حال پس‌دادن برگه‌های بچه‌ها بود و اسم بچه‌ها را یکی‌یکی می‌خواند. قلب رها داشت تندتند می‌زد. منتظر بود تا معلم صدایش کند. خبر نداشت که قرار است آخرین نفری باشد که برگه‌اش را تحویل می‌گیرد. بالاخره معلم اسمش را خواند. رها با عجله به سوی معلم رفت. وقتی چشمش به نمرهٔ ۱۶ افتاد که با خودکار قرمز گوشهٔ چپ برگه نوشته شده بود، همان‌جا خشکش زد. انگار که کسی یک سطل آب یخ روی سرش ریخته باشد. رها ابداً انتظار چنین نمره‌ای را نداشت. او همهٔ سؤال‌ها را پاسخ داده بود. چطور ممکن بود چنین نمره‌ای بگیرد؟!
اگر چه احساس خشم توأم با غم از اعماق وجودش موج می‌زد، اما هنوز در دلش کور سوی امیدی بود که شاید معلم اشتباه کرده باشد. برگه را گرفت و رفت به سمت نیمکتش. هنوز دو قدم بیشتر نرفته بود که معلم با صدایی نه چندان بلند گفت: «رها زنگ تفریح بمان تا صحبت کنیم.»

برای هر کدام از ما این امر پیش آمده است که به خیال خودمان مسئله‌ای را حل کرده‌ایم، اما بعد فهمیده‌ایم که حل مسئلهٔ ما پذیرفته نشده است.

فکر می‌کنید مشکل از کجاست؟

معمولاً چه اشتباه یا اشتباه‌هایی می‌کنیم که استدلالمان درست از آب در نمی‌آید؟

...

می‌خواهیم در این شماره و چند شمارهٔ بعد به پرسش‌های بالا بپردازیم؛ شاید بتوانیم برخی از ریشه‌های اشتباه‌هایمان را در استدلال‌ها بیابیم. استدلال‌هایی که غلط‌اند، اما درست به نظر می‌رسند.

به ادعای زیر توجه کنید:

«همهٔ مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند!»

همهٔ ما می‌دانیم که این ادعا نادرست است، اما برای چند لحظه تصور کنید که از نادرستی آن اطلاعی ندارید. قرار است شما استدلال کسی را که تلاش کرده است این ادعا را ثابت کند، بررسی کنید. اما پیش از آنکه استدلال ادعای بالا را بخوانیم، بهتر است کمی دربارهٔ «استدلال‌کردن» بیندیشیم.

شاید بتوان استدلال‌کردن را به ساختن یک ساختمان تشبیه کرد. همان‌طور که واضح است برای ساختن ساختمانمان به مصالح نیاز داریم، در ساختمان استدلالمان هم موادی نیاز داریم که یکی از آن‌ها «دانش قبلی»مان است. البته این موضوع فقط در مورد استدلال‌های ریاضی درست نیست، بلکه برای هر استدلالی به جمله‌هایی نیاز داریم که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم. این جمله‌ها درست در حکم آجرهای محکمی هستند که با خیال راحت می‌توانیم آن‌ها را روی هم بچینیم و ساختمانمان را بالا ببریم. برای مثال در استدلالی که برای ادعای بالا می‌آوریم، از قضیه‌های متفاوتی استفاده شده است؛ از جمله:

- هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.
- هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از ضلع‌های آن زاویه فاصلهٔ یکسانی دارد.

به عنوان دست‌گرمی اثبات این دو قضیه را بنویسید ☺

همان‌طور که دیدید، این دو قضیه بر اساس «قضیه‌های هم‌نهشتی مثلث‌ها» اثبات می‌شوند، اما خودِ قضیه‌های هم‌نهشتی مثلث‌ها بر اساس قضیه‌های دیگری اثبات می‌شوند که آن‌ها هم درست هستند و این روند ادامه پیدا می‌کند تا به اصولی برسیم که بدون اثبات آن‌ها را می‌پذیریم.

برگردیم به ادعایمان:

«همهٔ مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند!»[1]

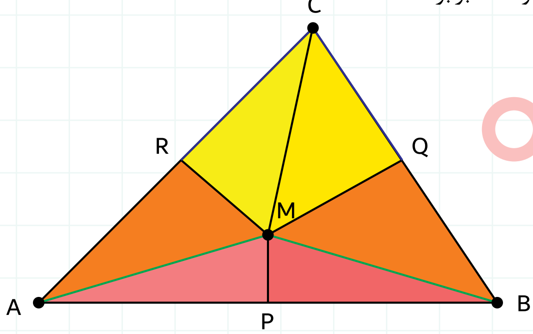
و اما استدلال:

۱. یک مثلث دلخواه در نظر بگیرید و آن را ABC بنامید.

۲. نیمساز زاویهٔ C را رسم کنید.

۳. خط عمودمنصف ضلع AB را رسم کنید. خط AB و نیمساز زاویهٔ C یکدیگر را در نقطهٔ M قطع می‌کنند.

۴. حالا از نقطهٔ M بر ضلع‌های AC و BC نیز عمود می‌کنیم تا این دو ضلع را به ترتیب در نقطه‌های R و Q قطع کنند. از آنجا که M روی نیمساز زاویهٔ C قرار دارد، پس پاره خط‌های MQ و MR برابرند.



دو مثلث قائمه‌الزاویهٔ RMC و QMC به حالت وتر و یک ضلع هم‌نهشت هستند. بنابراین اجزای متناظرشان نیز با هم برابرند. پس داریم: RC= QC.

از طرف دیگر، چون M نقطه‌ای از عمودمنصف ضلع AB است، پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MAP و MBP نیز به حالت وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند. بنابراین: AR=QB.

از آنجا که داریم: AC=AR+RC و BC=BQ+QC، پس: AC=BC.

در نتیجه، مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

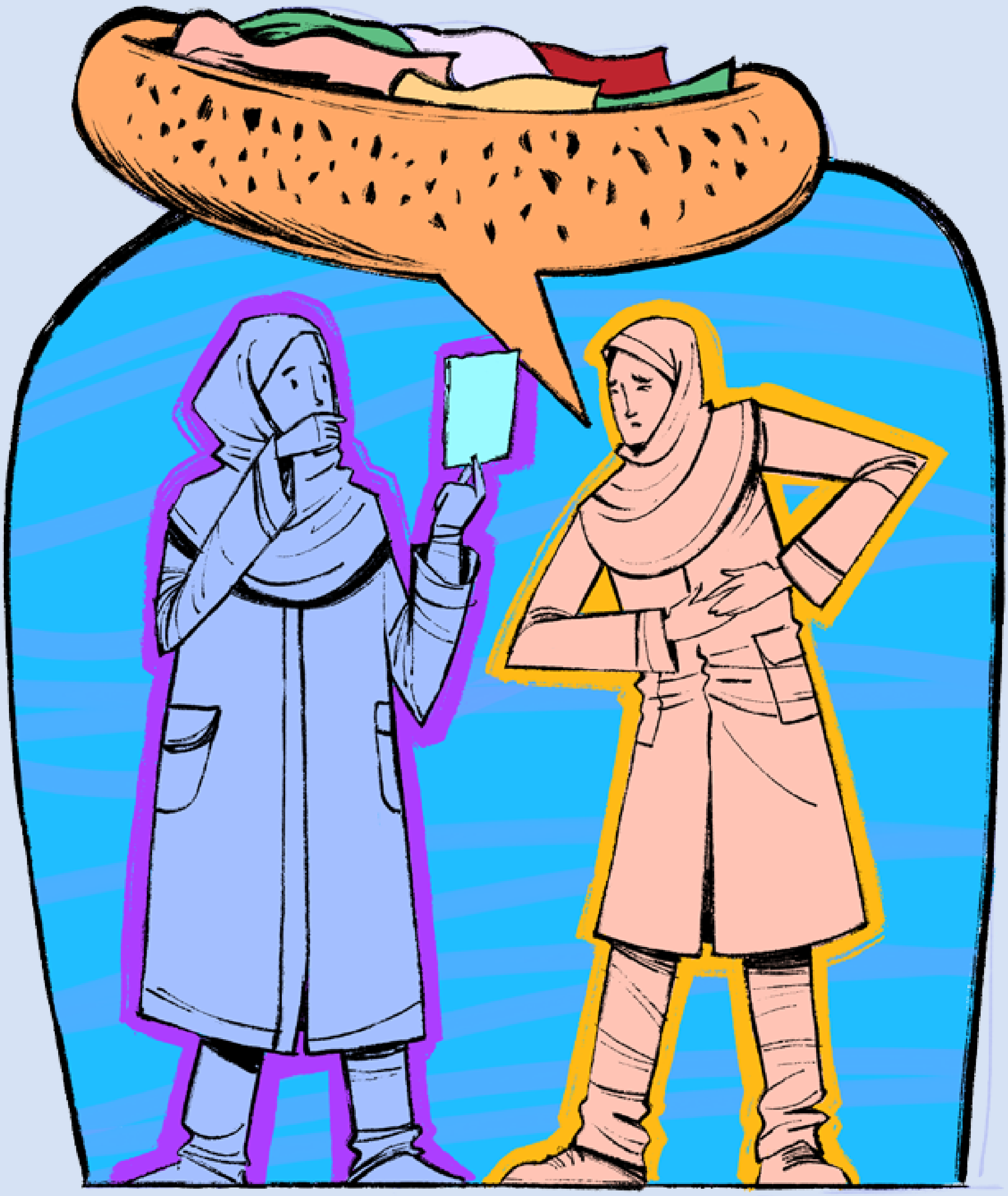
هیچ یک از ما باور ندارد که این استدلال درست باشد. اما به نظر شما کجای کار اشتباه است که چنین نتیجهٔ به‌وضوح نادرستی را به دست می‌دهد؟

دقت کنید که برای تشخیص خطای این استدلال به مرحله‌های اثبات دقت کنید، نه اینکه بخواهید دقت شکلی را که کشیده شده است بررسی کنید! کسی که بتواند خطای آن را تشخیص دهد، منشأ مهمی از خطاهای ممکن در استدلال‌های ریاضی را درک می‌کند.

ادامه دارد ...

پی‌نوشت

۱. این استدلال از وبگاه /https://mathematik.com/Isoscele گرفته شده است.



داستان‌های مریم

داستان اول: دستگاه

محرم ایردموسی

۲۰ دقیقه مانده بود به زنگ تفریح. صبح دیر پا شدم و مجبور شدم دست و رو نشسته راه بیفتم به سمت مدرسه. هنوز چشم‌هایم پف داشتند. مادرم یک لقمه نون و پنیر داد دستم تا توی راه بخورم. نفهمیدم کی لقمه را خوردم. اما یک دقیقه دیرتر رسیدم مدرسه و ناظم برگهٔ جریمه را گذاشت کف دستم و گفت «تا زنگ تفریح آخر وقت داری و گرنه...» گفتم: «چشم خانوم. حتماً جریمه‌ام را پرداخت می‌کنم!»

اما الان به فکر پرداخت جریمه نبودم. چند دقیقه به زنگ تفریح اول مانده بود و من به فکر این بودم که چیزی برای خوردن پیدا کنم. باور کنید شکمو نیستم. یک لقمه نون و پنیر جواب‌گوی فسفری که ساعت اول توی درس ریاضی سوزاندیم را نمی‌داد. البته ریاضی من بدک نبود. روی همین حساب هیچ وقت گرسنه نمی‌ماندم!

درینگ درینگ! زنگ تفریح چقدر گوش‌نواز و موزون بود برای ما. برای معلم‌هایمان هم همین‌طور. چرا که برای ۲۰ دقیقه‌ای از اعجوبه‌هایی مانند ما خلاص می‌شدند و تجدیدقوا می‌کردند. گفتم تجدیدقوا. من هم باید تجدیدقوایی می‌کردم. زنگ که خورد مثل فشفشه خودم را رساندم به دستگاه! لابد می‌پرسید: «کدام دستگاه؟ مگه تو مدرسه بوفه ندارید؟»

باید بگویم متأسفانه یا خوش‌بختانه ما توی مدرسه بوفه نداریم. یا باید از خانه خوراکی و غذا بیاوریم، یا از دستگاه خودکاری که توی راهرو هست غذا و خوراکی بخریم؛ آن هم با چه مبالغی!

وقتی رسیدم به دستگاه، تنها یک نفر در صف بود؛ آن هم رویا دوست صمیمی‌ام. گفتم: «رویا چی می‌خواهی بخری؟ دوباره لیموناد می‌خواهی؟»

رویا عاشق لیموناد بود. برعکس او من خوراکم دوغ بود. گفت: «آره تشنمه. تو چی می‌خواهی؟» گفتم: «من صبحانه نخوردم. به یک لقمه‌پیچ هم قانعم.» رویا دکمهٔ شمارهٔ ۴ را زد. من چون لقمه‌پیچ پنیر و گردو می‌خواستم، باید دکمهٔ ۲ را می‌زدم که گران‌تر بود. رویا منتظر شد تا دستگاه برگهٔ کاغذی سفارش را بدهد بیرون. رویا برگه را که خواند، اخم‌هایش رفت توی هم. گفتم: «بده ببینم. تا منو داری غم نداری. با هم یه کاریش می‌کنیم.»

برگه را گرفتم. مبلغ آن این بود:

«اگر از یک کتاب چند صفحه را جدا کنید و شمارهٔ صفحهٔ اول ۱۸۳ باشد و بدانید که صفحهٔ آخری که کنده شده، عددی با همان رقم‌های ۱، ۳ و ۸ است، شمارهٔ صفحهٔ آخر کنده شده چند است؟»

رویا سکوت کرده بود و تکان هم نمی‌خورد. این عادتش بود. وقتی روی مسئله یا معمایی فکر می‌کرد، مثل مجسمه می‌شد. گفتم: «صبر کن من هم سفارشم رو بدم. بعد دوتایی یه کاری ...»

دکمهٔ ۲ را زدم. وقتی مبلغ برگهٔ خرید رویا چنین معمایی بود، لابد دستگاه، برای من حدس‌فرما را می‌داد بیرون! برگه را گرفتم و مبلغ آن را خواندم:

«دو تا مربع داریم که اندازهٔ ضلع آن‌ها عددهای طبیعی هستند. مجموع مساحت آن‌ها کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟ ۲۰۰۰۳، ۲۰۰۰۷، ۲۰۰۱۱، ۲۰۰۲۵»

اعتراف می‌کنم که مبلغ برگهٔ خرید من هم بالا بود، اما من عاشق معما بودم. دو دقیقه از زنگ تفریح گذشته بود و ما هنوز تشنه و گرسنه بودیم. به رویا گفتم: «اول معمای من را حل کنیم که واجب‌تره. معده‌ام داره سوراخ می‌شه، تو که نمی‌خوای بهترین دوستت را از دست بدی»

خندید و گفت: «به شرطی که من هم به لیمونادم برسم.»

جواب مثبت دادم و دوتایی رفتیم تو نخ معمای من. رویا گفت: «اگه ضلع مربع‌ها را a و b بگیریم، مساحت آن‌ها a^2 و b^2 خواهد شد و مجموع مساحت‌ها برابر a^2+b^2 می‌شود.»

در واقع رویا صورت معما را فرمول‌بندی کرد. گفتم: درسته. حالا باید ببینیم کدام‌یک از این چهار عدد به شکل a^2+b^2 هستش.»

رویا گفت: «این چهار عدد همگی فرد هستن. پس یکی از دو عدد a و b فرده و دومی زوجه.»

گفتم: «درسته. مربع عدد زوج همیشه مضرب ۴ می‌شه، اما مربع عدد فرد رو نمی‌دونم چه شکلیه.»

رویا گفت: «بهتره رو عددهای کوچک امتحان کنیم» بعد روی کاغذ این‌ها را نوشت: ۱، ۹، ۲۵، ۴۹، ۸۱. در واقع داشت مربع عددهای فرد را می‌نوشت. یک دفعه چشم‌هایش برق زد و گفت: «همهٔ این‌ها باقی‌مانده‌هاشون به ۴ برابر ۱هست. پس اگر همیشه این‌طور باشه، جمع مربع یک عدد فرد و مربع یک عدد زوج باید باقی‌مانده‌اش بر ۴ برابر ۱ باشد.»

رویا تقریباً مسئله را حل کرده بود. گفتم: «الحق که دوست خودم هستی. پس از این عددها ۲۰۰۰۳، ۲۰۰۰۷ و ۲۰۰۱۱ نمی‌تونند مجموع دو مربع باشند و تنها عدد ۲۰۰۲۵ می‌مونه.»

دیگر منتظر نشدم که رویا تأیید کند. دویدم سمت دستگاه و فیشم را وارد کردم. معما که روی صفحهٔ لمسی دستگاه آمد، عدد ۲۰۰۲۵ را انتخاب کردم. دستگاه سروصدایی کرد و لقمه‌پیچ پنیر و گردوی بسته‌بندی شده از قسمت پایین دستگاه نمایان شد. با خوش‌حالی آن را برداشتم و رفتم سمت رویا. پنج دقیقه وقت داشتیم. هم باید به شکم می‌رسیدم و هم مغزم را به کار می‌انداختم. به رویا اشاره کردم که صورت معمایش را یک بار دیگر بلند بخواند.

معمای رویا قشنگ بود و ساده. در حالی که اولین لقمه را می‌دادم پایین، گفتم: «رویا جان اگر ۲۰ برگ از کتاب رو کنده باشیم، تعداد صفحه‌ها می‌شه ۴۰=۲۰×۲. چون هر برگ دو صفحه داره. پس تعداد صفحه‌های کنده شده همیشه زوجه. حالا اگر صفحهٔ اول فرد باشه، یعنی ۱۸۳، باید صفحهٔ آخر کنده شده زوج باشه؛ یعنی... »

رویا نگذاشت جمله‌ام به آخر برسه. دوید سمت دستگاه و کد روی فیشش را وارد کرد. روی صفحهٔ لمسی دستگاه عددهای ۱۳۸، ۳۱۸، ۳۸۱، ۸۱۳، ۸۳۱ ظاهر شدند. رویا عدد ۳۱۸ را انتخاب کرد. واکنش دستگاه یک بطری لیموناد خنک بود که رویا تنها دو دقیقه‌ای برای نوشیدن آن وقت داشت.

صبحانهٔ من تقریباً تموم شده بود که خانم ناظم زد پشتم و گفت: «نوش جان دخترهای گلم. مریم جان برگهٔ جریمه‌ات یادت نره!»

گفتم: «چشم خانوم.» و توی دلم گفتم: «وقت بسیار است.»

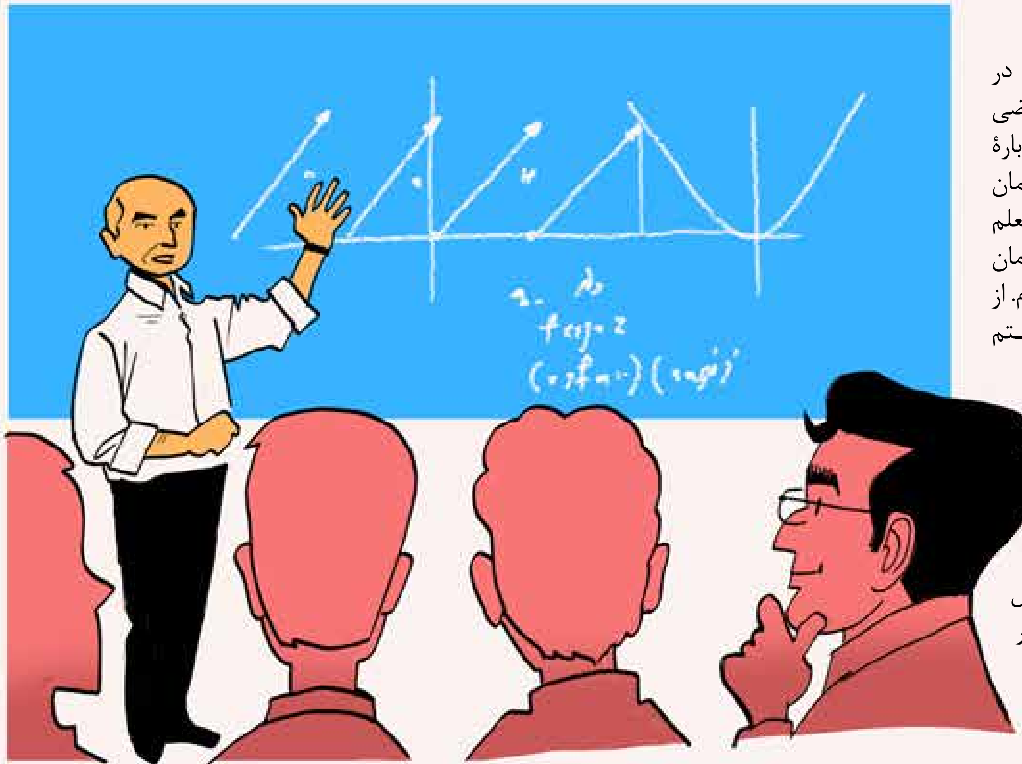
اما روی برگهٔ جریمه نوشته بود کد ۱.

رویا گفت: «خودم هواتو دارم. زنگ تفریح بعدی دوتایی جریمه‌ات رو صاف می‌کنیم!»

مطمئن بودم من و رویا گروه خوبی هستیم!

همگام با ستارگان
آیا او را می‌شناسید؟

آرش رستگار ● تصویرگر: سام سلماسی

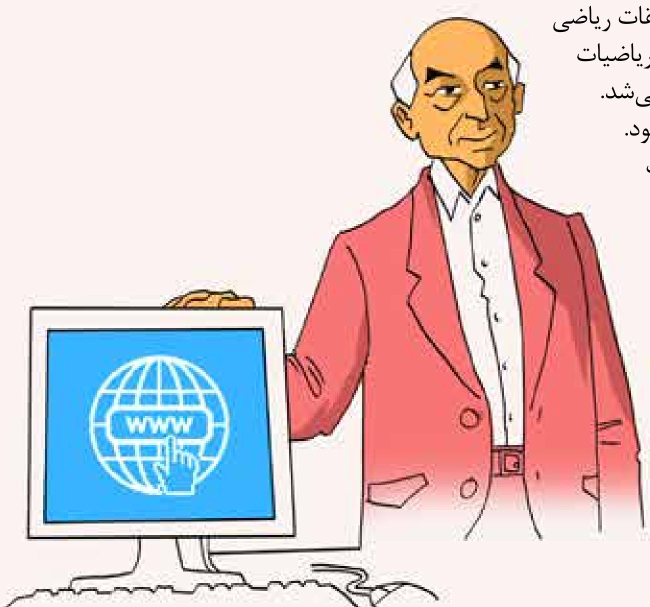


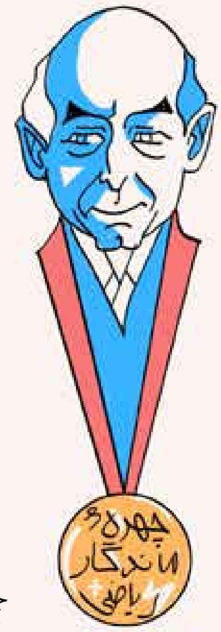
سی‌وسه سال پیش، وقتی در اردوی آمادگی المپیاد ریاضی شرکت می‌کردم، ایشان دربارهٔ ریاضیات دبیرستانی برایمان سخنرانی کرد. بهترین معلم ریاضی بود که تا آن زمان سر کلاسش نشسته بودم. از دوران راهنمایی آرزو داشتم در رشتهٔ ریاضی تحصیل کنم و یک ریاضی‌دان شوم. اما یادگرفتن ریاضیات از او دلیل آن بود که دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه صنعتی شریف را برای ادامهٔ تحصیل انتخاب کنم. اگرچه در بسیاری از مدارس مشهور برای دانش‌آموزان دربارهٔ ریاضیات دبیرستانی سخنرانی می‌کرد، اما کلاس‌های او در دانشگاه چیز دیگری بودند. درس‌های متنوعی در شاخه‌های متفاوت ریاضی تدریس می‌کرد. آن‌قدر قشنگ درس می‌داد که من وقتی دانشجوی سال اول بودم، در درس‌های پیشرفتهٔ فوق‌لیسانس او شرکت می‌کردم و دست خالی برنمی‌گشتم.

اولین مقاله‌ام در دوران دانشجویی الهام گرفته از یک سخنرانی او دربارهٔ «نظریهٔ هندسی گروه‌ها» بود که همراه دوستم، علی رجائی آن تحقیق را انجام دادیم. وقتی مقالهٔ خود را به او نشان دادیم، فردای آن روز با یک بازنویسی کامل از مقاله پیش ما آمد و گفت: «چون استدلال‌های شما را نفهمیدم، مقاله را بازنویسی کردم.» مقالهٔ دیگرم پایان‌نامهٔ کارشناسی بود که زیر نظر او انجام دادم.

از نسل ریاضی‌دانان جوان ایرانی، بسیاری از او الهام گرفته‌اند و محضر درس او را درک کرده‌اند. نه‌تنها در ریاضیات اطلاعات دایرة‌المعارفی داشت، بلکه فردی بسیار بافرهنگ و بامطالعه بود. دقیق و زیبا می‌نوشت. سال‌ها سردبیر مجلهٔ «نشر ریاضی» بود و دانشجویان ریاضی سراسر کشور را با مقالات توصیفی زیبا که ترجمه شده بودند یا توسط خود او یا دوستانش نوشته شده بودند، سیراب کرد. تحقیقات ریاضی او به تعداد کم ولی بسیار عمیق و تأثیرگذار در ریاضیات محض و ریاضیات کاربردی بود و در سطح بین‌المللی چهره‌ای شناخته‌شده محسوب می‌شد. رشتهٔ تحقیقاتی او بر شاخهٔ «سیستم‌های دینامیکی» متمرکز بود. اطلاعات وسیع و عمیقی در فلسفهٔ ریاضی داشت و این اطلاعات کلاس درس او را عمیق‌تر می‌کرد.

با راهنمایی و حمایت او و به‌خصوص به کمک توصیه‌نامه‌ای که برای من و علی رجایی نوشت، برای ادامهٔ تحصیل در دانشگاه پرینستون پذیرفته شدیم.





اکنون او استاد بازنشستهٔ دانشگاه صنعتی شریف است و پیش از بازنشستگی ریاست دانشکدهٔ علوم ریاضی را به عهده داشت. دکترایش را در سال ۱۹۶۹ از «دانشگاه برکلی» با راهنمایی **استیو اسمیل** که برندهٔ جایزهٔ فیلدز شده بود، گرفت. او کسی بود که برای اولین بار ارتباط اینترنت دانشگاهی را در ایران برقرار کرد. در آن زمان او قائم مقام مؤسسهٔ مطالعات فیزیک نظری و ریاضیات بود و ریاست دامنهٔ «IRNIC» را تا هنگام بازنشستگی در سال ۲۰۰۸ به عهده داشت. به‌علاوه در سال‌های ۲۰۰۷ تا ۲۰۰۹ ریاست «انجمن دامنهٔ عالی آسیا-اقیانوسیه» را به عهده داشت. به خاطر خدمات او به توسعهٔ اینترنت، عضو کمیتهٔ مشورتی سرتاسری «ICANN» در سال‌های ۲۰۰۶ تا ۲۰۰۸ به‌عنوان نمایندهٔ آسیا-اقیانوسیه بود. این مؤسسه غیردولتی مسئول نام‌گذاری و شماره‌گذاری بود و مدیریت نام‌های دامنه‌های اینترنتی و شماره‌های IP و سایر مشخصه‌های اینترنتی و قراردادها (پروتکل‌ها) را به عهده داشت.

این استاد گرامی در سال ۱۳۲۱ در تهران متولد شد. طی سال‌های ۱۳۳۳ تا ۱۳۳۹ دوره‌های اول و دوم تحصیلات متوسطه را در «دبیرستان اندیشه» و «دبیرستان هدف ۱» گذراند. پس از شروع تحصیلات دانشگاهی در «کالج هوپ» در ایالت میشیگان آمریکا به «دانشگاه برکلی» رفت و تا سال ۱۳۴۸ که از رسالهٔ دکترای خود با عنوان «نظریهٔ سرتاسری معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم عادی» دفاع کرد، در دانشگاه برکلی ماند. سپس یک سال در دانشگاه برکلی و بعد در «دانشگاه نورث وسترن» در ایلینوی آمریکا، «دانشگاه ویسکانسین» در مدیسون و «دانشگاه میشیگان» در ان‌آربر حضور یافت. او در سال ۱۳۵۳، پس از بازگشت به ایران، در ۳۲ سالگی به عضویت هیئت علمی دانشگاه صنعتی شریف درآمد و پس از پنج سال به رتبهٔ استادی رسید و در همان سال ازدواج کرد. از شهریور ۱۳۸۲ عضو گروه زبان و رایانهٔ فرهنگستان زبان و ادب فارسی نیز هست. در سال ۱۳۸۲ به‌عنوان چهرهٔ ماندگار ریاضیات کشور معرفی شد و در همان سال لوح تقدیر «انجمن ترویج علم ایران» به او اهدا شد. **اسرار مکعب روبیک**، **حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲**، **درسی مقدماتی دربارهٔ خمینه‌های مشتق‌پذیر** (به زبان انگلیسی)، **چارچوبی ریاضی برای مطالعهٔ حلقه‌های زنجیر و انتخاب** (به زبان انگلیسی) و **دربارهٔ ریاضیات زیستی**، عنوان‌های کتاب‌هایی هستند که او به رشتهٔ تحریر درآورده است. ترجمهٔ کتاب توپولوژی از دیدگاه حساب دیفرانسیل، نوشتهٔ **جان میلز** و ترجمهٔ کتاب نظریهٔ عددها، نوشتهٔ **آندره ویل**، با همکاری **محمد جلوداری ممقانی** از دیگر آثار او هستند.

آیا او را می‌شناسید؟

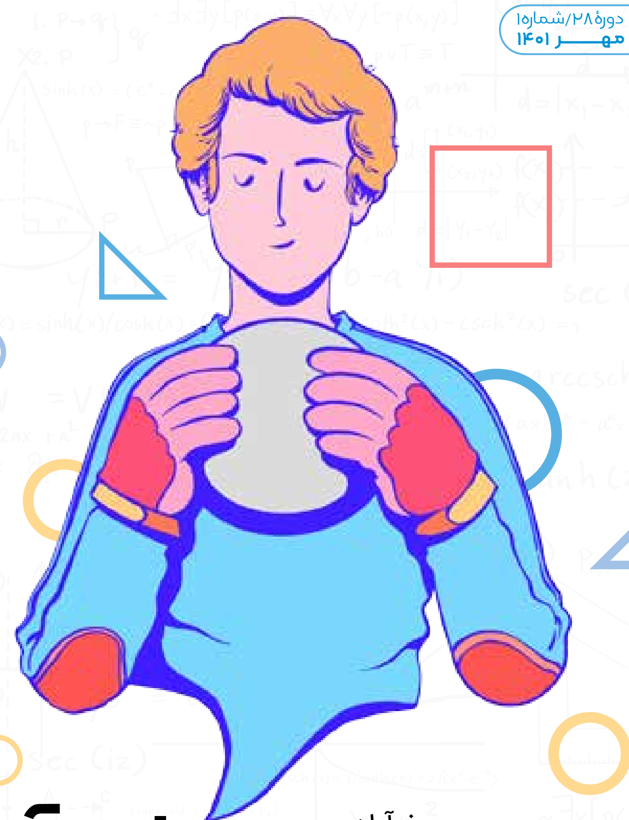
مسئله: چند دقیقه پس از ساعت ۴، دو عقربهٔ دقیقه‌شمار و ساعت‌شمار بر هم منطبق می‌شوند؟

۱. ۲۴ ۲. ۲۳ ۳. $\frac{۲۴۰}{۱۱}$ ۴. $\frac{۲۴۰}{۱۳}$ ۵. $\frac{۳۶۰}{۲۹}$

پی‌نوشت:

۱. سیستم پویا یا سیستم دینامیک مجموعه‌ای ازعناصر است که وضعیت آن با گذر زمان و مطابق با قواعد مشخص تغییر می‌کند. در ریاضیات از این نوع سیستم و توابع معرف آن به منظور نمایش وابستگی زمانی یک نقطه در فضای هندسی استفاده قرار می‌شود.

برای مشاهدهٔ پاسخ رمزینه را پویش کنید.



طلسم یا علم آمار

کدام‌یک باعث برد تیم آلمان شد؟

مریم جعفرآبادی

به‌راستی آیا **ینس لمن**، دروازه‌بان تیم آلمان در بازی‌های یک چهارم نهایی جام‌جهانی فوتبال سال ۲۰۰۶، در جوراب خود طلسمی داشت؟! یا فهرست کارها و تماس‌های تلفنی و خریدهای ضروری خانه را که باید بعد از مسابقه انجام می‌داد، نوشته بود که فراموش نکند؟ ماجرا از چه قرار بود؟ این یادداشت اسرارآمیز که او قبل از هر ضربهٔ پنالتی آن را از داخل جورابش در می‌آورد و می‌خواند چه بود که هواداران فوتبال دوست داشتند به راز آن پی ببرند؟ هجدهمین دورهٔ مسابقات جام جهانی فوتبال در سال ۲۰۰۶ در حال برگزاری بود. تیم آلمان میزبان این مسابقه‌ها، و تیم آرژانتین، با همهٔ ستاره‌هایشان، به مرحلهٔ یک‌چهارم نهایی رسیده بودند و بالاخره باید یکی از این دو تیم حذف و تیم برنده به مرحلهٔ نیمه‌نهایی صعود می‌کرد. بازی حساس و نفس‌گیر بود و بعد از ۹۰ دقیقه وقت قانونی، نتیجهٔ بازی یک بر یک مساوی شد. کار به ضربه‌های پنالتی کشیده شد. در فاصلهٔ کوتاه پایان بازی تا شروع ضربه‌های پنالتی تحلیلگر (آنالیزور) تیم آلمان کاغذ کوچکی به لمن داد و آرام با او صحبت‌هایی کرد. لمن کاغذ را در جورابش گذاشت و قبل از ضربه‌های پنالتی بازیکنان آرژانتین به آن نگاهی می‌انداخت و دوباره آن را داخل جورابش قرار می‌داد. روی این کاغذ هر چه که نوشته شده بود، باعث شد او بتواند به جهت درست بپرد و دو شوت از چهار شوتی را که به سمت دروازه‌اش زده شد، به خوبی مهار کند. در نهایت تیم آلمان به مرحلهٔ نیمه‌نهایی راه یافت و تیم آرژانتین از راهیابی به مرحلهٔ بعد باز ماند. این یادداشت توجه افراد زیادی را به خود جلب کرد. ینس لمن بعد از بازی راز این تکه کاغذ را فاش کرد. او گفت روی این کاغذ (با بررسی آماری تعداد زیادی از ضربه‌های پنالتی‌ای که هر کدام از بازیکنان تیم آرژانتین در بازی‌هایشان زده بودند) عادت‌ها و نوع ضربه‌های پنالتی بازیکنان این تیم نوشته شده بود:

«**ریکلمه** بالا و چپ.

کرسپو اگر از توپ زیاد فاصله گرفت و زیاد دوید، به راست شوت می‌کند و اگر کوتاه دوید به سمت چپ دروازه می‌زند.

هاینزه پایین و شوت‌های کوتاه.

آیالا قبل از شوت مدت زیادی صبر می‌کند، بعد یک دوی طولانی قبل از شوت دارد، و به سمت راست دروازه می‌زند.

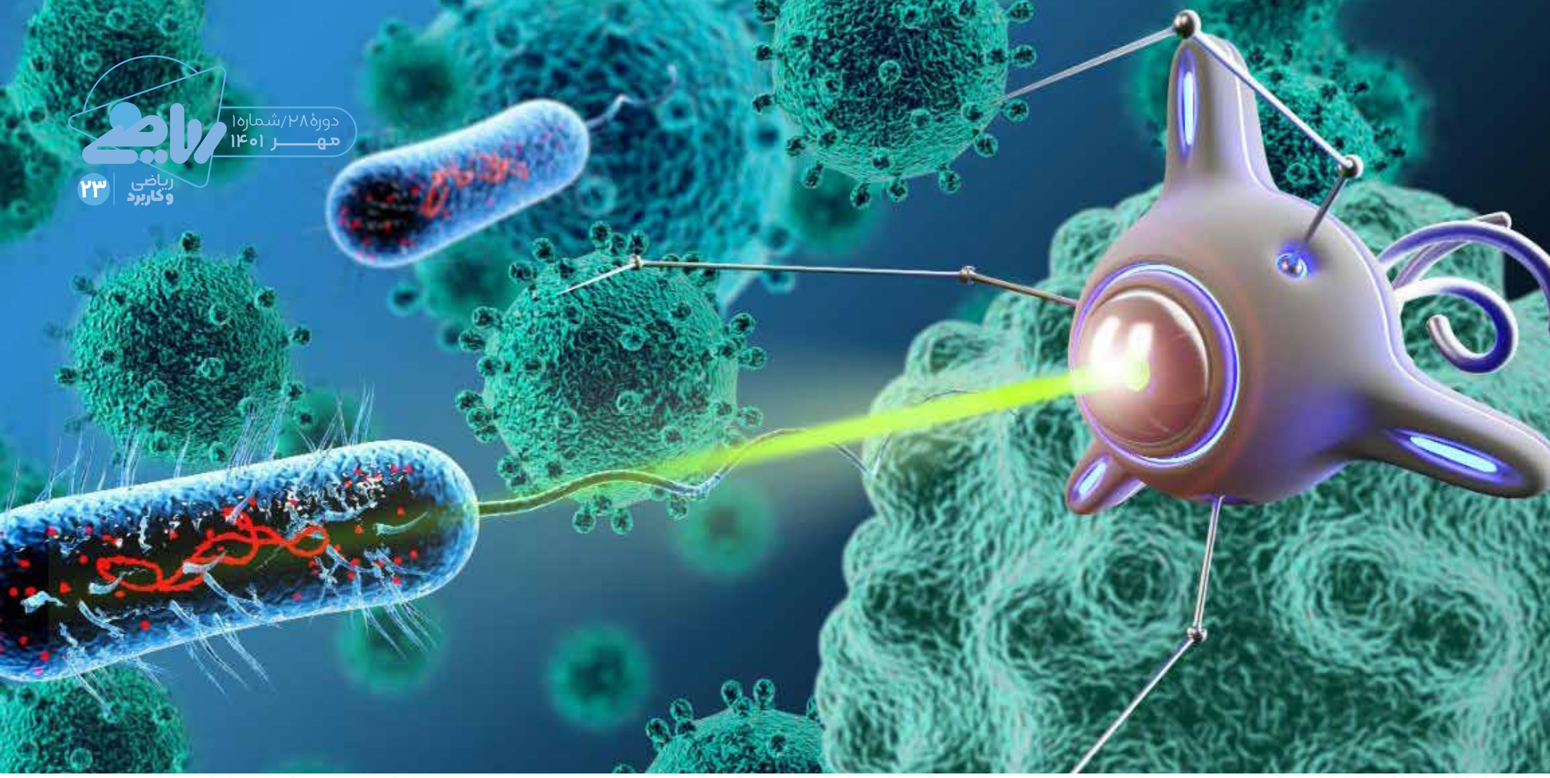
مسی چپ.

ایمار، انتظار طولانی قبل از شوت، به سمت چپ.

رودریگز سمت چپ.»

بررسی آماری شوت‌های بازیکنان آرژانتین در بازی‌های گذشته و پرش دروازه‌بان آلمان بر اساس احتمال جهت شوت هر بازیکن، تیم آلمان را برندهٔ آن بازی کرد. احتمالاً ینس لمن برای بازی نیمه‌نهایی در مقابل ایتالیا یادداشت خود را در رخت‌کن ورزشگاه جا گذاشته بود که باعث شد در آن بازی از ایتالیا ببازند و تیم سوم جام‌جهانی هجدهم شوند.

امروزه علم آمار، علاوه بر میدان‌های ورزشی، در همهٔ زمینه‌های علمی و اقتصادی، یاریگر برنامه‌ریزان است تا بتوانند آینده را پیش‌بینی کنند و برنامه‌ریزی بهتری داشته باشند.



گردش در دنیای ریاضی نانوفناوری

ژما جواهری‌پور

آیا دوست دارید وقتی در باران قدم می‌زنید، لباس و کوله‌پشتی‌تان خیس نشود؟ یا اگر در رستوران روی لباستان نوشیدنی ریخت به‌راحتی پاک شود؟ همین‌طور می‌توان شیشه‌هایی روی پنجرهٔ خانه نصب کرد که به تمیزکردن نیازی نداشته باشند. یا از داروهایی استفاده کرد که وقتی وارد بدن می‌شوند، ویروس و باکتری را مستقیم از بین ببرند؛ بدون اینکه به سایر بخش‌ها و اندام‌های بدن آسیبی وارد کنند. برخی از دانشمندان راه‌هایی یافته‌اند که می‌توانند به کمک دانش نانوفناوری تمام آنچه را که در بالا گفته شد و ده‌ها مورد جالب دیگر را در صنایع غذایی، دارویی، لوازم خانگی و سایر موارد به انجام برسانند. اما نانوفناوری چیست؟ همان‌طور که می‌دانید، همه چیز از اتم‌ها تشکیل شده است که مانند بلوک‌های ساختمانی کوچک هستند. اتم‌ها در کنار هم قرار می‌گیرند تا مولکول‌هایی بسازند که انسان‌ها، سنگ‌ها، درختان، کاغذ یا آب را می‌سازند. دنیای ما از اتم‌ها تشکیل شده است. شما نمی‌توانید آن‌ها را ببینید، زیرا بسیار کوچک هستند. پیشوند «نانو» به معنای یک میلیاردیم است (۱ نانومتر $= ۱۰^{-۹} \times ۱$ متر). برای درک مقیاس نانو توجه کنید که ضخامت موی انسان ۵۰ نانومتر است و یک سلول باکتریایی چند صد نانومتر عرض دارد.

به زبان ساده، نانوفناوری شاخه‌ای از فناوری است که در آن دانشمندان تکه‌های بسیار کوچک اتم‌ها را مطالعه می‌کنند تا دریابند که چگونه می‌توان آن‌ها را با هم ترکیب کرد، تغییر داد و وادار ساخت کارهای بسیار جالب و مفیدی انجام دهند. دانشمندان با این اجزای سازندهٔ اتم‌ها آزمایش می‌کنند تا محصولات جدیدی برای کمک به مردم بسازند. دنیای شگفت‌انگیز اتم‌ها بسیار پیچیده است. اتم‌ها از اجزای کوچک‌تری تشکیل شده‌اند و بین اتم‌ها پیوندهای متنوعی وجود دارند که باعث می‌شوند رفتار مولکول‌ها متفاوت شود. بررسی رفتار اتم‌ها و مولکول‌ها، از نظر ساختار و نیروهای بین اتم‌ها و مولکول‌ها، بخش مدرنی از انواع علوم، از جمله شیمی، فیزیک، ریاضی و علوم رایانه‌ای را شامل می‌شود. در این مطلب می‌خواهیم بدانیم چگونه ریاضی در فهم و درک دانشمندان از ساختار مواد به آن‌ها کمک می‌کند که به قلمرو تولیدات دانش‌بنیانی مانند فناوری‌های نانو قدم بگذارند. در زندگی روزمره موضوع‌هایی وجود دارند که برای تبدیل آن‌ها به زبان ریاضی و محاسبهٔ کمیت‌های متفاوت مربوط به آن‌ها از روش ریاضی «مدل‌سازی» استفاده می‌کنیم. در دنیای سه‌بعدی اطراف ما شکل‌ها و حجم‌های گوناگونی وجود دارند و ما برای تعریف آن‌ها به زبان ریاضی شکل‌های هندسی را تعریف می‌کنیم؛ مدل ساده‌شده‌ای از جسم‌های دنیای واقعی. وقتی می‌خواهیم نیروی وارد بر یک جسم را نشان دهیم، با یک «بردار ریاضی» آن را نمایش می‌دهیم. «دستگاه مختصات» دنیای واقعی را محوربندی می‌کند و هر چه را که در آن است، قابل محاسبه می‌سازد؛ از جمله اینکه موقعیت یک جسم کجاست یا یک خودرو چه اندازه جابه‌جا شده است.

حال ببینیم دانشمندان فناوری نانو چطور از این روش استفاده می‌کنند؟ حتماً شما هم دیده‌اید که برای نشان‌دادن اتم از توپ‌های کوچک و برای نشان‌دادن پیوند بین اتم‌ها از میله استفاده می‌شود. ولی در دنیای ذرات ریز (میکروسکوپی) اتم‌ها داستان به این سادگی نیست. بین اتم‌ها نیروهایی وجود دارند که تأثیر آن‌ها و نوع پیوند بین مولکولی، رفتار ماده را تغییر می‌دهند. دانشمندان برای پیش‌بینی ساختار عناصر و تغییرات ویژگی‌های آن‌ها، مثل مواردی که در ابتدای مطلب بیان شد، نیاز دارند از ساختار ماده مدلی بسازند و به کمک رایانه و پیش‌بینی نوع تغییرات، موادی پدید آورند که فرضاً اجازهٔ عبور آب از بین الیاف پارچه را ندهد. دانشمندان آنچه را که در ریاضی به‌عنوان مدل‌سازی برای حل مسئله مطرح شده است، در همهٔ عرصه‌ها، از جهان اتم‌ها گرفته تا کهکشان‌ها، به کار می‌گیرند تا بتوانند رفتار ذرات ریز و ستارگان عظیم را بررسی کنند.

منبع

Teach Your Kids About Nanotechnology Paperback – December 15, 2015, by Mark E. Tomassoni (Author), Rama Ramesh (Author), Yuko Matsuoka (Illustrator).

درمانگاه ریاضی

افشین خاصّه‌خان

سلام بچه‌ها. وقت بخیر. از اینکه دوباره شما را در درمانگاه ریاضی می‌بینیم بسیار خوش‌حالیم. امسال تمرکز درمانگاه ریاضی بر کتاب‌های درسی است. این کتاب‌ها بر پایهٔ تخصص و تحقیقات متخصصان آموزش ریاضی نوشته شده‌اند و در مجموع کتاب‌هایی هستند که در نوع خود مشابهی ندارند. توصیه می‌کنم برای شروع مطالعهٔ یک موضوع درسی حتماً با این کتاب‌ها آغاز کنید. چون در این کتاب‌ها سعی شده است اصول علمی آموزش ریاضیات فعال (ریاضیات بر مبنای طراحی فعالیت در راستای کشف موضوع درسی توسط خود دانش‌آموز) تا حد امکان رعایت شود.

معاینه

مراجعه‌کنندهٔ این هفته دانش‌آموزی هفتمی به نام **علیسا خواجه نجفی** است. پدر علیسا که یکی از دوستان صمیمی این‌جانب است و مادرش، هر دو پزشک‌اند. علیسا با پدر به درمانگاه آمده است. خوش و بشی با دوست عزیزم انجام می‌دهم و علیسا را به اتاق درمان دعوت می‌کنم. بعد از نیم ساعت «دیالوگ سقراطیِ» معمول در ارتباط با مسائل مرتبط با «موضوع راهبردهای حلِ مسئله» متوجه مشکل موجود در تفکر ریاضی علیسا شدم.

تشخیص

مشکل علیسا در موضوع راهبردهای حل مسئله مشکلی عمومی بود که تقریباً بسیاری از دانش‌آموزان درگیر آن هستند و آن «نارسایی در انتخاب راهبرد مناسب برای حل مسئله» است. یکی از مسئله‌هایی که علیسا در انتخاب راهبرد برای حل آن مشکل داشت، مسئلهٔ زیر بود:

چند عدد طبیعی وجود دارد که اگر مجموع رقم‌های آن را در حاصل‌ضرب رقم‌هایش ضرب کنیم، عدد حاصل برابر ۱۲ شود؟

۱) ۵   ۲) ۶   ۳) ۷   ۴) ۸

او چند راهبرد برای حل این سؤال آزمایش کرده بود، اما از هیچ‌کدام مطمئن نبود. در واقع شک او بر این بود که در شمارش حالت‌های مطلوب، آیا موردی را از قلم انداخته است یا نه؟

سؤال از آزمون ورودی «دبیرستان انرژی اتمی» انتخاب شده بود. سؤالی که برای حل آن، ترکیب راهبردهای الگوسازی و حدس و آزمایش لازم می‌نمود و علیسا بیشتر روی خود الگوها متمرکز شده بود، نه ترکیب آن‌ها. برای اینکه او خود متوجه عارضه شود، دوباره گفت‌وگو را آغاز کردم و فضایی ایجاد شد تا علیسا متوجه اشتباه خود شود. یکی از راهبردها «الگوسازی» بود. الگوی لازم این بود که حاصل‌ضرب چه عددهایی برابر ۱۲ است. علیسا این کار را انجام داده بود. اما در به‌کاربردن راهبرد دوم که حدس و آزمایش بود، شک و تردید داشت.

او دو عدد ۱۳ و ۳۱ را پیدا کرده بود که با الگوی ردیف آخر جدول سازگار بودند.

۱	۱۲
۲	۶
۳	۴

ولی برای ردیف‌های اول و دوم جدول خیلی به نتیجه نرسیده بود. به علیسا یادآوری کردم که ۱ در ضرب عددی خنثاست و او می تواند از این خاصیت استفاده کند. با این راهنمایی او توانست عدد ۲۱۱۱۱ را حدس بزند که با ردیف دوم سازگار بود و بعد از کمی بحث، جایگشت‌های آن را نیز بنویسد؛ یعنی: ۱۲۱۱۱، ۱۱۲۱۱، ۱۱۱۲۱ و ۱۱۱۱۲. بنابراین در مجموع ۷ عدد توانست بنویسد. او که فکر می‌کرد برای ردیف اول عددی وجود ندارد، با تذکر دوبارهٔ من دربارهٔ خنثابودن عدد ۱ در ضرب و تأکید بر اینکه صرفاً از عدد ۱ استفاده کند، توانست عدد ۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱ را هم بنویسد. به این ترتیب هشت عدد نوشته شد و با توجه به الگویی که تعقیب می‌شد، کاملاً مشخص بود که عددی از قلم نیفتاده است. تجربهٔ آموزشی بسیار خوبی برای علیسا بود، چون انصافاً سؤال جالبی بود؛ چه در انتخاب راهبرد و چه در اجرای آن.

تجویز

بعد از تشخیص بیماریِ تفکر ریاضیِ علیسا، حال نوبت تجویز دستورالعمل‌های درمانیِ لازم بود:

۱. به علیسا توصیه کردم حتماً چهار مرحلهٔ حل مسئله را در مقدمهٔ کتاب هفتم با دقت بخواند.

۲. فصل اول کتاب ریاضی هفتم را بخواند و هشت راهبرد عمده‌ای را که برای حل مسئله‌های ریاضی ارائه و برای هر کدام مثال‌ها و تمرین‌هایی مطرح شده است، با دقت بیشتری بررسی کند.

۳. تمرین‌های مشابهی را که حل آن‌ها راهبردهای متفاوتی را می‌طلبد، تعیین و سفارش کردم که برای حلشان آزمون و خطا انجام دهد.

۴. برای حل مسئله‌هایی که نتوانسته است حل کند، در طول هفته دوباره کوشش کند. به او گوشزد کردم، حل یک مسئله بعد از چندین بار تلاش بسیار لذت‌بخش خواهد بود.

۵. اگر امکان داشته باشد یک مسئله را با به‌کاربردن بیش از یک راهبرد حل کند و به لذت‌بخش‌بودن این کار اشاره کردم.

۶. اگر علاقه‌مند باشد، چند مسئله در همین زمینه طراحی کند و با دوستانش به بحث بگذارد.

ریاضی فکر کن! برای همه!

شعبدهٔ عددها

زهره پندی/مسئول وبگاه ریاضی فکر کن

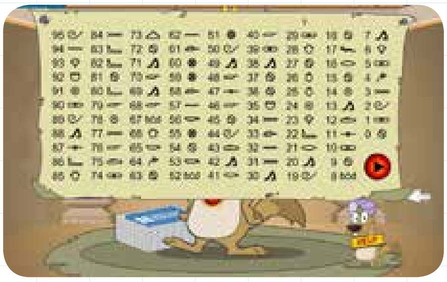
وبگاه «ریاضی فکر کن!» (mathink.ir) وبگاهی به زبان فارسی است و به یادگیری مطالب جدید یا یادآوری مطالبی که قبلاً یاد گرفته‌اید، کمک می‌کند. در این شماره به معرفی «شعبدهٔ عددها» از این وبگاه می‌پردازیم.
برای دیدن این صفحه به نشانی زیر مراجعه کنید:

https://mathink.ir/شعبده-اعداد/

وقتی روی پیوند (لینک)، یعنی «شعبده اعداد» تلیک (کلیک) کنید، یک موجود عجیب برایتان توضیح می‌دهد که روش کار چگونه است.

روش شعبده

- یک عدد دو رقمی انتخاب کنید؛ مثلاً ۴۳ و به صفحهٔ بعد بروید (یعنی روی پیکانه (فلش) تلیک کنید).
- دو رقم آن را با هم جمع کنید؛ در این مثال ۷ = ۳+۴ و به صفحهٔ بعد بروید.
- عدد اولتان را منهای حاصل جمع رقم‌هایش کنید؛ در این مثال ۳۶ = ۷-۴۳ و به صفحهٔ بعد بروید.
- حالا در صفحهٔ بعد، عددهای صفر تا ۹۵ را می‌بینید که جلوی هر کدام یک نماد قرار دارد. به نمادی که مقابل عدد به دست آمده در مرحلهٔ قبل نوشته شده است، توجه کنید و آن را به خاطر بسپارید؛ در این مثال باید نماد جلوی عدد ۳۶ را پیدا کنید و باز به صفحهٔ بعد بروید.



- حالا این موجود عجیب ذهن شما را می‌خواند و نشان می‌دهد که نماد جلوی عددی که شما به دست آورده بودید، کدام نماد است! مثلاً اینجا نمادی که جلوی عدد ۳۶ بود را نشان داده است.

فرصتی برای کاوش

به آدرس این شعبده بروید و آن را چند بار تکرار کنید!
هر بار یک عدد دو رقمی دیگر انتخاب کنید و ببینید کارت‌هایی که موجود عجیب در پایان به شما نشان می‌دهد، هر بار تغییر می‌کند!
حالا بیایید با دقت بیشتری شعبده را ببینیم!
برای کاوش دربارهٔ راز شعبده از کجا شروع می‌کنیم؟
وقتی این شعبده را بارها و بارها در وبگاه انجام می‌دهیم، هر بار صفحهٔ نمادهای هر عدد تغییر می‌کند؛ قبلاً در یکی از این صفحه‌ها، نماد جلوی ۳۶ را که عدد به دست آمده از تفریق ۴۳ منهای ۷ بود، پیدا کردیم. اینجا تصویر دیگری از یکی دیگر از آن‌ها را داریم:

شعبده با عددهای متفاوت و نگاه‌کردن به این صفحهٔ نمادها، شروع خوبی برای کاوش دربارهٔ این شعبده است. در جدول ۱ چهار ستون برای آزمایش با چهار عدد دو رقمی متفاوت در نظر گرفته شده است. یکی از ستون‌ها پر شده است. ستون‌های دیگر را با عددهای دو رقمی دیگری آغاز کنید.

جدول ۱. مرحله‌های شعبده

مرحله‌های شعبده	آزمایش‌ها			
یک عدد دو رقمی انتخاب کنید.	۷۶			
دو رقم آن را با هم جمع کنید.	۱۳			
عدد اولتان را منهای حاصل جمع رقم‌هایش کنید.	۷۶−۱۳=۶۳			
به نمادی که مقابل عدد حاصل نوشته شده، توجه کنید. چه نمادی است؟				

جالب است! نه؟ اگر دوست دارید عددهای دیگری را هم آزمایش کنید. در همهٔ آزمایش‌ها، در این صفحه، نمادی که مقابل عدد حاصل نوشته شده، این نماد است:

ولی چطور این اتفاق می‌افتد؟ آیا عدد حاصل ویژگی خاصی دارد؟ چه عددهایی می‌توانند حاصل عدد اولیه منهای حاصل‌جمع رقم‌هایش باشند؟

راز این شعبده

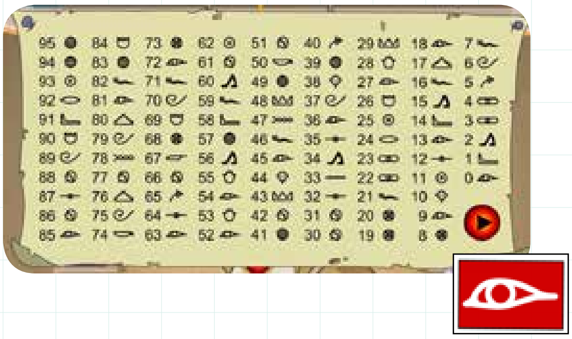
همان‌طور که احتمالاً تا الان پی برده‌اید، در هر کدام از آزمایش‌ها یکی از عددهای ۹، ۱۸، ۲۷، ۳۶، ۴۵، ۵۴، ۶۳، ۷۲ یا ۸۱ حاصل می‌شود و نماد جلوی همهٔ این عددها در یک صفحه، یکسان است. مثلاً به این صفحه نگاه کنید:

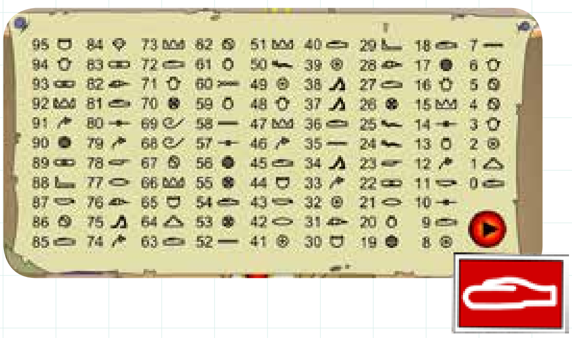
استدلال و اثبات

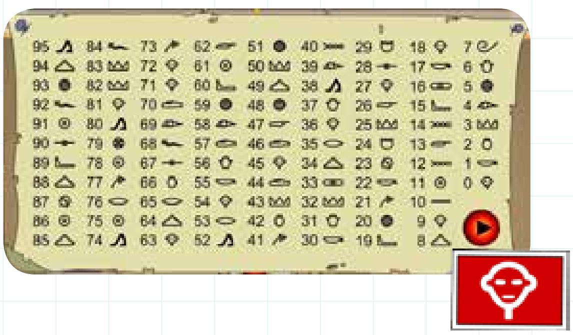
سؤال این است که: چرا این اتفاق می‌افتد؟ برای پاسخ‌دادن به این سؤال، عدد دو رقمی را در حالت کلی در نظر می‌گیریم؛ مثلاً عدد $\overline{ab}$ که دهگان آن برابر a و یکان آن برابر b است و حاصل‌جمع رقم‌های این عدد برابر a+b است. حالا اگر از عدد $\overline{ab}$ این حاصل‌جمع یعنی a+b را کم کنیم، حاصل نهایی 9a خواهد شد؛ یعنی ۹ برابر دهگان عدد. با توجه به اینکه دهگان یکی از عددهای ۱ تا ۹ است، حاصل یکی از عددهای ۹، ۱۸، ۲۷، ۳۶، ۴۵، ۵۴، ۶۳، ۷۲ یا ۸۱ می‌شود که باید در صفحهٔ نمادها دنبال نماد مرتبط با آن بگردیم. به عبارت دیگر:

مرحله‌های شعبده	
یک عدد دو رقمی انتخاب کنید.	$\overline{ab}=10a+b$
دو رقم آن را با هم جمع کنید.	$a+b$
عدد اولتان را منهای حاصل جمع رقم‌هایش کنید.	$10a+b-(a+b)=10a+b-a-b=9a$
به نمادی که مقابل عدد حاصل نوشته شده، توجه کنید. چه نمادی است؟	نمادی که جلوی هر کدام از عددهایی که ۹ برابر عددهای ۱ تا ۹ هستند، نوشته شده است.

حالا به چند تا از صفحه‌های نماد نگاه کنید. در همهٔ این صفحه‌ها نمادهای مرتبط با عددهای ۹، ۱۸، ۲۷، ۳۶، ۴۵، ۵۴، ۶۳، ۷۲ یا ۸۱ یکسان است. راز موجود عجیب این است که هر بار صفحهٔ جدیدی را نشان می‌دهد تا بتواند هر بار نماد جدیدی را به‌عنوان کارت درست نمایش دهد!







شعبده‌باز شوید

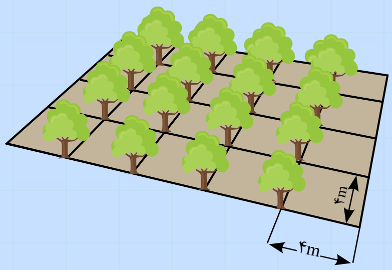
شما می‌توانید از هر کدام از این صفحه‌های نماد استفاده کنید، شعبده را با دوستانتان انجام دهید و با پیداکردن نماد مورد نظر، آن‌ها را شگفت‌زده کنید.

باغ‌های هندسی

قاسم حسین قنبری

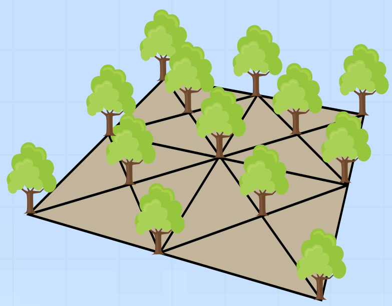
اگر به باغ‌های درختان میوه دقت کرده باشید، مشاهده کرده‌اید که معمولاً درختان روی خط‌های راست کاشته شده‌اند. اگر باغ را در یک مستطیل فرض کنیم، خط‌های درختان موازی یکی از ضلع‌های مستطیل هستند. اگر موقعیت درختان را نسبت به هم در دو ردیف کناری در نظر بگیریم، دو حالت اتفاق می افتد:

الگوی ۱. الگوی مربعی



در این الگو هر چهار درخت کنار هم، با هم یک مربع می‌سازند. فاصلهٔ بین درخت‌ها در کل باغ مساوی است.

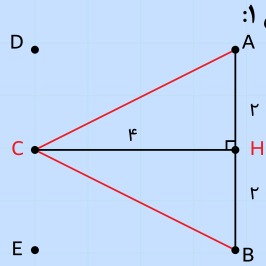
الگوی ۲. الگوی لوزی



در این الگو هر چهار درخت کنار هم یک لوزی می‌سازند و فاصلهٔ درختانی که روی ضلع‌های لوزی هستند، بیشتر از فاصلهٔ درختان روی ردیف‌هاست. فرض کنید فاصلهٔ بین درخت‌ها باید دست‌کم ۴ متر باشد. یعنی در صورتی که فاصله بیشتر باشد، بهتر است. در این صورت ما به جای اینکه الگوی مربعی را انتخاب کنیم، از الگوی لوزی یا مثلث بهره می‌گیریم و همانند شکل، درخت‌های E و D را حذف می‌کنیم و به جای آن‌ها در نقطهٔ C یک درخت می‌کاریم که وسط ضلع DE قرار دارد.

به کمک قضیهٔ **فیثاغورس** می‌بینیم که طول BC و AC برابر ۴/۵ متر می‌شود. یعنی نیم متر فاصلهٔ بیشتری ایجاد کرده‌ایم. البته در این روش سایهٔ درختان هم کمتر روی هم می‌افتد.

مثال ۱:



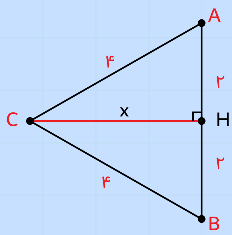
$$AC^۲ = AH^۲ + CH^۲$$
$$AC^۲ = ۲^۲ + ۴^۲ = ۲۰$$
$$AC = \sqrt{۲۰} = ۴/۴۷ \simeq ۴/۵$$

یکی از عیب‌های روش مثلث این است که تعداد درختان در کل کمتر از روش مربعی است. برای رفع این مشکل چه باید کرد؟

به منظور رفع این مشکل ما مثلث را متساوی‌الاضلاع انتخاب می‌کنیم. در این حالت طول ردیف‌ها کمتر و تعداد ردیف‌ها بیشتر و در نتیجه کمبود تعداد درختان جبران می‌شود.

مثال ۲:

$$۴^۲ = AH^۲ + CH^۲$$
$$۴^۲ = ۲^۲ + CH^۲$$
$$CH^۲ = ۱۲ \Rightarrow CH = \sqrt{۱۲} = ۳/۴۵ \simeq ۳/۵$$



در این مثال می‌بینیم که اگر بخواهیم فاصلهٔ بین درختان همان ۴ متر باشد، با انتخاب مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ متر، فاصلهٔ بین ردیف‌ها، یعنی CH، تقریباً نیم متر کمتر می‌شود و در صورتی که در باغ ۷ ردیف داشته باشیم، یک ردیف به تعداد کل ردیف‌ها اضافه می‌شود. اگر هم تعداد درختان یک ردیف زیاد باشد، مشکل کم‌شدن تعداد درختان رفع می‌شود.

به هر حال با توجه به نوع درخت‌ها و نیاز آن‌ها می‌توان از الگوی مربع، مثلث متساوی‌الساقین یا مثلث متساوی‌الاضلاع استفاده کرد.

مرتضی مرتضوی/کارشناس گروه ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی

رمزینه‌های پاسخ‌سریع در کتاب‌های درسی

یکی از نوآوری‌های کتاب‌های درسی مجهزشدن این کتاب‌ها به «رمزینهٔ پاسخ‌سریع» (کیوآر کد)[1] است که کمک می‌کند دانش‌آموز بتواند از طریق گوشی تلفن همراه به انواع محتواهای مکمل در قالب وبگاه، فیلم، عکس، صوت، گرافیک متحرک (موشن‌گرافی)، پویانمایی (انیمیشن) و غیره دست یابد. برای استفاده از رمزینهٔ پاسخ‌سریع لازم است ابتدا نرم‌افزار رمزینه‌خوان (کیوآر کدخوان) را از طریق «گوگل» دریافت و نصب و راه‌اندازی کنید. دوربین تلفن همراه خود را به رمزینهٔ پاسخ‌سریع مورد نظر در صفحهٔ کتاب نزدیک کنید تا تصویر واضحی از رمزینه ثبت شود. بر این اساس اطلاعات مورد نظر درس مربوطه که در وبگاه رشد بارگذاری شده است، به صورت دسته‌بندی نمایش داده می‌شود. هدف از به‌کارگیری رمزینه‌ها، تقویت محتوای آموزشی و غنی‌سازی و تنوع‌بخشی به تجربه‌های یادگیری است. این محتواها شامل مرور برخی از مفاهیم درسی، ارائهٔ نکات تکمیلی، تصویرسازی و مجسم‌سازی مفاهیم یا خودآزمایی‌های تعاملی هستند.

مزیت‌های استفاده از رمزینه‌های پاسخ‌سریع

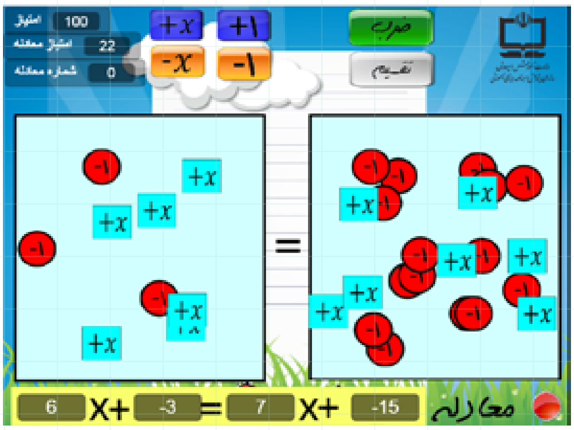
* تسهیل و تکمیل جریان یادگیری؛
* تنوع و جذابیت بصری در محتواهای آموزشی؛
* مشاهده و درک شهودی شکل‌های ریاضی در فضای سه بعدی؛
* توسعهٔ دانش‌ها و مهارت‌های فراتر از کتاب درسی؛
* امکان مشاهدهٔ محتواها به دفعات دلخواه؛
* سهولت دسترسی به آموزش برای همگان؛
* و ...

کتاب‌های ریاضی و رمزینه

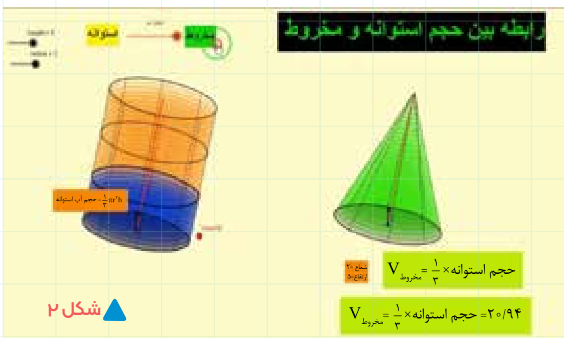
در ابتدای هر فصل از کتاب‌های ریاضی دورهٔ اول متوسطه یک رمزینه در نظر گرفته شده است که شما با اسکن‌کردن آن می‌توانید یک یا چند محتوا را در رابطه با موضوع آن فصل در قالب فیلم یا محتوای تعاملی مشاهده کنید. هیچ کدام از این محتواها جایگزین تدریس معلم نیستند، بلکه مکمل تدریس وی یا مرور مباحث و نمایش کامل‌تری از موضوع‌های درسی هستند. ملاحظه و مرور این رمزینه‌ها می‌تواند به یادگیری عمیق‌تر مباحث منجر شود.

برای مثال رمزینهٔ ۱ به معادلهٔ درجهٔ اول در کتاب ریاضی هشتم مربوط است که به صورت یک پروندهٔ (فایل) تعاملی به همراه فیلم راهنمای استفاده از آن ارائه شده است. در آن شما می‌توانید یکی از سه سطح آسان، متوسط و سخت را انتخاب کنید و همهٔ معادله‌های آن سطح را حل کنید. در هر صفحه معادله‌ای مانند شکل ۱ قرار دارد که با اضافه و کم‌کردن عدد ۱ و متغیر x، تغییرات در معادله در پایین صفحه نمایش داده می‌شوند. همچنین در گوشهٔ سمت چپ و بالای صفحه امتیاز شما با توجه به میزان سرعت و خطاها تعیین می‌شود. با حل معادلهٔ اول، معادلهٔ بعدی نمایان می‌شود. به همین ترتیب تا حل آخرین معادله ادامه دهید و امتیاز نهایی را مشاهده کنید.

شکل ۱

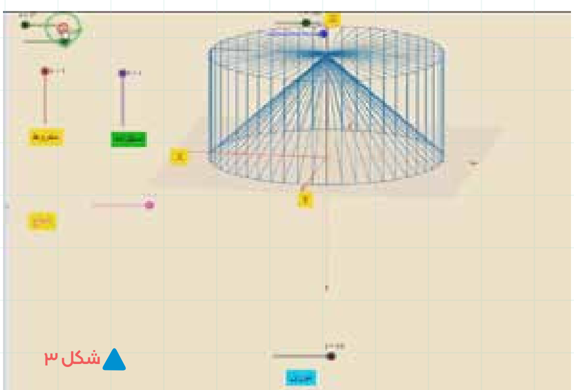


در رمزینهٔ ۲ نیز، با استفاده از قابلیت نرم‌افزار در فضای سه بعدی، رابطهٔ بین حجم مخروط و حجم استوانه در ریاضیات نهم بسیار جذاب، شهودی و ملموس ارائه می‌شود. در فیلم این رمزینه، مخروط و استوانه‌ای با شعاع قاعده و ارتفاع برابر مشاهده می‌کنید که اگر ظرف مخروط را از آب پر کنیم و در استوانه بریزیم، می‌بینیم $\frac{1}{3}$ حجم استوانه پر می‌شود. پس نتیجه می‌گیریم حجم مخروط $\frac{1}{3}$ حجم استوانه است (شکل ۲).



شکل ۲

با تغییر زبانه‌های مربوط به شعاع قاعده و ارتفاع مخروط و استوانه، یعنی کم و زیادکردن اندازهٔ شعاع و ارتفاع، درستی رابطهٔ بین حجم مخروط و استوانه در همهٔ حالت‌ها نشان داده می‌شود (شکل ۳).



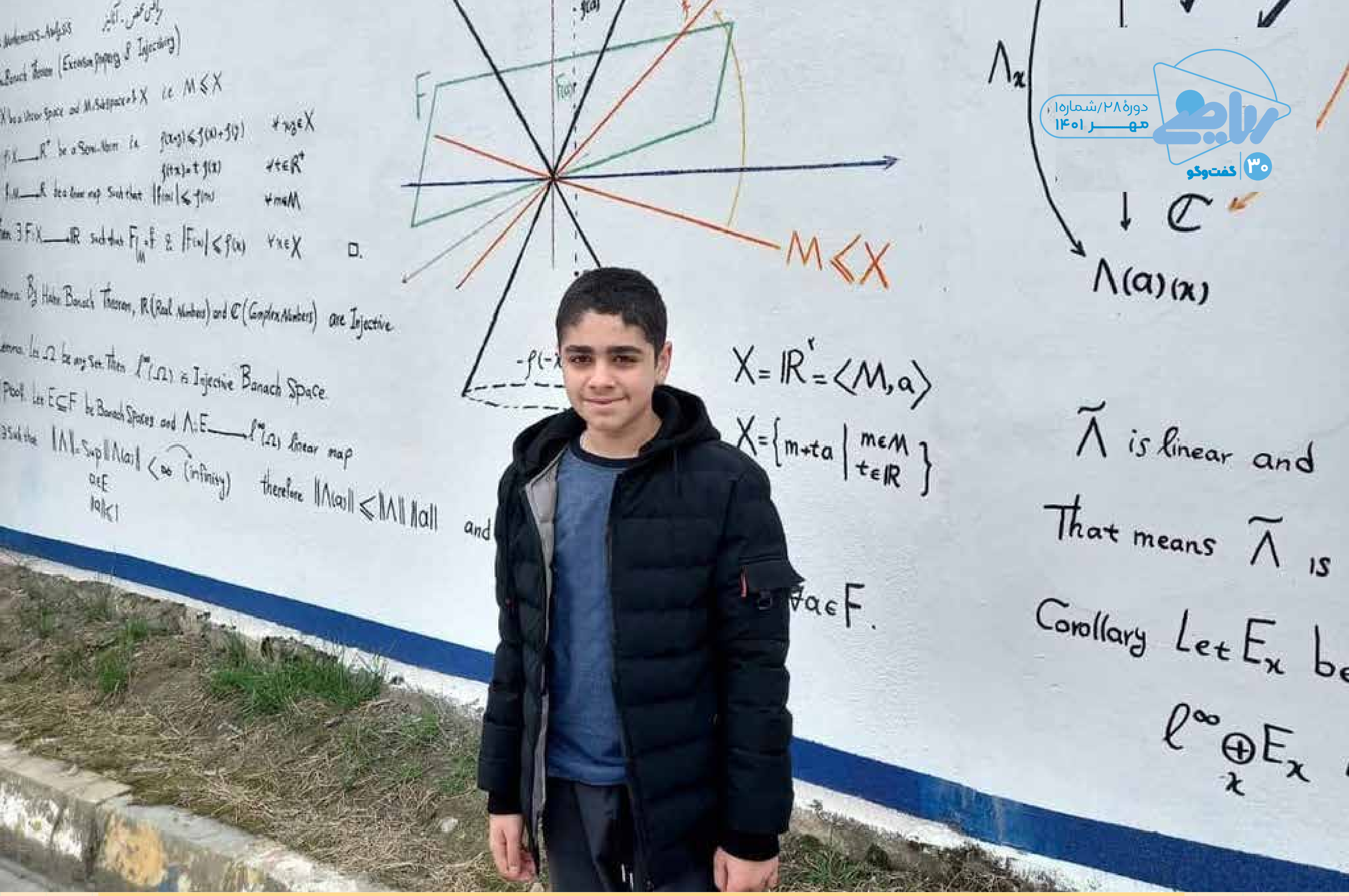
شکل ۳

رمزینهٔ ۱

رمزینهٔ ۲

پی‌نوشت

1. Quick Response Code (QR CODE)



مهدیه مسیبی

گفت‌وگو با امیرحسین کردلو، دانش‌آموز پایهٔ هفتم **دربارهٔ دیوارنگارهٔ ریاضی**

کلاسی به وسعت **دیوارهای یک روستا**

روی دیوارهای کوچه‌ها و خیابان‌های اغلب شهرها، عکس‌ها، نقاشی‌ها و نوشته‌ها خودنمایی می‌کنند. کمتر کسی را می‌توان پیدا کرد که بگوید من با چنین دیوارنگاره‌هایی آشنایی ندارم. اما شاید از خودتان بپرسید این حرف‌ها چه ربطی به دنیای ریاضی دارد. ریاضی را باید در کتاب‌ها، جزوه‌ها، وبگاه‌ها و تخته‌سیاه کلاس‌های درس پیدا کرد.

ما هم همین فکر را می‌کردیم، تا اینکه چشممان به چند دیوار در روستای «خشت‌سر» شهرستان محمودآباد استان مازندران روشن شد. یک استاد و معلم خوش‌ذوق رشتهٔ ریاضی به همراه چند دانش‌آموز تصمیم می‌گیرند روی تعدادی از دیوارها با هماهنگی مسئولان محلی، بخشی از فرمول‌ها، نکته‌ها و شکل‌های هندسی مرتبط با درس ریاضی را تصویرسازی کنند. دکتر حامد نیک‌پی، دبیر ریاضی، همراه با یکی از شاگردانش، یعنی امیرحسین کردلو، دانش‌آموز پایهٔ هفتم، این کار را با جدیت دنبال می‌کنند تا هر کسی از کنار این دیوارها گذر کرد، برای لحظاتی متوقف شود و با دنیای ریاضی، خاطره‌بازی کند. با ما به این روستا بیایید تا امیرحسین کردلو دربارهٔ این کار برایمان بیشتر بگوید.

● منظور از دیوارنگارهٔ ریاضی چیست و روی این دیوار چه چیزهایی دقیقاً نوشته شده است؟

○ «دیوارنگاری» یا «گرافیتی» به هنری گفته می‌شود که نقش‌ها، شکل‌ها، حرف‌ها، نشانه‌ها، نمادها، الگوها و کلمه‌ها را روی دیوارها یا هر مکان عمومی که بتوان از آن به‌عنوان مکانی برای نوشتن، نقاشی، کنده‌کاری و خط‌کشی‌کردن استفاده کرد، به اجرا درمی‌آورد. این دیوارنگاره که من دربارهٔ آن صحبت می‌کنم و روی آن تعدادی از فرمول‌های ریاضی نوشته شده‌اند، به روستای ما چهرهٔ جالب و زیبایی داده است.

● تا به حال چند تا از این دیوارنگاره‌ها روی دیوارهای روستا و منطقهٔ شما اجرا شده‌اند؟

○ من دیوارنگاره‌های بسیاری در شهر و روستایمان دیده‌ام، اما تا به حال ندیده بودم که کسی از دیوارهای شهر به‌عنوان تختهٔ کلاس استفاده کند و روی آن فرمول ریاضی یا جواب‌های سؤال‌های مباحث ریاضی را بنویسد.

● ایده و فکر این دیوارنگاره متعلق به چه کسی است؟

○ ایدۀ این کار متعلق به آقای دکتر **حامد نیک‌پی** است. ایشان وقتی دید دیوارهای روستایمان خالی‌اند و هیچ طرحی ندارند، روی این دیوارها تعدادی فرمول ریاضی از کتاب‌ها و مباحث آموزشی نوشت.

● شما به‌عنوان دانش‌آموز چطور به این کار دعوت شدید و چه مسئولیتی در این کار داشتید؟

○ من رفته بودم با دوســـتانم بازی کنم. در حال برگشتن به خانه بودم که به‌طور اتفاقی دیدم آقای حامد نیک‌پی در حال نوشتن فرمول و عدد روی دیوار است. این کار برای من جالب بود. مدتی نشستم و به این کار دقت کردم و دیدم بســـیار کار جالبی است. به ایشان گفتم اگر کاری از دست من برمی‌آید، حاضرم کمک کنم و خلاصه با ایشان همراه شدم.

● روی هر دیوارنـــگارۀ ریاضی چه اطلاعات، نکته‌هـــا و فرمول‌هایی از ریاضی نوشته شده است؟

○ این دیوارنوشته‌ها مربوط به قضیه‌های علم ریاضی در دورۀ دانشـــگاهی اســـت. استاد نیک‌پی ســـعی کرد با نوشتن این قضیه‌های پیچیده و زیبای ریاضی، توجه دانش‌آموزان و حتی افراد عادی جامعه را به پیشرفت علم ریاضی جلب کند. ایشان هر نکته‌ای را که می‌نوشـــت برای من و هر دانش‌آموز علاقه‌مندی توضیح می‌داد.

● آیـــا از نظرات شـــما هم به‌عنوان دانش‌آموز در اجرای این کار استفاده شد؟ در چه زمینه‌هایی شما نظر دادید؟

○ مطالب نوشته‌شده روی دیوارها در سطح بالای علمی هستند. اتفاقاً این نکته برای من هم جالب بـــود که چرا این نکته‌های سطح بالا انتخاب شـــده‌اند. وقتی همین سؤال را با استاد در میان گذاشتم، به من گفت: «اگر مفاهیـــم ابتدایی و راهنمایی روی دیوارها می‌نوشتم، نظر عموم مردم را بـــه خود جلب نمی‌کـــرد. در حالی که الان رهگـــذران بـــه خاطـــر پیچیدگی و زیبایی نوشتن این مفاهیم ریاضی کمی تأمل و دقت می‌کنند و از پیچیدگی‌ها و پیشرفت‌های آن لذت می‌برند.»

حتـــی ایشـــان بـــرای ترویـــج علـــم از دانش‌آموزان خواســـتند که در کنار این دیوارها از خودشـــان عکس بگیرند و هر مطلبی ریاضی را که دوســـت دارند، زیر عکس خـــود بنویســـند و در رخ‌نماهای (پروفایل‌های) خودشـــان در شبکه‌های اجتماعی قرار دهند. با این کار هم ترویج علم صورت می‌گیرد و هم نشان می‌دهند ســـاکنان این شـــهر و منطقـــه به دانش ریاضی و گسترش آن از طریق این طرح علاقه‌مند هستند. البته ایشان نیم نمره به نمرۀ دانش‌آموزانی اضافه می‌کنند که این کار را برای گسترش ریاضی در شبکه‌های اجتماعی تبلیغ می‌کنند.

● چطـــور شـــد کـــه شـــما به‌عنوان دانش‌آموز در این کار مشارکت کردید؟

○ آقـــای نیک‌پی یکی از همســـایه‌های چندســـالۀ ماســـت و با پدر من آشنایی کاملـــی داشـــت. از همیـــن راه مرا هم می‌شـــناخت و هر بار که برای خرید نان به مغازۀ مـــا می‌آمد، با من هم گفت‌وگو می‌کرد. ایشان وقتی علاقه‌ام را به ریاضی و فرمول‌های ریاضـــی دید، مرا برای این کار انتخاب کرد.

● انجام این پـــروژه چه‌مدت طول کشید؟

○ حدود دو سه هفته طول کشید تا چند تا از دیوارهای خالی شهر ما پر از فرمول ریاضی شد.

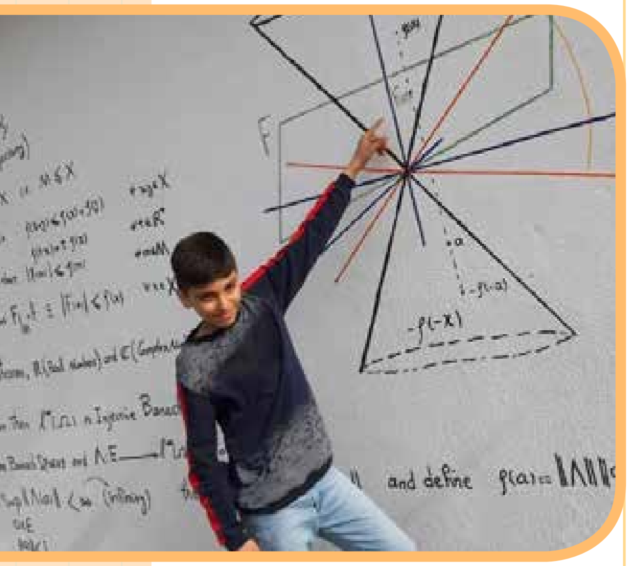
● آیا هنوز هم ادامه دارد؟ یعنی روی بخش‌های دیگری از دیوار شهر هم اجرا می‌شود؟

○ آقای نیک‌پی قصد دارد ان‌شاءالله دیوار مدرسۀ ما را هم طراحی کند و فرمول‌های ریاضی بنویسد.

● این دیوارنـــگاره چه تأثیری روی دانش‌آموزانی که شـــما می‌شناسید داشته‌اند؟ چه در مدرسۀ خودتان چه در محله؟

○ ایـــن دیوارنـــگاره روی دوســـتان من تأثیر بســـیار زیادی گذاشت. اگر همین حالا هم برویـــد و رخ‌نماهای شبکه‌های اجتماعی‌شـــان را ببینیـــد، هنوز عکس دیوارنگاره هست و این نشان می‌دهد که تأثیر زیادی داشته است.

● به نظر خودتان به‌عنوان دانش‌آموز، انجام دیوارنگاره‌های درســـی روی دیوارهای شـــهر چقدر می‌توانند در جذب بچه‌ها و ایجاد علاقه در آن‌ها برای مطالعۀ درسی اثرگذار باشد؟

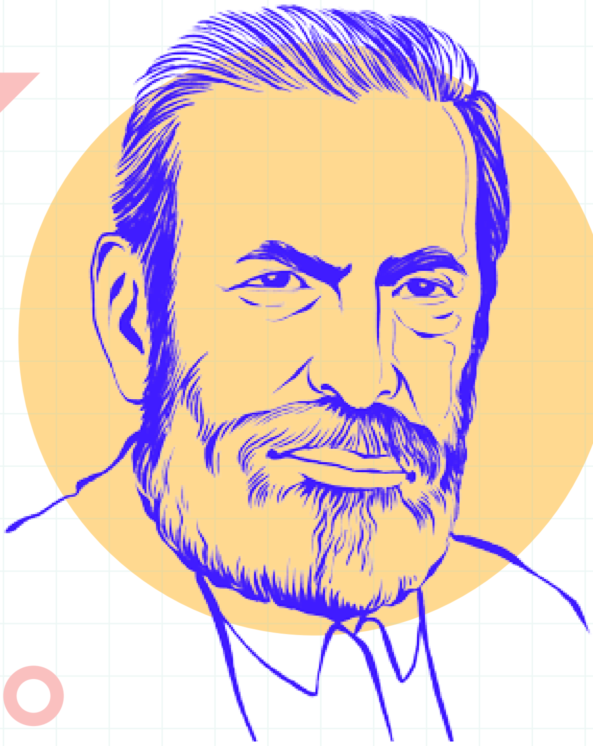


○ به نظر من این کار می‌تواند حداقل ۶۰ درصد به مطالعۀ بچه‌های شهر ما کمک کند و نظر من این است که به جای نصب کارت و کاغذهای تبلیغـــات روی دیوار، فرمول‌های ریاضی نوشته شود.

● نظر معلمان مدرسۀ شما دربارۀ این کار چیست؟

○ معلم‌هـــای ما هـــم از ایـــن کار راضی هستند و می‌خواهند از آقای حامد نیک‌پی درخواست کنند روی دیوار مدرسۀ ما هم فرمول ریاضی بنویسید.

● از شـــما بـــرای ایـــن گفت‌وگو سپاسگزاریم.



ریاضیات در ادبیات

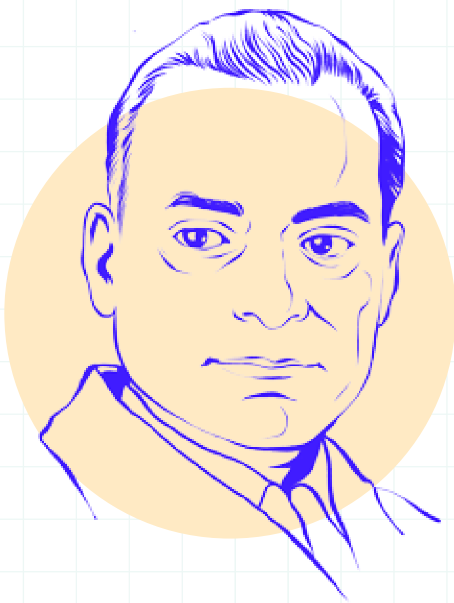
جعفر ربّانی

دانش‌آموزان عزیز! در دورهٔ جدید مجله، بخش «ریاضیات در ادبیات» را برای شما در نظر گرفته‌ایم و در آن پاره‌ای از مطالب ادبی (شعر، حکایت و معما) را که حاوی نکته‌های ریاضی است، برایتان بیان می‌کنیم. همچنین، در هر شماره یکی از چهره‌های ادبی یا ریاضی را که به این موضوع مربوط می‌شود، معرفی می‌کنیم.

جلال‌الدین همایی

شادروان **جلال‌الدین همایی** (۱۳۵۸- ۱۲۷۸) متولد اصفهان و از استادان و ادیبان دانشمند بود. وی به علوم ریاضی و هیئت و نجوم نیز بسیار علاقه داشت و همیشه به نوجوانان گوشزد می‌کرد که از یادگرفتن ریاضیات غفلت نکنند و در هر رشته‌ای که تحصیل می‌کنند، رابطهٔ خود را با ریاضی قطع نسازند. استاد همایی توانایی بسیاری در «حساب جُمل» و ساختن «ماده تاریخ» داشت. بخش مهمی از دیوان شعرهای او به نام «دیوان سنا» را همین شعرها تشکیل می‌دهند. می‌دانیم که شما با «حساب جُمل» قبلاً در این مجله آشنا شده‌اید، پس در این باره توضیح زیادی نمی‌دهیم. همین اندازه می‌گوییم که از قدیم در زبان عربی، هر حرف از ۲۸ حرف الفبا یا «حرف‌های ابجد» را برابر با یک عدد می‌دانستند که به ترتیب از عدد ۱ تا ۱۰۰۰ را شامل می‌شده است. حال هرِ کلمه‌ای که با این حرف‌ها بسازیم، یک معادل عددی هم دارد. مثلاً برهان (نام مجله‌ای که در دست دارید) می‌شود: ب + ر + هـ + ا + ن = ۲+۲۰۰+۵+۱+۵۰=۲۵۸ و یا اگر سال تولد شما مثلاً ۱۳۸۵ باشد، می‌توان آن را به‌صورت کلمهٔ «شفغه» (۳۰۰+۸۰+۱۰۰۰+۵=۱۳۸۵) نشان داد که البته کلمهٔ بی‌معنایی است. اشخاص توانا می‌کوشند ماده‌تاریخ‌هایی را که می‌سازند، به شکل عبارت‌های بامعنا و زیبا درآورند. این کار «ماده‌تاریخ‌گویی» نام دارد. در ادامه چند نمونه از ماده‌تاریخ‌هایی را که شادروان استاد جلال‌الدین همایی ساخته است می‌آوریم و چند مورد را هم از دیگران ذکر می‌کنیم.

آ=۱	ح=۸	س=۶۰	ت=۴۰۰
ب=۲	ط=۹	ع=۷۰	ث=۵۰۰
ج=۳	ی=۱۰	ف=۸۰	خ=۶۰۰
د=۴	ک=۲۰	ص=۹۰	ذ=۷۰۰
هـ=۵	ل=۳۰	ق=۱۰۰	ض=۸۰۰
و=۶	م=۴۰	ر=۲۰۰	ظ=۹۰۰
ز=۷	ن=۵۰	ش=۳۰۰	غ=۱۰۰۰



- تاریخ فوت دکتر **محمد معین**، استاد برجستهٔ دانشگاه و مؤلف فرهنگ معین.

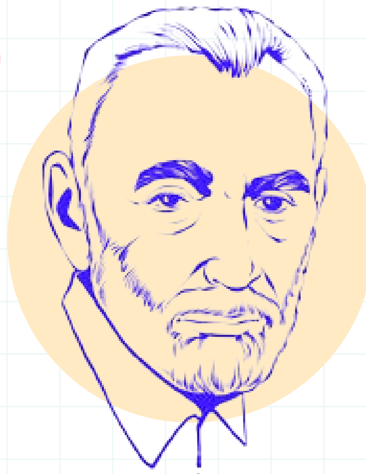
سنا اندر وفات او، به شمسی گفت تاریخش
«معین» با **«آه»** بیرون رفت از جمع **«لغت‌نامه»**

لغت‌نامه= ۱۵۲۶
معین + آه = ۱۷۶
شمسی ۱۳۵۰ =۱۷۶-۱۵۲۶

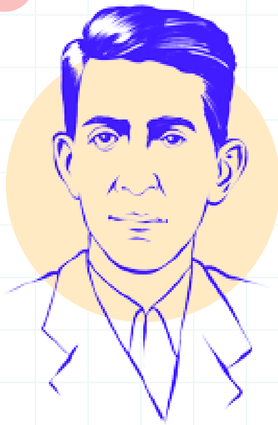
● سال درگذشت حاج **رحیم ارباب اصفهانی** (حکیم و فقیه)
او برفت از جهان و گفت سنا
«جان علم از تن جهان رفته»= ۱۳۹۶ هجری قمری

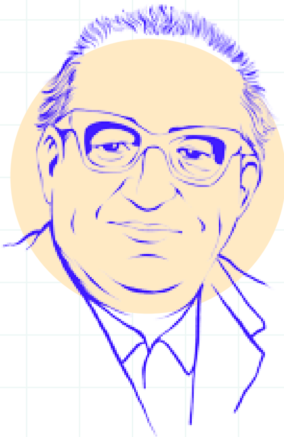
● در شهر تفت یزد بقعهٔ عارفی وجود دارد به نام بقعهٔ **شاه خلیل‌الله**. استاد همایی برای سال تعمیر آن که سال ۱۳۲۳ بوده، این ماده‌تاریخ را ساخته است:
سال انجام بنا خواست سنا
گفتمش **«مقبرهٔ شاه خلیل»**= ۱۳۲۳

● **اسماعیل آشتیانی**، نقاش بزرگ و از شاگردان برجستهٔ **کمال‌الملک** بود. هنگامی که در سال ۱۳۴۹ شمسی (۱۳۹۰ قمری) درگذشت، استاد همایی شعری در رثای او سرود و در بیت آخر ماده‌تاریخ او را چنین گفت:
اجل بسترد در ماه صفر نقش بهین صورت
«اجل بسترده نقش پاک اسماعیل» شد سالش



● دکتر **لطفعلی صورتگر شیرازی**، استاد زبان و ادبیات فارسی و انگلیسی بود که در سال ۱۳۴۸ شمسی درگذشت و در حافظیهٔ شیراز مدفون شد.
همایی گفت:
سال فوتش سنا ز من پرسید
گفتمش «نقش پاک صورتگر»= ۱۳۸۹





● استاد **مجتبی مینوی** نیز از ادیبان بنام و استاد دانشگاه تهران بود و همایی ماده‌تاریخ فوت او را به سال شمسی ساخت:
سال وفاتش از سنا، هجری شمسی خواستم
در پاسخم این جمله گفت، **«آه ای دریغ از مینوی»**= ۱۳۵۵

و بالاخره این دو ماده‌تاریخ هم قابل ذکر هستند:
● در کاخ چهلستون اصفهان سنگ‌نوشته‌ای پیدا شده است که روی آن تاریخ اتمام بنا را چنین ثبت کرده‌اند:
مبارک بود، زان که تاریخ آن شد
«مبارک‌ترین بناهای دنیا»= ۱۰۵۷

● شخصی ناشناس نیز سال تولد، سال اوج دانش و سال فوت **بوعلی سینا** را این‌گونه ماده‌تاریخ کرده است:
حجت‌الحق ابوعلی سینا
در **«شَجَع»** آمد از عدم به وجود/ در **«شصا»** کرد کسب جمله علوم/
در **«تکز»** گفت این جهان بدرود
شجع= سال ۳۷۳ قمری، شصا= ۳۹۱ قمری و تکز= سال ۴۲۷ قمری.

توضیح اینکه در سال شصا (۳۹۱) بوعلی سینا ۱۸ سال بیشتر نداشته و خود گفته است من در ۱۸ سالگی همهٔ علوم زمان خود را می‌دانستم و از آن پس چیزی بر علمم افزوده نشد و تنها در علوم پخته‌تر شدم.

معمای قلعه

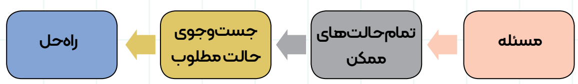
عبداله صارمی نائینی

تقدیم به ریاضی‌دان سرشناس ایرانی مریم میرزاخانی

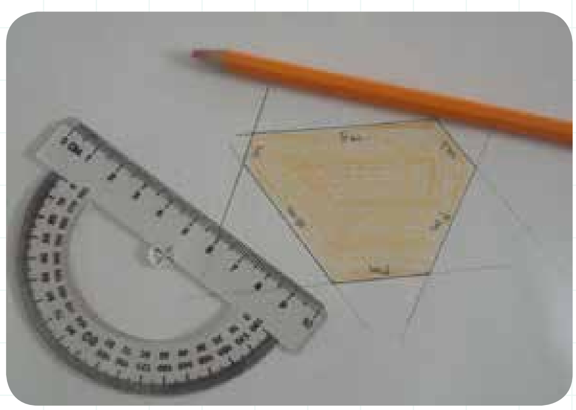
مریم میرزاخانی (۱۳۹۶-۱۳۵۶) ریاضی‌دان برجستهٔ ایرانی و استاد «دانشگاه استنفورد» بود. او به خاطر پژوهش و تحقیقاتش در سال ۲۰۱۴ برندهٔ جایزهٔ «فیلدز»، بالاترین نشان علمی ریاضیات در جهان، شد. به‌علاوه تنها زنی است که تابه‌حال این نشان پر افتخار را کسب کرده است.
اکنون ما به یاد او مسئلهٔ زیر را مطرح و با هم حل می‌کنیم:

قلعه‌ای با شش دیوار بلند وجود دارد. طول دیوارها یک، دو، سه، چهار، پنج و شش متر و زاویهٔ گوشه‌های قلعه یکسان است. شهرداری منطقه می‌خواهد این قلعه رؤیایی را روی تپه‌ای در یک پارک جنگلی بنا کند، اما ترتیب قرارگیری دیوارها را نمی‌داند. این موضوع را بین دانش‌آموزان به مسابقه می‌گذارد. پاسخ چیست؟

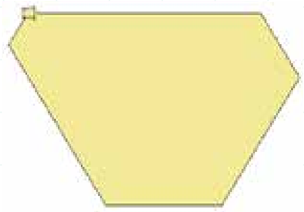
راه‌حل اول: یک گروه دانش‌آموزی ابتدا تمام ۱۲۰ حالت ممکن (چرا؟) را که بتوان شش عدد را به صورت دوری کنار هم قرار داد، محاسبه کردند. سپس با استفاده از خط‌کش و نقاله شروع به ترسیم حالت‌های متفاوت کردند. به خاطر زیادبودن تعداد حالت‌ها، زمان زیادی را صرف ترسیم آن‌ها کردند و در نهایت راه‌حلی برای آن یافتند.



این روش حل مسئله یکی از روش‌های جامع در حل مسئله است که به خاطر تعداد حالت‌های زیاد، اجرای آن به صورت دستی زمان‌بر است، اما با ماشین‌های محاسباتی می‌توان سرعت اجرا را افزایش داد.



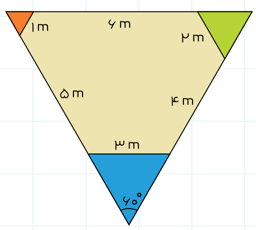
راه حل دوم: گروه دیگری همین روش را دنبال می‌کند، ولی به خاطر مشکلات ترسیم، از رایانه برای انجام این کار بهره می‌گیرند. آن‌ها با استفاده از لاک‌پشت در زبان برنامه‌نویسی پایتون موفق به انجام این کار در زمان کمتری می‌شوند. در این روش ابتدا همهٔ حالت‌های ممکن (۱۲۰ حالت) را به دست می‌آورند و سپس با استفاده از لاک‌پشت یکی‌یکی آن‌ها را ترسیم می‌کنند و در صورت صحیح‌بودن هر یک آن را به‌عنوان حالت مطلوب در نظر می‌گیرند.



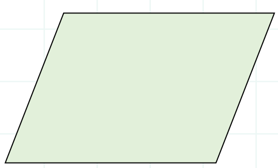
با استفاده از رایانه چهار راه‌حل برای ساخت قلعه کشف می‌شود. راه‌حل‌ها عبارت‌اند از:

۱, ۴, ۵, ۲, ۳, ۶
۱, ۵, ۳, ۴, ۲, ۶
۱, ۶, ۲, ۴, ۳, ۵
۱, ۶, ۳, ۲, ۵, ۴

راه حل سوم: دانش‌آموزی خوش‌ذوق راه‌حل زیبایی برای آن پیدا می‌کند. در این راه‌حل ابتدا یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع‌های ۹ متر رسم می‌کنیم و سپس سه مثلث متساوی‌الاضلاع با اضلاع ۱، ۲ و ۳ را از گوشه‌های مثلث اولیه حذف می‌کنیم.



سؤال: با استفاده از یک متوازی‌الاضلاع به ابعاد ۷×۵ راه‌حل دوم را به دست آورید؟



سؤال: آیا می‌توان یک قلعهٔ پنج ضلعی با ضلع‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ ساخت که زاویهٔ گوشه‌های آن ۱۰۸ درجه باشد؟

فاطمه درویشی

معرفی ارثمیوم کالک Arithmium Calc

هر نوع علمی، اگـر به درجه‌ای از بلوغ برسـد، به‌طور خودکار به قسـمتی از ریاضیات تبدیل می‌شود.
دیوید هیلبرت

ریاضیـات مـادر تمام علوم اسـت و بـه باور دانشـمندان، جهان ما بر پایهٔ الگوهای ریاضی ساخته شـده است. یعنی هر چه که در جهان مشاهده می‌کنید، هر قدر هم که پیچیده باشد، با استفاده از ریاضیات قابل توضیح و توجیه است. هیچ علمی نیست که به ریاضیات وابسته نباشد و شاخه‌ای از ریاضی نتواند رابطه‌های پدیده‌های موجود در آن را فرموله کند. شـاید ریاضیات درس مورد علاقهٔ شـما در مدرسه نباشد، اما این علم شگفتی‌های بسیاری دارد که آشنایی با آن‌ها می‌تواند نظر شما را در مورد ریاضیات تغییر دهد. به همین خاطر در نظر داریم که با معرفی یک برنامهٔ تلفن همراه به شما در یادگیری بهتر درس‌های ریاضی کمک کنیم.

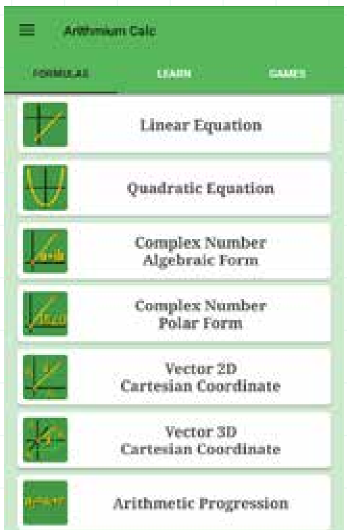
نرم‌افزار «ارثمیوم کالک» را می‌توانید از نشانی الکترونیکی زیر دریافت کنید:

http://cafebazaar.ir/app/?id=br.com.daluz.android.apps.arithmiumcalc&ref=share

این برنامهٔ جذاب و هیجان‌انگیز آسـان، بصری و عملـی، برای یادگیری ریاضی بسـیار مفید اسـت. به‌صورت خلاصه مباحث چالش‌برانگیز دوره‌های دبیرسـتان، از سطوح ساده تا مشکل را بیان می‌کند که با توجه به هدف‌گذاری مجله، در این مقاله مباحثی که در دورهٔ اول متوسطه کاربرد دارند، مطرح خواهد شد.

پس از نصب برنامه، شـمایل آن روی تلفن همراه شما ایجاد خواهد شد که دروازهٔ ورود به این برنامه است.

با اجرای آن شکل زیر ظاهر خواهد شد.



همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید، این پنجره سه سربرگ دارد:

- FORMULAS: در این بخش مباحث ریاضـی کاربردی در قالـب فرمول‌های متفاوت ارائه شـده‌اند که کاربر توسـط توضیحات برنامه، با روش‌های حل آن‌ها آشنا خواهد شد.
- LEARN: در ایـن بخش تعریف‌های پایهٔ ریاضی به‌صورت خلاصـه قرار داده شده است.
- GAMES: در ایـن بخـش شـما می‌توانید به کمـک بازی‌های متفاوت و مرحله‌به‌مرحله مباحث را تمرین کنید و سرگرم شوید.

ابتـدا از سـربرگ LEARN شـروع و بخش‌های این سربرگ را معرفی می‌کنم.

▲ معرفی عددهای لاتین.

▲ معرفی عددهـا در مبناهای ۲، ۸، ۱۰ و ۱۶ (این مبناها بیشتر در مباحث رایانه کاربرد دارند و در سطح دورهٔ اول متوسطه نیستند.)

▲ در ایـن بخـش فرمول‌هـای مربوط به اتحادهـای پرکاربرد، مانند اتحـاد مربع دو جملـه، مزدوج و مکعـب دو جمله همراه با اثبات آن‌ها معرفی شده‌اند.

▲ معرفـی فرمول‌های لگاریتم (این مبحث به ریاضیات دورهٔ دوم متوسطه مربوط است.)

▲ معرفی قوانین مربوط به توان

▲ معرفی قوانیـن مربوط به ریشـه‌گیری (رایکال‌ها)

▲ معرفـی قوانین مربوط به مشـتق (این مبحث مربوط به دورهٔ دوم متوسطه است.)

▲ معرفـی قوانین مربوط بـه انتگرال (این مبحث به دورهٔ دوم متوسطه مربوط است.)

برای آشنایی با سربرگ Formulas رمزینه را پویش کنید.

علیرضا محمدصالحی

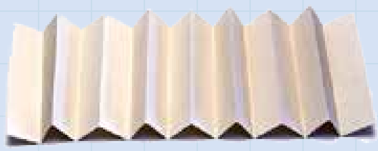
کاردستی‌های کاغذی

هنر و دانش تا زدن

اشاره

احتمالاً تا حالا قایق، قورباغه یا فالگیر کاغذی ساخته‌اید. از سال‌های دور، اوریگامی در ژاپن به‌عنوان هنری سنتی شناخته شده بود و طرح‌های ساده و جالبی توسط مردم ساخته می‌شد. اما در کمتر از ۱۰۰ سال گذشته، با استفاده از اصول ریاضی، اوریگامی به یک علم و صنعت تبدیل شد و در شکل هنری خود نیز تفاوت بسیار زیادی با اوریگامی سنتی پیدا کرد. در آخرین دقیقه‌های کلاس یکی از بچه‌ها پرسید: «آقا! آیا راست می‌گویند که اگر یک برگه را ۲۰ بار روی خودش تا بزنیم، ارتفاع آن اندازهٔ یک ساختمان ۵۰ طبقه می‌شود؟!» معلم لبخندی زد و گفت: «کاملاً درست است، البته به شرطی که بتوانید!» همه تعجب کرده بودند و به حرف او شک داشتند که ناگهان معلم با یک جملهٔ دیگر ما را کاملاً به هم ریخت: «شما هیچ وقت نمی‌توانید یک کاغذ معمولی را بیشتر از هفت بار روی خودش تا بزنید!» تقریباً همهٔ ما از دفترمان یک برگه کندیم و شروع کردیم به تا زدن تا به معلم ثابت کنیم که اشتباه می‌گوید. (شما هم امتحان کنید!) می‌دانستیم منظور معلم این نبود که کاغذ را بادبزنی تا بزنیم. تلاشمان را کردیم که روی تاهای قبلی تا کنیم، ولی تمام بچه‌ها در ششمین مرحله متوقف شدند! بعضی‌ها با زور و فشار زیاد و با پاره‌کردن کاغذ، سعی کردند هفتمین تا را بزنند، ولی ناموفق بودند و همهٔ انگشتانشان درد گرفته بود.

کاغذ ۶ بار تا خورده روی تاهای قبلی



تای بادبزنی یا آکاردئونی

من گفتم: «کاغذهای ما کوچک است. باید با کاغذهای بزرگ‌تر امتحان کنیم.»

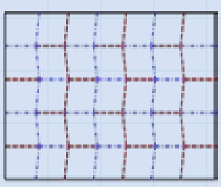
معلم گفت: «اگر کاغذی به اندازهٔ کف این کلاس هم داشته باشی فایده‌ای ندارد.»

...

تا مدتی ذهنم با این موضوع درگیر بود. کم‌کم به یک پرسش مهم‌تر رسیدم: «اگر نخواهیم تاهایی که می‌زنیم روی هم بیفتند و کاغذمان زیادی ضخیم نشود چه؟»

تا حالا شده برای جادادن یک اسکناس یا یک برگه در جیبتان به مشکل بربخورید؟ احتمالاً سعی کرده‌اید با چندین بار تا زدن آن را فشرده کنید تا در جیب جا شود. همچنین احتمالاً بعد از بیرون آوردن آن دیده‌اید که بعضی قسمت‌های تاخورده چروک و نازک شده و شاید حتی پاره هم شده باشند. یا تا حالا گردشگران را در حال استفاده از یک نقشهٔ بزرگ دیده‌اید؟ البته امروزه، با توجه به رایج‌شدن برنامه‌های مجازی مسیریابی روی تلفن همراه و نقشه‌های اینترنتی، معمولاً کمتر کسی برای مسیریابی از نقشه‌های کاغذی استفاده می‌کند. اما جالب است بدانید که چند دهۀ پیش، تاکردن و بازکردن نقشه‌ها برای گردشگران و مسافرانی که به شهر یا منطقه‌ای ناآشنا وارد می‌شدند، یا کسانی که سر و کارشان با نقشه‌های بزرگ بود، واقعاً یک مشکل به حساب می‌آمد. شاید شما هم در نگهداری دفترک (بروشور) یا راهنماهای بازی و وسایل، و ... که روی برگه‌های با ابعاد بالا با تاهای زیاد چاپ و ارائه می‌شوند، این مشکل را تجربه کرده باشید. بیشتر وقت‌ها برگه‌ها بر اثر تاهای زیادی که روی هم زده می‌شوند، پاره می‌شوند یا ضخامت زیاد برگه‌های تا شده باعث آسیب‌دیدن کاغذ یا نوشته‌ها و جزئیات چاپ‌شدهٔ روی برگه می‌شود.

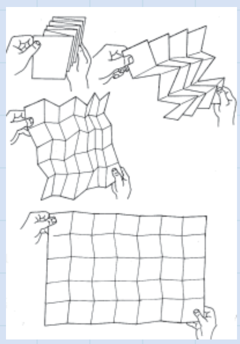
در دهۀ ۱۹۷۰ میلادی، نقشه‌هایی با خط‌های تای جدید در شهر کیوتوی ژاپن به گردشگران فروخته می‌شد که تنها با یک حرکت جمع و با یک حرکت باز می‌شدند. این نقشه‌ها خط‌های تایی شبیه این داشتند:

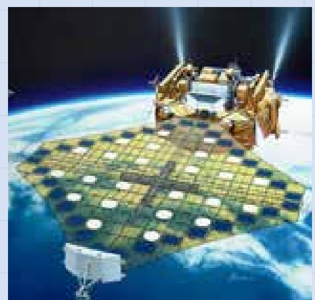


الگوی تای میورا

برای دیدن چگونگی تا شدن صفحه با الگوی میورا رمزینهٔ بالا را پویش کنید.

اما ایـن روش فقط برای نقشه‌ها بـه کار نرفته بود. پیـش از آن اخترفیزیـک‌دان ژاپنی، کوریو میورا[1]، در جسـت‌وجوی الگویی برای فشرده‌سازی صفحه‌های خورشیدی که انرژی موشک‌های (راکت‌های) فضایی را تأمین می‌کنند، چنین طرحـی را یافته بود. در واقع چون صفحه‌های خورشـیدی مناسـب برای این کار سطح وسیعی دارند، جادادن آن‌ها در راکت‌های فضایی مسـئله‌ای اساسی بود. الگوی تای میورا باعث شد این صفحه‌ها حجم بسیار کمتری اشغال کنند و به این ترتیب برای انتقال به خارج از جوّ زمین آماده شـوند. او این الگو را با الهام از طبیعت و همچنین برخی طرح‌های قدیمی و سنتی کاغذتایی (اریگامـی) در ژاپن، برای تازدن و بازکردن صفحه‌های خورشـیدی پیشـنهاد کرد. در واقع میلیون‌ها سال اسـت که چنین طرحی در بال‌های حشراتی مثل سنجاقک به کار رفته و باز و بسته شدن بال‌های حشرات بر اساس این الگوست. چین خوردگی‌های پوست ما هم تاهای مشابهی را ایجاد می‌کنند.



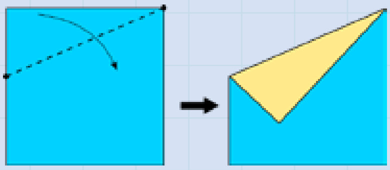


ماهواره ژاپنی ۱۹۹۶

امروزه از این طرح تا استفاده‌های فراوانی در صنایع می‌شود. همان‌طور که در تصویر الگوی تای میورا با رنگ‌های قرمز و آبی نشان داده شده، این الگوی تا فقط بر اساس دو نوع تای اصلی است:

تای درّه‌ای یا (فرورفته) - - - - و تای قلّه‌ای (یا برآمده) -.-.-.-.-

در کاغذتا انواع تا و فنون متفـاوت تازدن کاغذ وجود دارد که همهٔ آن‌ها بر اسـاس همین دو نوع تای بیان‌شـده هسـتند. در آینده با تاهای مهم در کاغذتا، زیبایی‌های هنری و اصول ریاضیاتی آن آشنا خواهیم‌شد. همان طور که در هندسه برای رسم شکل‌ها از خط‌کش و پرگار اسـتفاده می‌کنیم، در کاغذتا با تازدن، شـکل‌های متفاوتی می‌سازیم. همان طور که در هندسه با خط و نقطه سر و کار داریم و با آن‌ها انواع قضیه‌ها را ثابت می‌کنیم، در کاغذتا با نقطه‌ها و خط‌ها روی صفحه (مثلاً گوشه‌ها و ضلع‌های کاغذ) و خط‌های تا سر و کار داریم. به این ترتیب باید مثل هندسه، در اینجا هم بر اساس اصول و قوانین مشخصی پیش برویم تا شکل‌ها و اشیای متفاوتی بسـازیم و خاصیـت‌های آن‌ها را کشف کنیـم. مثلاً همان‌طور کـه می‌دانید، در هندسـه‌ای که می‌شناسیم از دو نقطـه فقط یک خط می‌گـذرد. در اوریگامی هم اگر دو نقطه داشـته باشیم می‌توانیم یک خط تا از آن‌ها عبور دهیم.



می‌توانیـد حـدس بزنید با دو نقطـه چه تاهای دیگری می‌شود ایجاد کرد؟ با دو خط چطور؟ اگر از ترکیب نقطه‌ها و خط‌ها استفاده کنیم چه؟ در آینده به این پرسـش‌ها پاسخ‌هایی خواهیم داد که در واقع همـان اصول اوریگامی هسـتند. شـکل روبـه‌رو مرحله‌های باز و بسته‌شدن طرح میورا را نشان می‌دهد.

ایـن طـرح را می‌توانید با برگهٔ A_4 و با تقسـیم‌بندی طـول و عـرض صفحه به نسبت هفت و پنج براساس الگوی داده‌شـده بسـازید و نحـوهٔ کاهـش حجم صفحه‌های خورشـیدی در موشـک‌های فضایـی را از نزدیک مشاهده کنید! دقت کنید که این نسبت و اندازهٔ گفته‌شـده صرفـاً به خاطر در دسترس‌بودن کاغذ A_4 اسـت و اینکه نسبت اضلاع کاغـذ A_4 تقریبـاً هفت به پنج اسـت. بنابراین چندان مهم نیست که از چه کاغذ و چه ابعادی استفاده می‌کنید و چطـور تقسـیم‌بندی می‌کنید، فقط باید حواستان باشـد کـه صفحه را با متوازی‌الاضلاع‌های هم‌اندازه بپوشانید.

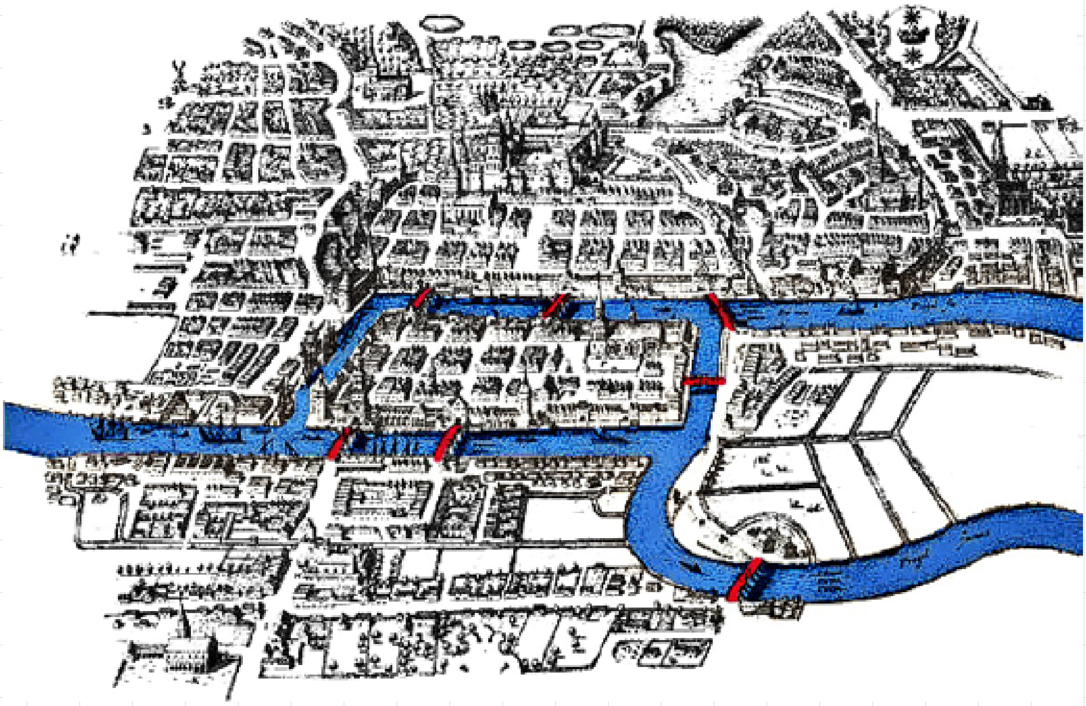
پی‌نوشت

1. Koryo Miura

معماها و مسئله‌های تاریخی ریاضیات

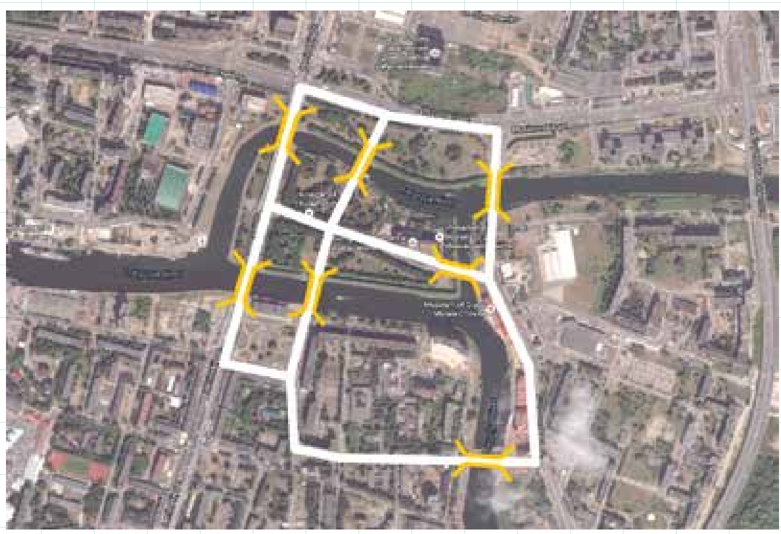
پل‌های کونیگزبرگ

محرم ایردموسی

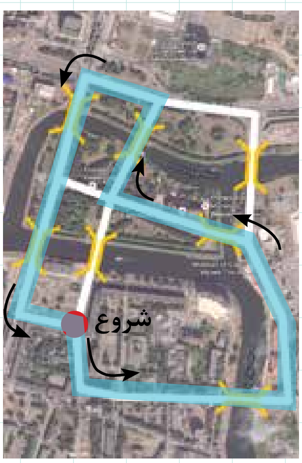


اوایل قرن هجدهم است. شما در شهر «کالینگراد» روسیه هستید. البته آن زمان این شهر «کونیگزبرگ» نام داشت. روز تعطیل است و شما به همراه دوستانتان برای پیاده‌روی در شهر از خانه خارج شده‌اید. رود زیبای پرگل از وسط شهر می‌گذرد. تصمیم می‌گیرید به همراه پنج دوست خود، **علی**، **پارسا**، **مزدک**، **اقبال** و **آندرانیک** به سمت این رودخانه پیاده‌روی کنید. هفت پل قدیمی روی این رودخانه وجود دارند (شکل ۱).

دوستانتان پیشنهاد می‌دهند از همهٔ پل‌ها بازدید کنید و چون وقت محدود است، شرط می‌گذارید که از هر پل یک‌بار عبور کنید. پارسا نقشهٔ شهر و پل‌ها را همراه خود دارد. او می‌کوشد مسیر مناسبی پیدا کند (شکل ۲). اما تلاش او به نتیجه نمی‌رسد. علی سعی می‌کند مسیر بهتری بیابد (شکل ۳). مسیر علی، با اینکه به نقطهٔ شروع برمی‌گردد، اما از همهٔ پل‌ها نمی‌گذرد.



شکل ۱



شکل ۲

شکل ۳

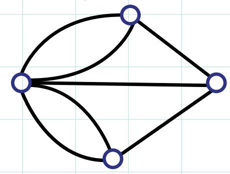
وقت در حال گذشـــتن است و شـــما هنوز پیاده‌روی را شروع نکرده‌اید. در همین حین، فردی به شـــما نزدیک می‌شـــود و با حرکت دادن انگشت اشاره‌اش به چپ و راست قصد دارد مطلبی را به شما بفهماند. متوجه منظورش نمی‌شوید. می‌گوید:

«Это невозможно». هیچ کدام به زبان روســـی آشـــنایی ندارید. آندرانیک کمی انگلیسی می‌داند و می‌گوید:

«We did not understand what you meant. please speak English»

(ما متوجه منظور شما نشدیم لطفاً انگلیسی صحبت کنید)

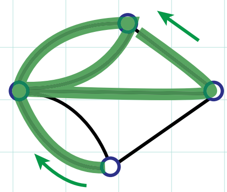
اما او به همان اندازه انگلیسی می‌داند که ما روسی می‌دانیم! یک دفعه راهی به ذهنش خطور می‌کند. کاغذ و قلمی از کیف خود در می‌آورد و شکل ۴ را روی کاغذ می‌کشد:



شکل ۴

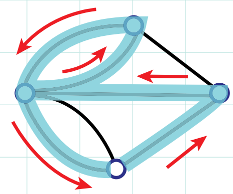
ابتدا متوجه منظورش نمی‌شـــویم، اما اقبال اشـــاره می‌کند که منظورش را فهمیده اســـت: «این چهار نقطه همان دو ساحل رودخانه و دو جزیره هســـتند و این خط‌ها هم هفت‌تا هستند. پس هر خط هم یک پل را نشان می‌دهد.»

اقبال درست می‌گفت. فرد که حالا می‌توانیم او را راهنما بنامیم، نقاشـــی‌اش را ادامه می‌دهد و بعد از کشیدن شکل ۵، به پارسا اشاره می‌کند.



شکل ۵

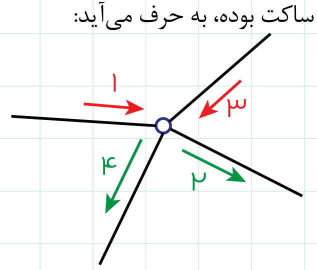
پارسا می‌خندد. متوجه می‌شـــود که راهنما به راه‌حل ناقص او اشاره می‌کند. بعد هم راه‌حل ناقص علی را روی نمودار دیگری نشـــان می‌دهد (شـــکل ۶). بعد از آن راهنما دوباره سرش را به چپ و راســـت تکان می‌دهد. همه به این نتیجه می‌رســـیم که منظورش این اســـت که این کار شدنی نیست. آندرانیک دوباره انگلیسی‌اش گل می‌کند و می‌پرسد: «why?» (چرا؟).



شکل ۶

راهنما خوش‌بختانه با این کلمه آشناست و دوباره شکل دیگری می‌کشد (شکل ۷). شکل او شبیه یک چهارراه است.

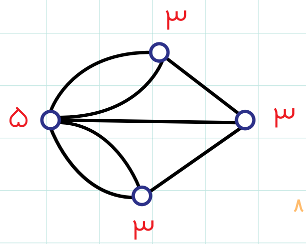
مزدک که تاکنون ساکت بوده، به حرف می‌آید:



شکل ۷

«شاید منظورش این است که هر ورودی یک خروجی هم دارد؛ مثل این ضرب‌المثل که هر سر بالایی یک سرپایینی هم دارد.»

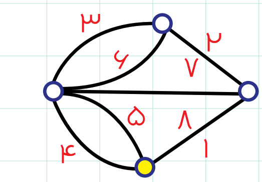
همه کنجکاوتـــر به راهنما نگاه می‌کنیم. او کنار هر کدام از آن چهار نقطه که کشیده بود، یک عدد می‌نویسد (شکل ۸). اقبال می‌گوید: این عددها تعداد همان پل‌هایی است که به آن ساحل یا جزیره می‌رسند. همهٔ آن‌ها هم عددهای فرد هستند.»



شکل ۸

مزدک دوباره به حرف می‌آید: «فهمیدم منظور این آقای نقاش این است که چون این عددها فرد هستند، بالاخره یک جایی که ورود می‌کنیم، نمی‌توانیم خارج شویم.»

درســـت می‌گفت. نصف روز را از دســـت داده بودیم و هنوز در نقطهٔ شروع بودیم. راهنما که متوجه ناراحتی ما می‌شود، شکل ۹ را می‌کشد:



شکل ۹

مثل این بود که مسیری پیشنهادی را نشان می‌دهد. یعنی باید مطابق شـــماره‌ها عمل می‌کردیم و ناچـــاراً از دو پل ۲ بار عبور می‌کردیم. چون دقیقاً یک بار عبورکردن امکان‌پذیر نبود.

از راهنما با علامت دست تشکر می‌کنیم و به راه می‌افتیم. هنوز خیلی دور نشـــده‌ایم که فردی به ما و راهنما نزدیک می‌شود و او را **لئونارد** خطاب می‌کند. لئونارد نقاشـــی‌هایش را به پارسا می‌دهد تا مسیر را اشتباه نروید. مسیر را مطابق پیشنهاد لئونارد طی می‌کنید و به نقطهٔ شروع برمی‌گردید.

لئونارد رفته اســـت. پایین نقاشی‌های لئونارد این یادداشت را از او می‌بینید:

Сколько существует других маршрутов,
похожих на мой предложенный маршрут?

یادداشت لئونارد را به فارسی ترجمه می‌کنیم:

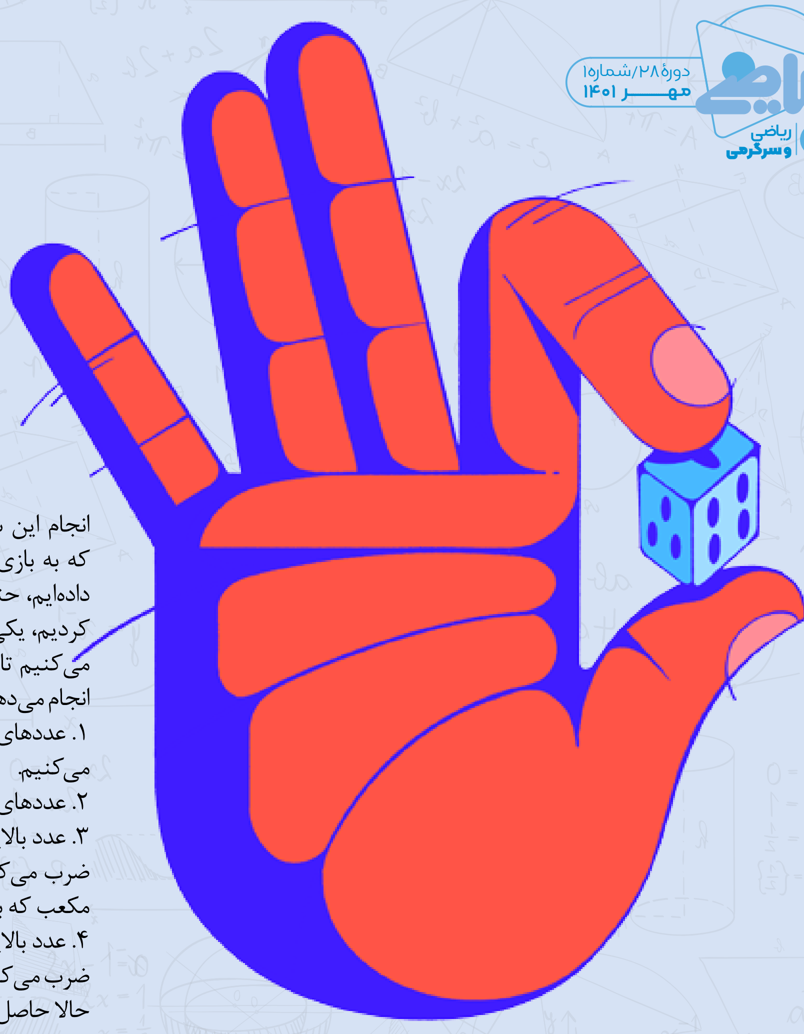
چند مسیر دیگر مشابه مسیر پیشنهادی من وجود دارد؟

از خواب بیدار می‌شـــوی. تا به‌حال خوابی با این شکل و شمایل ندیده بودی. عبارت لئونارد و پل‌های کونیگزبرگ را در «گوگل» جســـت‌وجو می‌کنی و با ریاضی‌دان معروف سوئیسی **لئونارد اویلر**، آشـــنا می‌شوی. متوجه می‌شوی که شکل‌هایی که اویلر در خواب برای شما می‌کشید، پایه‌گذار شاخه‌ای از ریاضیات به نام «نظریهٔ گراف» است. تصمیم می‌گیری که داستان این خواب را برای مجلهٔ برهان بنویسی و بفرستی.

اسرار تاس

معما و سرگرمی

عباس قلعه‌پوراقدم



سلام عزیزان. سال تحصیلی جدید آغاز شده است. امیدوارم روزهایی خوش همراه با موفقیت در درس‌ها در انتظارتان باشد. همچنین امیدوارم امسال نیز مجله را همراهی و مطالب آن را مطالعه کنید. در سال تحصیلی گذشته برایتان سرگرمی‌های عددی می‌نوشتم و امسال نیز سعی خواهم کرد سرگرمی‌ها و معماهای ریاضی جالبی را برایتان آماده کنم؛ لطفاً آن‌ها را خوب مطالعه کنید، یاد بگیرید و با انجام آن‌ها هم خودتان لذت ببرید و هم دوستانتان را هیجان‌زده کنید.

تاس: همان‌گونه که می‌دانید مکعب شش وجه (یا پهلو) دارد. مکعبی که روی هر یک از پهلوهای آن یکی از عددهای ۱ تا ۶ نوشته شده است، «تاس» نامیده می‌شود. شما در دورهٔ ابتدایی، در کتاب ریاضی، بخش آشنایی با احتمال، دیدید که وقتی یک سکه را پرتاب می‌کنیم، یا «رو» می‌آید یا «پشت» که احتمال آمدن هر دو برابر است. در کتاب ریاضی هفتم در بخش احتمال حالت‌های متفاوتی که در پرتاب تاس پیش می‌آیند، آمده است. اگر هشتمی یا نهمی باشید آن را خوانده‌اید و اگر کلاس هفتمی باشید، آخرهای کتاب آن را خواهید دید. البته می‌دانم که بیشتر شما پیش از آن در بازی معروف «منچ» پرتاب تاس را تجربه کرده‌اید. در پرتاب یک تاس یکی از این شش حالت پیش می‌آید: یا ۱ می‌آید، یا ۲، یا ۳، یا ۴، یا ۵ یا ۶. نوبت طرح معماست. این معما مربوط به تاس است و خواهید دید که سرگرمی جالبی است. برای خود من وقتی اولین بار آن را تجربه کردم، جالب و عجیب بود، ولی می‌دانستم که یک دلیل ریاضی پشت این معما هست که باید تلاش کنم تا آن را بیابم. برای انجام این سرگرمی دو عدد تاس نیاز دارید که اگر مثل من باشید که به بازی منچ علاقه دارم و مدت‌ها با فرزندانم این بازی را انجام داده‌ایم، حتماً در خانه‌تان پیدا می‌شود. بعد از اینکه دو تاس را آماده کردیم، یکی را سمت راست خود و دیگری را سمت چپ خود پرتاب می‌کنیم تا روی یکی از وجه‌هایشان بنشینند. حالا ضرب‌های زیر را انجام می‌دهیم:

۱. عددهای بالایی (به اصطلاح عدد روشدهٔ) دو تاس را درهم ضرب می‌کنیم.

۲. عددهای پایینی هر دو تاس را در هم ضرب می‌کنیم.

۳. عدد بالایی تاس سمت راست را در عدد پایینی تاس سمت چپ ضرب می‌کنیم (منظور از عدد پایینی عددی است که روی وجهی از مکعب که به زمین چسبیده است، قرار دارد).

۴. عدد بالایی تاس سمت چپ را در عدد پایینی تاس سمت راست ضرب می‌کنیم.

حالا حاصل این چهار تا ضرب را با هم جمع می‌کنیم. آیا می‌دانید چه عددی به دست می‌آید؟ چند بار آزمایش کنید تا ببینید که همیشه عدد ۴۹ به دست می‌آید.

همین الان که این مطلب را می‌نویسم دو عدد تاس در دست چپم دارم. اجازه بدهید تاس‌ها را پرتاب کنم. تاس سمت راستی من ۳ آمد و تاس سمت چپی ۵. این دو عدد را در هم ضرب می‌کنم و حاصل ۱۵ می‌شود. حالا پایین هر دو تاس را نگاه می‌کنم. عدد پایینی تاس راست ۴ است و عدد پایینی تاس چپ ۲ است. این دو را در هم ضرب می‌کنم و حاصل ۸ می‌شود. نوبت سومین ضرب است. عدد بالایی تاس راست، یعنی ۳ را در عدد پایینی تاس چپ، یعنی ۲ ضرب می‌کنم و ۶ می‌شود. بالاخره عدد پایین تاس راست، یعنی ۴ را در عدد بالایی تاس چپ، یعنی ۵ ضرب می‌کنم و حاصل ۲۰ می‌شود. حالا چهار تا حاصل‌ضرب را جمع می‌بندم: ۴۹=۲۰+۶+۸+۱۵. دیدید که ۴۹ آمد. حالا شما چند بار این کار را انجام دهید تا ببینید که همیشه ۴۹ می‌آید؛ نه کمتر و نه بیشتر.

کاربرد این معما

شما می‌توانید یک بازی ترتیب دهید به این صورت که از طرف مقابل بخواهید دو تاس را دور از چشمان شما پرتاب کند. (شما می‌توانید چشمانتان را ببندید یا از طرف مقابل بخواهید که پشت به شما تاس‌ها را پرتاب کند.) حالا از او بخواهید ضرب‌های چهارگانه را انجام دهد و در پایان حاصل‌ها را جمع کند، ولی به شما نگوید. در پایان شما با گفتن اینکه حاصل را می‌دانید و آن ۴۹ است، او را شگفت‌زده خواهید کرد.

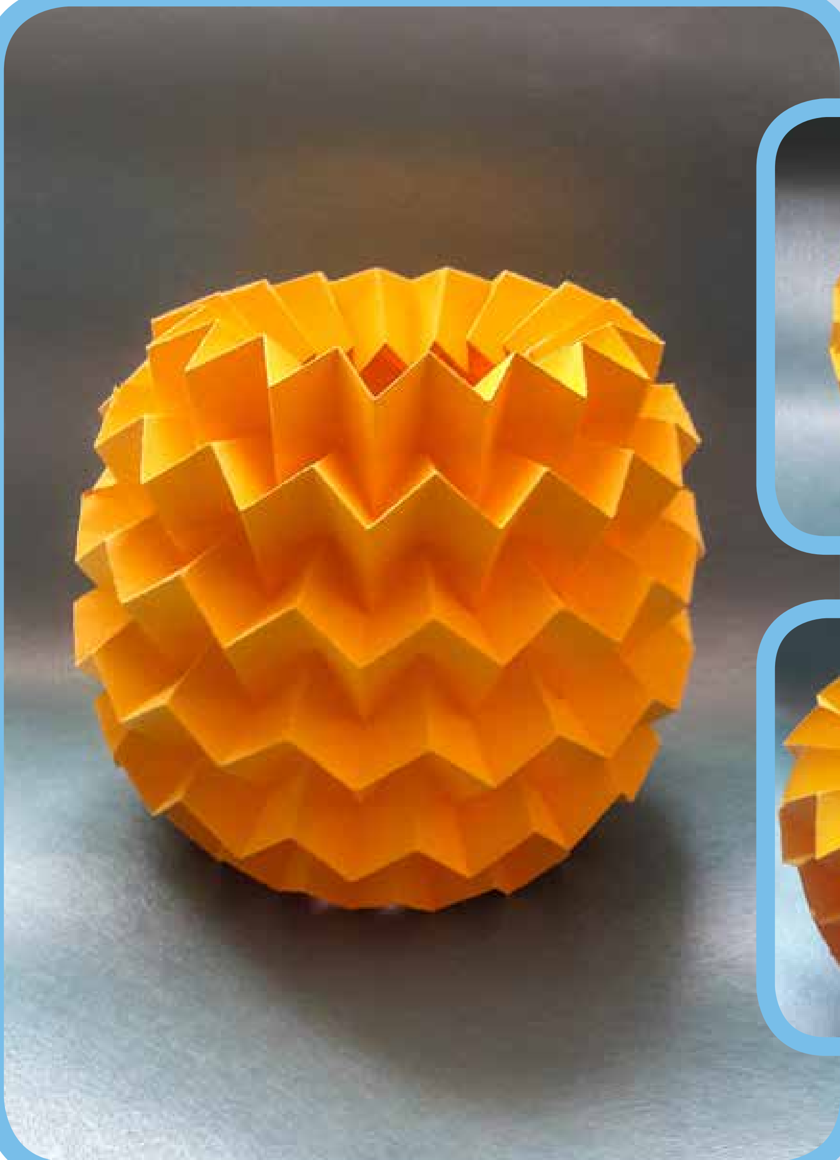
برای مشاهدهٔ راز این معما رمزینه را پویش کنید.

کاغذوتا

اریگامی

توپ میورا

برای مشاهدهٔ مراحل ساخت توپ میورا رمزینه را پویش کنید.



برای مشاهدهٔ پاسخ، رمزینه را پویش کنید.

مدرسهٔ کارآگاهی