رشد برهان ریاضی ۱

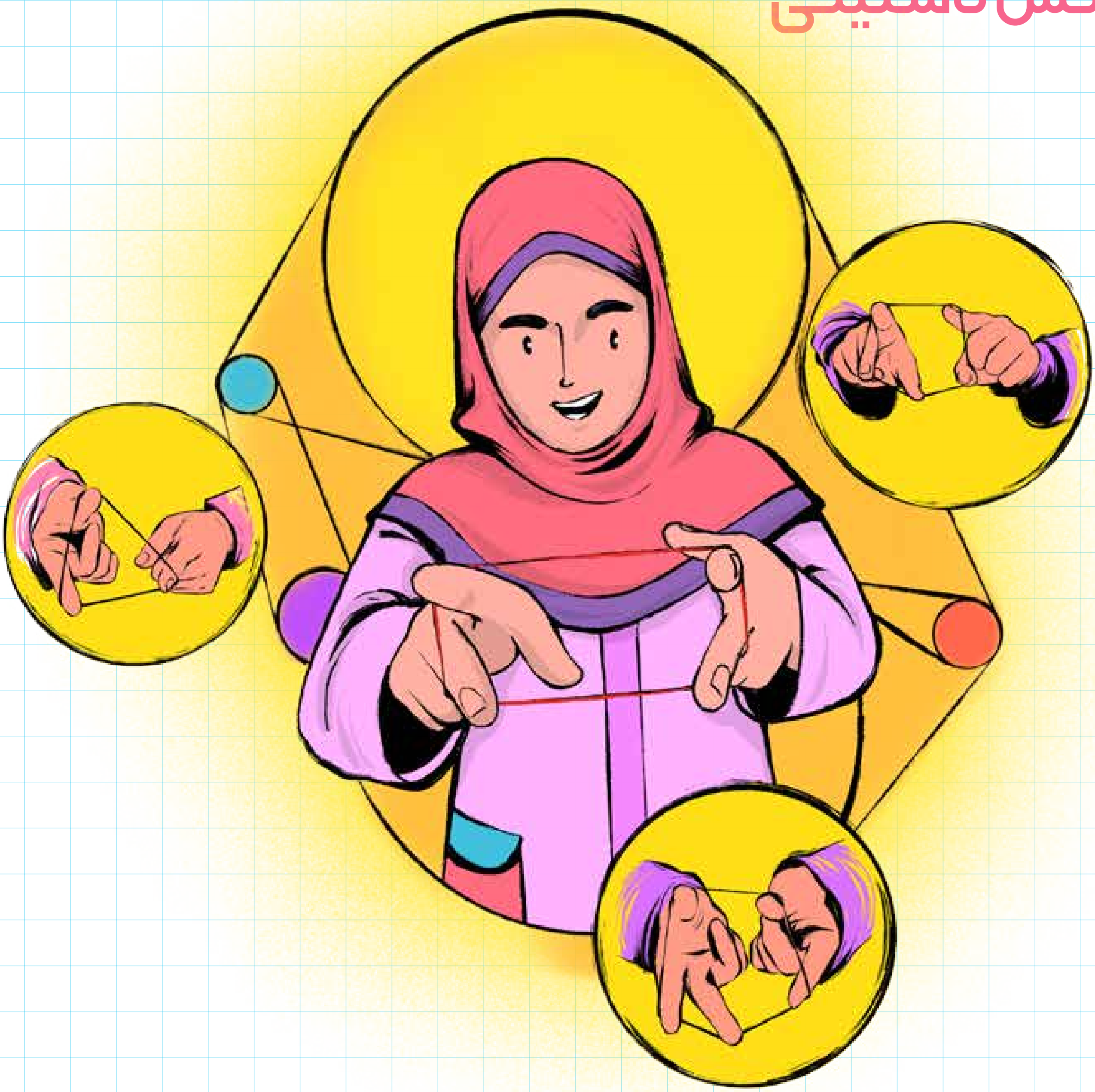
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی
www.roshdmag.ir
دوره بیست و هشتم/ شماره ۱۳۵

ماهنامه آموزشی و تربیتی برای
دانش‌آموزان دورۀ اول متوسطه
۴۰ صفحه/ بهمن ۱۴۰۱
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲
ISSN :1735-4943

مجله چندرسانه‌ای • شنیداری • دیداری • خوانشی

۵

هندسۀ
کش لاستیکی



تکرار فیلم‌برداری

بـــرای مشـــاهدۀ پاســـخ، رمزینـــه را پویش کنید.

کارگـردان تصمیم گرفت صحنـۀ آخر فیلم «خانۀ مرموز» را دوبـاره فیلم‌برداری کند. او فقط به چهار هنرپیشه نیاز داشت. با استفاده از راهنمایی‌های زیر جدول را کامل کنید تا معما حل شود:

- آن‌ها چهار نقش متفاوت را بازی می‌کنند.
- در حال حاضر، آن چهار نفر در چهار مکان متفاوت حضور دارند.

راهنمایی:

۱. بابک در اتاق گریم نیست.

۲. علی در کافه است. نقش او دانشجو یا استاد نیست.

۳. نقش داود دانشجو نیست. او در اتاق استراحت هنرپیشه‌ها نیست.

۴. مریم در سالن بسکتبال است.

۵. کسی که نقش هیولا را بازی می‌کند، در کافه است.

۶. کسی که نقش روح را بازی می‌کند، در اتاق استراحت هنرپیشه‌هاست.

نام هنرپیشه	نقش	مکان
علی		
بابک		
مریم		
داود		

بســــم الله الرحمن الرحیم

اللّهم صلّ علی محمد و آل محمد و عجّل فرجهم

دانش روشنی‌بخش اندیشه است.

امام علی علیه‌السلام «غررالحکم و دررالکلم، ص۴۶۷»

وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

دفتر انتشارات و فناوری آموزشی www.roshdmag.ir

دورهٔ بیست و هشتم/ شمارهٔ پی در پی ۱۳۵/ بهمن ۱۴۰۱

ماهنامه آموزشی و تربیتی برای دانش‌آموزان دورهٔ اول متوسطه

ISSN: 1735-4943 /پیامک: ۴۰/۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲ صفحه

مدیرمسئول: محمد صالح مذنبی/ سردبیر: حسین نامی ساعی/ مدیر داخلی: پری حاجی‌خانی

هیئت تحریریه: محرم ایردموسی، رضا حیدری قزلجه، روح‌الله خلیلی بروجنی، خسرو داودی، محمدرضا سیدصالحی، مرتضی مرتضوی، داود معصومی مهوار، محمود نصیری

ویراستار: بهروز راستانی/ مدیر هنری: کوروش پارسانژاد/ طراح گرافیک: حسین یوزباشی

تصویرگر: حسین یوزباشی

در این ماه: بهمن ۱۴۰۱
- سوم: ولادت امام محمدباقر (ع)
- پنجم: شهادت امام علی‌النقی (ع)
- دوازدهم: ولادت امام محمدتقی (ع)، بازگشت امام خمینی (ره) به ایران و آغاز دههٔ مبارک فجر
- پانزدهم: ولادت حضرت علی (ع)
- هفدهم: وفات حضرت زینب (س)
- هجدهم: روز ملی فناوری فضایی
- نوزدهم: روز نیروی هوایی
- بیست و دوم: پیروزی شکوهمند انقلاب اسلامی و سقوط نظام شاهنشاهی
- بیست و هفتم: شهادت امام موسی کاظم (ع)
- بیست و نهم: بعثت حضرت رسول اکرم (ص)
- شرح مناسبت‌های ماه را با پویش رمزینه ببینید.

سی سال پیش به «دانشگاه صنعتی شریف» وارد و در رشتهٔ ریاضی مشغول به تحصیل شد. او هم مثل بسیاری دیگر، به زودی به «نظریهٔ اعداد» جلب شد...

صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ را بخوانید.

سخن سردبیر

ریاضی و مدرسه

گفت‌وگو

ریاضی و کاربرد

ریاضی و تاریخ

ریاضی و مسئله

ریاضی و سرگرمی

ریاضی و نرم‌افزار

قیمت ۷۵۰۰۰ ریال

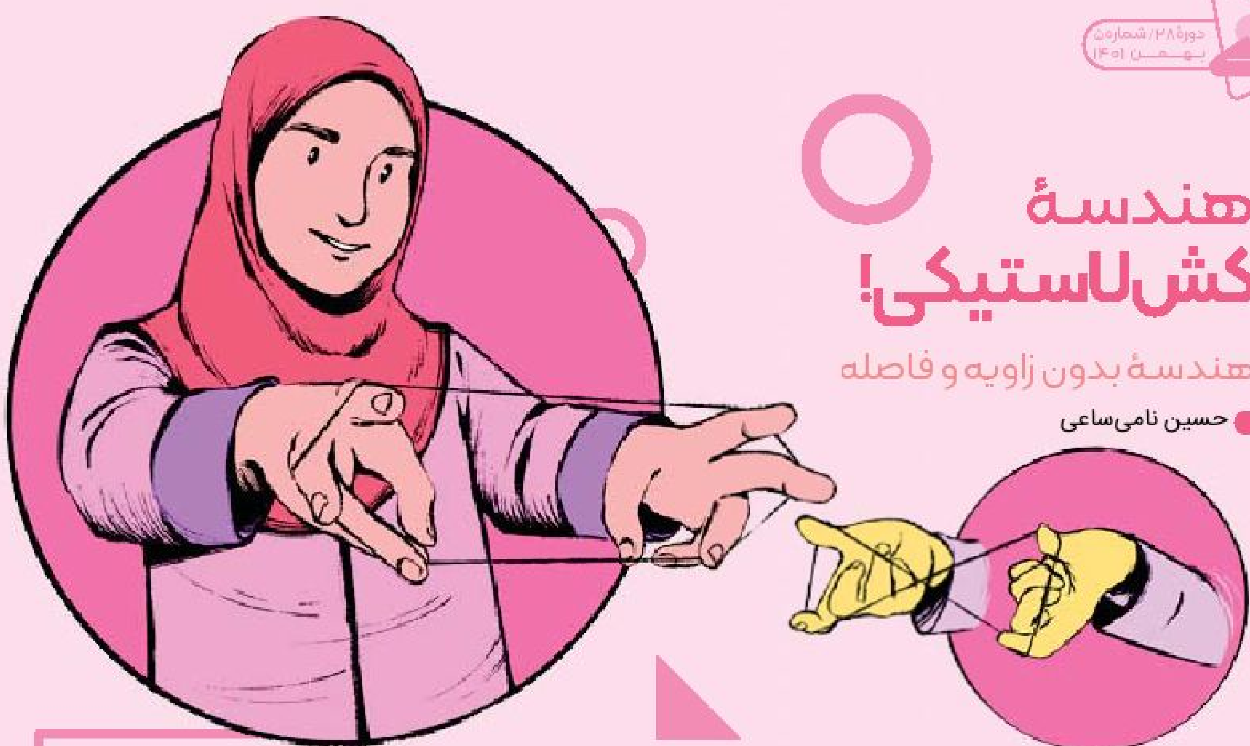
خانوادهٔ مجلات رشد همهٔ تلاش خود را کرده است تا این مجله در **دسترس عموم** دانش‌آموزان قرار گیرد و همهٔ کودکان و نوجوانان میهن عزیز اسلامی‌مان **امکان تهیهٔ** آن را داشته باشند.

برای مشاهدهٔ شرایط ارسال مطلب و همکاری با ماهنامهٔ ریاضی برهان متوسطهٔ اول، رمزینه را پویش کنید.

هندسهٔ کش‌لاستیکی!

هندسهٔ بدون زاویه و فاصله

حسین نامی‌ساعی



سلام دوستان. قبل از هر سخن، ۲۲ بهمن‌ماه سالروز پیروزی انقلاب شکوهمند اسلامی را تبریک می‌گویم. حتماً فراموش نکرده‌اید قرارمان این بود که در این دوره و در هر شماره، دربارهٔ یکی از مفهوم‌های اساسی ریاضیات صحبت کنیم. بی‌شک یادتان هست در سخن سردبیر شمارهٔ قبل گفتیم که راه‌حل **لئونارد اویلر** برای حل مسئلهٔ «پل‌های کونیگزبرگ» باعث شکل‌گیری شاخهٔ جدیدی از ریاضیات به نام «گراف» و«توپولوژی» شد. در شمارهٔ قبل در خصوص گراف توضیح دادیم و در این شماره می‌خواهیم کمی دربارهٔ مفهوم توپولوژی توضیح دهیم. اما قبل از آن، برای آشنایی با توپولوژی، چند فعالیت توپولوژیکی انجام دهید.

چند فعالیت

یک توپ والیبال کروی نسبتاً کم باد را بردارید و از دو طرف فشار دهید. با این عمل، شکل کروی توپ کم‌کم به شکل بیضی‌گونه و شکل‌های دیگر تغییر می‌کند. ولی توپ همان توپ است و تغییری نکرده و با حذف فشار بر توپ، توپ به شکل اولش یعنی همان شکل کروی برمی‌گردد. حالا یک کش پول یا یک حلقهٔ لاستیکی انعطاف‌پذیر را که به آسانی تغییر شکل می‌دهد، بردارید و با کشیدن و پیچاندن، فشردن و خم‌کردن، بدون اینکه پاره شود یا به خاصیت‌ها و ویژگی‌های اصلی آن آسیبی برسد، به شکل و ریختی نظیر بیضی، مستطیل، مربع، مثلث و شکل‌های دیگر درآورید. در انتها هم کش پول یا حلقه را به حال خود رها کنید. خواهید دید که کش پول یا حلقهٔ لاستیکی، با وجود اینکه به ریخت‌های متفاوتی تغییر شکل داده، خاصیت‌های اصلی خود را حفظ کرده است. تسبیح را از سجاده بردارید و روی یک صفحه مثل میز بگذارید و شکل‌های متفاوت هندسی با آن درست کنید؛ شکل‌هایی مثل مثلث، مربع، لوزی، دایره، بیضی، مستطیل و شکل‌های دیگر. حالا تسبیح را بردارید و در سجاده بگذارید. تسبیح همان تسبیح با همان ویژگی اولیهٔ خودش است و دانه‌های مجاور کنار هم هستند.

نکتهٔ مهم

دقت کنید که در تمام این فعالیت‌ها، در تغییر ریخت‌های حاصل‌شده، فاصله‌ها و زاویه‌ها تغییر می‌کنند، اما جسم و خاصیت‌های اصلی جسم، به‌خصوص پیوستگی آن، تغییری نمی‌کند. دیگر اینکه در توپولوژی، تمام یک بعدی‌ها مانند خط، پاره‌خط، نیم‌خط و ... تمام دوبعدی‌ها مانند مثلث، دایره، چندضلعی‌ها و ... و تمام سه بعدی‌ها مانند کره، بیضی‌گونه‌ها و ... با هم همریخت و قابل تبدیل‌شدن به یکدیگر هستند. همچنین توجه کنید که سه‌بعدی‌ها از دوبعدی‌ها، دوبعدی‌ها از یک‌بعدی‌ها و یک‌بعدی‌ها از صفربعدی‌ها حاصل شده‌اند. مثلاً کره از تبدیل دایره، دایره از تبدیل یک منحنی بسته، و منحنی از مجموعهٔ بی‌نهایت نقطه حاصل شده است.

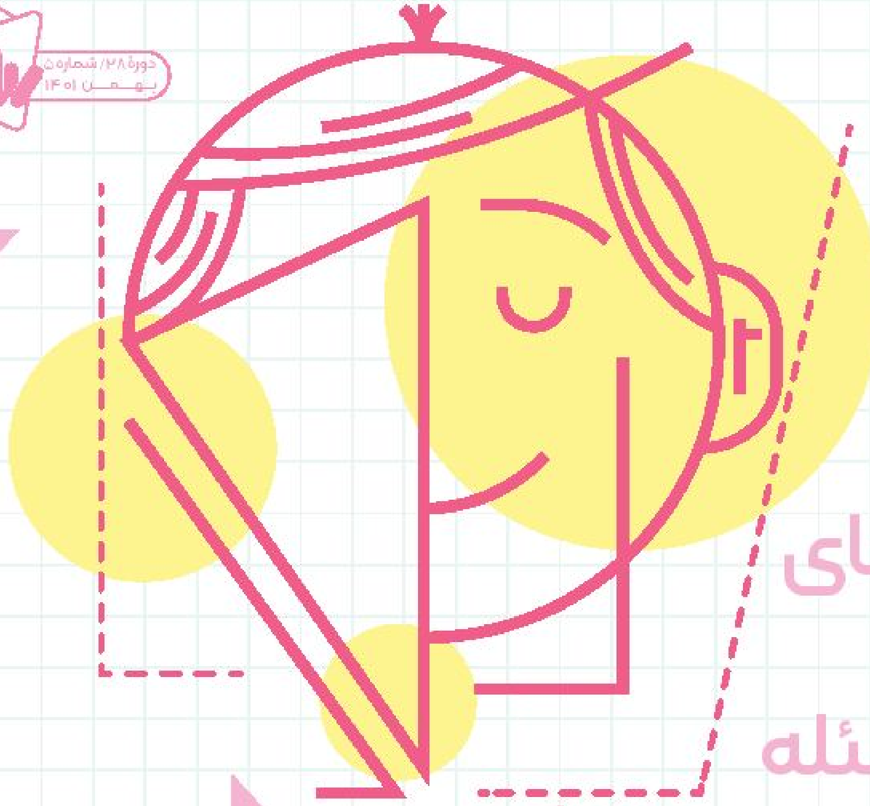
توپولوژی چیست؟

از نظر لغوی، توپولوژی از دو واژهٔ یونانی «topo» به معنی «مکان» و «logy» به مفهوم «مطالعه» تشکیل شده است. از نظر ریاضی تعریف‌های زیر را می‌توان برای توپولوژی آورد:

- توپولوژی به ویژگی‌های یک جسم هندسی مربوط می‌شود که تحت تغییر شکل‌های پیوسته، مانند کشش، پیچش، فشردن، مچاله‌شدن، و خم‌شدن حفظ می‌شوند؛ البته بدون سوراخ کردن، پاره‌کردن و چسباندن قسمت‌های متفاوت جسم.
- توپولوژی مطالعهٔ خواصی از اشیای هندسی است که بر اثر تبدیلات و تغییر شکل‌های پیوستهٔ اشیا، دستخوش تغییر نمی‌شوند. منظور از «تبدیل پیوسته» تبدیلی است که در آن نقاطی که در ابتدا نزدیک به هم هستند، در آخر تبدیل هم نزدیک به هم باشند.
- توپولوژی بخشی از ریاضیات است که از هندسه و فضا، بُعد، شکل‌های هندسی، تبدیلات و ... به‌وجود آمده و در واقع نوعی ریخت‌شناسی است به این مفهوم که خواص فضاهایی را مطالعه می‌کند که تحت هر تغییر شکلی، پیوسته ثابت هستند و ضمناً پیوستگی شکل‌ها در پایان تبدیلات حفظ می‌شود.
- توپولوژی «هندسهٔ ورق لاستیکی» است؛ زیرا جسم‌ها می‌توانند مانند لاستیک کشیده و منقبض شوند.
- و ساده‌ترین تعریف توپولوژی: «توپولوژی هندسهٔ بدون فاصله و زاویه است.»

فکر می‌کنم حالا کمی دربارهٔ توپولوژی شناخت پیدا کرده‌اید و ان‌شاءالله در مقاطع بالاتر و دانشگاه با این مفهوم مهم و اساسی ریاضی بهتر و دقیق‌تر آشنا می‌شوید.

آرزوی سلامتی و موفقیت برای همهٔ شما دارم.



محمود نصیری

مفهوم‌های هندسی و حل مسئله طولپاها و هم‌نهشتی

در مجلهٔ شماره ۴ بعد از تعریف تبدیل طولپا نشان دادیم که چگونه دو پاره‌خط هم‌اندازه را به‌وسیلهٔ بازتاب‌ها بر هم منطبق می‌کنیم. اکنون در این بخش مسئلهٔ مشابهی را در مورد زاویه و سپس حالت کلی آن را در مورد مثلث بررسی می‌کنیم.

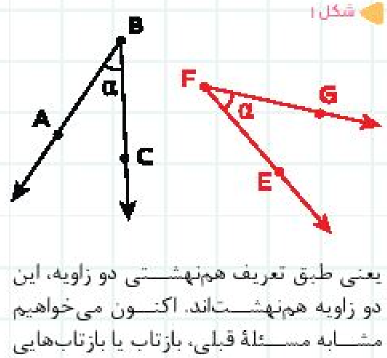
در پایان قضیهٔ هم‌نهشتی ض ز ض را بیان می‌کنیم و نشان خواهیم داد که چگونه دو مثلث را که دو ضلع و زاویهٔ بین یکی، با اجزای نظیرش از دیگری هم‌نهشت هستند، می‌توانیم بر هم منطبق کنیم.

طرح مسئله

در شکل ۱ دو زاویهٔ هم‌اندازهٔ ABC و EFG در یک صفحه P مفروض‌اند:

$m\angle ABC = m\angle EFG = \alpha$

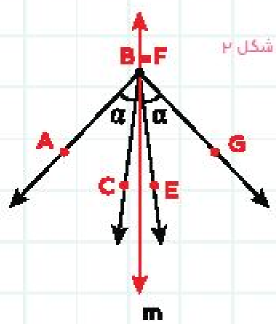
شکل ۱



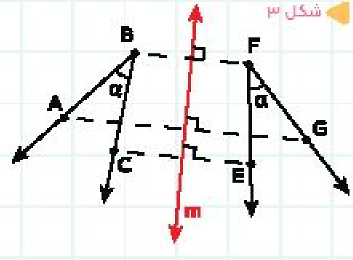
یعنی طبق تعریف هم‌نهشتی دو زاویه، این دو زاویه هم‌نهشت‌اند. اکنون می‌خواهیم مشابه مسئلهٔ قبلی، بازتاب یا بازتاب‌هایی را پیدا کنیم که $\angle ABC$ را به $\angle EFC$ تبدیل کند و در نتیجه طبق تعریف بر آن منطبق شود.

حالت‌هایی را که رأس‌های دو زاویه بر هم منطبق باشند، یا با رسم عمودمنصف $\overline{BF}$، نیم‌خط $\overline{FE}$ تصویر یک ضلع از $\angle ABC$ مثلاً $\overline{BC}$ باشد و نیم‌خط $\overline{FG}$ تصویر نیم‌خط $\overline{BA}$ باشد را در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده‌ایم. آن‌ها را توضیح دهید.

شکل ۲



شکل ۳

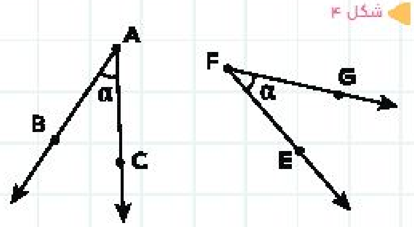


در این شکل‌ها، دو زاویه در صفحه چنان واقع شده‌اند که در اولی با رسم نیم‌ساز $\angle CBE$ و در دومی با رسم عمودمنصف $\overline{BF}$، $\angle ABC$ تحت این بازتاب‌ها بر $\angle EFG$ منطبق می‌شود؛ یعنی: $S_m(\angle ABC) = \angle EFG$.

اکنون حالت کلی را که دو زاویه به دلخواه و به هر شکلی نسبت به هم قرار دارند، بررسی می‌کنیم.

در شکل ۴، قبل از آنکه رسم‌ها را مشاهده کنید، خودتان با توجه به آنچه در مسئله‌های قبلی نشان داده‌ایم، سعی کنید مسئله را حل و بازتاب یا بازتاب‌ها را پیدا کنید.

شکل ۴

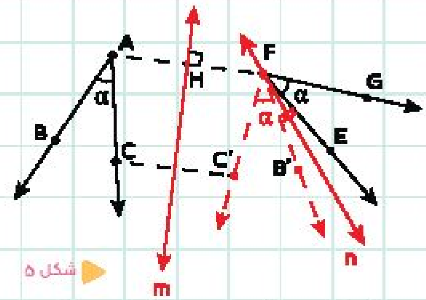


ابتدا عمودمنصف $\overline{AF}$ را رسم می‌کنیم و آن را m می‌نامیم (شکل ۵). بازتاب $\angle ABC$ را نسبت به خط بازتاب m زاویهٔ $\angle C'FB'$ می‌نامیم.

پس:

$S_m(\angle ABC) = \angle C'FB'$

در نتیجه: $m\angle C'FB' = m\angle BAC = \alpha$.



شکل ۵

بنابراین با توجه به فرض داریم: $m\angle C'FB' = m\angle EFG$. اکنون به حالتی رسیده‌ایم که رأس‌های دو زاویهٔ هم‌اندازه بر هم منطبق‌اند. در نتیجه اگر نیم‌ساز زاویهٔ $\angle B'FE$ را رسم کنیم و آن را n بنامیم، داریم: $S_n(\angle C'FB') = \angle EFG$.

پس مانند حالت دو پاره‌خط تحت دو بازتاب S_m و S_n، زاویهٔ ABC بر زاویهٔ EFG منطبق می‌شود و این دو زاویه هم‌نهشت هستند.

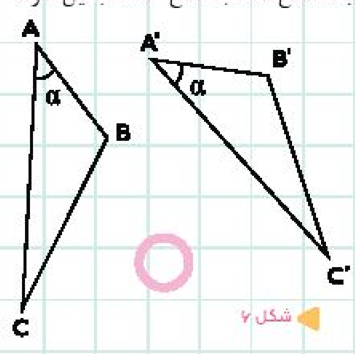
تحت بازتاب S_m، ابتدا $\angle BAC$ به $\angle C'FB'$ تبدیل و بر آن منطبق می‌شود؛ سپس تحت بازتاب S_n، زاویهٔ $C'FB'$ به زاویهٔ EFG تبدیل و بر آن منطبق می‌شود، پس تحت ترکیب $S_n o S_m$ دو زاویهٔ ABC و EFG بر هم منطبق می‌شوند.

اکنون مسئله را در حالت کلی برای مثلث حل می‌کنیم.

طرح مسئله

در شکل ۶ دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مفروض‌اند، به‌طوری که: $AB=A'B'$، $AC=A'C'$ و $m\angle BAC = m\angle B'A'C'$، یعنی $\angle A$ و $\angle A'$ هم‌اندازه‌اند. چگونه بازتاب یا بازتاب‌هایی پیدا می‌کنید که به وسیلهٔ آن‌ها ΔABC به $\Delta A'B'C'$ تبدیل شود؛ یعنی ΔABC بر $\Delta A'B'C'$ منطبق شود.

اگر به دو مسئلهٔ قبل برگردید، می‌توانید الگویی برای حل مسئله بیابید. مثلاً چگونه ابتدا ضلع AB به ضلع $A'B'$ تبدیل شود.



شکل ۶

احتمالاً این کار به فکر شما می‌رسد که A را به A' وصل کنیم و m عمودمنصف $\overline{AA'}$ را بکشیم. بله این اولین قدم حل مسئله است.

دومین قدم، پیدا کردن قرینهٔ ΔABC نسبت به خط m، عمودمنصف $\overline{AA'}$ است. آن را پیدا می‌کنیم و $\Delta A'B_1C_1$ می‌نامیم.

اکنون بنابر اصل بازتاب چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

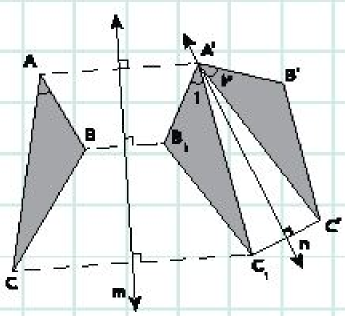
احتمالاً درست باید حدس زده باشید: ΔABC تحت این بازتاب به $\Delta A'B_1C_1$ تبدیل و بر آن منطبق می‌شود (شکل ۷): $S_m(A)=A'$، $S_m(B)=B_1$ و $S_m(C)=C_1$.

بنابراین: $AB=A'B_1$ و $AC=A'C_1$ و $m\angle BAC = m\angle B_1A'C_1$.

با توجه به فرض مسئله داریم: $A'C_1=A'C'$، $A'B_1=A'B'$ و $m\angle B_1A'C_1 = m\angle B'A'C'$.

اکنون چگونه بازتابی پیدا می‌کنید که $\Delta A'B_1C_1$ را به $\Delta A'B'C'$ تبدیل کند؟

شکل ۷



$\Delta A'C_1C'$ متساوی‌الساقین است. بنابر مسئله‌های قبلی، اگر عمودمنصف $\overline{C_1C'}$ یا نیم‌ساز $\angle C_1A'C'$ را رسم کنیم و آن را n بنامیم، $\Delta A'B'C'$ بازتاب $\Delta A'B_1C_1$ نسبت به خط بازتاب n است. پس طبق این بازتاب بر هم منطبق می‌شوند.

بنابراین تحت دو بازتاب S_m و S_n، ΔABC به $\Delta A'B'C'$ تبدیل و بر آن منطبق می‌شود، پس طبق تعریف این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

اکنون مشاهده می‌کنیم که تبدیل بازتاب ابزار مهمی است که به وسیلهٔ آن می‌توانیم هم‌نهشتی برای شکل‌های ساده را براساس آن بنا بگذاریم و روش‌هایی را برای اثبات هم‌نهشتی مثلث‌ها توسط آن و به‌طور کلی توسط طولپاها فراهم کنیم.

تا اینجا اولین گام‌ها را برای هم‌نهشتی نقطه‌ها و سپس پاره‌خط‌ها و زاویه برداشتیم تا به مثلث رسیدیم. البته این روند هنوز کامل نشده و تمام حالت‌ها را شامل نمی‌شود.

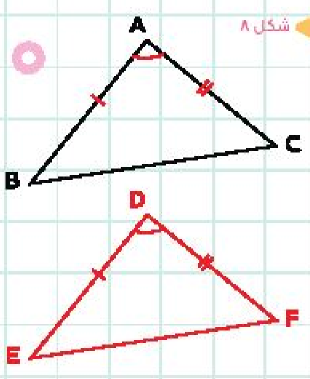
مثلاً ثابت کردیم، اگر در دو مثلث دو ضلع نظیربه‌نظیر هم‌نهشت و زاویه‌های شامل این دو ضلع نیز در دو مثلث هم‌نهشت باشند، دو مثلث هم‌نهشت هستند و چگونگی ساختن این اثبات را توضیح دادیم.

این همان قضیهٔ هم‌نهشتی دو ضلع و زاویهٔ شامل دو ضلع در دو مثلث است. روش اثباتی که **اقلیدس** بیش از دو هزار سال پیش برای آن بیان کرد، در اوایل قرن بیستم توسط ریاضی‌دان معروف، **هیلبرت** مورد اشکال قرار گرفت و در نتیجه آن را به‌عنوان اصل بیان کرد. زیرا با ابزاری که اقلیدس به‌کار برده بود، این اثبات مورد قبول ریاضی‌دان‌ها نبود. این ابزار همین ابزار تبدیلات طولپا است که از ابتدا تا اینجا در مورد آن‌ها صحبت کردیم.

در واقع اصل بازتاب اساس این اثبات‌ها را فراهم می‌کند. این قضیه به قضیهٔ «ض ـ ز ـ ض» معروف است.

قضیهٔ هم‌نهشتی ض ـ ز ـ ض: هرگاه دو ضلع و زاویهٔ شامل آن دو ضلع از مثلثی، با دو ضلع و زاویهٔ شامل آن دو ضلع از مثلث دیگری، نظیربه‌نظیر هم‌نهشت باشند، آن‌گاه این دو مثلث هم‌نهشت هستند.

شکل ۸



یعنی در دو مثلث ABC و DEF (شکل ۸) داریم:

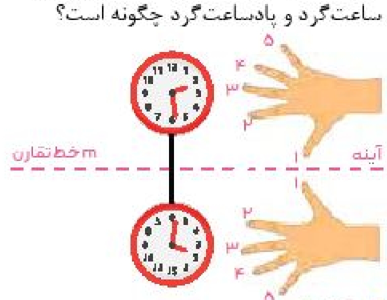
$AC=DF$ و $AB=DE$ ، $\angle A \cong \angle D$

در این صورت: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

در حل مسئلهٔ قبلی نشان دادیم که چگونه این هم‌نهشتی صورت می‌گیرد و در واقع آن را ثابت کردیم. اما اثباتی را که بیان کردیم، کامل نیست. در واقع حالتی از مسئله هنوز بررسی نشده است. شاید فکر کنید چرا اثبات کامل نیست؟

برای پاسخ به آن نیاز به بیان یک مفهوم مهم در تبدیل‌های هندسی داریم که «جهت شکل» نامیده می‌شود.

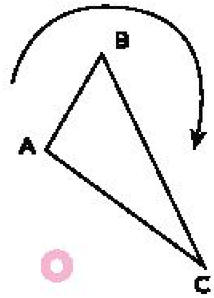
به شکل ۹ توجه کنید. مانند شکل، انگشتان دو دست خود را با عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چنان نام‌گذاری کنید که هر انگشت شست شمارهٔ ۱ و به ترتیب انگشت بعدی شمارهٔ ۲ و تا آخر که کوچک‌ترین انگشت شمارهٔ ۵ باشد. اکنون دو دست خود را روی یک صفحه بگذارید و شمارهٔ روی انگشت‌ها را بخوانید. جهت خواندن عددهای انگشتان از جهت ساعت‌گرد و پادساعت‌گرد چگونه است؟

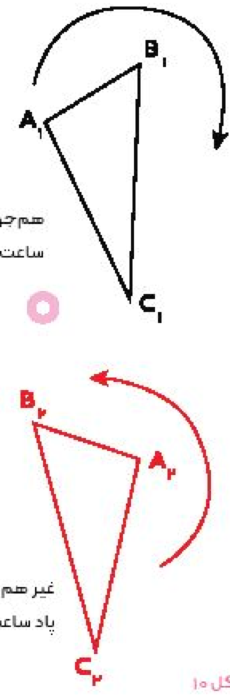


شکل ۹

منظور از ساعت‌گرد یعنی جهت خواندن در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و منظور از پادساعت‌گرد جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است. آیا با انتقال‌دادن، یعنی لغزاندن یا با دوران‌دادن، یعنی چرخاندن، می‌توانید دو دست خود را روی هم چنان قرار دهید که بر هم منطبق شوند؟

مشاهده می‌کنید که چنین عملی هرگز امکان ندارد، مگر آنکه یکی از دو دست خود را در فضا برگردانید تا بعد با یک لغزاندن و چرخاندن، دو کف دست بر هم منطبق شوند. این عمل برگرداندن از نظر ریاضی همان بازتاب است. یعنی دو دست خود را روی یک صفحه چنان می‌توانیم قرار دهیم که نسبت به یک خط بازتاب قرینهٔ یکدیگر باشند. این همان ویژگی آینه است. بنابراین برای دو مثلث و کلاً دو n ضلعی نیز می‌توانیم آن را به کار ببریم.





شکل ۱۰

فرض کنیم یک نظیر کردن (تناظر) بین رأس‌های دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ و همچنین $\triangle A_2B_2C_2$ برقرار باشد (شکل ۱۰):

$A \leftrightarrow A_1 \leftrightarrow A_2$

$B \leftrightarrow B_1 \leftrightarrow B_2$

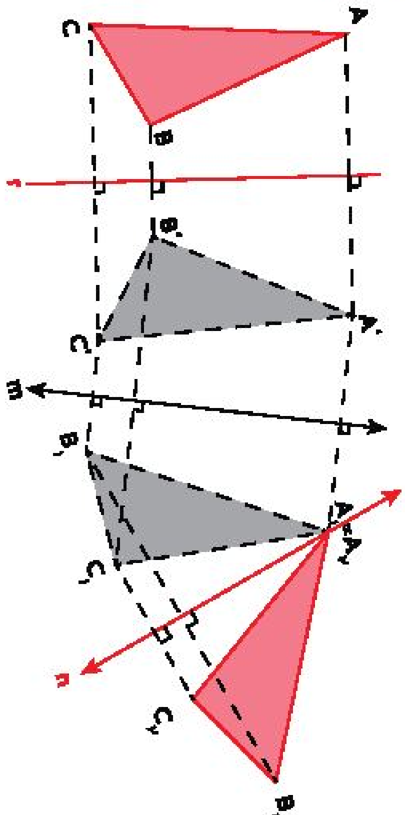
$C \leftrightarrow C_1 \leftrightarrow C_2$

پس ضلع‌ها نیز نظیربه‌نظیر متناظر یکدیگر هستند.

اکنون قضیهٔ ض-ز-ض کامل می‌شود. اگر جهت‌های دو مثلث یکی باشند، با همان روش که بیان کردیم، یعنی با دو بازتاب، دو مثلث بر هم منطبق می‌شوند. حال اگر جهت‌های دو مثلث یکی نباشند، مانند $\triangle ABC$ و $\triangle A_2B_2C_2$، اما این هم چندان سخت نیست. ابتدا بازتاب $\triangle ABC$ را نسبت به یک خط دلخواه r پیدا می‌کنیم که $\triangle A'B'C'$ به دست می‌آید و هم‌نهشت با $\triangle ABC$ است. اما جهت دو مثلث $\triangle A'B'C'$ و $\triangle A_2B_2C_2$ یکی هستند. پس طبق حالت قبل با دو بازتاب بر هم منطبق می‌شوند.

تمام مرحله‌ها را در شکل ۱۱ مشاهده می‌کنید.

شکل ۱۱



در شکل ۱۱ مشاهده می‌کنید که چگونه $\triangle ABC$ به $\triangle A_2B_2C_2$ تبدیل شده و طبق تعریف بر آن منطبق شده است.

با پیدا کردن بازتاب $\triangle ABC$ نسبت به خط بازتاب r، به $\triangle A'B'C'$ می‌رسیم که هم‌جهت با $\triangle A_2B_2C_2$ است. سپس m عمودمنصف $A'A_2$ را رسم می‌کنیم و مانند حالت قبل ادامه می‌دهیم.

با پویش رمزینه بازتاب شکل ۱۱ را ببینید.

با پویش رمزینه قسمت اول را بخوانید.

داوود معصومی‌مهوار

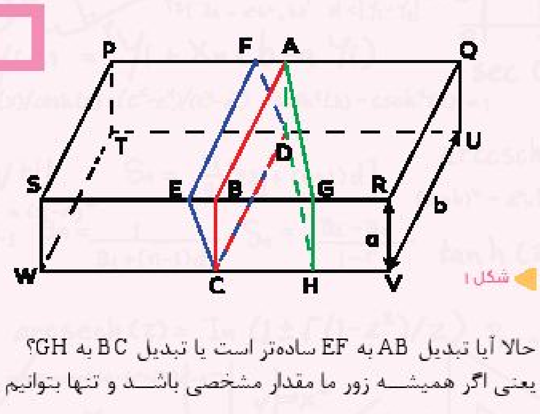
ریاضی گره‌گشا

(قسمت دوم)

من: جلسهٔ پیش جعبه‌ای داشتیم که یک تکه نخ دور آن پیچیده شده بود (شکل ۱). می‌خواستیم نخ را برای استفاده‌های بعدی سالم بیرون بیاوریم. درآغاز هر یک از تکه‌های نخ قرمز رنگ ABCD با یال‌های جعبهٔ PQRSTUVW موازی بود. دو راه داشتیم:

الف) با کشیدن نخ، ضلع AB را حرکت دهیم (رنگ آبی) و آن را به وضعیت EF برسانیم. در این صورت ضلع CD حرکت نمی‌کند، ولی دو ضلع AD و BC کش می‌آیند و به وضعیت‌های FD و EC می‌رسند.

ب) با کشیدن نخ، ضلع BC را حرکت دهیم (رنگ سبز) و آن را به وضعیت GH برسانیم. پس ضلع AD حرکت نمی‌کند، ولی دو ضلع AB و CD کش می‌آیند و به وضعیت‌های AG و DH می‌رسند.



شکل ۱

حالا آیا تبدیل AB به EF ساده‌تر است یا تبدیل BC به GH؟ یعنی اگر همیشه زور ما مقدار مشخصی باشد و تنها بتوانیم به مقدار مشخص و ثابتی نخ پلاستیکی قرمز را کش بدهیم، می‌خواهیم ببینیم کدام حالت ساده‌تر و بهتر است: راه الف یا راه ب؟ در کدام حالت نخ رنگی از نخ قرمز دورتر می‌شود؟ به عبارت دیگر، اگر طول نخ‌های DCEF و ADHG برابر باشد، در این صورت کدام یک از پاره‌خط‌های BE و BG طول بیشتری دارد؟

یک نفر طول‌های رنگی را بر حسب a و b (طول یال‌های جعبه) و $\overline{BE}$ و $\overline{BG}$ بیان کرد:

$$\overline{FECD}=2\overline{CD}+2\overline{EC}=2b+2\sqrt{\overline{CB}^2+\overline{BE}^2}=2b+2\sqrt{a^2+\overline{BE}^2}$$

$$\overline{AGHD}=2\overline{AD}+2\overline{AG}=2a+2\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BG}^2}=2a+2\sqrt{b^2+\overline{BG}^2}$$

زهرا فرض کرد که $\overline{BE}$ و $\overline{BG}$ هم‌طول و برابر با t هستند. پس گفت که طول نخ قرمز برابر با ۲a+۲b بوده است و با کش‌آمدن به $2b+2\sqrt{a^2+t^2}$ و $2a+2\sqrt{b^2+t^2}$ تبدیل شده است. او افزایش طول نخ را این‌گونه حساب کرد:

$$2b+2\sqrt{a^2+t^2}-(2a+2b)=2b+2\sqrt{a^2+t^2}-2a-2b=2(\sqrt{a^2+t^2}-a)$$

$$2a+2\sqrt{b^2+t^2}-(2a+2b)=2a+2\sqrt{b^2+t^2}-2a-2b=2(\sqrt{b^2+t^2}-b)$$

و فرض کرد که مثلاً a از b کوچک‌تر است و مسئله به این پرسش تبدیل شد که: «کدام یک از دو مقدار $2(\sqrt{a^2+t^2}-a)$ و $2(\sqrt{b^2+t^2}-b)$ کوچک‌تر است؟»

نفیسه هم برای سادگی کار فرض کرد a برابر با ۱۰ و b برابر با ۳۰ است و گفت:

$$\sqrt{30^2+t^2} > 30$$

$$40\sqrt{30^2+t^2} > 1200$$

$$0 > 1200 - 40\sqrt{30^2+t^2}$$

$$100+t^2 > 100+t^2+800+400-40\sqrt{30^2+t^2}$$

$$100+t^2 > 900+t^2+400-40\sqrt{30^2+t^2}$$

$$10^2+t^2 > (\sqrt{30^2+t^2}-20)^2$$

$$(\sqrt{10^2+t^2})^2 > (\sqrt{30^2+t^2}-20)^2$$

$$(\sqrt{10^2+t^2})^2 - (\sqrt{30^2+t^2}-20)^2 > 0$$

$$((\sqrt{10^2+t^2}) + (\sqrt{30^2+t^2}-20))(\sqrt{10^2+t^2} - (\sqrt{30^2+t^2}-20)) > 0$$

$$\sqrt{10^2+t^2} - (\sqrt{30^2+t^2}-20) > 0$$

$$\sqrt{10^2+t^2} > \sqrt{30^2+t^2}-20$$

$$\sqrt{10^2+t^2}-10 > \sqrt{30^2+t^2}-30$$

در اینجا نفیسه نتیجه گرفت $\sqrt{10^2+t^2}-10$ از $\sqrt{30^2+t^2}-30$ بزرگ‌تر است. یعنی جابه‌جایی t به جابه‌جایی بزرگ‌تری منجر شده است. این یعنی روش آبی رنگ بهتر است و با تکرار آن زودتر می‌توانیم نخ را از جعبه بیرون بیاوریم.

اما **فرخنده** ایرادی اساسی گرفت. او گفت قرار بود کش‌آمدن نخ را ثابت بگیریم و بررسی کنیم و ببینیم در کدام حالت، آبی یا سبز به جابه‌جایی بیشتری منجر خواهد شد؟ در حالی که نفیسه جابه‌جایی را برابر با مقدار ثابت t گرفته و مقدار کش‌آمدن را حساب کرده است. حالا نظر شما چیست؟

فرخنده: من همان کاری را که گفتم انجام دادم و خیلی ساده و سرراست به نتیجه‌ای رسیدم که مخالف با نتیجهٔ نفیسه است. من فرض کردم هر دو طول آبی رنگ و سبز رنگ برابر با ۲a+۲b+۲s هستند. پس در حالت آبی رنگ داریم: $\overline{EC} = \overline{BC} + s = a + s$ و در حالت سبز رنگ داریم: $\overline{AG} = \overline{AB} + s = b + s$ و از آنجا که دو مثلث BCE و ABG هر دو در رأس B قائم‌الزاویه هستند، بنا بر قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$(a+s)^2 = \overline{EC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BE}^2 = a^2 + \overline{BE}^2$$

$$(b+s)^2 = \overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 = b^2 + \overline{BG}^2$$

هدف ما مقایسهٔ $\overline{BE}$ و $\overline{BG}$ است. پس ادامه می‌دهیم:

$$\overline{BE}^2 = (a+s)^2 - a^2 \rightarrow \overline{BE} = \sqrt{(a+s)^2 - a^2}$$
$$= \sqrt{a^2+s^2+2as-a^2} = \sqrt{s^2+2as}$$

$$\overline{BG}^2 = (b+s)^2 - b^2 \rightarrow \overline{BG} = \sqrt{(b+s)^2 - b^2}$$
$$= \sqrt{b^2+s^2+2bs-b^2} = \sqrt{s^2+2bs}$$

چون در دو عبارت $\sqrt{s^2+2as}$ و $\sqrt{s^2+2bs}$ مقدار s مثبت است و تنها مقدارهای متفاوت a و b هستند، با فرض اینکه b از a بزرگ‌تر باشد به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که $\sqrt{s^2+2bs}$ از $\sqrt{s^2+2as}$ بزرگ‌تر است. یعنی در صورتی که نخ به مقدار ثابت s کش بیاید، در حالت سبز به جابه‌جایی بیشتری منجر می‌شود و این با نتیجه‌ای که نفیسه گرفته بود، مخالف است. نفیسه حالت آبی را بهتر می‌دانست.

نفیسه: من گیج شده‌ام. محاسبه‌های فرخنده بسیار ساده‌تر از محاسبه‌های من هستند. هیچ ایرادی هم ندارند. نمی‌دانم چرا به نتیجه‌های مختلفی رسیده‌ایم!

من: کمی راهنمایی می‌کنم. تمام محاسبه‌های نفیسه درست بود. کمی پیچیده بود، ولی درست بود.

الهام: این راهنمایی که کار را خراب‌تر کرد! مگر می‌شود هر دو درست استدلال کرده باشند؟

زهرا: من هنوز متوجه ایراد نشده‌ام، ولی فکر کنم نظر الهام کمکمان می‌کند. الهام کمی راهنمایی را دستکاری کرد. راهنمایی این بود که: «محاسبه‌های نفیسه درست بودند.» از طرف دیگر می‌بینیم که محاسبه‌های فرخنده هم بسیار ساده، سرراست و درست هستند. اما الهام چیز دیگری برداشت کرد! الهام دوباره گفت: «مگر می‌شود هر دو درست استدلال کرده باشند؟» محاسبه‌ها چیزی غیر از استدلال هستند. من فکر می‌کنم راهنمایی این است که محاسبه‌های هر دو نفر درست است، ولی اختلاف در اثر استدلال‌های نادرست پیش آمده است.

من: آفرین زهرا. موضوع همین است. خوب بررسی کنید و ببینید چه کسی از محاسبه‌های درست نتیجهٔ نادرست گرفته‌است.

اعظم: فکر کنم فهمیدم. به نظر من محاسبه‌ها و نتیجه‌گیری فرخنده کاملاً دقیق و درست هستند. همچنین محاسبه‌های نفیسه هم کاملاً درست هستند، ولی نفیسه از این محاسبه‌های درست نتیجه‌ای نادرست گرفته است. نفیسه به خوبی و درستی نتیجه گرفت که: $\sqrt{10^2+t^2}-10$ از $\sqrt{30^2+t^2}-30$ بزرگ‌تر است. اما اگر به مقدمات او توجه کنیم، می‌بینیم که در این دو عبارت، مقدار t برابر با جابه‌جایی نخ است و بر همین اساس در دو حالت مقدار کش‌آمدن نخ را حساب کرد و در یکی $\sqrt{10^2+t^2}-10$ و در دیگری $\sqrt{30^2+t^2}-30$ برابر با مقدار کش‌آمدن نخ شد. بنابراین باید این جور نتیجه بگیریم: حالتی که کش‌آمدن کمتری لازم داشته باشد، بهتر است و با زور کمتری انجام می‌شود. کش‌آمدن کمتر مربوط به $\sqrt{30^2+t^2}-30$ است؛ یعنی حالت سبز رنگ. این نتیجه‌گیری هم درست است و هم با محاسبه‌ها و استدلال‌های فرخنده هم‌خوانی دارد.

من: زنده باد! کاملاً درست گفتی و چیزی را از قلم نینداختی. شاید پیچیدگی محاسبه‌های نفیسه باعث سردرگمی و به‌خطارفتن او در تشریح معنای آخرین نتیجه‌اش شد. بگذریم. جلسهٔ پیش الهام هم استدلالی بر مبنای نتیجه‌های به‌دست‌آمده از نرم‌افزارها داشت. اگر آن را مرور کنید، خواهید دید که او هم در تفسیر و تشریح نتیجه‌ها همین اشتباه نفیسه را انجام داده بود.

تأکید می‌کنم که فرخنده خیلی ساده فکر کرد و درست به سراغ چیزی رفت که سؤال خواسته بود. خب، کارها ساده پیش رفتند. اما الهام و نفیسه خواستهٔ مسئله را کمی تغییر دادند و همین تغییر در کنار پیچیدگی محاسبه‌ها یا نتیجه‌های به‌دست‌آمده از نرم‌افزار، باعث سردرگمی آن‌ها شد و به خطا رفتند. تغییر در خواستهٔ مسئله کار بدی نیست و گاهی چاره‌ای جز آن نداریم، ولی هرگاه چنین کاری کردیم، باید بسیار بیشتر مراقب استدلال و محاسبه‌هایمان باشیم. خسته نباشد.

یک مسئله و چند راه‌حل
مجموع مکعبات یا مکعب مجموع

محسن کیخائی، حسین کریمی

مسئله: مجموع مکعب‌های n عدد طبیعی متوالی با شروع از ۱ را بیابید.
قبل از بیان این مسئله به‌صورت جبری و با نماد ریاضی، مثال ۱ را ببینید:

مثال ۱. عبارت جبری زیر را به صورت عبارت کلامی بنویسید.

الف) $(۱+۲+۳+۴)^۳ = a$

ب) $۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳ = b$

پاسخ:
الف) مکعب مجموع چهار عدد طبیعی متوالی با شروع از ۱ برابر است با a.
ب) مجموع مکعب‌های چهار عدد طبیعی متوالی با شروع از ۱ برابر است با b.
همان‌طور که در این مثال مشاهده می‌کنید، با وجود اینکه دو عبارت بیان‌شده از نظر ظاهر و کلمه‌های به‌کاررفته تا حد زیادی شبیه یکدیگرند، با این حال در مفهوم کاملاً تفاوت دارند.
با یک محاسبهٔ ساده می‌بینیم که:

$a = ۱۰۰۰$

$b = ۱۰۰$

و اینجاست که تفاوت دو عبارت مکعب مجموع و مجموع مکعب‌ها واضح‌تر از قبل مشخص می‌شود.
به کمک مثال ۱، مسئلهٔ آغازین را به‌صورت زیر می‌نویسیم:
حاصل عبارت زیر را بیابید:

$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \dots + n^۳ = ?$

در مثال ۱ قسمت (ب)، حاصل این عبارت را برای $n = ۴$ به دست آوردیم. بدیهی است که با افزایش مقدار n، پیدا کردن این حاصل کار آسانی نیست. در ادامه با بررسی چند نمونهٔ دیگر می‌کوشیم پاسخ مناسبی برای این مسئله بیابیم.

مثال ۲. در عبارت‌های زیر:

الف) $۱^۳ = ۱$

ب) $۱^۳ + ۲^۳ = ۹$

ج) $۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ = ۳۶$

د) $۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳ = ۱۰۰$

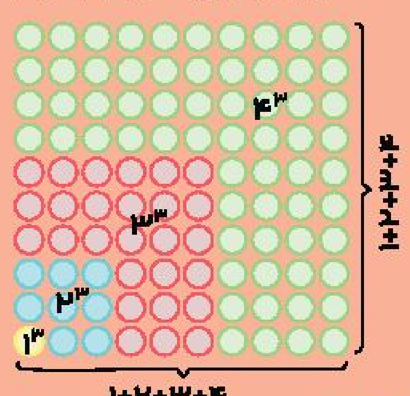
و) $۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳ + ۵^۳ = ۲۲۵$

می‌بینیم که در هر مورد، حاصل مربع کامل است؛
۱، ۹، ۳۶، ۱۰۰، ۲۲۵
و با نگاهی دقیق‌تر پی می‌بریم که در واقع این حاصل، مربع مجموع عددهایی است که در طرف دیگر، مکعب‌های آن‌ها را با هم جمع کرده‌ایم. پس به‌نظر می‌رسد که در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$۱^۳ + ۲^۳ + \dots + n^۳ = (۱+۲+\dots+n)^۲$$

مثال ۳. قسمت (د) در مثال ۲ را به صورت زیر می‌نویسیم. شکل ۱ درستی این تساوی را به خوبی نشان می‌دهد. (چرا؟)

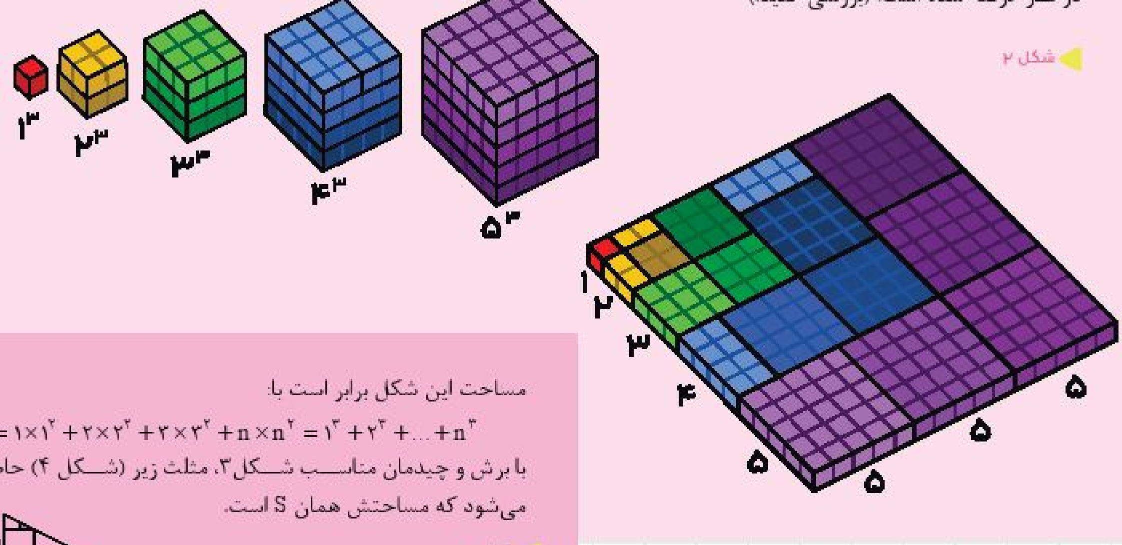
$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳ = (۱+۲+۳+۴)^۲$$



شکل ۱

مثال ۴. شکل۲ متناسب با قسمت (و) مثال ۲ در نظر گرفته شده است. (بررسی کنید.)

شکل ۲

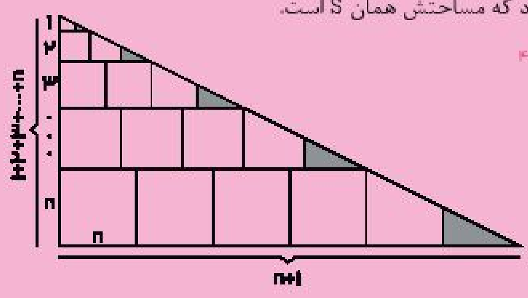


مساحت این شکل برابر است با:

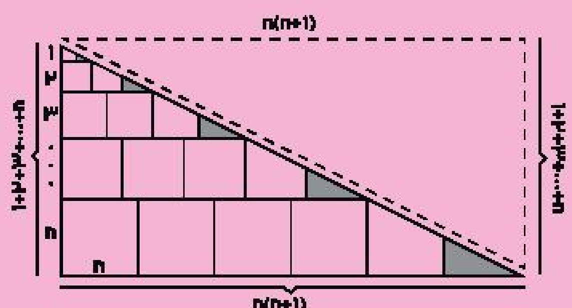
$$S = ۱\times۱^۲ + ۲\times۲^۲ + ۳\times۳^۲ + n\times n^۲ = ۱^۳ + ۲^۳ + ... + n^۳$$

با برش و چیدمان مناسب شکل۳، مثلث زیر (شکل ۴) حاصل می‌شود که مساحتش همان S است.

شکل ۴



و با کنار هم گذاشتن دو مثلث یکسان با شکل۴، مستطیل زیر (شکل ۵) به دست می‌آید:



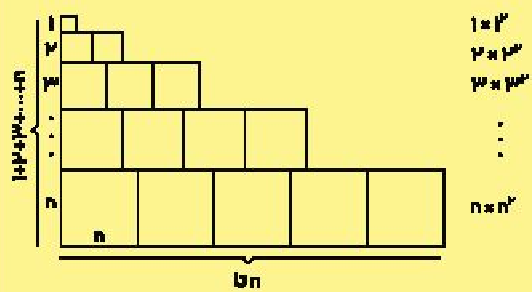
شکل ۵

اکنون با سه روش رابطه را در حالت کلی اثبات می‌کنیم؛ یعنی نشان می‌دهیم:

$$۱^۳ + ۲^۳ + ... + n^۳ = (۱+۲+...+n)^۲$$

روش اول: در شکل ۳ در بالاترین ردیف یک مربع ۱×۱، در ردیف بعدی دو مربع ۲×۲ و ... و در پایین‌ترین ردیف n مربع n×n داریم:

شکل ۳



مساحت این مستطیل برابر است با:

$$S' = n(n+۱)(۱+۲+...+n)$$

رابطهٔ آشنای زیر را از قبل به یاد دارید. آن را با * نشان می‌دهیم و بارها از آن استفاده خواهیم کرد:

$$(۱+۲+...+n) = \frac{n(n+۱)}{۲} \qquad *$$

بنابراین:

$$S' = n(n+۱)\frac{n(n+۱)}{۲} = \frac{[n(n+۱)]^۲}{۲}$$

با توجه به اینکه مثلث مورد نظر ما مساحتی برابر با نصف این مقدار دارد:

$$S = \frac{S'}{۲} = \frac{[n(n+۱)]^۲}{۴} = \left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۲$$

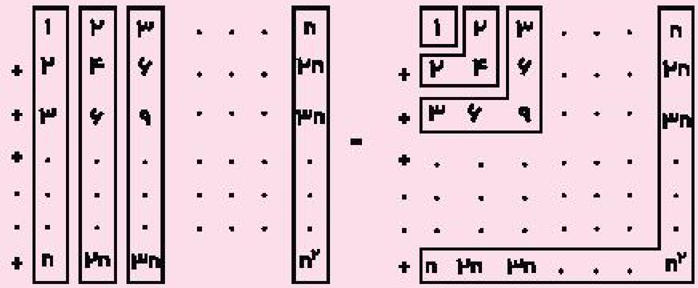
اکنون با استفادهٔ دوباره از رابطهٔ * داریم:

$$S = (۱+۲+۳+...+n)^۲$$

با مقایسهٔ رابطه‌های بالا به نتیجهٔ مطلوب خود می‌رسیم؛ یعنی:

$$۱^۳ + ۲^۳ + ... + n^۳ = (۱+۲+۳+...+n)^۲$$

روش دوم: در شکل ۶، همان عددهایی که در سمت چپ حضور دارند، در سمت راست نیز هستند و فقط دسته‌بندی آن‌ها متفاوت است.



شکل ۶

در سمت چپ:
مجموع ستون اول، دوم، سوم، ... و nام به ترتیب برابر است با:

$$S_1 = 1+2+3+\dots+n$$

$$S_2 = 2+4+6+\dots+2n = 2(1+2+3+\dots+n)$$

$$S_3 = 3+6+9+\dots+3n = 3(1+2+3+\dots+n)$$

$$\vdots$$

$$S_n = n+2n+3n+\dots+n^2 = n(1+2+3+\dots+n)$$

بنابراین مجموع عددهای سمت چپ به‌صورت زیر است:

$$S_L = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n =$$
$$(1+2+3+\dots+n)+2(1+2+3+\dots+n)+$$
$$3(1+2+3+\dots+n)+\dots+n(1+2+3+\dots+n)$$
$$=(1+2+3+\dots+n)(1+2+3+\dots+n)=(1+2+3+\dots+n)^2$$

در سمت راست:
مجموع عددها به‌صورت زیر است:

$$S_R = 1+(2+4+2)+(3+6+9+6+3)+$$
$$\dots+(n+2n+3n+\dots+n^2+\dots+3n+2n+n)$$

و به صورت خلاصه‌تر، برای مجموع عددهای سمت راست، رابطهٔ زیر به دست می‌آید (بررسی کنید).

$$S_R = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$$

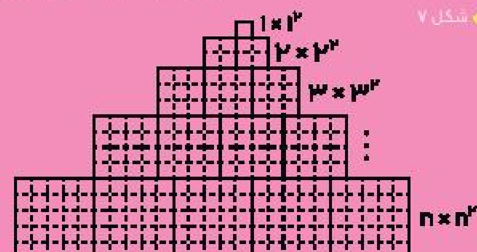
بنابراین:

$$S_R = S_L \Rightarrow 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2$$

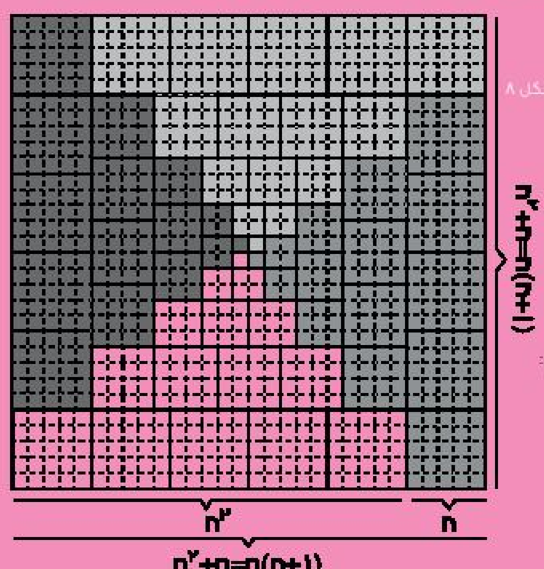
و این همان نتیجهٔ موردنظر ماست.

روش سوم: در شکل ۷ در بالاترین ردیف یک مربع ۱×۱، در ردیف بعدی دو مربع ۲×۲ و ... و در پایین‌ترین ردیف n مربع n×n داریم. پس تعداد مربع‌ها در شکل ۷ برابر است با:

$$N = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$$



شکل ۷



شکل ۸

حالا چهار نسخه از شکل ۷ را به صورت شکل ۸ کنار هم قرار می‌دهیم:

تعداد کل مربع‌ها در شکل ۸ برابر است با:

$$N' = n(n+1).n(n+1) = [n(n+1)]^2$$

چون تعداد مربع‌های شکل اولیه، یک‌چهارم این تعداد است، بنابراین:

$$N = \frac{N'}{4} = \frac{[n(n+1)]^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

و با توجه به رابطهٔ * داریم:

$$N = (1+2+3+\dots+n)^2$$

و با مقایسه با مقدار N در ابتدا داریم:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2$$

تمرین: حاصل عبارت زیر را بیابید:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+1000^3 = ?$$

منبع: Nelsen, Roger B, Proofs without Words, v.1, The Mathematical Association of America, 1993.

ریاضی جعبه ابزار من است!

گفت‌وگو با حامد حق‌نژاد، مهندس برق پالایشگاه آبادان و مخاطب دیروز رشد ریاضی برهان

• محمدحسین دیزجی

نمرهٔ ریاضی پایان سال اول راهنمایی از نگاه خودش ناامیدکننده بود، اما دبیر سال دوم راهنمایی چنان شگفت‌انگیز، فوق‌العاده و دوست‌داشتنی بود که از آن سال به بعد، یاد ندارد در درس ریاضی نمرهٔ زیر ۱۸ گرفته باشد. آرام‌آرام با ریاضی رفیق شد، طوری که کتاب‌ها و مجله‌های مرتبط با این دانش شیرین و جذاب را به طور مستمر مطالعه می‌کرد.

مهندس **حامد حق‌نژاد** به قول خودش در یک خانوادهٔ برقی بزرگ شده است. از مادربزرگ تا پسرعمو، هر کدام به نوعی با برق در ارتباط بوده و هستند. حالا او خودش هم مهندس برق است و در پالایشگاه آبادان فعالیت می‌کند. با مجلهٔ «رشد ریاضی برهان» هم دوست و رفیق است. هر وقت فرصتی دست بدهد، مجله را ورق می‌زند و می‌خواند. با ما به آبادان بیایید تا بیشتر با این مخاطب دیروز مجله آشنا بشویم.

حامد حق‌نژاد متولد شهر رشت است. دیپلم ریاضی فیزیک را در سال ۱۳۷۷ گرفت و همان سال در رشتهٔ مهندسی برق قدرت وارد دانشگاه شد.

• کار و حرفهٔ فعلی شما چقدر با ریاضی در ارتباط است؟ یعنی آشنایی با دانش ریاضی تا چه اندازه در کار شما اثرگذار است؟ مثالی بزنید.

○ همهٔ رشته‌های مهندسی با ریاضی ارتباط بسیار نزدیک دارند، به‌خصوص رشتهٔ مهندسی برق که در آن ریاضی مثل یک جعبه ابزار قوی برای انجام محاسبه‌ها و تحلیل‌های مهندسی بسیار کاربرد دارد.

• جذاب‌ترین بخش و شاخهٔ ریاضی از نگاه شما کدام شاخه و مبحث است؟

○ بخش تابع‌ها، منحنی‌ها، مثلثات و هندسه.

• تصور شما از ریاضی و کاربردهای آن، در زمان دانش‌آموزی و امروز که در این شغل هستید، چقدر با هم تفاوت دارد؟ لطفاً مقایسه‌ای داشته باشید.

○ آن زمان هیچ تصوری از کاربرد ریاضی در زندگی آینده‌ام نداشتم و فقط از روی علاقه ریاضی را می‌خواندم. شاید آن موقع فکر می‌کردم که بتوانم در آینده دبیر ریاضی بشوم و خُب آن زمان تب کنکور هم خیلی زیاد بود. بدم نمی‌آمد که روزی دبیر ریاضی معروفی بشوم. ولی الان که با شما صحبت می‌کنم، تقریباً هیچ روزی بدون استفاده از ریاضیات در محل کارم نمی‌گذرد. شاید بهتر باشد که بگویم زبان مهندسی زبان ریاضیات است.

• اصولاً در دوران مدرسه چقدر به مطالعهٔ مباحث درسی، اما غیر از کتاب درسی، توجه داشتید و دنبال یادگیری از این طریق بودید؛ مثل مطالعهٔ مجلهٔ یا کتاب غیردرسی؟

○ یکی از شانس‌های زندگی من این بود که در دوران راهنمایی (متوسطهٔ اول) و دبیرستان (متوسطهٔ دوم) معلمان ریاضی بسیار خوبی داشتم و آن‌ها در شکل‌گیری علاقهٔ ما به آن درس بیشترین تأثیر را داشتند. همین علاقه باعث می‌شد حتی خارج از مدرسه هم ذهن ما با ریاضی درگیر شود.
یادم می‌آید یک بار یکی از معلمان سؤالی را مطرح کردند و از ما خواستند جلسهٔ بعد جوابش را بیاوریم و با این سؤال ذهن ما را درگیر کرده بودند. یک روز در مسیر مدرسه جواب این سؤال به ذهنم رسید و خیلی لذت بردم. ما تشنه شده بودیم و به کتاب درسی اکتفا نمی‌کردیم. به دنبال پیداکردن جواب سؤال‌های سخت‌تر بودیم.
آن موقع هر چند وقت یک بار کتاب‌ها و مجله‌هایی از «انتشارات رشد» به بازار می‌آمد؛ مثل مجلهٔ ریاضی برهان و مجموعه کتاب‌های کوچک ریاضی که خیلی بیشتر از آنچه که ما می‌خواستیم ارائه می‌کرد و انگار پاسخ تمام سؤال‌های ما آنجا بود. مجلهٔ برهان بیشتر به معرفی بزرگان ریاضی ایران و سرگرمی‌ها و جاذبه‌های پنهان ریاضی می‌پرداخت و هر جلد از کتاب‌های کوچک ریاضی به یک مبحث ریاضی از صفر تا صد اختصاص داشت.

● وقتی مجلهٔ رشد ریاضی برهان را ورق می‌زنید می‌بینید که مطالب متنوعی دارد؛ از یادداشت و سرمقاله تا مقاله‌های علمی، آموزشی، سرگرمی، گفت‌وگو و غیره. اصولاً در وهلهٔ اول سراغ چه مطالبی در مجله می‌رفتید و چرا؟

○ اول سراغ گفت‌وگوها و زندگی‌نامه‌ها می‌رفتم. این بخش را خیلی دوست داشتم، چون خاطره‌ها و تجربه‌هایی که ارائه می‌دادند خیلی آموزنده و جذاب بودند. اینکه می‌دیدم همهٔ این بزرگان با تحمل چه سختی‌هایی به چه موفقیت‌هایی رسیدند، خیلی زیبا بود. بعد به سراغ سرگرمی‌ها و سؤال‌های چالشی می‌رفتم.

● به نظر شما یادگیری از طریق مطالب یک مجله، کتاب غیردرسی و منابع گوناگون چه تفاوتی با یادگیری از طریق کتاب درسی دارد؟

○ کتاب‌های درسی به نسبت کتاب‌های متفرقه خیلی خشک و بی‌روح بودند و خبری از چالش در آن‌ها نبود. شاید هم چیزی که ما را به سمت کتاب‌های کمکی سوق می‌داد، این بود که سؤال‌هایی که در امتحانات می‌آمدند، خیلی سخت‌تر از سؤال‌های کتاب‌های درسی بودند و این دو هم‌خوانی نداشتند. یعنی یک جورهایی مجبور بودیم سراغ کتاب‌های با عمق بیشتر برویم.

● در دوران مدرسه وضعیت درس ریاضی شما چطور بود و معمولاً چه نمره‌هایی می‌گرفتید؟

○ در ابتدایی و تا اول دورهٔ راهنمایی (هفتم الان) متوسط بودم. نمرهٔ ریاضی پایان سال اول راهنمایی من ۱۳ و ناامیدکننده بود. ولی در سال دوم دورهٔ راهنمایی دبیر ریاضی فوق‌العاده‌ای به نام آقای **کاظمی** داشتیم که ریاضی مرا ساخت. اولین تأثیر ایشان علاقه‌مندکردن ما به ریاضی بود، به این نحو که با مشارکت‌دادن دانش‌آموزان در کلاس، وقتی کسی پاسخ درستی به سؤال ایشان می‌داد، مورد تشویق قرار می‌گرفت و تا همهٔ بچه‌ها بحثی را متوجه نمی‌شدند، وارد بحث بعدی نمی‌شدند. ایشان شخصیتی بسیار دوست‌داشتنی داشتند. از سال دوم راهنمایی ما یاد گرفتیم که اصلاً ریاضی را چطور باید بخوانیم و پایهٔ ما ساخته شد. یادم نمی‌آید از آن موقع به بعد در درس ریاضی کمتر از ۱۸ گرفته باشم.

● اگر دوست دارید، از یکی از معلمان درس ریاضی خودتان که در ایجاد علاقهٔ شما به این درس نقش داشته است، یاد کنید و بفرمایید چرا این شخص در تقویت ریاضی شما آدم مؤثری بوده است؟

○ معلمان زیادی بودند؛ آقای **کاظمی**، آقای **رستمی**، آقای **مقدم**، آقای **صابری** و آقای **فویدل**.
مشخصهٔ بارز همهٔ این معلمان، صبوری و عشقشان به تدریس بود و این موضوع را ما متوجه می‌شدیم. برای تفهیم ریاضی انرژی می‌گذاشتند و وقتی دانش‌آموزان درس را متوجه می‌شدند و جواب سؤال‌ها را درست می‌گفتند، خشنودی در چهره‌شان پیدا می‌شد و به شدت آن‌ها را تشویق و ترغیب می‌کردند. کاری که این عزیزان انجام دادند این بود که مفهوم ریاضی و طرز صحیح مواجه‌شدن با مسئله‌ها را به ما یاد دادند. در دوران ابتدایی، ما همان‌طور که درس فارسی را می‌خواندیم، درس ریاضی را هم می‌خواندیم. این عادت با ما تا اول دورهٔ راهنمایی همراه بود و باعث شد آسیب ببینیم. ولی بعد متوجه شدیم که یادگیری ریاضی با تمرین و تمرین و تمرین انجام می‌شود. به زبان ساده‌تر، به نظر من ریاضی خواندنی نیست، بلکه نوشتنی است.

● برخی تصور می‌کنند ریاضی درسی فرمولی و خشک است و چندان در زندگی کاربرد ندارد. نظر شما چیست؟ اگر می‌توانید یک مثال در شغل خودتان بزنید.

○ شاید برای بسیاری از افراد درست باشد و ریاضی تأثیری در زندگی‌شان نداشته باشد، ولی در شغل ما این‌طور نیست و ریاضی نقش پررنگی دارد. مثلاً در برق‌رسانی به یک ساختمان، یک کارخانه، یا هر مکان دیگری، از سیم‌ها و کابل‌هایی با اندازه‌های متفاوت استفاده می‌شود که به‌دست‌آوردن اندازهٔ صحیح آن‌ها مستلزم داشتن دانش ریاضی است. یا مثلاً محاسبه‌های شدت خطاهای احتمالی که ممکن است در برق‌رسانی به‌وجود بیایند و راه‌های برخورد با آن‌ها، همه از طریق ریاضی صورت می‌گیرند.
در رشتهٔ برق شما با جریان الکتریسیته سروکار دارید که از حرکت الکترون‌ها در هادی‌ها به‌وجود می‌آید. مشکل اینجاست که شما حرکت الکترون‌ها را نمی‌توانید ببینید و تنها می‌توانید اثرشان را مثل روشن‌شدن لامپ مشاهده یا مثل برق گرفتگی لمس کنید. یعنی شما با چیزی سروکار دارید که نمی‌بینید و باید هدایتش کنید.

این کار تنها با ریاضیات امکان‌پذیر است. شما باید با ریاضی جریان و ولتاژ الکتریکی را مدل‌سازی کنید.

• چطور شد شما برای ادامهٔ تحصیل در دانشگاه رشتهٔ برق را انتخاب کردید و تا این دوره پیش رفتید؟ نظرتان دربارهٔ رشتهٔ خودتان چیست؟

○ ما یک خانوادهٔ برقی بودیم: مادربزرگم کارگر کارخانهٔ «گیلان الکتریک» بود. پدر و عمویم کارمندان شرکت برق منطقه‌ای و توزیع برق بودند. پسرعمویم فوق‌لیسانس رشتهٔ برق بود. به همین دلیل اولین رشته‌ای که انتخاب کردم، مهندسی برق بود. البته باید اعتراف کنم علاقه‌مند بودم در رشتهٔ مهندسی مکانیک تحصیل کنم، ولی در رشتهٔ برق پذیرفته شدم و دیگر کار به انتخاب‌های بعدی نکشید. سال ۱۳۸۱ فارغ‌التحصیل و پس از دوران سربازی جذب بازار کار شدم. هر چه بیشتر گذشت به رشتهٔ خودم علاقهٔ بیشتری پیدا کردم، چون در محیط کار به مسائلی برخورد می‌کنیم که تازگی دارد و برای تحلیلشان نیاز است که به چند کتاب مراجعه کنیم.

• نظرتان دربارهٔ مطالعه چیست؛ چه در دورانی که تحصیل می‌کردید و چه زمانی که دیگر کاری با درس و دانشگاه ندارید؟

○ مطالعهٔ خارج از کتاب درسی خیلی مهم است. در زمان تحصیل که مطالعه مهم‌ترین کار من بود، ولی بعد از فارغ‌التحصیلی و در حین کار کمتر فرصت مطالعه پیدا می‌کنم. مدتی است که دیگر به صورت موردی و تخصصی در حیطهٔ کارم مطالعه می‌کنم، ولی به‌تازگی با «وب‌آوا» (پادکست) و کتاب صوتی هم ارتباط برقرار کرده‌ام که خیلی جالب و آموزنده هستند.

• آیا در طول دوران تحصیل هیچ وقت به کسی درس هم داده‌اید؟ منظورم بیشتر در حوزهٔ ریاضی است. مثلاً به دوستانتان در یادگیری ریاضی کمک کنید یا در دانشگاه مباحثی را به دانشجویان و دوستان آموزش بدهید. اگر چنین کرده‌اید، خاطره‌ای در این زمینه بفرمایید. می‌گویند آموزش‌دادن در یادگرفتن به‌مراتب مؤثرتر است.

○ بله، وقتی دبیرستانی بودم، همسایه‌ای داشتیم که سه سال از من کوچک‌تر بود. در درس ریاضی به او کمک می‌کردم. مسئله‌های او را می‌توانستم حل کنم، ولی توضیح دادنشان برایم سخت بود. متوجه شدم که خودم هنوز عمق مسئله را درک نکرده‌ام. بعد از اینکه دوباره مطالعه می‌کردم، نکته‌های جدیدی پیدا می‌کردم که برایم تازگی داشتند.

تدریس در یادگیری خیلی مؤثر است، چون شما باید درسی را خوب متوجه شوید تا بتوانید خوب توضیحش بدهید. بعد از درس‌دادن دیگر آن مطلب ملکهٔ ذهن شما می‌شود و هیچ‌وقت از یادتان نمی‌رود.

• در هر شغل و حرفه‌ای می‌تواند لذتی وجود داشته باشد. لذت کار در حرفهٔ شما از نگاه خودتان چیست؟

○ رشتهٔ ما یعنی برق، هم لذت‌بخش است و هم خطرناک. اگر دقت لازم وجود نداشته باشد، ممکن است یک اشتباه کوچک آسیب جبران‌ناپذیری در پی داشته باشد. از طرف دیگر، وقتی با حل یک مشکل گره از کار کسی باز می‌شود، یا مثلاً یک خط تولید به دلیل مشکل برقی از کار می‌افتد و شما این مشکل را حل می‌کنید، و یا با تخصص خودتان به بهبود کیفیت و سرعت تولید اضافه می‌کنید، از کارتان خیلی لذت می‌برید. یا وقتی با دقت و دانش خودتان از بروز یک حادثه جلوگیری می‌کنید، بهترین لذت کار را خواهید چشید.

• ریاضی علاوه بر کاربرد در زندگی می‌تواند جنبهٔ تفریحی هم داشته باشد؛ مثل معما. شما چقدر در زندگی از جنبه‌های تفریحی ریاضی استفاده می‌کنید و لذت می‌برید؟

○ کتابی داشتم به نام «سرگرمی‌های جبر» از ترجمه‌های مرحوم پرویز شهریاری (که کتاب‌های فوق‌العاده‌ای در زمینهٔ ریاضی دارند). این کتاب مسئله‌ها و معماهای بسیار جالبی دارد. آن‌زمان از خواندنش کیف می‌کردم. مثلاً در یکی از مسئله‌های این کتاب با روشی نتیجه می‌گیرد که ۲=۳ است. بعد از خواننده می‌پرسد اشتباه کار کجا بوده است. در انتها خودش اشتباه عمدی صورت گرفته را شرح می‌دهد. حالا یکی از مسئله‌های این کتاب را مطرح می‌کنم تا شما جواب آن را به‌دست بیاورید.

در یک روستا می‌خواستند دو مزرعه را درو کنند که یکی از آن‌ها دو برابر دیگری بود. نصف روز تمام دروگرها روی مزرعهٔ بزرگ‌تر کار کردند. بعد افراد به دو گروه مساوی تقسیم شدند و یک گروه روی مزرعهٔ بزرگ‌تر کار کردند و تا غروب آن را به آخر رساندند. گروه دیگر روی مزرعهٔ کوچک‌تر کار کردند، ولی وقتی غروب شد، مقداری از مزرعه باقی مانده بود که روز بعد یک کارگر به تنهایی آن را تا غروب تمام کرد. در دو مزرعه چند کارگر کار می‌کرده‌اند؟

• بهترین‌ها را برایتان آرزو داریم.

جشن گوجه‌فرنگی

جلوی چشم ۲۰ هزار گرسنه!

خسرو داودی

بیایید کمی فکر کنیم!

کمی فکر کنیم!

هر سال روز اول سپتامبر (۱۰ شهریورماه) در شهر کوچک «بونیول»، در شرق کشور اسپانیا، طبق سنتی قدیمی، در خیابان و میدان مرکزی شهر، افراد زیادی جمع می‌شوند و با گوجه‌فرنگی با یکدیگر می‌جنگند. شاید این جنگ بزرگ‌ترین جنگ غذایی دنیا باشد. هزاران نفر از سراسر جهان به این شهر می‌آیند تا در جنگ شرکت کنند و یا شاهد این سنت و رسم قدیمی باشند. در این جنگ مفرح، افراد با گوجه‌فرنگی سروصورت و در نهایت تمام بدن یکدیگر را قرمز می‌کنند. شش کامیون، ۱۳۰ تن گوجه‌فرنگی رسیده را به‌عنوان مهمات بین شرکت‌کنندگان پخش می‌کنند. این جنگ در حدود یک ساعت طول می‌کشد تا جمعیت ۱۳۰ تن گوجه‌فرنگی را نابود کنند، از بین ببرند و از این کار خود خوش‌حال و خندان باشند!

جشنوارهٔ جنگ گوجه‌فرنگی، ۷۷ سال پیش در پی یک نزاع خیابانی بین‌محلی‌ها، در جریان یک جشنوارهٔ سنتی، شکل گرفت. و پس از آن به‌عنوان یک جشنواره هر سال تکرار شد

تا اینکه پلیس جلوی تکرار سالگرد این جنگ را گرفت. اما این برنامه به یک سنت گردشگرپسند تبدیل شد و به خاطر کسب درآمد حاصل از آن، این جشنواره هر سال با حضور گردشگران در همین زمان انجام می‌شـود. در نگاه اول به نظر می‌رسد که این کار مصداق اسراف و از بین بردن نعمت خداوند است. با این تعداد گرسـنه در جهان از بین بردن عامدانهٔ مواد غذایی دور از انصاف و تا حدی احمقانه به‌نظر می‌رسد. از طرفی دیگر، درآمد حاصل از حضور گردشـگر این اسراف را معقول جلوه می‌دهد. با چند محاسـبه می‌خواهیم فهم بهتری از این موضوع به‌دست آوریم.

محاسبه کنیم!

امروز که این متن را می‌نوشتم، از میدان میوه‌وتره‌بار شهرداری تهران گوجه‌فرنگی خریدم. هـر کیلوگرم گوجه‌فرنگی در حال حاضر در حدود ۸۰۰۰ تومان قیمت داشت، بنابراین:

۱۳۰×۱۰۰۰×۸۰۰۰=۱۰۴۰۰۰۰۰۰۰ تومان

یعنی هزینهٔ گوجه‌فرنگی‌های مصرف‌شـده در این جشنواره در حدود یک میلیارد تومان است.

فـرض کنید یک خانـوادهٔ ۴ نفره در هر هفتـه یک کیلوگرم گوجه‌فرنگی مصرف کند. در این صورت:

مصرف ۲۵۰۰ خانوادهٔ ۴ نفره در سال ۱۳۰۰۰۰÷۵۲=۲۵۰۰

یعنی این مقدار گوجه‌فرنگی می‌تواند مصرف یک‌سـال ۲۵۰۰ خانوادهٔ ۴ نفره را تأمین کند. اگر در حال حاضر هزینهٔ یک وعده غذای گرم برای سـیر کردن یک نفر را ۵۰۰۰۰ تومان در نظر بگیریم، با هزینهٔ این مقدار گوجه‌فرنگی می‌توان شـکم حدود ۲۰۰۰۰ نفر را سیر کرد:

۱۰۴۰۰۰۰۰۰۰÷۵۰۰۰۰=۲۰۸۰۰

بعید می‌دانم در آن شهر کوچک ۲۰۰۰۰ گرسنه وجود داشته باشـند. البته باید توجه کنیم که غیر از هزینهٔ گوجه‌فرنگی‌ها، این جشنواره هزینه‌های دیگری هم دارد. بعد از اتمام این جنگ خیابانی، مأموران شهرداری باید خیابان‌ها و دیوارها را تمیز کنند و آب زیـادی برای این کار هدر مـی‌رود. همچنین لباس‌های کسانی که در این برنامه شرکت کرده‌اند تقریباً غیرقابل استفاده اسـت و به‌طور معمول دور انداخته می‌شـود. من فکر می‌کنم معـادل همان یک میلیـارد تومان را باید بـرای جمع‌آوری و شست‌وشوی بازمانده‌های گوجه‌فرنگی‌های له شده هزینه کنیم. حالا از یک زاویهٔ دیگر بـه این موضوع نگاه کنیم. فرض کنیم بـرای دیدن این جشـنواره یا شـرکت در آن، حدود ۵۰۰۰ گردشگر به این شـهر کوچک بیایند. اگر هر گردشگر فقط دو شبانه‌روز در این شهر اقامت کند و بابت هر روز اقامت ۲۰۰ دلار خرج کند، خواهیم داشت:

۵۰۰۰×۲×۲۰۰=۲۰۰۰۰۰۰ دلار

اگر قیمت هر یک دلار را در حال حاضر ۳۰ هزار تومان در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

۲۰۰۰۰۰۰×۳۰۰۰۰=۶۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

یعنی در این جشنواره، گردشگران در حدود ۶۰ میلیارد تومان برای مجموعهٔ شـهروندان آن شـهر هزینه می‌کنند. اگر فقط ۱۰ درصد سـود برای آن‌ها در نظر بگیریم، عواید حداقلی این جشنواره برابر است با:

$$۶۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ \times \frac{۱۰}{۱۰۰} = ۶۰۰۰۰۰۰۰۰۰$$

پس حدود ۶ میلیارد تومان سـود برای مردم آن شـهر ایجاد خواهد شـد. با در نظر گرفتن کل هزینه‌هـای گوجه‌فرنگی و تمیزکردن‌هـای بعد از آن که در حدود ۲ میلیارد تومان برآورد کردیم، در این معامله به اندازهٔ ۳ برابر سود عاید شده است:

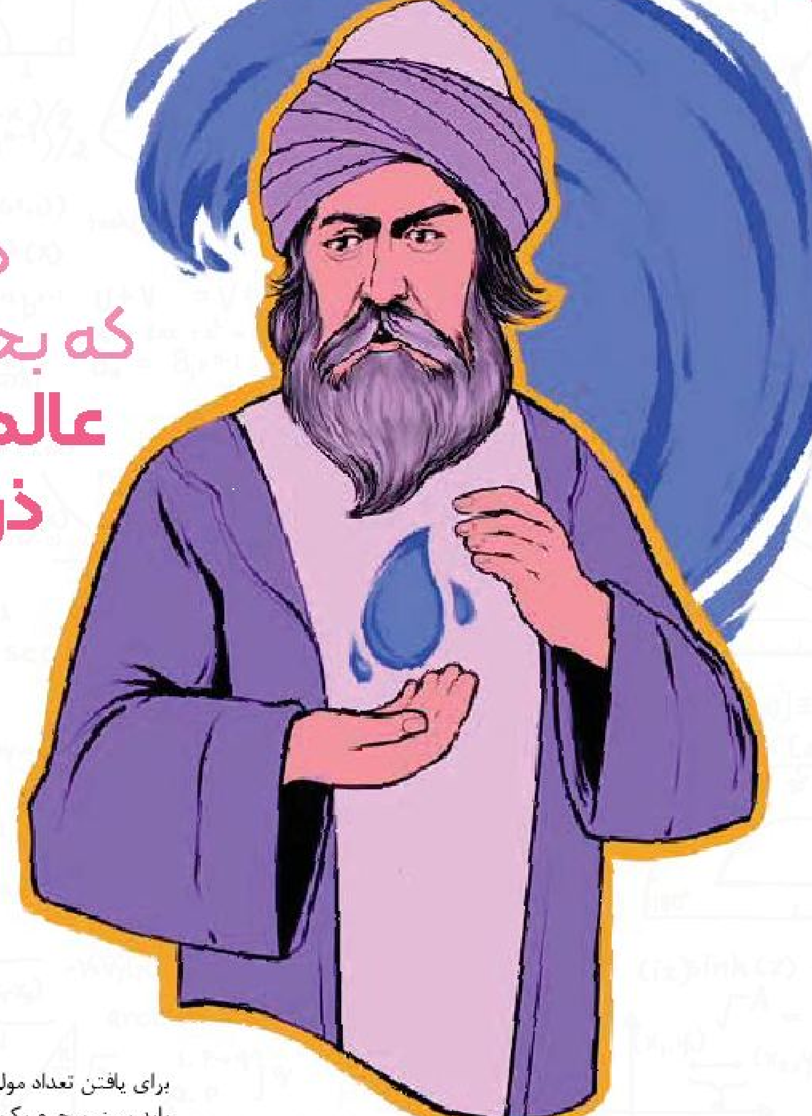
۶ میلیارد ÷ ۲ میلیارد = ۳ (برابر)

بیشتر فکر کنیم

خب نظر شما چیست؟ آیا این معامله خوبی نیست؟ ۲ میلیارد خرج کن و ۳ برابر آن یعنی ۶ میلیارد تومان سود کن. این‌طوری ۲۰۰۰۰ گرسـنه که هیـچ، می‌توانید ۶ برابر آن را هم سـیر کنید! اینجاست که قضاوت کردن و تصمیم‌گیری بسیار سخت می‌شود. آیا می‌توانیم با این توجیه ۱۳۰ تن گوجه‌فرنگی را هدر دهیم؟ آیا این کار واقعاً یک اسراف بزرگ نیست؟ آیا ارزش‌های دینی و انسـانی به ما اجازهٔ چنین کاری را می‌دهند؟ آیا صرف درآمدزایی می‌تواند توجیه‌کنندهٔ هر کاری باشد؟

اگر از زاویهٔ دیگری به این موضوع نگاه کنیم، می‌توانیم بپرسیم: آیا اساسـاً اسم این کار هدر رفتن و اسراف است؟ چه فرقی بین خوردن گوجه‌فرنگـی به‌عنوان غذا و اسـتفاده از آن برای یک جشـنوارهٔ مفرح وجود دارد؟ وقتی غذایـی را می‌خوریم، باعث می‌شود برای ادامهٔ حیات انرژی به‌دست آوریم به همین ترتیب از نظر روحی نیز نیازمند تفریح و شادابی هستیم. حالا به جای اینکه گوجه‌فرنگی را نوش جان کنیم، بـا پرتاب‌کردن آن به یکدیگر تفریح می‌کنیم و شاد می‌شویم. گردشگر هم جذب می‌کنیم.

واقعاً تصمیم‌گیری و انتخاب در اینجا سخت می‌شود. لازم است بیشتر در این مورد فکر کنیم. موارد مشابه دیگری نیز در جامعه و زندگـی روزمرهٔ ما پیش می‌آیند کـه بین این دوراهی‌ها گیر می‌کنیم. پیشنهاد می‌کنم در این خصوص با افراد آگاه و خبره مشـورت کنید و نظرات آن‌ها را هم بگیرید. خودتان هم کمی بیشتر فکر کنید.



در چنین بحری که بحر اعظم است عالمی ذره است و ذره عالم است![1]

روح‌الله خلیلی‌بروجنی[2]

در این مقاله می‌خواهیم به دو پرسش دربارهٔ مولکول‌های آب پاسخ دهیم. در **پرسش اول** می‌خواهیم ببینیم که: «اگر بتوانیم مولکول‌های یک قطره آب را از هم جدا کنیم و در کنار یکدیگر قرار دهیم، طول آن چقدر می‌شود؟» توصیه می‌کنم قبل از خواندن ادامهٔ مطلب، دقایقی روی این پرسش و پاسخ آن فکر کنید و حتی حدس خود را در جایی یادداشت کنید.

برای پاسخ به این پرسش لازم است کمی در خصوص ویژگی‌های فیزیکی یک قطره آب بیشتر بدانیم. اگر یک سی‌سی یا یک سانتی‌متر مکعب ($1\,cc = 1\,cm^3$) آب را توسط یک قطره‌چکان از ظرف محتوای آب جدا کنیم و سپس تعداد قطره‌های آب تشکیل‌دهندهٔ آن را هنگام خروج از قطره‌چکان بشماریم، متوجه می‌شویم که هر سی‌سی آب از حدود ۲۰ قطرهٔ آب تشکیل شده است. به این ترتیب حجم تقریبی هر قطرهٔ آب می‌شود: $\frac{1\,cm^3}{20} = 0/05\,cm^3$ (شکل ۱).

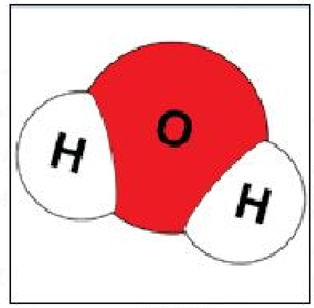
شکل ۱. حجم تقریبی هر قطره آب حدود یک بیستم سی‌سی ($0/05\,cm^3$) است.

برای یافتن تعداد مولکول‌های تشکیل‌دهندهٔ یک قطره آب، ابتدا باید ببینیم جرم یک قطره آب چقدر است. برای پیداکردن جرم یک قطره آب می‌توانیم از رابطهٔ چگالی که در کتاب علوم هفتم با آن آشنا شدیم، استفاده کنیم. همان طور که می‌دانیم چگالی آب $1\frac{g}{cm^3} = 1000\frac{kg}{m^3}$ است. بنابراین، براساس تعریف چگالی ($\text{چگالی} = \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}}$)، جرم یک قطره آب برابر ۰/۰۵ گرم می‌شود.

هر ۱۸ گرم آب تقریباً از 6×10^{23} مولکول تشکیل شده است[3]. به این ترتیب با داشتن جرم یک قطرهٔ آب و با یک تناسب ساده می‌توانیم تعداد مولکول‌های آب درون یک قطرهٔ آب را به دست آوریم که برابر است با:

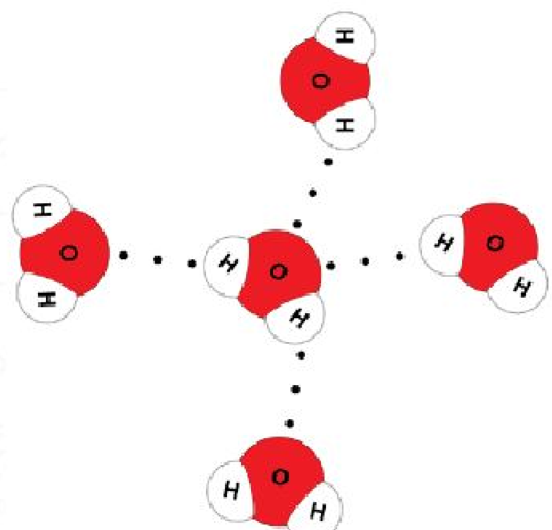
$$\frac{(0/05\,g) \times 6 \times 10^{23}}{18\,g} \approx 1/6 \times 10^{21}$$

ابعاد هر مولکول آب حدود سه دهم نانومتر ($0/3\,nm$) است (شکل ۲). مولکول‌های آب با پیوند هیدروژنی در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند (شکل ۳). با تقریب خوبی می‌توان فرض کرد که ابعاد هر سه مولکول آب که در کنار هم قرار می‌گیرند حدود یک نانومتر است ($1\,nm = 10^{-9}\,m$).



$\sim 0/3\text{nm}$

شکل ۲. ابعاد تقریبی هر قطره آب حدود سه دهم نانومتر $(0/3\text{nm} = 0/3 \times 10^{-9}\text{m})$ است.



شکل ۳. هر مولکول آب با ۴ مولکول دیگر آب از طریق پیوند هیدروژنی در ارتباط است. نقطه‌ها پیوند هیدروژنی بین مولکول‌های آب را نشان می‌دهند.

با توجه به اطلاعات به دست آماده اکنون آماده‌ایم به پرسش اول پاسخ دهیم: یعنی اگر بتوانیم مولکول‌های یک قطره آب را از هم جدا کنیم و کنار هم بگذاریم، طول آن چقدر می‌شود؟ با توجه به اینکه دیدیم در هر قطره آب حدود $1/6 \times 10^{21}$ مولکول آب وجود دارد، همچنین با توجه به اینکه ابعاد هر مولکول آب حدود سه دهم نانومتر است، اگر مولکول‌های درون یک قطره آب را در کنار یکدیگر قرار دهیم، طول تقریبی آن برابر است با:

$$L = (0/3 \times 10^{-9}\,\text{m}) \times 1/6 \times 10^{21}$$
$$= 0/48 \times 10^{12}\,\text{m} = 480 \times 10^{6}\,\text{km}$$

نتیجهٔ بالا نشان می‌دهد، اگر مولکول‌های درون یک قطرهٔ آب را بتوانم در کنار هم و در یک امتداد قرار دهیم، طول آن حدود ۴۸۰ میلیون کیلومتر خواهد شد! خوب است بدانید، شعاع کرهٔ زمین حدود ۶۴۰۰ کیلومتر و محیط آن حدود ۴۰۰۰۰ کیلومتر است. یعنی با کنار هم قراردادن مولکول‌های یک قطره آب می‌توان ۱۲ هزار بار محیط زمین را پیمود.

شکل ۴. محیط کرهٔ زمین در محل استوا حدود ۴۰۰۰۰ کیلومتر است.

پرسش دوم: فرض کنید «ابررایانه‌ای» در اختیار داریم که قادر است در هر ثانیه ۱۰۰۰ میلیارد از مولکول‌های یک قطره آب را شمارش کند. چه مدت طول می‌کشد تا تمام مولکول‌های قطرهٔ آب را بشمارد؟ با توجه به اطلاعات به دست آمده در قسمت قبل، پاسخ به این پرسش ساده است. همان‌طور که دیدیم، در هر قطره آب حدود $1/6 \times 10^{21}$ مولکول وجود دارد. به این ترتیب زمان لازم برای شمارش این تعداد مولکول برحسب ثانیه برابر است با:

$$t = \frac{1/6 \times 10^{21}}{10^{12}}\text{s} = 1/6 \times 10^{9}\text{s}$$

اگر یک سال را برحسب ثانیه حساب کنید، به مقدار 31536000s می‌رسیم. برای به‌خاطرسپاری این مقدار می‌توانیم آن را با تقریب خوبی به صورت $\pi \times 10^{7}\text{s}$ بنویسیم که در آن π همان عدد پی و برابر ۳/۱۴ است. به این ترتیب، زمان لازم برای شمارش تعداد مولکول‌های درون یک قطره آب توسط یک ابررایانه برحسب سال برابر است با:

$$t = \frac{1/6 \times 10^{9}}{3/14 \times 10^{7}} \approx 50 \text{ سال}$$

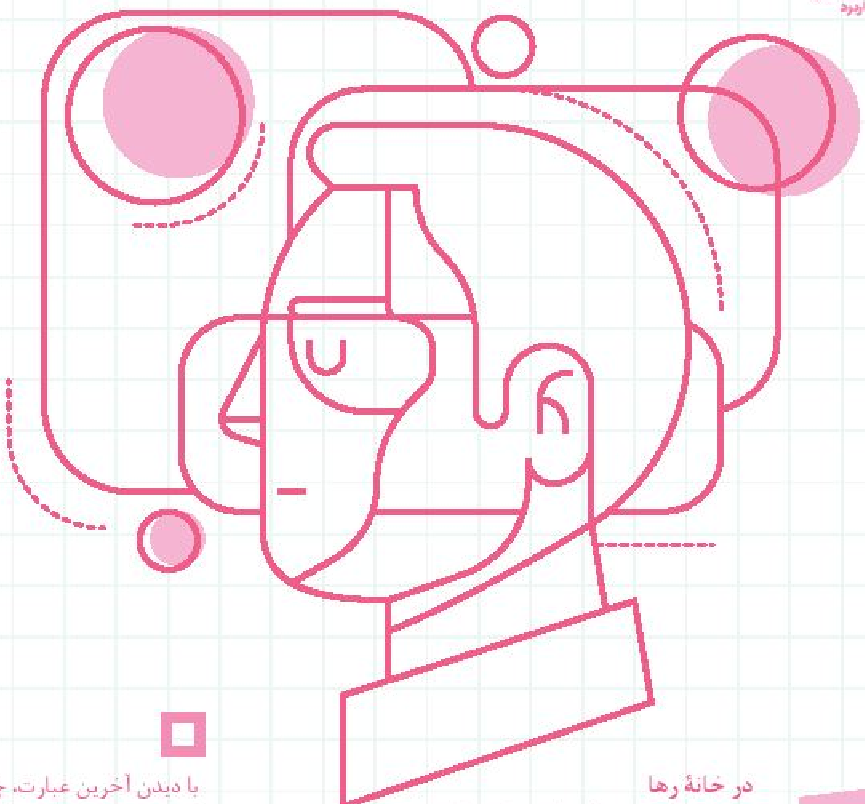
خوب است بدانید، بهترین پردازشگرها که معمولاً در رایانه‌هایی به کار می‌روند که برای بازی‌های رایانه‌ای ساخته می‌شوند، قادرند در هر ثانیه بین ۳ تا ۶ میلیارد محاسبه انجام دهند (3GHz 6GHz). اگر قرار باشد با این رایانه‌ها مولکول‌های درون یک قطرهٔ آب را شمارش کنیم، دست کم زمانی حدود ۱۰۰۰ سال لازم است!

پی‌نوشت‌ها

۱. این بیت شعر از مقدمهٔ منطق‌الطیر عطار نیشابوری انتخاب شده است.
۲. از مؤلفان سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.
۳. در کتاب‌های شیمی دورهٔ دوم متوسطه با جزئیات این موضوع بیشتر آشنا خواهید شد.

استدلال‌های غلط درست‌نما (قسمت پنجم)

شراره تقی‌دستجردی، صبا قاسمی



در خانۀ رها

مادر: رها فهمیدی که داره برف میاد!

رها با شــنیدن آنچه مادرش گفت، از سر دفتر و کتابش به سوی پنجره پرید. با دیدن دانه‌های سفید برف چشمانش از شادی برق زد. چند دقیقه‌ای به دانه‌های زیبای برف که آرام و باوقار روی لبه پشت پنجره اتاقش می‌نشستند، چشم دوخت. دلش می‌خواست چترش را بردارد و برود بنشیند روی نیمکت چوبی پارک محله‌شان و بی آنکه به چیزی فکر کند فقط بخشش آسمان را نظاره‌گر باشد. اما برای فردا، تکلیف‌های زیادی داشت که باید انجام می‌داد. رها پنجرۀ اتاقش را کمی باز کرد، با دستانش برف‌های پشت پنجره را به آرامی نوازش کرد و نفس عمیقی کشید تا ریه‌هایش پُر شوند از رطوبت و ســردی برف. از این هوای خوش، روحش تازه شد و بر لبانش لبخندی نشســت. پنجره را بست و رفت در پی انجام تکلیف‌هایش.

***

رها: *مسئلۀ سه:* آیا اگر عددهای a و b بر عدد c بخش‌پذیر باشند، آنگاه a+b هم بر c بخش‌پذیر است؟

رها حدس زد که این جمله درست است. پس شروع کرد به مثال زدن تا از احساسش مطمئن شود.

رها: مثلاً ۱۲ بر ۳ بخش‌پذیر است. ۱۵ هم بر ۳ بخش‌پذیر است و ۲۷ که حاصل جمع ۱۲ و ۱۵ است هم بر ۳ بخش‌پذیر است.

رها مدادش را برداشــت و در چرک‌نویسی که کنار دستش بود نوشت:

۴×۳-۱۲

۵×۳-۱۵

(۴×۳) + (۵×۳) - ۱۲ + ۱۵ -۲۷-۹×۳

با دیدن آخرین عبارت، چشمان رها از شادی برق زد؛ همان طور که از دیدن دانه‌های برف برق زد.

او زیر عددهای ۴، ۵ و ۹ خط کشید و این بار در دفتر ریاضی‌اش شروع کرد به نوشتن.

رها: بسیار خُب. اگر از تعریف بخش‌پذیری استفاده کنیم، مسئله به‌راحتی حل می‌شــود. اگر a بر c بخش‌پذیر باشد، آنگاه عددی مثل k وجود دارد که k×c-a

به همین ترتیب اگر b بر c بخش‌پذیر باشد، آنگاه عددی مثل k' وجود دارد که: k'×c-b

حالا کافی است این دو را با هم جمع کنیم:

k×c+k'×c-a+b

در نتیجه:

(k+k')×c-a+b

پس a+b هم بر c بخش‌پذیر است.

رها این‌ها را نوشت و با خوش‌حالی دوباره رفت سوی پنجره تا باز هم بارش برف را ببیند. انگار که بخواهد به خاطر حل این مسئله به خودش جایزه بدهد. او چند دقیقه‌ای به آســمان پر برف نگاه کرد. چشمانش که سیر شد، برگشت تا مسئلۀ بعدی را حل کند.

رها: *مســئلۀ چهار.* آیا اگر عددهــای a و b بر عدد c بخش‌پذیر نباشند، آنگاه a+b هم بر c بخش‌پذیر نیست؟

مثل همیشه، این بار هم رها مثال زد تا ایده‌ای از حل مسئله پیدا کند. او با عددهای ۵، ۸ و ۳ شروع کرد.

رها: ۵ بر ۳ بخش‌پذیر نیســت. ۸ هم بر ۳ بخش‌پذیر نیســت. حاصل جمع آن‌ها هم بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

به نظرش جمله درســت بــود. اما برای اینکه دل‌گرم‌تر شــود، بخش‌پذیری ۱۲ و ۱۴ را هم بر ۵ بررسی کرد.

رها: ۱۲ بر ۵ بخش‌پذیر نیست. ۱۴ هم بر ۵ بخش‌پذیر نیست. حاصل جمع آن‌ها، یعنی ۲۶ هم بر ۵ بخش‌پذیر نیست.

اکنون رها از درستی جملهٔ مورد نظر مطمئن‌تر شده بود. او سعی کرد با استدلالی مشابه به آنچه که برای مسئلهٔ سه نوشته بود، اثباتش را پیش ببرد.

رها: اگر a بر c بخش‌پذیر نباشد، آنگاه عددی مثل k وجود ندارد که $k\times c=a$. یعنی برای هر k:

$kc \neq a$

به همین ترتیب اگر b بر c بخش‌پذیر نباشد، آنگاه عددی مثل k' وجود ندارد که $k'\times c=b$. یعنی برای هر k':

$k'c \neq b$

حالا کافی است این دو را با هم جمع کنیم:

$k\times c+k'\times c\neq a+b$

در نتیجه:

$(k+k')\times c\neq a+b$

پس a+b هم بر c بخش‌پذیر نیست.

رها شادمان از حل این مسئله باز هم به سوی پنجره شتافت.

ادامه دارد ...

استدلال چیزی نیست جز راهی که ما را از فرضیات مسئله به حکم می‌رساند. گام‌های این راه، جمله‌هایی هستند که در پی هم می‌آیند و ما را از مبدأ به مقصد می‌رسانند. پس برای بررسی یک استدلال کافی است در این راه قدم بردارید و اعتبار هر گام را بسنجید. به عبارت دیگر، مانند یک کارآگاه، درستی تک‌تک جمله‌ها را ارزیابی کنید. این جمله‌ها به‌خودی خود باید منطقی و درست باشند. علاوه بر این نباید با گام‌های قبلی استدلال و فرضیات مسئله یا آنچه که از پیش درستی‌اش را پذیرفته‌اید، در تناقض باشند.

بسیار خب! اکنون نگاهی به استدلال رها برای مسئلهٔ سه بیندازید. به نظرتان استدلالش درست است؟ آن را می‌پذیرید؟

بله. این استدلال درست است. در حقیقت رها از بررسی یک مثال، ساختار اثباتش را بنیان گذاشت و سعی کرد به طور دقیق و در حالت کلی آن را اثبات کند.

حال به استدلال مسئلهٔ چهار نگاه کنید. گام‌به‌گام آن را بررسی کنید. آیا آن را می‌پذیرید؟

گام‌های استدلال مسئله‌های سه و چهار بسیار شبیه به هم هستند و آنچه که در همان نگاه اول ما را متوجه تفاوت این دو استدلال می‌کند، علامت‌های مساوی و نامساوی است.

همان‌طور که می‌دانید ما می‌توانیم دو طرف دو عبارتی را که شامل مساوی است، با هم جمع کنیم. به عبارت دیگر، مجاز هستیم معادله‌ها را با یکدیگر جمع کنیم تا یک معادلهٔ دیگر به دست آوریم. از طرف دیگر، وقتی با نامعادله‌هایی شامل رابطهٔ «کوچک‌تری»، «بزرگ‌تری»، «کوچک‌تر یا مساوی» و «بزرگ‌تر یا مساوی» سروکار داریم، تنها با درنظر گرفتن علامتشان مجاز به جمع کردن آن‌ها هستیم. برای مثال، می‌توانیم طرف چپ دو نامعادلهٔ $a<b$ و $c<d$ و همچنین طرف راست آن‌ها را با هم جمع کنیم تا به نامعادلهٔ دیگری برسیم: $a+c<b+d$

اما حق نداریم این کار را برای دو نامعادلهٔ زیر انجام دهیم:

$a<b$

$c>d$

فکر می‌کنید چرا؟

بسیار خب! اکنون با این مقدمه نظرتان درمورد استدلال رها برای مسئلهٔ چهار چیست؟ آیا او مجاز است دو نابرابری $kc \neq a$ و $k'c \neq b$ را با هم جمع کند؟

اجازه دهید با یک مثال ساده‌تر این موضوع را بررسی کنیم. می‌دانیم:

$۱\neq۲$

$۲\neq۱$

اگر طرفین این دو عبارت را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت $۳\neq۳$!

البته شما ممکن است مثال‌های دیگری بیاورید که جمع دو نابرابری ما را به یک نابرابری درست برساند، اما همین یک موردی که اکنون مثال زده شد، کافی است که نشان دهد: **چنین نیست که از جمع دو نابرابری، همواره یک نابرابری به دست آوریم.** در ریاضی به این مورد، مثال نقض گفته می‌شود. این مثال ویژگی‌های فرضیات مسئله را دارد، اما درستی جملهٔ بالا را در حالت کلی نقض می‌کند.

برگردیم به موضوع اصلی. به نظر شما در جمع نابرابری‌ها اشکال کار کجاست؟

بیایید به معنای علامت نامساوی بیشتر دقت کنیم. شما با دیدن عبارت $a\neq b$ برای اعداد a و b نتیجه می‌گیرید که a با b برابر نیست ولی از وضعیت a و b نسبت به یکدیگر، بی‌خبرید! به عبارتی نمی‌دانید کدام بزرگ‌تر است و کدام کوچک‌تر (در حالی که در مورد رابطه‌های بزرگ‌تری، کوچک‌تری یا مساوی مشخص است که ارتباطات به چه نحوی است). همین وضع مبهم باعث می‌شود که برای مواردی از جمع دو نابرابری یک نابرابری به دست بیاید و برای مواردی یک برابری.

پس اثباتی که رها برای مسئلهٔ چهار ارائه کرده است، درست نیست. او گامی را برداشته که گرچه به ظاهر صورت موجهی دارد، اما نادرست است. مثال‌های زیادی از چنین اشتباه‌هایی در ریاضی وجود دارند. این اشتباه‌ها غالباً از تعمیم نابه‌جای قوانین درست به وجود می‌آیند. مثلاً رها قانون جمع معادله‌ها را به اشتباه به قانون جمع نامعادله‌ها تعمیم داد. به عنوان مثالی دیگر، قانون تقسیم رابطهٔ کوچک‌تری بر یک عدد مثبت را نمی‌توان به تقسیم بر عددهای منفی تعمیم داد، زیرا در این صورت رابطهٔ کوچک‌تری به رابطهٔ بزرگ‌تری تبدیل می‌شود.

اما فارغ از اینکه استدلال رها نادرست است، به نظرتان پاسخ به مسئلهٔ چهار چیست؟ آیا می‌توانید مثال نقضی برای مسئلهٔ چهار پیدا کنید؟

موارد دیگری از تعمیم‌های نادرست را که خودتان یا دوستانتان به اشتباه انجام داده‌اید، پیدا کنید.

همگام با ستارگان آیا او را می‌شناسید؟

آرش رستگار ● تصویرگر: حسین یوزباشی

وقتی ۲۵ سال پیش از آمریکا به دانشگاه شریف برگشتم، از اولین درسی که دادم متوجه شدم طرفدار پروپاقرص درس‌هایی بود که در دانشکده ارائه می‌کردم. توانایی محاسباتی بسیار بالایی داشت. توانایی ریاضی او بوی دکتر **علی رجایی** را می‌داد. با اینکه او هم مانند **مریم میرزاخانی** در المپیاد ریاضی جهانی موفق شده بود نمرهٔ کامل را کسب کند، اما به یادگیری ریاضی بیش از میرزاخانی اهمیت می‌داد. سواد ریاضی او هم در دوران کارشناسی و هم در دوران دانشجویی در دورهٔ دکترا، بسیار گسترده‌تر از خانم میرزاخانی بود. هر هفته برای ساعاتی در دفتر کارم حاضر می‌شد و موضوع‌هایی را که با هم مطالعه می‌کردیم، برایم توضیح می‌داد. پشتکار او در آموختن بیش از همهٔ شاگردانی بود که تا به حال داشته‌ام. پایان‌نامه کارشناسی‌اش را هم با من نوشت. در دوران کارشناسی هم مقاله‌ای تحقیقاتی منتشر کرد که بسیار ارزشمند بود.

برای من افتخار است اگر به منظور پذیرش او در «دانشگاه پرینستون» برای تحصیلات دورهٔ دکترا توصیه‌نامه نوشته باشم. دو پایان‌نامه نوشت. یکی با **زابو** در پرینستون و دیگری با **تیان** در «هاروارد». هر دو بسیار پرحجم و غنی بودند. شاخه‌ای که در آن تحقیق می‌کرد، پیش‌نیازهای زیادی داشت و بسیار فنی (تکنیکی) بودند.

پس از فارغ‌التحصیلی از پرینستون، برای دورهٔ پسادکترا به هاروارد رفت و در آنجا تدریس و تحقیق کرد و با پس‌انداز ش توانست پس از بازگشت به ایران، خانه‌ای بخرد. برخلاف اکثر کسانی که آن موقع به ایران باز می‌گشتند، به جای «دانشگاه شریف»، به «پژوهشگاه دانش‌های بنیادی» ملحق شد و نمایندگی مکتب توپولوژی هاروارد، و پرینستون را در ایران به عهده داشت. بیش از یک دهه در سمت معاونت پژوهشکدهٔ ریاضی خدمت کرد و به‌تازگی به مقام ریاست پژوهشکدهٔ ریاضی ارتقا یافت.

این‌ها ابعاد علمی زندگی کاری او بودند. اما او شخصیتی چندبعدی داشت. او به‌عنوان نمایندهٔ نسلی از نخبگان شناخته می‌شود و در این جایگاه خدمات فراوانی به جامعهٔ علمی ارائه کرد.

در مدتی که در بنیاد ملی نخبگان همکاری می‌کرد، مشاوری توانا با بینش عمیقی نسبت به جامعهٔ علمی برای ریاست بنیاد محسوب می‌شد که معاون رئیس‌جمهور بود. از جمله تلاش‌های او، به تصویب رساندن وام مسکن نخبگان بود که بسیاری از دوستانم به کمک این وام خانه‌دار شدند. یکی از مسئولیت‌هایی که در بنیاد ملی نخبگان پذیرفت، ریاست «بنیاد ایرانی حمایت از پژوهش‌ها» بود که سال‌ها آن مسئولیت را به عهده داشت. عضو هیئت امنای سمپاد و باشگاه دانش‌پژوهان جوان نیز بود. بارها مسئولیت سمپاد به او پیشنهاد شد و نپذیرفت و دیگران را به جای خود در این مسئولیت‌ها گمارد.

او پشت صحنه بر تصمیماتی که در این معاونت در وزارت آموزش‌وپرورش گرفته می‌شد، نظارت داشت و مشورت می‌داد. با شاخهٔ ریاضی فرهنگستان علوم نیز همکاری داشت. شاید بتوان گفت در خدمت به جامعهٔ علمی ایران بار ۱۰ نفر را یک‌تنه برمی‌داشت. سر آخر هم در سنین نزدیک به ۴۰ سالگی به‌عنوان «عضو شورای عالی انقلاب فرهنگی» انتخاب شد که در رأس نهادهای دانشگاهی قرار دارد. این نقش جدا از نقشی بود که در جامعهٔ ریاضی ایران بین جوانان هم‌نسل خودش در سامان‌دهی ریاضیات ایفا کرد و این همه باری علاوه بر تحقیقات ریاضی او و تربیت دانشجویانی بود که در سطح بین‌المللی موفق و در جامعهٔ علمی پذیرفته شده بودند.
در دورانی که به مدت پنج سال در پرینستون زندگی می‌کردم، با استاد او و همکاران و شاگردانش مراوده داشتم و از احترامی که برای تحقیقات او قائل بودند، آگاه شدم. استادش تیان، در سال‌های اخیر بازنشسته شد و به چین بازگشت و امروز در ریاضیات چین نقش تعیین‌کننده‌ای ایفا می‌کند. به‌علاوه در احزاب سیاسی چین جایگاه بلندی دارد و شخصیتی بسیار تأثیرگذار محسوب می‌شود.
دوستم مانند مریم میرزاخانی و بسیاری از دیگر المپیادی‌ها، بر حل مسئله تأکید دارد و نگاه فلسفی به ریاضیات را برنمی‌تابد. از دیدگاه او، نگاه فلسفی ذهن را می‌بندد و محدود می‌کند و جلوی خلاقیت ریاضی را می‌گیرد. اخیراً تحقیقاتی را به انجام رسانده است که فراتر از شاخهٔ علمی خود او محسوب می‌شوند و در شاخهٔ هندسه قدمی بزرگ به جلو محسوب می‌شوند. این تحقیقات مربوط به شمارش ژئودزیک‌های بسته روی خمینه‌های ریمانی و مسئله‌ای است که میرزاخانی هم به آن پرداخت و نتایج مهمی در آن به دست آورد. نتایجی که در پایان‌نامهٔ دکترای میرزاخانی به دست آمد و موجب شهرت اولیهٔ او شد.
به‌جز او و مریم میرزاخانی، دو نفر دیگر در تاریخ المپیاد ریاضی ایران موفق شده‌اند در المپیاد جهانی ریاضی نمرهٔ کامل را کسب کنند. یکی دکتر **امید امینی** که اکنون در «اکول نرمال سوپریور پاریس» تحقیق می‌کند و دیگری دکتر **علی‌اکبر دائمی** که ریاضیاتش به ریاضیات دوستم بسیار نزدیک است.

در سال‌های بعد از بازگشت از آمریکا، از حمایت‌های این دوست صمیمی بسیار برخوردار شدم و این موضوع موجب شد، با همهٔ مشکلات پیچیده‌ای که در زندگی شخصی داشتم، سال‌های پرباری را در پژوهشکدهٔ ریاضیات پژوهشگاه دانش‌های بنیادی تجربه کنم.
این‌ها جنبه‌های علمی و کاری شخصیت او هستند. اما از همه مهم‌تر جنبه‌های انسانی شخصیت اوست. با اینکه من از او بزرگ‌تر هستم و باید او را تحت‌تأثیر قرار می‌دادم، بسیاری عقاید و آرای مذهبی عمیقم تحت‌تأثیر او شکل گرفته‌اند و این در نوشته‌هایم آشکار است. ارتباط ما فراتر از یک ارتباط کاری و علمی و حتی فراتر از یک ارتباط دوستی و خانوادگی است.
او در کنار دکتر رجایی و دکتر **محمدرضا رزوان** در ردهٔ صمیمی‌ترین افرادی قرار می‌گیرد که در زندگی‌ام با آن‌ها برخورد داشته‌ام. امیدوارم جامعهٔ علمی ایران بتواند خدمات این مرد بزرگ را جبران کند؛ هرچند که او هیچ چشم‌داشتی از جامعهٔ علمی ندارد.
ندارند چشم از خلایق پسند
که ایشان پسندیده حق بسند

مسئله: با فرض $x^2+y^2=1$، مقدار عددی عبارت زیر چند است؟

$$2x^4+2x^2y^2+y^2+y^4$$

۱) ۱   ۲)   ۳) ۳   ۴) $\frac{1}{2}$ ۵) $\frac{1}{4}$

برای آشنایی با شخصیت شمارهٔ قبل رمزینه را پویش کنید.

برای مشاهدهٔ پاسخ، رمزینه را پویش کنید.

محرم ایردموسی

داستان‌های مریم داستان پنجم: دستگاه جدید

زنگ تفریح سوم بود. خوشبختانه با روشی که در زنگ تفریح قبلی از دستگاه یاد گرفته بودم، توانستم مبلغ جریمه را به کمک دوستم **رویا** حل کنم و به قول معروف، حسابم را با دستگاه صاف کردم. زنگ قبل که زیست‌شناسی داشتیم، سروصداهایی از راهروی مدرسه می‌آمد. معمولاً این جور وقت‌ها، برخی از هم‌کلاسی‌های کنجکاو، تشنه می‌شوند و اجازه می‌گیرند که از کلاس خارج شوند و سروگوشی آب بدهند؛ نه ببخشید، آب بخورند!

همان‌ها خبر آورده بودند که دستگاهِ خوراکی جدیدی دارند تو راهروی طبقهٔ اول نصب می‌کنند. من هم که مشتاق بودم ببینم دستگاه جدید چه شکلی است و چطور کار می‌کند، بعد از پرداخت جریمهٔ تأخیر، رفتم پایین، طبقهٔ اول ساختمان مدرسه. وقتی رسیدم، خیل مشتاقانی را دیدم که دور دستگاه جدید را گرفته بودند و جلوتر از همه رویا داشت داخل دستگاه را برانداز می‌کرد. از لابه‌لای بچه‌ها خودم را به رویا رساندم و گفتم: «سلام رویاجان. چه خبر؟»

رویا گفت: «تا اونجایی که فهمیدم، این دستگاه هم لیموناد داره!»

خندیدم و گفتم: «چه خوب! اما فرقش با دستگاه طبقهٔ دوم چیه؟»

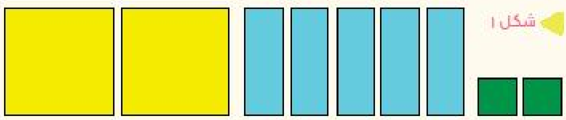
رویا به نوشته‌های روی دستگاه جدید اشاره کرد: «بچه‌ها سلام. معمای دستی حل کنید و علاوه بر خوراکی، خود معما را هم جایزه بگیرید.»

بچه‌هایی که دور دستگاه بودند، احتمالاً داشتند به این موضوع فکر می‌کردند که معمای دستی چیست. رویا همین سؤال را پرسید: «**مریم** منظورش از معمای دستی چیه؟ معماهای این دستگاه مثل کاردستی هستند؟ یعنی به جای طرح سؤال روی برگهٔ رسید (فیش)، چیزی شبیه جورچین می‌ده بیرون؟»

من هم که همین حدس را می‌زدم به رویا گفتم: «احتمالاً. بهتره امتحان کنیم!»

رفتم سمت دستگاه تا خوش و بشی با آن بکنم. بچه‌هایی که دورتادور دستگاه بودند، انگار که فیلم پلیسی می‌دیدند، لحظه‌ای چشم از دستگاه برنمی‌داشتند و با نزدیک شدن من و رویا به دستگاه جدید، مشتاق‌تر از قبل به نظر می‌رسیدند. به هر حال برای آن‌ها هم آموزشی بود تا نحوهٔ کار با دستگاه را یاد بگیرند. کنار دکمهٔ لمسی اول نوشته بود: «سفارش معمای دستی». خدایش اسم مرا باید در کتاب اولین‌های جهان می‌نوشتند. البته بعدها فهمیدم که مدیر مدرسه هم ناظر این اتفاق بود و از پنجرهٔ اتاقش، نحوهٔ برخورد بچه‌ها با پروژه‌هایش را نظاره می‌کرد. دکمه را با انگشت اشاره فشار دادم. زیر دکمهٔ اول، چند دکمه بود که سطح معمای دستی را نشان می‌داد و لابد هرچه سطح معما بالاتر بود، جایزه‌اش هم فاخرتر بود!

اما من برای اینکه جلوی این همه تماشاچی سال پایینی ضایع نشوم، محتاطانه دکمهٔ ۲ را فشار دادم. دستگاه جدید، همانند رفیق قدیمی‌اش در طبقهٔ دوم، دندان‌قروچه‌ای کرد و از قسمت تحویل چند تکه مقوا را مانند شکل ۱ بیرون داد:


شکل ۱

مقواها سه نوع بودند: دو تا مربع بزرگ، دو مربع کوچک و پنج مستطیل که اندازهٔ یک ضلع مستطیل برابر اندازهٔ ضلع مربع زرد بود و اندازهٔ ضلع دیگرش برابر اندازهٔ ضلع مربع سبز.

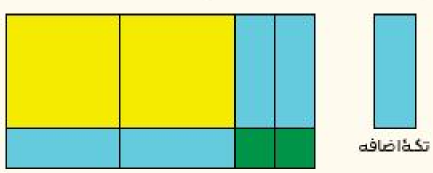
رویا پرسید: «خب. حالا چه‌کار باید بکنیم؟»

روی صفحهٔ نمایش دستگاه این نوشته ظاهر شد: «از کنار هم قرار دادن این ۹ تکه، یک مستطیل بزرگ بساز. باید از همهٔ آن‌ها استفاده کنی و مقواها را کنار هم بچینی.»

مقواها را برداشتیم و به‌گوشه‌ای از راهرو رفتیم تا در خلوت فکر کنیم. بچه‌های مشتاق تماشاگر که حالا ترسشان ریخته بود، یکی‌یکی می‌آمدند جلوی دستگاه جوان. جالب این بود که همه دکمهٔ سطح ۲ را می‌زدند و دستگاه هم به هر کدام چند تکه از این سه نوع مقوا را می‌داد و آن‌ها هم باید با کنار هم چیدن همهٔ آن مقواها، یک مستطیل می‌ساختند.

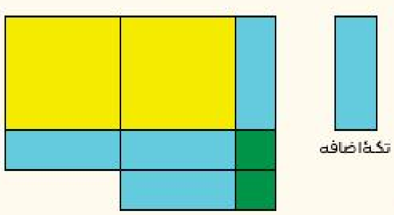
در عرض چند دقیقه راهرو پر شد از گروه‌های یک تا سه نفره که هر کدام گوشه‌ای بساط خود را پهن کرده بودند و داشتند به سفارش خود فکر می‌کردند. چهرهٔ ناظم مدرسه دیدنی بود، وقتی از کنار این معما به دستان می‌گذشت.

رویا بدجوری رفته بود تو نخ معمای دستی. حاصل تلاش اولش ناموفق بود و یک تکه اضافه آمد! (شکل ۲)



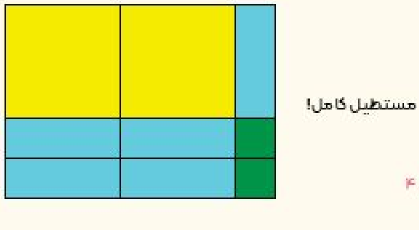
شکل ۲

اما رویا با جابه‌جاکردن دو مقوای سمت راست به شکل ۳ رسید.



شکل ۳

و بعد فاتحانه تکهٔ آخر جورچین را در جای خود قرار داد:



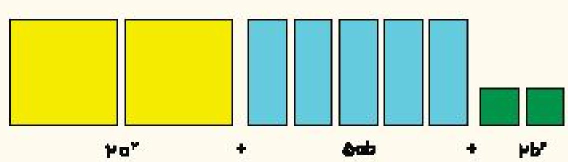
شکل ۴

گفتم: «دست مریزاد! بریم جایزه‌مون رو بگیریم.»
دستگاه جدید یک دریچهٔ بشقاب مانند داشت که باید مقواها را وسط آن می‌چیدیم و بعد دکمهٔ لمسی تحویل پاسخ را فشار می‌دادیم. همین کار را کردیم. دستگاه پاسخ ما را با نمایش یک صورتک لبخند پذیرفت و نوشت: «معمای دستی‌تان را تحویل بگیرید و خوراکی خود را انتخاب کنید. مقواها را برداشتم و به رویا گفتم: «جورچین برای من و خوراکی برای تو. بجنب لیموناد رو سفارش بده.»
رویا پیشنهادم را پذیرفت و جایزه‌اش را تحویل گرفت. به جز معمایی که ما حل کرده بودیم، ۹ گروه دیگر از بچه‌ها همین معما را سفارش داده بودند و دستگاه جدید انگار طوری طراحی شده بود که بتواند تعداد زیادی از این معماهای مقوایی تولید کند؛ بدون اینکه معماها شبیه هم باشند.
من کنجکاو بودم که ببینم ۹ معمای دیگر چگونه‌اند. روی یک تکه کاغذ معماها را با نوشتن تعداد هر نوع از مقواها یادداشت کردم. برای این‌کار ابتدا سه نوع مقوا را با نمادهای a^2، b^2 و ab اسم‌گذاری کردم: a^2 برای مربع‌های بزرگ، b^2 برای مربع‌های کوچک و ab برای مستطیل‌ها. در حقیقت، ضلع مربع بزرگ را a فرض کردم و ضلع مربع کوچک را b. ۹ معمای دیگر را به صورت زیر یادداشت کردم:

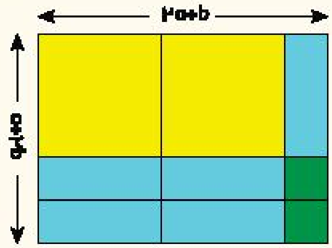
معما	a^2	ab	b^2
۱	۱	۳	۲
۲	۱	۴	۴
۳	۱	۵	۶
۴	۲	۸	۳
۵	۲	۱۰	۶
۶	۳	۴	۱
۷	۴	۸	۳
۸	۳	۱۱	۶
۹	۶	۵	۱

از رویا که حالا با خوردن لیموناد سرحال‌تر به نظر می‌رسید، پرسیدم: «به نظرت راهی هست که بتونه همهٔ این معماهای مقوایی رو حل کنه؟»
رویا گفت: «اینی که گفتی شد یک ابرمعما!»
بعد ادامه داد: «اما این سه جور مقوا را چرا با a^2، ab و b^2 اسم‌گذاری کردی؟»
گفتم: «این‌ها همان مساحت سه نوع مقوا را نشون می‌دن. a^2 مساحت مربع بزرگ‌تره، b^2 مساحت مربع کوچک‌تر و ab مساحت مقوای مستطیل‌شکل.»
رویا گفت: «درسته. تو ضلع دو مربع را به اندازهٔ a و b گرفتی.»
بعد ادامه داد: «باید از این مساحت‌ها استفاده کنیم. در معمایی که حل کردیم، جمع مساحت ۹ تکه مقوایی می‌شه:

$2a^2+5ab+2b^2$

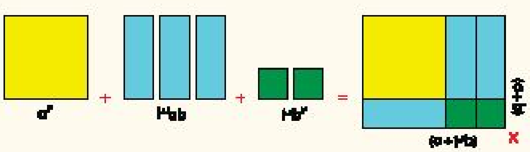


من گفتم: مساحت مستطیل نهایی هم برابره با:
$(a+2b)(2a+b)$



پس به رابطهٔ زیر می‌رسیم:
$2a^2+5ab+2b^2=(2a+b)\times(a+2b)$
رویا گفت: «چه جالب! الان اگر در سمت راست جمله‌ها را در هم ضرب کنیم، چهار تا جمله داریم:
$(2a+b)\times(a+2b)=2a^2+2b^2+ab+4ab$
که همون مقدار سمت چپ می‌شه.»
مثل اینکه به جای خوبی رسیده بودیم. به رویا گفتم: «بیا برای نمونه معمای اول را با این روش حل کنیم.» رویا نوشت:
$1a^2+3ab+2b^2=(\bigcirc a+\bigcirc b)\times(\bigcirc a+\bigcirc b)$
و گفت: «ضرب دو عدد خانه‌های زرد باید بشه ۱. پس هر دو برابر ۱ هستند.»
$1a^2+3ab+2b^2=(\bigcirc a+\bigcirc b)\times(\bigcirc a+\bigcirc b)$
۱ ۱
گفتم: «ضرب دو عدد خانه‌های قرمز هم باید بشه ۲. پس یکی رو ۱ می‌گیریم و دومی رو۲.
$1a^2+3ab+2b^2=(1a+1b)\times(1a+2b)$

پس $a+b$ و $a+2b$ می‌شه طول و عرض مستطیل نهایی.»



رویا به من نگاهی کرد و خواست چیزی بگوید، اما نگفت. گفتم: «رویا چی می‌خواستی بگی؟»
گفت: «هیچی. بعد از زنگ چهارم می‌بینمت.»
اما حدس زدم که رویا به چه چیزی فکر می‌کرد. لزومی نداشت ما راه‌حل اکتشافی خود را به بقیه بگوییم. لابد هدف از نصب دستگاه جدید این بود که فکر بچه‌ها به کار بیفتد. پس بهتر بود که این بار با سکوت کردن به بچه‌ها کمک می‌کردیم.
در همین افکار غرق بودم که یک دفعه یکی از گروه‌های معما به دست که دو نفر بودند، جیغ کشیدند! معلوم بود معما را حل کرده بودند. به سمت کلاس به راه افتادم. پشت سرم، جیغ و فریاد گروه‌ها یکی‌یکی بلند می‌شد؛ جیغ‌هایی که نشانهٔ پایان حل یک معمای دستی بودند.

برای دیدن داستان‌های قبل رمزینه را پویش کنید

مریم جعفرآبادی

کدام قورباغه را قورت بدهیم؟

فرض کنید برای یک سفر اکتشافی به اعماق جنگل رفته‌اید. گرسنه می‌شوید و یک قارچ وحشی می‌خورید، غافل از اینکه قارچ سمی است. شما باید در زودترین زمان ممکن پادزهر قارچ را به بدنتان برسانید. از شانس بد شما، این مادهٔ نجات‌بخش از بدن نوعی قورباغه در جنگل به دست می‌آید؛ آن هم فقط قورباغهٔ ماده. خبر بدتر اینکه تعداد قورباغه‌های نر و ماده مساوی و ظاهرشان کاملاً شبیه هم است. فقط قورباغهٔ نر صدای خاصی برای قورقور کردن دارد که اگر صدایش در بیاید، می‌توانید آن را از جنس ماده تشخیص دهید. باید زود دست به کار شوید تا سم از بین برود و جان سالم به در ببرید. شاید که امروز روز شانس شما باشد! حالتان خیلی بد شده است و سرتان دارد گیج می‌رود. در سمت راست شما قورباغه‌ای روی کندهٔ درخت نشسته که نمی‌دانید نر است یا ماده. به احتمال ۵۰ درصد نر و به همین احتمال ماده است. به محض اینکه می‌خواهید به آن سمت بروید و قورباغه را قورت بدهید، از سمت چپتان صدای یک قورباغهٔ نر را می‌شنوید. برمی‌گردید و سمت چپ را نگاه می‌کنید. می‌بینید دو قورباغهٔ کاملاً یک شکل کنار هم نشسته‌اند. فقط شما مطمئنید که یکی از آن‌ها نر است، چون صدای قورقور مخصوصش را شنیده‌اید.

به نظرتان باید به کدام سمت حرکت کنید؟ تک‌قورباغه‌ای که سمت راستتان بود شانس زنده ماندن شما را بیشتر می‌کند یا رفتن به سمت قورباغه‌های سمت چپ و خوردن آن‌ها؟

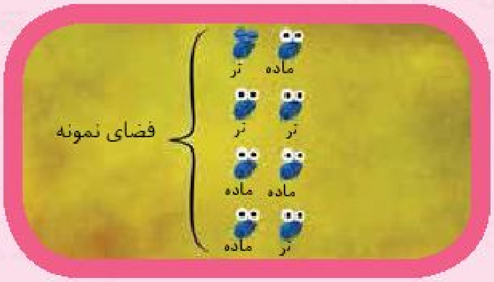
کمی فکر کنید...

شاید تعجب کنید، ولی اگر به سمت چپ بروید و آن دو قورباغه را انتخاب کنید، به احتمال بیشتری زنده می‌مانید.

گفتیم احتمال اینکه قورباغهٔ سمت راست ماده باشد و باعث نجات شما شود، ۵۰ درصد است. اما این عدد برای قورباغه‌های سمت چپ چند است و چه‌طور به دست می‌آید؟

در سمت چپ درست است که تعداد قورباغه‌ها بیشتر است، اما شما می‌دانید که حتماً یکی از آن‌ها نر است. همین یک اطلاعات اضافه، شانس درست انتخاب کردن را بالاتر می‌برد. به این موضوع می‌گوییم: **«احتمال شرطی»**؛ یعنی وقتی دانستن یک دادهٔ اضافه‌تر، شانس وقوع یک اتفاق را نسبت به وقتی که آن داده را نداشتیم، تغییر دهد. احتمال اینکه شما قورباغهٔ درستی را بخورید، این بار به جای ۵۰ درصد، دو سوم یا حدود ۶۷ درصد می‌شود. اما چطور؟

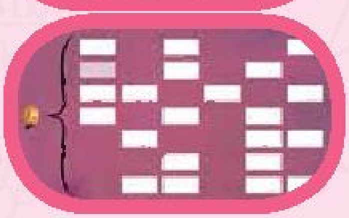
برای پاسخ به این سؤال بیایید همهٔ حالت‌های نر و ماده بودن این قورباغه‌ها را که به آن «فضای نمونه» می‌گوییم، بررسی کنیم:



همان‌طور که در چهار حالت تصویر می‌بینید، یک حالت وجود دارد که هر دو قورباغه نر باشند که برای شما فاجعه است! یک حالت هم وجود دارد که شما شک ندارید نمی‌تواند درست باشد و آن حالتی است که هر دو قورباغه ماده باشند؛ چرا که شما صدای قورباغهٔ نر را از یکی از این دو قورباغه شنیده‌اید. پس سه حالت ممکن باقی می‌ماند که از این سه حالت، در دو حالت یکی از قورباغه‌ها ماده است.

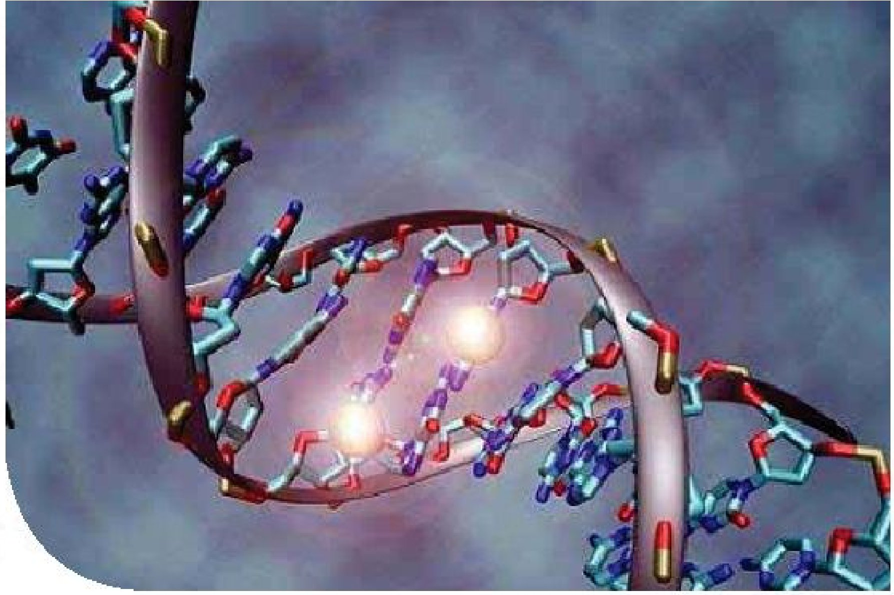
$$(A|B)=\frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)}$$

در احتمال شرطی ما با یک فضای نمونه‌ای بزرگ شروع می‌کنیم که تمام حالت‌های ممکن را در بر دارد. هر اطلاع جدیدی که به ما داده می‌شود، کمک می‌کند بعضی احتمالات و رخ دادن بعضی حالت‌ها را حذف کنیم و به این ترتیب فضای نمونه‌ای ما کمی آب می‌رود و کوچک می‌شود. در نتیجه احتمال رخ‌دادن پیشامدهای باقی‌مانده بیشتر می‌شود. نکتهٔ مهم اینجاست که هر اطلاعاتی روی احتمال وقوع پیشامدها تأثیر می‌گذارد.



احتمال شرطی فقط در مسئله‌های انتزاعی ریاضی کاربرد ندارد، بلکه در بسیاری از تصمیم‌گیری‌ها و مسئله‌های روزمره و همین‌طور در محاسبه‌های رایانه‌ای کاربردی و کلیدی است.

ما از اطلاعات به دست آمده از تجربه‌های گذشته و محیط اطرافمان استفاده و انتخاب‌های خود را به بهترین گزینه‌ها محدود می‌کنیم تا شاید دفعهٔ بعد، به جای فکر کردن به اینکه کدام قورباغه را بخوریم که نمیریم، اصلاً از اول آن قارچ سمی را نخوریم!



ریاضی ژن‌شناسی

ژما جواهری‌پور

آیا با علم «ژن‌شناسی» (ژنتیک) آشنایی دارید و پاسخ چنین سؤال‌هایی را می‌دانید؟

● چگونه است که ما شبیه والدین خود هستیم؟

● چه چیزی سیب و پیاز را متفاوت می‌کند؟

● چرا برخی از خواهر و برادرها از نظر ظاهری یا رفتاری شبیه هم هستند و برخی دیگر متفاوت؟

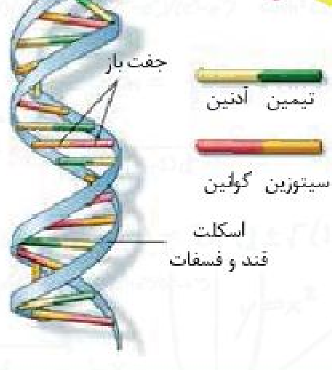
● چگونه ژن‌های ما ویژگی‌های رفتاری و فیزیکی ما را تعیین می‌کنند؟

● آیا ژن‌های ما می‌توانند سلامت ما یا احتمال ابتلا به بیماری را نیز پیش‌بینی کنند؟

«دی‌ان‌ای» کلید پاسخ‌گویی به این سؤال‌هاست. دی‌ان‌ای یا «اسید دئوکسی ریبونوکلئیک» مولکولی طولانی حاوی کد ژن‌شناسی منحصر به فرد ماست. مانند یک کتاب دستورالعمل. دستورالعمل‌های ساخت تمام پروتئین‌های بدن ما را در خود جای داده است. دی‌ان‌ای شامل چهار «بلوک ساختمانی» یا «پایه» است: آدنین (A)، سیتوزین (C)، گوانین (G) و تیمین (T). ترتیب یا توالی این پایه‌ها دستورالعمل‌های موجود در ژنگان (ژنوم) را تشکیل می‌دهند.

«دی‌ان‌ای» یک مولکول دو رشته‌ای است (شکل ۱). وقتی رشته‌های دی‌ان‌ای شکل گرفتند و ساخته شدند، به دور پروتئین‌هایی به نام «هیستون» پیچ می‌خورند و با تشکیل ساختار کروماتین، ساختمانی پیچ‌خورده تشکیل می‌دهند که «نوکلئوزوم» نامیده می‌شود. با پیچش بعدی که به «پیچش مضاعف» معروف است، فام‌تن (کروموزوم) تشکیل می‌شود. فام‌تن‌های تشکیل‌شده، هر کدام دارای یک مولکول دی‌ان‌ای فشرده هستند که حدود دو متر طول دارد و چون باید در یک سلول ۱۰ تا ۲۰ میکرونی جا شود، این پیچ‌خوردگی‌ها در آن اتفاق می‌افتند. حتی ممکن است در برخی جانداران، مانند باکتری‌ها، به شکل حلقه درآید. در انسان ۴۶ عدد (۲۳ جفت) فام‌تن وجود دارد که ۸۰۰۰ ژن در فام‌تن شمارهٔ یک آن (بزرگ‌ترین فام‌تن) و ۳۰۰۰ ژن در فام‌تن شمارهٔ ۸ آن (کوچک‌ترین فام‌تن) قرار دارند. مانند کنار هم قرارگرفتن حرف‌ها که کلمه‌ها و جمله‌ها را می‌سازند، از کنار هم قرارگرفتن این ترکیب‌های شیمیایی، کدهای ژن‌شناسی به وجود می‌آیند. در ۹۹ درصد انسان‌ها، نحوهٔ قرارگرفتن این ترکیب‌ها کنار هم، مثل هم است و تفاوت در ۱ درصد باقی‌مانده است که صفت‌های ژن‌شناسی متفاوتی را در افراد ایجاد می‌کند.

شکل ۱



علم ژن‌شناسی که امروزه پیشرفت‌های زیادی هم داشته است، به سؤال‌هایی پاسخ می‌دهد که در ابتدای مقاله مطرح شدند. جالب است بدانید، دانش ریاضی به ژن‌شناسی کمک‌های قابل توجهی کرده است و بسیاری از کشف‌ها و پردازش‌های اطلاعات در علم ژن‌شناسی با مدل‌های ریاضی انجام شده‌اند.

مدل‌های ریاضی ابزار مفیدی برای بررسی سؤال‌هایی دربارهٔ «سوخت‌وساز» (متابولیسم)، ژن‌شناسی و تعامل‌های ژن محیط هستند. یک مدل ریاضی که ساختار زیستی موجود زنده را طراحی می‌کند، بستری برای آزمایش‌های زیست‌شناسانه است که می‌تواند، زنجیرهٔ علت رویدادهایی را که تنوع در یک کمیت را به تنوع در دیگری مرتبط کند، و یا علت به‌وراثت‌رسیدن یک ویژگی از نسلی به نسل دیگر را آشکار سازد. باید توجه کنید که انجام آزمایش روی جانداران گوناگون، اعم از انسان‌ها یا حیوان‌ها، ممکن است آسیب‌های جبران‌ناپذیری در بر داشته باشد. مدل‌های ریاضی از آسیب‌های این آزمایش‌ها می‌کاهند.

چگونگی ساخت چنین مدل‌های ریاضی، نحوهٔ استفاده از آن‌ها برای بررسی سازوکارهای ژنگان، تعامل‌های ژن محیط، نقشه‌برداری از ژن‌ها و اینکه چگونه می‌توان از این اطلاعات در پزشکی استفاده کرد، بحث هایی هستند که دانش ریاضی و علم ژن‌شناسی را به‌هم پیوند می‌دهند. ریاضیات امکان مدیریت و تحلیل تعداد زیادی از داده‌های ژنگان‌های انسان را فراهم می‌کند. تحلیل آماری و مدل‌سازی در طرح اولیهٔ دی‌ان‌ای و اطلاعات ژن‌شناسی هر کدام از ما می‌تواند ساختار بدن و همین‌طور رفتار ما را تعیین کند. پژوهشگران پیش‌بینی کرده‌اند که این آمیختگی ریاضیات و زیست‌شناسی می‌تواند در پیشرفت پزشکی مؤثر باشد و باعث تشخیص، معالجه و پیشگیری از انواع بیماری‌ها شود.

درمانگاه ریاضی

افشین خاصّه‌خان

سلام و وقت بخیر به دوستداران درمانگاه ریاضی. امیدوارم در سال تحصیلی ۱۴۰۲ ۱۴۰۱ با انگیزه و توان مضاعف به یادگیری ریاضیات بها بدهید و از کار با ریاضیات لذت ببرید. میزان سواد ریاضیات در هر جامعه‌ای می‌تواند نشان‌دهندهٔ میزان رشد و تکامل آن جامعه باشد. مراجعه‌کنندهٔ این هفته دانش‌آموزی نهمی به نام **ایلیا پیامی** است. پدر ایلیا که با هم نسبت فامیلی داریم، مهندس راه و ساختمان و مادرش خانه‌دار است. ایلیا با مادرش به درمانگاه آمده است. بعد از سلام و احوال‌پرسی با آن‌ها، ایلیا را به اتاق درمان دعوت می‌کنم. بعد از چند دقیقه «گفت‌وگوی سقراطی» معمول در ارتباط با سؤال‌هایی با موضوع «ریشه‌گیری» که ایلیا با خود به درمانگاه آورده بود، مشکل موجود در تفکر ریاضی او را حدس زدم.

تشخیص

از بین مسئله‌هایی که ایلیا مطرح کرده بود، مسئله‌ای توجهم را جلب کرد که در اینجا با شما در میان می‌گذارم:

ساده شدهٔ $A = \dfrac{\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$
۲) $\sqrt{10}$
۳) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
۴) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

او برای حل این مسئله هیچ ایده‌ای نداشت و تقریباً کاری برایش انجام نداده بود. وقتی علت را از ایلیا پرسیدم گفت: «ما در ریشه‌گیری هیچ قانونی برای جمع دو رادیکال غیرمتشابه نداریم.» حرف او منطقی بود. مشکل این بود که ایلیا می‌خواست صورت کسر را مستقیماً با استفاده از قوانین ریشه‌گیری محاسبه کند که ممکن نبود. تصور حل با روش‌های خلاقانه هم برایش سخت بود و به راهنمایی‌های جزئی نیاز داشت.

درمان

برای اینکه مشکل ایلیا را به او یادآوری کنم، گفت‌وگوی دوطرفه را دوباره آغاز کردم. پس از سؤال و جواب‌های متوالی، او متوجه شد که برای حل

این مسئله روش مستقیم بی‌نتیجه است و دلیلی که برای آن داشت قانع‌کننده بود. حال وقت آن بود که به روش‌های خلاقانه اشاره کنم.

به ایلیا گفتم: «یک روش این است که می‌توانی به جای خود A، توان دوم آن را محاسبه کنی و سپس از حاصل جذر بگیری.»

ایلیا پرسید: «چرا A^2؟»

گفتم: «اگر به صورت کسر دقت کنی متوجه می‌شوی مربع صورت کسر را به‌راحتی می‌توان ساده کرد. می‌دانی چرا؟»

با مکث طولانی گفت: «درست است. رادیکال‌های اول با به‌توان‌رساندن حذف می‌شوند. گفتم حاصل‌ضرب آن‌ها هم با یک اتحاد معروف می‌تواند ساده شود» که گفت «اتحاد مزدوج». از ایلیا خواستم که محاسبات را بنویسد:

$$A^2=\left(\frac{\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}}\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{10}+3+\sqrt{10}-3+2\sqrt{(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)}}{\sqrt{10}+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{10}+2}{\sqrt{10}+1}=\frac{2(\sqrt{10}+1)}{\sqrt{10}+1}=2$$

گفتم: «حال نوبت ریشه‌گیری است: $A^2=2\rightarrow A=\sqrt{2}$»

ایلیا که خیلی ذوق زده بود گفت: «چقدر راحت محاسبه شد! چطور به ذهن شما رسید؟»

گفتم: «ایلیاجان از روی تجربه بود. من قبلاً مسئلهٔ مشابهی حل کرده بودم. هر قدر بیشتر مسئله حل کنی، تجربه و سرعت شناخت راهبردهای حل مسئله در تو افزایش می‌یابند.»

ادامه دادم: «ایلیا حال که این راهبرد سریع‌تر به نتیجه رسید، اگر موافق باشی روش دیگری را هم که در حین نوشتنت به ذهنم رسید، امتحان کنیم.»

مشتاقانه پذیرفت. پرسیدم: «در پایهٔ پنجم ابتدایی تقسیم را چگونه برای شما تعریف کرده‌اند؟» گفت ضرب‌در معکوس. تأیید کردم و با راهنمایی از او خواستم که این تعریف را در مسئلهٔ خودش اجرا کند:

$$A=\frac{\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}}$$

$$=(\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-3})\div\sqrt{\sqrt{10}+1}$$

$$=(\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-3})\times\frac{1}{\sqrt{\sqrt{10}+1}}$$

گفتم: «ایلیا در این مرحله می‌توانی از قوانین ریشه‌گیری استفاده کنی و با گویاکردن ساده کنی.» او نوشت:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{10}+3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}}+\frac{\sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}}=\sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}+1}}+\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{10}+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-1)}{(\sqrt{10}+1)(\sqrt{10}-1)}}+\sqrt{\frac{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}-1)}{(\sqrt{10}+1)(\sqrt{10}-1)}}$$

$$=\sqrt{\frac{7+2\sqrt{10}}{10-1}}+\sqrt{\frac{13-4\sqrt{10}}{10-1}}$$

در این مرحله ایلیا مکثی طولانی کرد و مشخص شد که به راهنمایی نیاز دارد. به او یادآوری کردم که هرگاه در محاسبه‌های عددی، «رادیکال مرکب» یا به عبارت ساده‌تر «رادیکال داخل رادیکال» وجود داشت، بهتر است انتخاب اول ساده‌کردن با اتحاد مربع باشد؛ البته در صورت امکان. ایلیا متوجه منظورم نشد و هنوز فکر می‌کرد. گفتم: «دو عدد رادیکالی پیدا کن که مجموع مربعات آن‌ها ۷ و حاصل‌ضرب آن‌ها $\sqrt{10}$ شود؟»

با تأخیر گفت: « $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ » گفتم: «رادیکال دوم را هم به همین صورت با ضریب ۲ می‌توانی ساده کنی.» و نوشتم:

$$\sqrt{\frac{7+2\sqrt{10}}{10-1}}+\sqrt{\frac{13-4\sqrt{10}}{10-1}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}}{3}+\frac{\sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}=\frac{3\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$$

ایلیا گفت: «این راه حل خیلی سخت بود.»

گفتم: «درست است، اما حل یک مسئله با روش‌های متفاوت برای درک آن بسیار مفید است و میزان خلاقیت و قدرت ایده‌پردازی تو را تقویت می‌کند.»

تجویز

بعد از تشخیص بیماری تفکر ریاضیِ ایلیا، حال نوبت تجویز دستورالعمل‌های درمانیِ لازم بود:

۱. به او توصیه کردم که مباحث توان و ریشه‌گیری را از کتاب‌های درسی هفتم، هشتم و نهم به دقت بخواند و تمریناتش را حل کند.

۲. بعضی از رابطه‌های مهم را که در حل مسئله‌های ریشه و توان کاربرد فراوانی دارند، از کتاب‌های خود یاد بگیرد و تا حد امکان بکوشد خودش آن‌ها را اثبات کند. اگر نشد، حداقل روند اثبات آن‌ها را تحلیل و تعقیب کند.

۳. تمرین‌های مشابهی را که حل آن‌ها ترکیب روابط ریشه‌گیری و توان را می‌طلبد، خودش پیدا کند. در ضمن سفارش کردم که برای حلشان آزمون و خطا انجام دهد و تا حد امکان پاسخ مسئله را نگاه‌نکند.

۴. برای مسئله‌هایی که نتوانسته بود حل کند، در طول هفته دوباره چالشی انجام دهد. حل یک مسئله بعد از چندین‌بار تلاش بسیار لذت‌بخش خواهد بود.

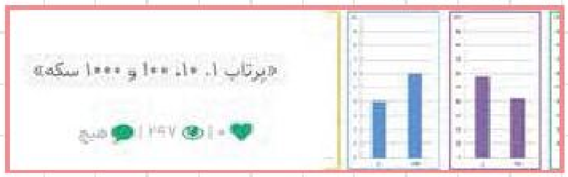
۵. اگر امکان داشته باشد، مسئله‌ها را مثل همین مسئله، با روش‌های متفاوت و ترکیب روابط مختلف حل کند و از این کار لذت ببرد.

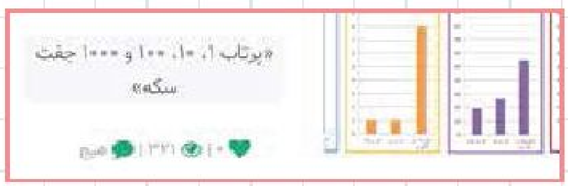
۶. اگر علاقه‌مند باشد چند مسئله در همین زمینه طراحی کند و با دوستانش به حل و بحث بگذارد تا نقاط قوت و ضعف مسئله‌اش آشکار شوند.

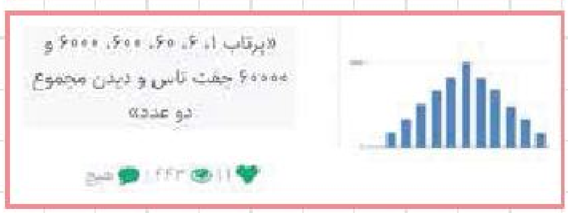
پرتاب سکه و تاس

محدثه کشاورز

در این شماره می‌خواهیم به یکی از فعالیت‌های وبگاه «ریاضی فکر کن!» نگاهی بیندازیم که با نرم‌افزار «اکسل» طراحی شده است. در قسمت جست‌وجوی سریع وبگاه کلمهٔ «اکسل» را جست‌وجو کنید تا این چهار فعالیت را ببینید.







همان‌طور که در نام پرونده‌ها (فایل‌ها) می‌بینید، دو تا از آن‌ها مربوط به پرتاب سکه و دو تا مربوط به پرتاب تاس هستند. اما پرتاب سکه یعنی چه؟

من برای نمونه وارد صفحهٔ این فعالیت می‌شوم و روی پیوند (لینک) «پرتاب ۱، ۱۰، ۱۰۰ و ۱۰۰۰ جفت سکه» تلیک (کلیک) می‌کنم تا صفحهٔ اکسل آن باز شود.

اما اصلاً این پرونده چه کمکی به ما می‌کند؟

در درس آمار و احتمال در پایه‌های هفتم تا نهم دربارهٔ پرتاب سکه یا تاس زیاد صحبت می‌شود. مثلاً به این مسئله که در پایهٔ هشتم مطرح شده است توجه کنید:

«دو سکه را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه هر دو رو بیایند بیشتر است یا احتمال اینکه یکی رو و یکی پشت بیاید؟»

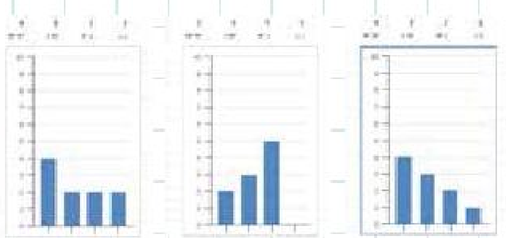
	رو آمدن سکهٔ دوم	پشت آمدن سکهٔ دوم
رو آمدن سکهٔ اول	رو - رو	رو - پشت
پشت آمدن سکهٔ اول	پشت - رو	پشت - پشت

بر اساس جدول بالا می‌دانیم که احتمال هر کدام از این چهار پیشامد با هم برابر و مساوی یک‌چهارم است. بنابراین احتمال اینکه هر دو سکه رو بیایند برابر یک‌چهارم و احتمال اینکه یکی رو و دیگری پشت بیاید برابر یک‌دوم است. پس احتمال دومی بیشتر است.

اما احتمال یک‌چهارم به چه معنی است؟ آیا به این معنی است که هر تعداد بار که جفت‌سکه‌ها را پرتاب کنیم، این پیشامدها هر کدام دقیقاً یک‌چهارم اتفاق می‌افتند؟

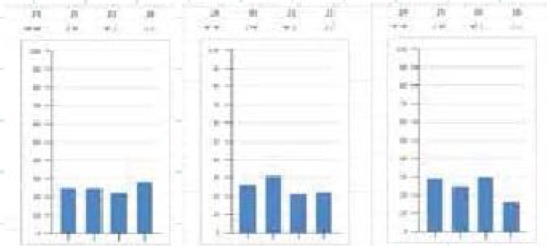
می‌توانیم این اتفاق را بررسی کنیم. مثلاً می‌توانیم ده بار یک جفت سکه را پرتاب و نتیجه را بررسی کنیم. کار دیگری که می‌توانیم بکنیم این است که از این پرونده کمک بگیریم. در این پرونده پرتاب یک جفت سکهٔ سالم شبیه‌سازی شده است. انگار که یک جفت سکه را ۱۰ بار پرتاب و نتایج را ثبت کنیم و از این نتایج یک نمودار بکشیم. اگر این پرونده را «refresh» کنید، این آزمایش دوباره تکرار می‌شود. پرتاب ۱۰ جفت سکه دوباره اتفاق می‌افتد و نمودار هم برای حالت جدید رسم می‌شود.

در این تصویرها نمودار چند بار آزمایش به کمک این پرونده را می‌بینیم.

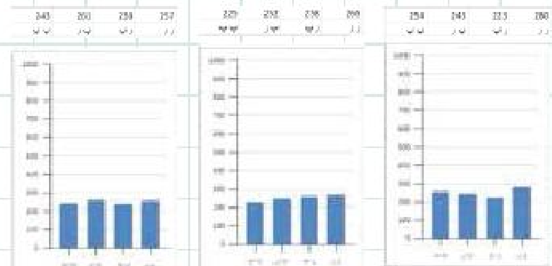


خب به نظر می‌رسد که در این آزمایش‌ها چنین اتفاقی نیفتاده است. حتی قبل از این آزمایش‌ها هم، می‌دانستیم امکان ندارد که هر کدام از این پیشامدها ۲/۵ بار رخ دهند!

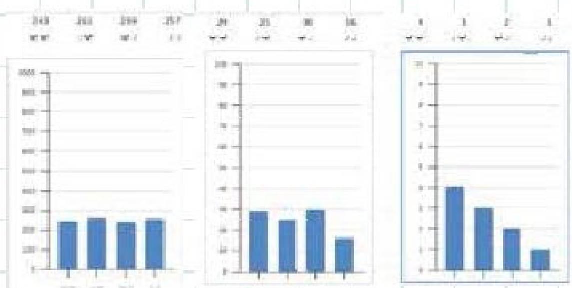
بیایید تعداد آزمایش‌ها را بیشتر کنیم و این بار به کمک صفحهٔ سوم این فایل صد بار جفت‌سکه‌ها را پرتاب کنیم.
این تصویرها مربوط به ۱۰۰ بار آزمایش هستند:



اما باز هم نمی‌بینیم که تعداد همهٔ ستون‌ها ۲۵ تا باشد. در یکی دو مورد این اتفاق افتاده است، اما در بقیهٔ موارد عددها مساوی ۲۵ نیستند. می‌توانیم تعداد آزمایش‌ها را باز هم بیشتر کنیم و برویم سراغ پرتاب ۱۰۰۰ جفت سکه:

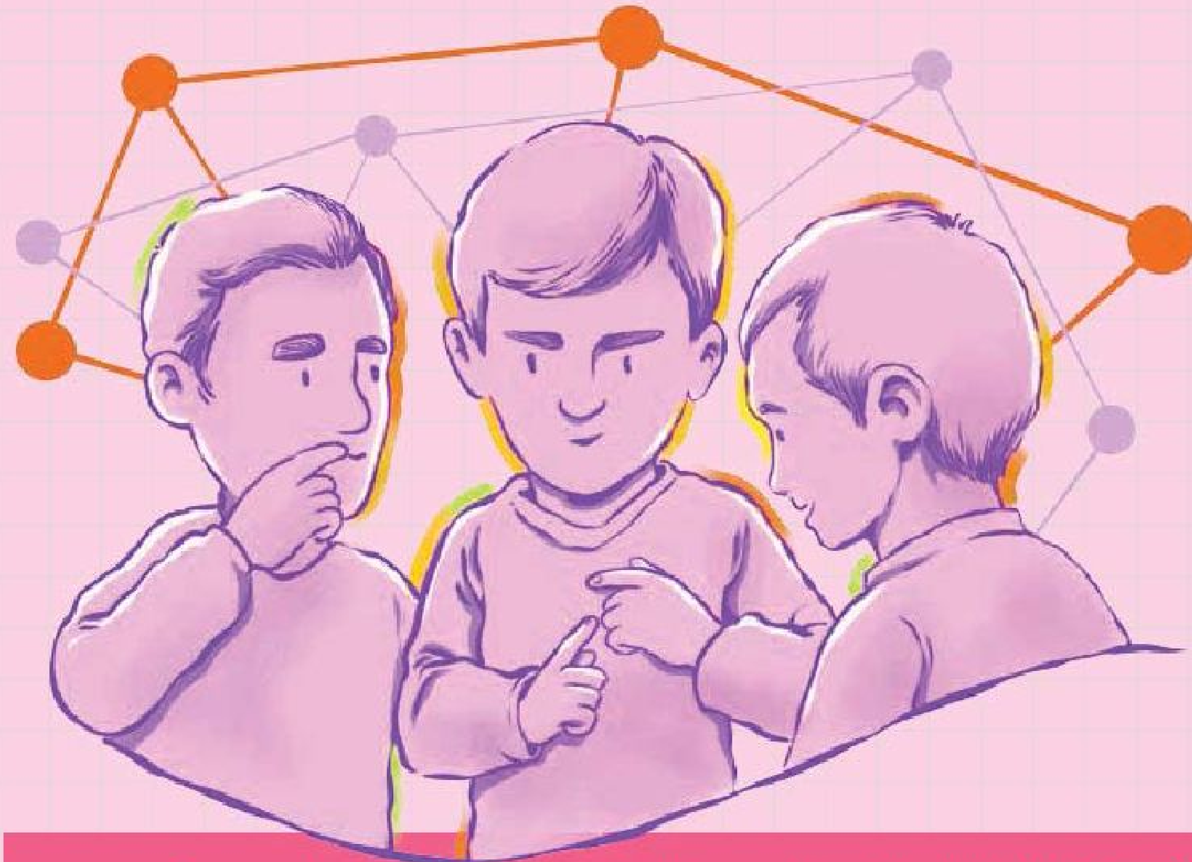


باز هم به عددهایی که می‌خواستیم نرسیدیم. یعنی به هر ستون دقیقاً ۲۵۰ تا نرسیدیم. اما اگر دقیق‌تر به این نمودارها نگاه کنیم خواهیم دید که در اثر زیادکردن تعداد پرتاب‌ها تغییری اتفاق افتاده است. به نظر می‌رسد هر چه تعداد پرتاب‌ها بیشتر شده، ارتفاع ستون‌ها نسبتاً به هم نزدیک‌تر شده است و تفاوت‌های خیلی زیاد را کمتر در ارتفاع ستون‌ها می‌بینیم. در واقع می‌توانیم بگوییم با اینکه هنوز اندازهٔ ستون‌ها دقیقاً مساوی هم نیست، اما نسبتاً به هم نزدیک‌تر شده است.
بیایید این ادعا را دقیق‌تر بررسی کنیم. در این سه نمودار می‌خواهیم ستون‌های سمت راست و چپ (پیشامد رو رو و پیشامد پشت پشت) را با هم مقایسه کنیم.



تعداد کل پرتاب‌ها	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰
تعداد پیشامد رو رو	۱	۱۶	۲۵
تعداد پیشامد پشت پشت	۴	۲۹	۲۴۳
اختلاف تعداد این دو پیشامد	۳	۱۳	۲۴۳
نسبت اختلاف دو پیشامد به تعداد کل پرتاب‌ها	۰/۳	۰/۱۳	۰/۰۱۴

همان‌طور که از جدول بالا پیداست، با اینکه در ۱۰۰۰ آزمایش اختلاف در تعداد بیشتر شده، اما نسبت این اختلاف‌ها به طور معنی‌داری کمتر شده است. در نهایت می‌توانیم این طور جمع‌بندی کنیم:
اینکه احتمال هر کدام از این پیشامدها یک‌چهارم است، به این معنی نیست که در آزمایش‌ها قرار است هر کدام از این پیشامدها دقیقاً به تعداد یک‌چهارم کل پرتاب‌ها اتفاق بیفتند. بلکه به این معنی است که انتظار داریم اگر تعداد پرتاب‌ها به قدر کافی زیاد شود، هر پیشامد تقریباً به اندازهٔ یک‌چهارم کل آزمایش‌ها اتفاق بیفتد.
این جمع‌بندی دربارهٔ احتمال به ما کمک می‌کند با استفاده از عدد احتمالی که محاسبه کرده‌ایم، دربارهٔ آنچه اتفاق خواهد افتاد، پیش‌بینی کنیم.
در این نوشته، یکی از پرونده‌هایی را که در ابتدای نوشته معرفی شدند، دقیق‌تر بررسی کردیم. شما می‌توانید به پرونده‌های دیگر مراجعه کنید، احتمال هر کدام از اتفاق‌ها را محاسبه و پیش‌بینی کنید که انتظارتان این است که در تعداد زیاد آزمایش‌ها چه اتفاقی بیفتد. سپس به صفحه‌ای که نتیجهٔ تعداد زیادی آزمایش را نمایش می‌دهد، بروید و ببینید چقدر به پیش‌بینی شما نزدیک است.



گفت‌وگو با کیاشا صالحی دارابی، مخاطب امروز رشد ریاضی برهان

یادگیری با فعالیت گروهی

مهدیه مسیبی

تلاش کرده است هر کاری را از همان ابتدا و پایه، به‌صورت اصولی یاد بگیرد. به همین دلیل هیچ‌وقت این احساس را نداشته و ندارد که مثلاً درس ریاضی سخت، علوم پیچیده یا ادبیات قابل‌فهم نیست. پله‌پله یاد گرفته و هر کجا با ابهام روبه‌رو بوده، از معلم خودش یا کسی که در آن زمینه بیشتر می‌دانسته، راهنمایی خواسته است تا فهم آن موضوع برایش کامل شود. مجلهٔ رشد «ریاضی برهان» را دوست دارد و بیش از هر مطلبی در این نشریه، دنبال کسب تجربهٔ افراد از طریق گفت‌وگو با آن‌هاست.

کیاشا صالحی دارابی دانش‌آموز پایهٔ هفتم «مدرسهٔ هدایت» منطقهٔ ۶ شهر شیراز است. پدرش کارمند «سازمان تأمین اجتماعی» و مادرش خانه‌دار است. گفت‌وگو با این مخاطب امروز مجلهٔ رشد ریاضی برهان را با هم می‌خوانیم.

***

● از دوران ابتدایی تا امروز که دانش‌آموز پایهٔ هفتم هستی، درس ریاضی را چطور دیدی؟ سخت، جذاب، شیرین، لذت‌بخش یا ...؟

○ از پایهٔ اول ابتدایی دیدگاه من نسبت به درس ریاضی این بوده است که ریاضی در هر مرحله از زندگی کاربرد مخصوص آن مرحله را دارد و من درس ریاضی را بسیار جذاب می‌بینم.

● به نظرت ریاضی تا همین اندازه که آن را یاد گرفته‌ای، در زندگی کاربردی هم داشته است؟ اگر بله، لطفاً مثال بزن.

○ از همان وقتی که ریاضی را یاد گرفتم، در زندگی من پرکاربردترین مبحث، مبحث ریاضی بوده است. مثلاً وقتی به خرید می‌رفتم، قیمت کالاهایی را که انتخاب می‌کردم، جمع می‌زدم و حاصل آن را به فروشنده می‌گفتم.

● برای اینکه ریاضی و مباحث مربوط به آن را بهتر یاد بگیری، چه‌کار می‌کنی؟ مثلاً تمرین‌های بیشتر و مشابه حل می‌کنی؟ مجله یا کتاب‌های ریاضی می‌خوانی یا کار دیگری انجام می‌دهی؟

○ برای اینکه ریاضی را بهتر یاد بگیرم، به غیر

از کتاب خود مدرسه، از کتاب‌های دیگر هم استفاده می‌کردم. مبحث‌هایی که من بیشتر از همه تمرین می‌کردم، ضرب و تقسیم بود.

• گاهی هنگام یادگیری یک موضوع یا نکته در درس ریاضی با مشکل روبه‌رو می‌شویم و درست آن مطلب را متوجه نمی‌شویم. در این هنگام چه‌کار می‌کنی؟ از چه کسی کمک و راهنمایی می‌گیری؟

○ اگر مبحثی از ریاضی را درست یاد نگیرم، از معلم خود می‌خواهم که آن مبحث را دوباره برایم توضیح بدهد.

• یادگرفتن یک مطلب به‌صورت گروهی و مشورت با دیگر دوستان و هم‌کلاسی‌ها چقدر در یادگیری و فهم بهتر آن موضوع اثر دارد؟ در این زمینه برای ما مثال هم بزن.

○ اگر بخواهم مبحثی از ریاضی را به‌صورت گروهی با هم‌کلاسی‌هایم یاد بگیرم، اول بین هم‌کلاسی‌ها بهترین‌ها را انتخاب می‌کنم و بعد با آن‌ها گروه تشکیل می‌دهم تا یکی از مباحث ریاضی را با هم آن‌قدر تمرین کنیم که به‌طور کامل آن را درک کنیم و یاد بگیریم.

• آیا نکته‌ها و مبحث‌های درس ریاضی را تا به حال به دیگر دوستان و هم‌کلاسی‌هایت هم آموزش داده‌ای؟ انجام این کار چقدر به خودت در فهم بهتر ریاضی کمک می‌کند؟

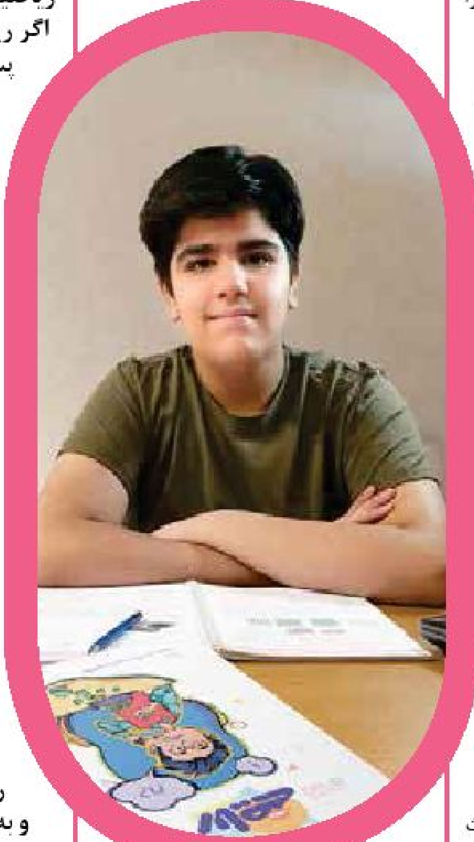
○ بله، من یکی از مباحث ریاضی را به یکی از دوستانم که نمی‌توانست آن مبحث را خوب یاد بگیرد یاد دادم. هنگام یاددادن آن مبحث مشکلات خود را در آن سنجیدم و اشکال خود را به کمک معلم و تمرین روی آن حل کردم.

• برای یادگیری بهتر یک موضوع در ریاضی یا هر درس دیگری، گاهی باید مطالعات بیشتری داشته باشیم. مثلاً کتاب‌های بیشتر یا مجله‌هایی مثل «رشد ریاضی برهان» را بخوانیم. آیا چنین مطالعاتی هم داری؟

○ من خودم برای یادگیری بیشتر ریاضی از کتاب‌های کمک‌درسی استفاده می‌کنم.

• چه نکته‌ها و قسمت‌هایی از مجلهٔ رشد ریاضی برهان را بیشتر دوست داری و مطالعه می‌کنی؟

○ من بیشتر قسمتی را مطالعه می‌کنم که مصاحبه‌های دانش‌آموزان دیگر چاپ شده و از تجربهٔ آن‌ها استفاده می‌کنم.



• یادگیری مبحث‌های ریاضی از طریق مجله چه فرقی با کتاب درسی دارد؟

○ به نظر من از طریق کتاب ما می‌توانیم مباحث بیشتری را تمرین و مطالعه کنیم، ولی مجله همهٔ مباحث را ندارد. اما در عوض، بیشتر تجربهٔ دیگران را می‌توانیم در مجله مطالعه و از آن‌ها استفاده کنیم.

• چقدر برای فهم بهتر ریاضی از وبگاه‌های (سایت‌های) ریاضی در فضای مجازی استفاده می‌کنی و دنبال پاسخ سؤال‌های خودت در اینترنت هستی؟

○ من برای پاسخ سؤال‌های ریاضی‌ام از بعضی وبگاه‌ها نظیر رشد و غیره استفاده می‌کنم و اگر سؤالی را نفهمم، از آموزش‌های آن وبگاه بهره می‌گیرم.

• چرا برخی دانش‌آموزان تصور می‌کنند ریاضیات درسی سخت و دشوار است؟ اگر ریاضی تا این حد سخت نیست، پس این تصور از کجا در ذهن آن‌ها ایجاد شده است؟ باید چه‌کار کنیم تا ریاضی این قدر سخت جلوه نکند؟

○ اگر برخی از دانش‌آموزان درس ریاضی را سخت و دشوار می‌بینند، احتمالاً یا معلم آن‌ها ریاضی را خیلی سخت درس می‌دهد، یا کسی سخت‌بودن ریاضی را قبل از یادگرفتن به آن شخص تلقین کرده است. در حالی که ریاضی را اگر پله‌پله یاد بگیریم اصلاً مشکل نیست.

• دلیل علاقهٔ خودت به ریاضی چیست؟

○ دلیل علاقهٔ من به ریاضی شیرین و جذاب‌بودن این درس است. وقتی من مسئله‌های ریاضی را حل می‌کنم، به احساس خوبی می‌رسم.

• دوست داری در آینده چه رشته‌ای را در دانشگاه دنبال کنی و به چه شغل و حرفه‌ای علاقه داری؟

○ دوست دارم رشتهٔ برنامه‌نویسی را در دانشگاه دنبال کنم و در زمینهٔ توسعه‌دهنده‌بودن برنامه‌های این حوزه نقش مفید و مؤثری داشته باشم. دلم می‌خواهد برنامه‌های رایانه‌ای طراحی کنم و آن‌ها را به شرکت‌های متقاضی این کار بفروشم.

• رسیدن به آرزوهای خوبی که داری دیر نیست. ما هم بهترین‌ها را برای تو و همهٔ دانش‌آموزان عزیز از صاحب لوح و قلم خواستاریم.

برنامهٔ کاربردی مای چارت

فاطمه درویشی

MYCHART

نمودارها تصویرهایی هستند که می‌توانند اطلاعات موجود را به‌سرعت در معرض دید قرار دهند. با دیدن نمودار در یک نگاه می‌توان به بسیاری از ویژگی‌های مجموعه‌ای از اطلاعــات پی برد. نمودار یا منحنی اطلاعات عددی و آماری را به‌صورت منظم نشــان می‌دهد و ارتباط دو یا چند عامل را ترسیم می‌کند. به همین دلیل سعی داریم در این مقاله، ضمن مرور نمودارهای پرکاربرد، یک برنامهٔ ساده و زیبای ایرانی را به شما معرفی کنیم تا در شرایط لازم بتوانید از آن برای رسم نمودارهای خود استفاده کنید. نام این برنامه «مای چارت» (به معنی نمودار من) است و شما می‌توانید از طریق جست‌وجو در «برنامهٔ بازار» آن را نصب کنید.

پس از نصب، شمایل ورود به برنامهٔ مای چارت که به شــکل C است، روی صفحهٔ تلفن همراه شما تشکیل خواهد شد.

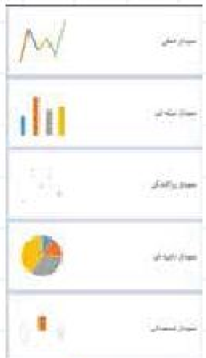
۱. نمودار خطی[1]

نموداری اســت که از خط‌ها برای اتصال نقطه‌های مجزای داده استفاده می‌کند. نمودار خطی ابزاری بسیار قدرتمند است که روند تغییرات را به خوبی نمایش می‌دهد. برای داده‌های پیوســته مناســب است و زمانی بیشترین کاربرد را خواهد داشت که تغییرات یک کمیت در گذر زمان را نشــان بدهد. خط‌های این نمودار در واقع تعداد زیادی نقطهٔ به‌هم پیوسته هستند که هر نقطه مقدار کمیت مربوط به محور عمودی را در زمان مشخصی نشان می‌دهد. نمودار خطی از دو محور تشکیل شده است: محور xها (افقی) و محور yها (عمودی) که در نمودار تحــت عنــوان (x,y) نشان داده می‌شوند.

فرض کنید فروش یک کالا در طول ۱۲ ماه یک سال به صورت جدول ۱ باشد. برای اینکه تغییرات فروش این کالا را در ۱۲ ماه به صــورت نمودار بصری نمایش دهید، از برنامهٔ مای چارت استفاده می‌کنیم. بــرای این کار پس از اجــرای برنامه تصویــــر ۱ را خواهیــد داشت که خیلی ساده می‌توانیــد بــا اســتفاده از آن نمودارهای خود را رسم کنید.

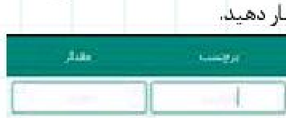
فروش	تاریخ
۱۰۰	فروردین
۲۰۰	اردیبهشت
۵۰۰	خرداد
۳۰۰	تیر
۴۰۰	مرداد
۳۵۰	شهریور
۴۵۰	مهر
۶۵۰	آبان
۶۰۰	آذر
۵۶۰	دی
۷۰۰	بهمن
۱۳۰۰	اسفند

جدول ۱



تصویر ۱

پس از انتخاب نموار خطــی، تصویر ۲ را خواهید داشــت که در آن برچسب‌ها که معمولاً مقدارهای غیرعددی هســتند (در این مثال ماه‌ها)، اطلاعات روی محورxها و مقدارهــای عددی (در این مثال فروش) روی محور yها قرار می‌گیرند. مانند آنچه در تصویر ۳ می‌بینید، مقدارها را وارد کنید. پس از ورود هر برچســب و عدد مربوط به آن، گزینهٔ «اضافه» را به منظور درج مورد بعد فشار دهید.

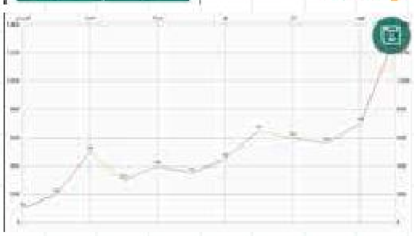


تصویر ۲

تصویر ۳

پس از ورود کامل داده‌ها گزینهٔ «رســم کــن» را انتخــاب کنیــد. در تصویر ۴ می‌توانید ویژگی‌های نمودار خود را نیز به لحاظ ظاهری تعیین و سپس نمودارتان را رسم کنید (تصویر ۵).

تصویر ۴



تصویر ۵

- برای ذخیره‌کردن نمودار در قالب یک تصویر هم می‌توانید دکمهٔ را لمس کنید.
- مرور نمودار بالا نشــان می‌دهد بیشترین فروش در اسفند و کمترین میزان فروش در فروردین انجام شده است. در سه ماههٔ پایانی سال هم فروش سیر صعودی داشته است.

۲. نمودار میله‌ای[2] (ستونی)

نموداری است که برای مقایسهٔ دسته‌های متفاوت از آن اســتفاده می‌شود. در این نمودارها، دو محور عمود بر هم وجود دارند: محور افقی نشــان‌دهندهٔ مقدارهای متغیرهای کیفی است و محور عمودی، یک کمیت (مثلاً تعداد، درصد و یا میانگین) مربوط به هر یک از این گروه‌ها را به نمایش در می‌آورد.

فــرض کنید جدولــی مانند جــدول ۲ داریم که جمعیت چند استان ایران را به منظور مقایسه نشان می‌دهد.

جدول ۲

نام استان	تعداد جمعیت
آذربایجان	۳۷۳۴۰۴۰
البرز	۲۵۳۲۰۱۲
خراسان شمالی	۸۶۱۲۴۳۴
خراسان جنوبی	۶۵۰۴۰۶۶
ایلام	۵۵۲۰۵۶۳

حــال می‌خواهیم نمودار این جدول را به منظور مقایسهٔ سریع‌تر و آسان‌تر جمعیت اســتان‌ها با استفاده از برنامهٔ مای چارت رســم کنیم. از صفحهٔ تصویر ۱، نمودار میله‌ای را انتخاب و سپس مقدارهای جدول بالا را در آن وارد می‌کنیم (تصویر ۶). در مرحلهٔ بعد روی دکمهٔ «رسم کن» تلیک (کلیک) می‌کنیم. نمودار

به‌دست‌آمده مانند تصویر ۷ است:

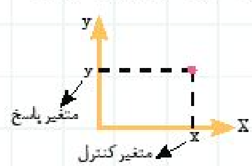
تصویر ۶

تصویر ۷

با نگاه به نمودار بلافاصله متوجه می شویم بیشترین جمعیت متعلق به استان خراسان شمالی و کمترین آن مربوط به استان البرز است و استان ایلام تقریباً از میانگین جمعیت برخوردار است.

۳. نمودار پراکندگی[3]

از این نمودار برای ارائهٔ دیدی کلی از روابط بین داده‌ها استفاده می‌شود، نه برای مشاهدهٔ جزئیات داده. به وسیلهٔ نمودار پراکندگی می‌توان رابطهٔ بین دو متغیر عددی را به نمایش گذاشت و بررسی‌های اولیه را انجام داد. نمودار پراکندگی از نقطه‌ها برای نشان‌دادن مقدارهای دو متغیر متفاوت عددی استفاده می‌کند و نمودار از نمایش یک نقطه به ازای هر جفت متغیر در دستگاه مختصات دکارتی به دست می‌آید. موقعیت هر نقطه در محور افقی و عمودی مقدارهای مربوط به یک داده را نشان می‌دهد. نقطهٔ حاصل ارتباط بین متغیر کنترل و متغیر پاسخ است. نمودار معمولاً برای نمایش نحوهٔ پاسخ یک متغیر (متغیر پاسخ یا وابسته) به تغییرات متغیر دیگر (متغیر کنترل یا مستقل) به کار می‌رود. مقدار یکی از متغیرها (متغیر کنترل) به عنوان مقدار محور افقی و مقدار متغیر دیگر (متغیر پاسخ) به عنوان مقدار محور عمودی در نظر گرفته می‌شود.



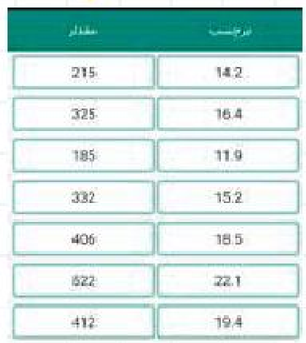
فرض کنید بستنی فروش محله می‌خواهد بفهمد تعداد بستنی‌هایی که در یک روز می‌فروشد چه رابطه‌ای با دمای ظهر آن روز دارد. نتایج به دست آمده برای ۷ روز به شکل جدول ۳ است. می‌خواهیم با استفاده از برنامهٔ مای چارت یک نمودار پراکندگی برای نمایش رابطهٔ بین دما و میزان فروش بستنی

جدول ۳

فروش بستنی بر اساس دمای ظهر	
دما °C	فروش بستنی
°۱۴/۲	۲۱۵هزار تومان
°۱۶/۴	۳۲۵هزار تومان
°۱۱/۹	۱۸۵هزار تومان
°۱۵/۲	۳۳۲هزار تومان
°۱۸/۵	۴۰۶هزار تمان
°۲۲/۱	۵۲۲هزار تومان
°۱۹/۴	۴۱۲هزار تومان

تهیه کنیم. ابتدا در برنامه نمودار پراکندگی را انتخاب می‌کنیم. سپس مقدارها را در آن مطابق تصویر ۸ وارد و نمودار را رسم می‌کنیم (تصویر ۹).

تصویر ۸



تصویر ۹

نمودار به‌خوبی نشان می‌دهد در دماهای بالاتر فروش بیشتری وجود دارد.

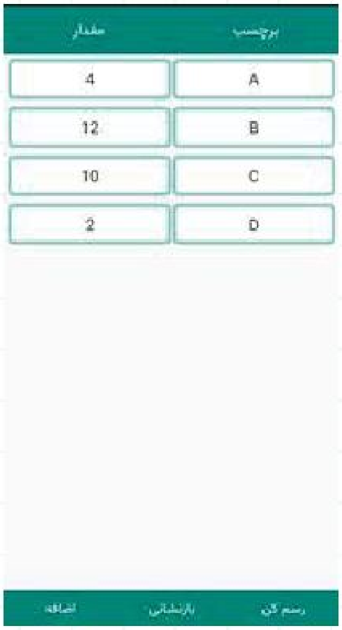
۴. نمودار دایره‌ای[4]

این نمودار وقتی کاربرد دارد که قصد محاسبهٔ سهم هر جزء از کل را داشته باشیم. این نوع نمودار اطلاعاتی را در مورد داده به صورت برش‌هایی از دایره نشان می‌دهد. برش‌های نمودار دایره‌ای اندازهٔ نسبی داده‌ها را نشان می‌دهند. برای مثال، در جدول ۴ نشان داده شده است که چه تعداد از دانش‌آموزان یک کلاس چه سطح نمره‌ای را در آزمون کسب کرده‌اند:

نمره	A	B	C	D
دانش‌آموزان	۴	۱۲	۱۰	۲

جدول ۴

برای رسم نمودار دایره‌ای با استفاده از برنامهٔ مای چارت ابتدا مقدارهای نوع نمودار دایره‌ای را انتخاب و سپس مقدارها را در آن وارد می‌کنیم. در ادامه «رسم نمودار» را برمی‌گزینیم (تصویر ۱۰):



تصویر ۱۰

نمودار نشان می‌دهد بیشترین تعداد دانش‌آموزان (۴۲/۹ درصد از کل کلاس) نمرهٔ B و کمترین تعداد دانش‌آموزان (۷/۱ درصد از کل کلاس) نمرهٔ D گرفته‌اند (تصویر ۱۱).

تصویر ۱۱

پی‌نوشت‌ها

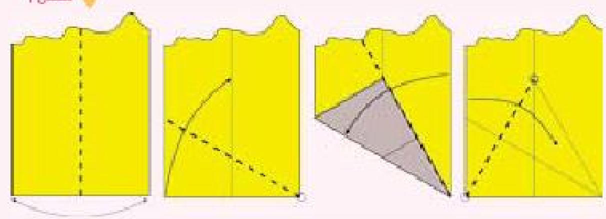
1. Line Graph
2. Column Chart
3. Scatter Plot
4. Pie plot

کاردستی‌های کاغذی

علیرضا محمدصالحی

همان‌طور که می‌دانید، در کاغذتایی (اوریگامی) معمولاً سر و کار ما با کاغذ مربعی اســت. با تا زدن یک تکه کاغذ مربعی، بدون برش و بدون چسب، شکل‌های بی‌شماری را می‌توان ساخت. طبیعی است که می‌توانیم به جای مربع از هر چندضلعی یا شکل دیگری برای شروع کار استفاده کنیم. پیش از این دیدیم که چطور از دل یک مربع یک مثلث متساوی‌الاضلاع بیرون بیاوریم. روشی که گفتیم با مستطیل هم قابل انجام است. کافی است عرض مســتطیل را از وسط تا بزنیم و سپس مشابه روش قبلی عمل کنیم. نکتهٔ جالب اینجاست که مهم نیست مستطیل ما چه ابعادی دارد! در شکل ۱ با یک مستطیل ناقص یک مثلث ساخته‌ایم.

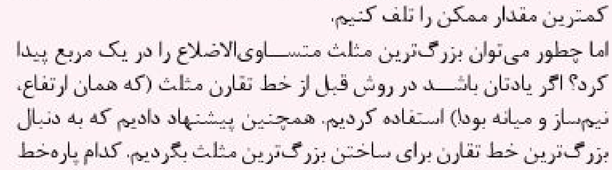
شکل ۱



حالا وقت آن اســت که سراغ پرســش مهمی برویم که قبلاً مطرح شد: «چگونه بزرگ‌ترین مثلث ممکن را با کاغذ خود بسازیم تا کمترین مقدار دورریز را داشته باشیم؟» شــاید در مورد کاغذهای کوچک ما، این سؤال زیاد هم مهم به نظر نرســد؛ به‌خصوص وقتــی که ما معمولاً برای تمرین اوریگامی از کاغذهای باطله استفاده می‌کنیم. ولی تصور کنید که در ساخت یک ســازه با تخته‌های چوبی یا ورق‌های فلــزی در ابعاد بزرگ، به مثلث متساوی‌الاضلاع نیاز داشته باشیم. در این صورت برای ما مهم است که مواد اولیه، چوب یا فلز یا هر چیز دیگری که باشد، به‌طور بهینه مصرف شود و کمترین مقدار ممکن را تلف کنیم.

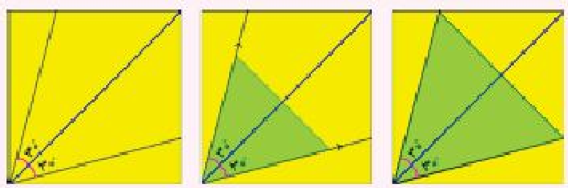
اما چطور می‌توان بزرگ‌ترین مثلث متســاوی‌الاضلاع را در یک مربع پیدا کرد؟ اگر یادتان باشــد در روش قبل از خط تقارن مثلث (که همان ارتفاع، نیم‌ساز و میانه بود!) استفاده کردیم. همچنین پیشنهاد دادیم که به دنبال بزرگ‌ترین خط تقارن برای ساختن بزرگ‌ترین مثلث بگردیم. کدام پاره‌خط در مربع از همه بلندتر اســت؟ قطعاً باید به دنبال پاره‌خط‌هایی باشیم که بزرگ‌تر از ضلع مربع هستند. گوشهٔ بالای ضلع سمت چپ مربع را در نظر بگیرید. اگر آن را روی ضلع بالا حرکت دهیم، پاره‌خطی که آن را به سر دیگر ضلع وصل می‌کند، بزرگ‌تر می‌شود (شکل ۲). (چرا؟ به قضیهٔ فیثاغورس فکر کنید!) اما تا کجا می‌توانیم این نقطه را روی ضلع مربع جابه‌جا کنیم؟ طبیعی است تا وقتی که به آخر ضلع برسیم.

شکل ۲



پس بزرگ‌ترین پاره‌خطی که می‌توانیــم در یک مربع پیدا کنیم، از وصل‌کردن یک گوشــه به گوشهٔ روبه‌روی آن به دست می‌آید؛ یعنی قطر. حالا چگونه از این خط به‌عنوان محور تقارن مثلث استفاده کنیم؟ روشن است که خط تقارن مثلث متساوی‌الاضلاع، نیم‌ساز زاویهٔ مثلث هم هست. (چرا؟) همچنین می‌دانیم زاویه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ۶۰ درجه هستند. پس کافی است یک زاویهٔ ۳۰ درجه در یک طرف قطــر و یک زاویهٔ ۳۰ درجه در طرف دیگر ایجاد کنیم. به این ترتیب یک گوشــه از مثلث روی یک گوشه از مربع قرار می‌گیرد (شکل ۳)، جایی که ضلع‌های این زاویه‌ها به ضلع‌های مربع می‌رسند، گوشه‌های دیگر مثلث خواهند بود. آیا واقعاً این مثلث متساوی‌الاضلاع است؟ این پرسش را شما با استفاده از تقارن (یا هم‌نهشتی مثلث‌ها) پاسخ دهید.

شکل ۳

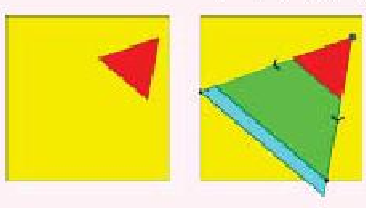


حال ســعی می‌کنیم با چند مشاهده با استفاده از تبدیلات هندسی نشان دهیم مثلثی که یافته‌ایم همان است که در پی آن بودیم؛ یعنی بزرگ‌ترین مثلث متساوی‌الاضلاع.

مشاهدهٔ ۱

با یک مثلث متساوی‌الاضلاع دلخواه در مربع شروع می‌کنیم. گوشه‌ای را که از بقیه به ضلع مربع نزدیک‌تر اســت در نظر بگیرید (شکل ۴). واضح است اگر دو ضلعی را که به آن وصل هستند امتداد دهیم تا به مربع برســند، مثلث بزرگ‌تری در مربع ساخته می‌شود. (با کدام یک می‌توان این کار را انجام داد؟)

شکل ۴



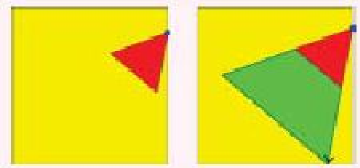
بنابراین اگر بتوانیم گوشــه‌ها را به محیط مربع نزدیک کنیم، مثلث بزرگ‌تری خواهیم داشت.

مشاهدهٔ ۲

اگر یک گوشهٔ مثلث را به محیط مربع منتقل کنیم، ممکن است مثلث ما از مربع خارج شود. گوشه‌ای را انتخاب می‌کنیم که با انتقال آن باز

هم مثلث در مربع باقی بماند. بیایید این گوشه را به ضلع مربع بچسبانیم (انتقال). اکنون ضلع‌های متصل به آن را ادامه می‌دهیم (شکل ۵) و با هر کدام که زودتر به محیط مربع رسید، یک مثلث بزرگ‌تر می‌سازیم.

شکل ۵

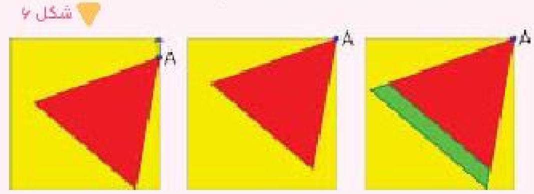


این هم یک تبدیل هندسی است که به آن «تجانس» می‌گویند. تبدیلی که در آن نسبت همهٔ فاصله‌ها و اندازهٔ زاویه‌ها ثابت می‌ماند و فقط شکل، کوچک یا بزرگ می‌شود. در شکل ۵ «مرکز تجانس» همان نقطهٔ آبی‌رنگ است. احتمالاً این موضوع شما را به یاد «بزرگ‌نمایی» و «کوچک‌نمایی» (zoom in و zoom out) عکس‌ها در رایانه یا گوشی‌های هوشمند می‌اندازد. مشخص است که شکل عکس‌ها با بزرگ و کوچک‌نمایی تغییر نمی‌کند و نسبت‌ها به هم نمی‌ریزند.

مشاهدهٔ ۳

گوشه‌ای را که با آن کار می‌کردیم A می‌نامیم. دیدیم که با نزدیک‌کردن گوشه به محیط مربع، مثلث‌های بزرگ‌تری می‌توان ساخت. اکنون گوشهٔ A را روی ضلع مربع حرکت می‌دهیم تا به کنج مربع برسد (شکل ۶). به این ترتیب باز هم می‌توانیم مثلث‌های بزرگ‌تری با تجانس بسازیم.

شکل ۶

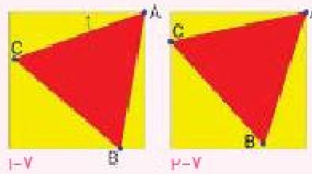


به این ترتیب دیدیم که دو تا از گوشه‌ها روی محیط مربع افتادند و مثلث ما از حالت اول خیلی بزرگ‌تر شد.

مشاهدهٔ ۴

تا اینجا از انتقال استفاده کردیم تا بتوانیم فضای بیشتری برای بزرگ‌تر کردن مثلث به وسیلهٔ تجانس داشته باشیم. اول اجازه دهید گوشه‌های دیگر را مانند شکل ۷ـ۱، B و C بنامیم. حالا از یک تبدیل آشنای دیگر استفاده می‌کنیم. اگر مثلث خود را حول نقطهٔ A بچرخانیم (دوران دهیم)، به طوری که از مربع خارج نشود، آیا فضای دیگری برای بزرگ‌تر کردن مثلث وجود دارد؟ فرض کنید نقطهٔ A را با یک سوزن روی گوشهٔ مربع ثابت کرده‌ایم و مثلث را حول آن می‌چرخانیم. قطعاً می‌توانیم تا آنجا بچرخانیم که گوشهٔ C به محیط مربع برسد، ولی این بار هم به مثلث بزرگ‌تری نمی‌رسیم. چرا؟ (شکل ۷ـ۲)

شکل ۷

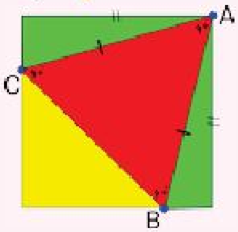


۱-۷ ۲-۷

پس مثلث را در چه حالتی قرار دهیم که هر دو ضلع بتوانند بزرگ‌تر شوند؟

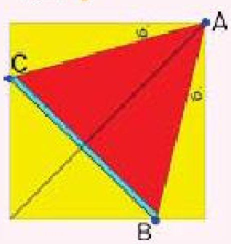
کلید رسیدن به جواب این است که این بار کاری کنیم که هر دو گوشهٔ B و C بتوانند به محیط مربع برسند.

شکل ۸



فرض کنیم بتوانیم هر دو گوشه را روی محیط بگذاریم. به مثلث‌های کناری (سبز رنگ در شکل ۸) دقت کنید. یک ضلع آن‌ها برابر ضلع مربع و ضلع دیگر برابر ضلع مثلث ABC است. همچنین این دو مثلث قائم‌الزاویه‌اند و در نتیجه هم‌نهشت‌اند (با قضیهٔ فیثاغورس یا هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه). اگر دقت کنید، زاویهٔ کوچک مثلث سبز، همان اندازه‌ای است که باید مثلث ABC را دوران دهیم تا بتوانیم هر دو ضلع AB و AC را ادامه دهیم و به محیط مربع برسانیم. اندازهٔ زاویهٔ کوچک در مثلث سبز چقدر است؟

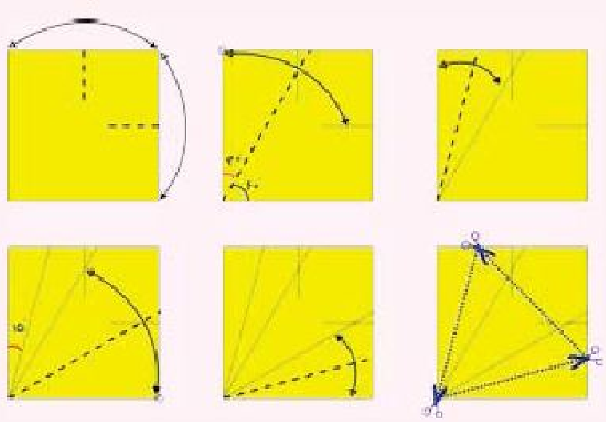
شکل ۹



تمام شواهد به ما می‌گویند باید مثلث را طوری بچرخانیم که نسبت به قطر مربع متقارن باشد! (چرا؟) همان‌طور که خودتان می‌دانید، زاویهٔ کوچک مثلث سبز ۱۵ درجه است. پس باید مثلث قرمز را طوری دوران دهیم که با ضلع مربع زاویهٔ ۱۵ درجه داشته باشد. در شکل ۹ مثلثی را که به کنج مربع منتقل شده بود، چرخانده‌ایم تا بتوانیم ضلع‌هایش را تا محیط مربع امتداد دهیم.

تنها سؤالی که مانده این است که: چطور این مثلث را تا بزنیم؟ این کار از آنچه تا اینجا انجام داده‌ایم آسان‌تر است. باز هم روش قبلی را به یاد آورید. مثلثی که ساخته بودیم یک مثلث متساوی‌الاضلاع و زاویهٔ داخلی آن ۶۰ درجه بود. پس زاویهٔ کنار صفحه ۳۰ درجه است و کافی است آن را نصف کنیم (شکل ۱۰).

شکل ۱۰



مثلث کرجی

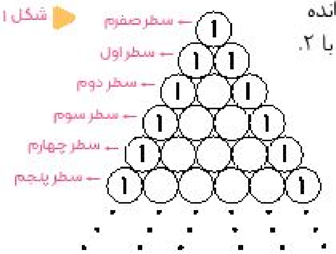
محرم ایردموسی

تصویر ۱. ابوبکر محمدبن‌حسن کرجی

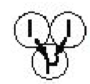
یک: در شکل ۱، آرایه‌ای مثلث شکل می‌بینید که در هر خانه روی دو ضلع آن عدد ۱ نوشته شده است. با این قاعده خانه‌های باقی‌مانده پر می‌شوند: «در هر خانه مجموع عددهای دو خانهٔ بالاسری آن را بنویسید.»

برای مثال، خانهٔ باقی‌مانده از سطر دوم برابر است با ۲.

شکل ۱



شکل ۲



دو: خانه‌های باقی‌مانده از سطرهای سوم تا ششم را کامل کنید.

سه: مجموع عددهای سطر صفرم برابر است با ۱. مجموع عددهای سطر اول برابر است با: $1+1=2$ و مجموع عددهای سطر دوم برابر است با: $1+2+1=4=2^2$. حدس می‌زنید مجموع عددهای سطر سوم چقدر باشد؟ با محاسبه، درستی حدس خود را بررسی کنید.

چهار: حدس می‌زنید اگر عددهای سطر nام را با هم جمع کنید، چه عددی به دست می‌آید؟ با محاسبهٔ مجموع عددها در سطرهای چهارم و پنجم، درستی حدس خود را بررسی کنید.

پنج: به ضریب‌های جمله‌ها در چند برابری زیر توجه کنید:

۱) $(a+b)^1 = a+b$

۲) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a\times a + a\times b + b\times a + b\times b$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

در سمت راست تساوی ۱، ضریب‌ها ۱ و ۱ هستند که در سطر اول مثلث بالا ظاهر شده‌اند. در تساوی دوم، ضریب‌ها ۱، ۲ و ۱ هستند که در سطر دوم مثلث بالا ظاهر شده‌اند. با محاسبهٔ $(a+b)^3$ به کمک ضرب $(a+b)^2\times(a+b)$، ضریب‌های جمله‌ها را به دست آورید و با عددهای سطر سوم مقایسه کنید.

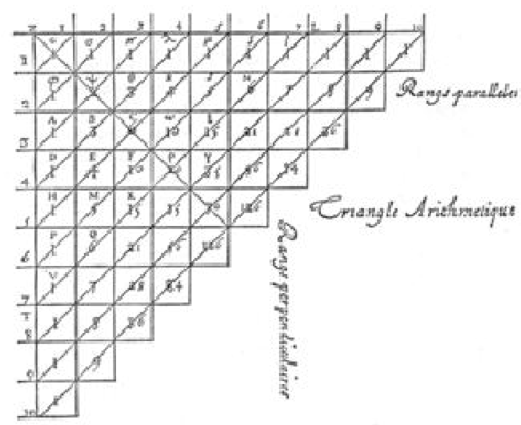
شش: این مثلث، یکی از معروف‌ترین آرایه‌های عددی در ریاضیات و به‌ویژه در شاخهٔ جبر است. از نظر تاریخی معمولاً یک سؤال مهم این است که یک کشف ریاضی در چه برهه‌ای از تاریخ و توسط کدام ریاضی‌دان انجام شده است. مثلث جادویی فوق که در منابع ریاضی عموماً به مثلث پاسکال یا مثلث خیام پاسکال شهرت یافته، در حقیقت اولین بار توسط **ابوبکر محمدبن‌حسن کرجی** (تصویر ۱)، ریاضی‌دان ایرانی قرن‌های دهم و یازدهم میلادی، ابداع شده است. کرجی علاوه بر ریاضیات، از جمله اولین مهندسان صنعت آب (هیدرولوژی) به شمار می‌رود.

اما شاید جالب باشد به تاریخ‌ها و ریاضی‌دانانی اشاره کنیم که به نحوی با این مثلث جادویی (شکل ۳) که ما آن را «مثلث کرجی» می‌نامیم، در ارتباط بوده‌اند.

شکل ۳. برشی از آثار کرجی

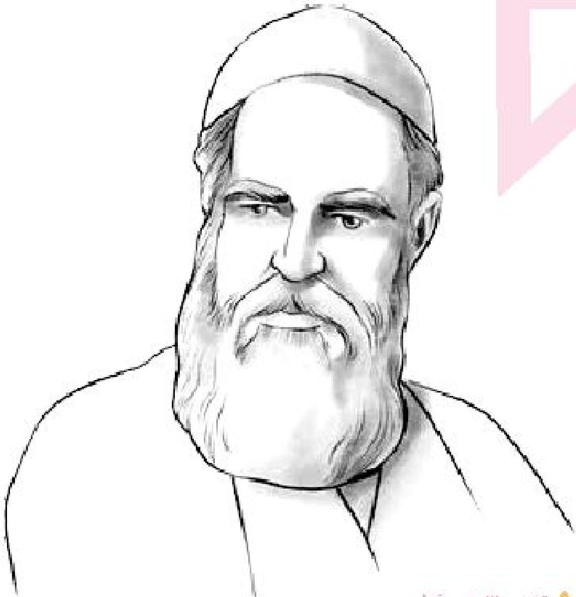
تصویر ۲. بلز پاسکال

هفت: بلز پاسکال (تصویر ۲)، ریاضی‌دان فرانسوی قرن هفدهم میلادی، در سال ۱۶۵۴ در یکی از آثارش (شکل ۴) به این مثلث پرداخته است.
و البته افتخار این کشف ریاضی را به نمایندگی از ریاضی‌دانان بسیاری قبل از خود، یدک می‌کشد.



شکل ۴. برشی از آثار پاسکال

هشت: غیاث‌الدین ابوالفتح عمر بن ابراهیم خیام نیشابوری، معروف به **عمر خیام** (تصویر ۳)، شاعر و ریاضی‌دان قرن یازدهم و دوازدهم میلادی، در کتاب «مشکلات الحساب» خود به معرفی ضریب‌های دو جمله‌ای $(a+b)^n$ پرداخته و این عددها را معرفی کرده است.



تصویر ۳. عمر خیام

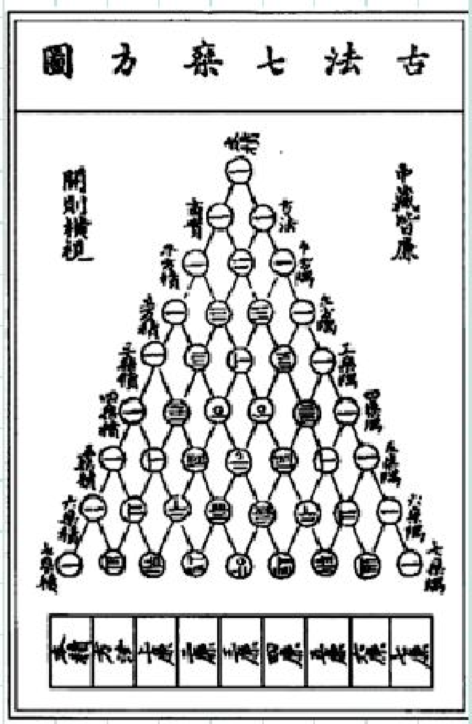
خواجه نصیرالدین طوسی (تصویر ۴) از دانشمندان معروف قرن سیزدهم، با تأسی از آثار خیام، ضریب‌های دو جمله را تا توان ۱۲ محاسبه کرده بود (در واقع ۱۲ سطر اول مثلث کرجی).

تصویر ۴. خواجه نصیرالدین طوسی

نه: احمدبن منعم الابداری. از ریاضی‌دانان مغربی قرن سیزدهم نیز در آثار خود به این مثلث اشاره کرده است. ابن منعم از جمله ریاضی‌دانانی است که به واسطهٔ آثارش دربارهٔ مربع‌های جادویی نیز معروف است (شکل ۵).

شکل ۵. برشی از آثار ابن منعم

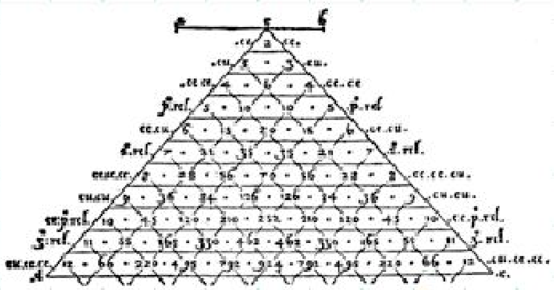
ده: ژوشی جی از ریاضی‌دانان چینی که در قرن سیزدهم و چهاردهم میلادی می‌زیسته، یکی دیگر از کاشفان مثلث جادویی کرجی بوده است (شکل ۶).



شکل ۶. برشی از آثار ژوشی‌جی

یازده: نیکولوفونتانا تارتاگلیا (تصویر ۵)، از ریاضی‌دانان ایتالیایی قرن‌های پانزدهم و شانزدهم، نیز در زمینهٔ مثلث کرجی از خود آثاری به جای گذاشته است (شکل ۷).

تصویر ۵. تارتاگلیا



شکل ۷. مثلث کرجی به روایت تارتاگلیا

دوازده: جرومینو کاردانو از دیگر ریاضی‌دانان ایتالیایی قرن شانزدهم است که به رازهای این مثلث پی برده بود و در آثارش، نمونه‌ای از عددهای این مثلث به چشم می‌خورد (شکل ۸).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
3	6	10	15	21	28	36	45	55		
4	10	20	35	56	84	120	165			
5	15	35	70	126	210	330				
6	21	56	126	252	462					
7	28	84	210	462						
8	36	120	330							
9	45	165								
10	55									
11										

شکل ۸. برشی از آثار کاردانو

سیزده: سخن پایانی

ریاضی‌دانان بسیاری در طول تاریخ به بسط و توسعهٔ دانش ریاضی پرداخته‌اند. گاهی همانند داستان مثلث کرجی، این تلاش‌ها و کشف‌ها مستقل از هم انجام می‌شده‌اند. امروزه به مدد پیشرفت علوم و آسان‌ترشدن ارتباطات بین فرهنگ‌ها، هر کشف علمی جدید، به‌ویژهٔ در علوم پایه مانند ریاضیات، در اختیار همگان قرار می‌گیرد.

عباس قلعه‌پور اقدم

میان‌برهای بخش‌پذیری

اگر باقی‌ماندهٔ عدد صحیحی مانند a، بر عدد صحیحی مانند b (که نمی‌تواند صفر باشد) صفر شود، می‌گوییم عدد a بر عدد b بخش‌پذیر است، یا عدد b یک مقسوم‌علیه a است، یا b یک شمارندهٔ a است.

مثال ۱. باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۲ بر ۴ برابر صفر است، پس ۱۲ بر ۴ بخش‌پذیر است، یا ۴ یک مقسوم‌علیه یا شمارندهٔ ۱۲ است.

مثال ۲. باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲۳ بر ۵ برابر ۳ است، پس ۲۳ بر ۵ بخش‌پذیر نیست، یا ۵ شمارنده یا مقسوم‌علیه ۲۳ نیست.

نوبت شما: آیا ۳۵ بر ۷ بخش‌پذیر است؟ چرا؟

باز هم نوبت شما: آیا عدد ۳۵۳۴۲ بر ۷ بخش‌پذیر است؟ چرا؟

معلوم است که برای شما، پاسخ‌دادن به اولی از دومی راحت‌تر است، زیرا هر قدر تعداد رقم‌ها بیشتر باشد، مشخص است که عمل تقسیم طولانی‌تر خواهد بود. حالا فکر کنید اگر بخواهیم بخش‌پذیری یک عدد مثلاً پانزده رقمی را بر عددی دیگر آزمایش کنیم، کار تقسیم چقدر طولانی‌تر خواهد بود. به خاطر همین، بهتر است راه‌های میان‌بری برای آزمایش بخش‌پذیربودن یا نبودن بر بعضی عددها را یاد بگیریم تا راحت‌تر و سریع‌تر بتوانیم پاسخ دهیم. شما در کلاس ششم، راه‌های میان‌بری را برای بخش‌پذیری بر ۲، ۳، ۹ و ۵ یاد گرفته‌اید. یاد گرفتید که:

- عددی بر ۲ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن زوج، یعنی ۰، ۲، ۴، ۶ یا ۸ باشد؛ مانند ۸۳۵۶، ۲۲۴ و ۵۴۶۷۸۳۸.
- عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع رقم‌های آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد. مثلاً ۳۲۸۵۶ بر ۳ بخش‌پذیر است، چون مجموع رقم‌های آن ۲۴ می‌شود و ۲۴ بر ۳ بخش‌پذیر است. یا مثلاً ۵۴۶۷۸۳۲۹ بر ۳ قابل قسمت نیست، چون مجموع رقم‌هایش ۴۴ می‌شود و ۴۴ بر ۳ بخش‌پذیر نیست. البته می‌توانیم مجموع رقم‌های ۴۴ را هم جمع کنیم که می شود ۸، و ۸ بر ۳ بخش‌پذیر نیست.
- عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم یکانش ۰ یا ۵ باشد؛ مانند ۴۵۳۰ و ۵۶۷۸۹۴۵.

حالا می‌خواهم روش‌های آزمایش بخش‌پذیری بر عددهای ۴، ۷، ۱۱ و ۱۳ را برایتان توضیح دهم تا هر زمان لازم داشتید، دیگر مجبور به انجام عمل تقسیم نباشید.

بخش‌پذیری بر ۴

نکته: عددی بر ۴ بخش‌پذیر است که عدد حاصل از دو رقم یکان و دهگان آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

مثال ۱. عدد ۳۵۲۸ بر ۴ بخش‌پذیر است، زیرا عدد دو رقمی ساخته‌شده از رقم‌های یکان و دهگان آن یعنی ۲۸ بر ۴ بخش‌پذیر است.

۳۵۲۸ ?
۳۵۲۸÷۴
۲۸÷۴=۷

مثال ۲. استفاده از این نکته کار را خیلی راحت‌تر می‌کند. مثلاً برای تشخیص بخش‌پذیربودن عدد ۱۰ رقمی ۱۴۵۸۹۶۶۷۵۳ بر ۴، ما فقط با دو رقم سمت راست، یعنی ۵۳، کار داریم. چون ۵۳ بر ۴ بخش‌پذیر نیست، پس عدد ۱۴۵۸۹۶۶۷۵۳ هم بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

نوبت شما: دور عددهایی را که بر ۴ بخش‌پذیر هستند، خط بکشید.
۳۴۵۶، ۱۲۲۶۷۹، ۴۵۶۷۰۳۴۰، ۸۲۵، ۱۳۴۴، ۹۸۶۵۶۵ و ۷۶۵۳۶.

بخش‌پذیری بر ۷

نکته: تشخیص بخش‌پذیری بر ۷ کمی پیچیده است، پس خوب باید دقت کنید. ابتدا رقم یکان عدد را حذف می‌کنیم. سپس دو برابر رقم یکان را از عدد حاصل از بقیهٔ رقم‌ها کم می‌کنیم. اگر عدد حاصل بر ۷ بخش‌پذیر بود، نتیجه می‌شود که عدد اصلی نیز بر ۷ بخش‌پذیر است. این قاعده را می‌توان چند بار هم تکرار کرد.

مثال ۱. عدد ۶۷۲ را در نظر می‌گیریم. رقم یکان یعنی ۲ را حذف می‌کنیم؛ می‌ماند ۶۷. حالا دو برابر رقم یکان، یعنی ۴ را از ۶۷ کم می‌کنیم که می‌ماند ۶۳. چون ۶۳ بر ۷ بخش‌پذیر است، پس ۶۷۲ بر ۷ بخش‌پذیر است.

مثال ۲. عدد ۷۵۴۳ را در نظر می‌گیریم. رقم یکان یعنی ۳ را حذف می‌کنیم، عدد ۷۵۴ می ماند. حالا دو برابر رقم یکان یعنی ۶ را از ۷۵۴ کم می کنیم، جواب می شود ۷۴۸. حالا دو راه داریم: یا ۷۴۸ را بر ۷ تقسیم کنیم تا بفهمیم که بر ۷ بخش‌پذیر است یا نه، یا اینکه این قاعده را باز تکرار کنیم. من راه دوم را انتخاب می‌کنم. رقم یکان ۷۴۸ یعنی ۸ را حذف می‌کنم که می‌ماند ۷۴. دو برابر ۸، یعنی ۱۶ را از ۷۴ کم می‌کنم؛ می‌ماند ۵۸. معلوم است که ۵۸ بر ۷ بخش‌پذیر نیست، پس ۷۴۸ هم بر ۷ بخش‌پذیر نیست و ۷۵۴۳ هم بر ۷ بخش‌پذیر نیست.

نوبت شما: دور عددهایی را که بر ۷ بخش‌پذیرند، خط بکشید. برای تشخیص، از روش بالا استفاده کنید، سپس می‌توانید با انجام عمل تقسیم، از درستی و کارآیی روش بالا مطمئن شوید. هر چند درستی این روش‌ها اثبات ریاضی دارند که شما در دورهٔ دوم متوسطه می‌توانید آن‌ها را یاد بگیرید.
۹۸۳، ۵۹۹۹، ۴۸۵۹، ۶۷۴۱، ۳۷۰۲۷۴۸ و ۱۴۵۸۲.

بخش‌پذیری بر ۱۱

نکتهٔ ۱. هر عددی که تمام رقم‌های آن یکسان باشند، به شرط اینکه تعداد رقم‌هایش زوج باشد، بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

مثال ۱. عدد ۳۳۳۳ بر ۱۱ بخش‌پذیر است، چون همهٔ رقم‌های آن ۳ است و نیز تعداد رقم‌هایش زوج است. عدد ۵۵۵۵۵۵۵۵ هم بر ۱۱ قابل قسمت است. شما هم چند مثال بیابید.

نکتهٔ ۲. برای تشخیص اینکه یک عدد بر ۱۱ قابل قسمت است یا نه، ابتدا رقم‌های عدد مورد نظر را یک در میان به دو دسته تقسیم می‌کنیم. سپس مجموع رقم‌های هر دسته را حساب می‌کنیم و بعد مجموع‌ها را از هم کم می‌کنیم. اگر این تفاضل صفر باشد، یا بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، عدد اصلی نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

مثال ۲. عدد ۳۴۵۶۷۸۰۹۱ را در نظر می‌گیریم. به جای اینکه این عدد را بر ۱۱ تقسیم کنیم، از راه میان‌بر بالا استفاده می‌کنیم. این عدد ۹ رقم دارد. از سمت چپ شروع می‌کنیم و یک در میان، این ۹ رقم را به دو دسته تقسیم می‌کنیم.
رقم‌های دستهٔ اول: ۳، ۵، ۷، ۰ و ۱
رقم‌های دستهٔ دوم: ۴، ۶، ۸ و ۹
رقم‌های هر دسته را جمع می‌کنیم. مجموع رقم‌های دستهٔ اول می‌شود ۱۶. مجموع رقم‌های دستهٔ دوم می‌شود ۲۷. این دو را از هم کم می‌کنیم: ۱۱=۱۶-۲۷. معلوم است که ۱۱ بر ۱۱ بخش‌پذیر است. پس عدد ۳۴۵۶۷۸۰۹۱ هم بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

۳۴۵۶۷۸۰۹۱
۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۰ ۹ ۱
۱+۰+۷+۵+۳=۱۶
۹+۸+۶+۴=۲۷
۲۷-۱۶=۱۱
۱۱÷۱۱=۱

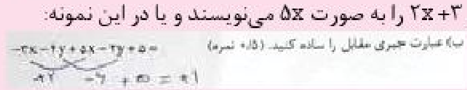
مثال ۳. عدد ۴۸۹۶۵۷۱۲۳۰ بر ۱۱ بخش‌پذیر است یا نه؟
این عدد را بر ۱۱ تقسیم کنید تا ببینید که بر ۱۱ قابل قسمت نیست. حالا از روشی که یاد گرفتیم، این موضوع را دنبال می‌کنیم.
رقم‌های دستهٔ اول: ۴، ۹، ۵، ۱ و ۳
رقم‌های دستهٔ دوم: ۸، ۶، ۷، ۲ و ۰
مجموع رقم‌های دستهٔ اول: ۲۲=۳+۱+۵+۹+۴
مجموع رقم‌های دستهٔ دوم: ۲۳=۰+۲+۷+۶+۸
تفاضل مجموع‌های دو دسته: ۱=۲۲-۲۳
چون ۱ بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست، پس عدد ۴۸۹۶۵۷۱۲۳۰ هم بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست.

نوبت شما: دور عددهایی را که بر ۱۱ بخش‌پذیرند، خط بکشید:
۸۲۰۴۰۲، ۹۹۹۹۹۹۹۹، ۸۶۳۵، ۶۶۶۶۶۶۶، ۸۷۶۹۴۳۲۱، ۱۱۱۱۱۱ و ۵۰۲۴۵۸.

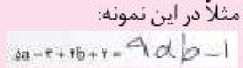
مرتضی مرتضوی

متغیر
آجر ساختمان جبر

«متغیر» در بیشتر موضوعات ریاضی وجود دارد و به صورت‌های متفاوتی به کار می‌رود. برای مثال در جایی به عنوان یک مجهول خاص در معادله مانند $x+2=5$ و در جایی دیگر به عنوان عبارت جبری مثل $2x+2$ و یا عدد عمومی یک الگو شبیه $a^1=a$، از آن استفاده می‌شود. یکی از مشکلات دانش‌آموزان در مواجهه با عبارت‌های جبری، معادلات و سایر مباحث مرتبط، نداشتن درک درست از مفهوم متغیر است که آن‌ها را به اشتباه می‌اندازد. اشتباه دانش‌آموزان متناسب با نقش متغیر در موضوعات ریاضی متفاوت است. در اینجا از میان انواع فراوان به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.
اولین و شاید اساسی‌ترین اشتباه دانش‌آموزان ناشی از نداشتن درک صحیح و دقیق از مفهوم متغیر است. برای مثال در جملهٔ $2x$، اکثر دانش‌آموزان فکر می‌کنند متغیر نشان‌دهندهٔ یک عدد تنهاست و تصور نمی‌کنند که هر عددی می‌تواند به جای متغیر قرار گیرد. همچنین در مدل‌سازی یا نمایش ریاضی یک مسئلهٔ کلامی مانند: «اگر عددی را با ۵ جمع کنیم و در ۲ ضرب کنیم، حاصل برابر با ۱۲ می‌شود، آن عدد را پیدا کنید». دانش‌آموزان به اشتباه در جواب می‌نویسند: $2x+5$.
یکی دیگر از موارد، نادیده گرفتن متغیر در ساده‌کردن عبارت‌های جبری است. برای مثال $2x+3$ را به صورت $5x$ می‌نویسند و یا در این نمونه:



دانش‌آموزی هنگام ساده‌کردن عبارت جبری، می‌دانسته که باید جمله‌های متشابه را با هم ساده کند، اما به دلیل چشم‌پوشی از متغیرها، ضرایب متغیرهای متشابه را به همراه عدد ثابت ۵ جمع کرده و عدد ۱ را به عنوان حاصل این عبارت جبری به دست آورده است.
نوع دیگری از اشتباهات دانش‌آموزان در نظر گرفتن جمله‌های مختلف و غیرمتشابه به عنوان جمله‌های متشابه است. مثلاً در این نمونه:



دانش‌آموز جمله‌هایی را که حرف انگلیسی داشته‌اند، متشابه دانسته و با هم جمع کرده است.
خب این‌ها فقط نمونهٔ اندکی از اشتباهات دانش‌آموزان مربوط به مفهوم متغیر در نقش‌های مختلف در ریاضی بود. بررسی‌ها نشان داده‌اند که اکثر این اشتباهات ریشه در عدم درک مفهومی متغیر دارد. در ادامه به‌طور مختصر به سراغ این موضوع می‌رویم که چرا از متغیر استفاده می‌کنیم و سپس از جنبهٔ دیگری به متغیر در عبارت‌های جبری می‌پردازیم.
هر وقت بخواهیم در مورد عددهای مشخصی سخن بگوییم، خود آن عددها را می‌نویسیم. برای مثال، به منظور گفتن اینکه ضرب عدد ۵ در یک برابر ۵ است، می‌نویسیم $5\times1=5$. اما اگر بخواهیم در مورد دسته‌ای از عددها سخن بگوییم، آن را چگونه بنویسیم؟ فرض کنید می‌خواهیم بگوییم: «ضرب هر عدد در یک برابر خود آن عدد است». این جمله به معنای آن است که:

$1\times1=1$
$2\times1=2$
$3\times1=3$
...

همان طور که می‌بینید، این خاصیت مربوط به عدد خاصی نیست و برای همهٔ عددها برقرار است. اگر □ نشانهٔ یک عدد دلخواه باشد، خاصیت بالا را می‌توانیم به صورت روبه‌رو بنویسیم: $\square\times1=\square$
اگر به جای □، هر عدد دلخواهی بگذاریم تساوی بالا برقرار می‌شود. در ریاضی معمولاً به جای استفاده از علامت □ از نمادهای حروف انگلیسی مانند a، b، c و ... که متغیر نامیده می‌شوند، استفاده می‌کنیم. برای مثال، برای گفتن جملهٔ «ضرب هر عدد در یک برابر خود آن عدد است» می‌گوییم: عدد دلخواهی انتخاب کنید و آن را a بنامید. در این صورت: $a\times1=a$. در این جمله به جای متغیر a از هر متغیر دیگری هم می‌توانیم استفاده کنیم. مثلاً اگر عدد دلخواه را x بنامیم در این صورت: $x\times1=x$.
پس تا اینجا متوجه شدیم که به کمک متغیرهایی که نشان دهندهٔ یک عدد دلخواه هستند، می‌توانیم خواصی از عددها را که برای همهٔ آن‌ها برقرارند راحت‌تر بیان کنیم. مثلاً برای بیان «حاصل‌ضرب دو عدد مثبت، عددی مثبت است» دو عدد دلخواه مثبت مانند x و y را در نظر می‌گیریم و می‌نویسیم: $xy>0$. در قسمت بعد برای درک شهودی نسبت متغیر در عبارت جبری از منظری دیگری به این موضوع می‌پردازیم.
شما چه تصوری از مفهوم عبارت‌های جبری $3x+1$ و $5z$ دارید؟ از یک مثال ساده و واقعی کمک می‌گیریم تا درک عمیق‌تری نسبت به مفهوم این عبارت‌های جبری پیدا کنیم. فرض کنید برگهٔ ثبت‌نام دانش‌آموزان در مدرسه به صورت زیر باشد:

برگهٔ مشخصات دانش‌آموز			
نام	نام خانوادگی	نام پدر	کد ملی

- ویژگی این برگهٔ خام این است که همهٔ دانش‌آموزان می‌توانند آن را پر کنند و تا وقتی مشخصات دانش‌آموزی در آن ثبت نشود، متعلق به همهٔ افراد است و خاصیت عمومی بودن را دارد. عبارت‌های جبری $3x+1$ و $5z$ هم تا زمانی که هیچ مقدار عددی به جای x و z قرار ندهیم مانند برگهٔ خام است و هر مقداری می‌تواند به جای متغیرها قرار گیرد.
- مقدار عددی عبارت‌های جبری $3x+1$ و $5z$ را به ازای عدد ۳ به دست آورید. برای این کار باید به جای x و z عدد ۳ را قرار دهیم و حاصل را که یک عدد است به دست آوریم. یعنی $3(3)+1=10$ و $5(3)=15$. همین‌طور اگر هر دانش‌آموز، برای مثال **علی امیری** فرزند **رضا**، برگهٔ ثبت‌نام را پر کند، این برگه به علی امیری اختصاص یافته و دیگر خام نیست و جنبهٔ عمومی ندارد.

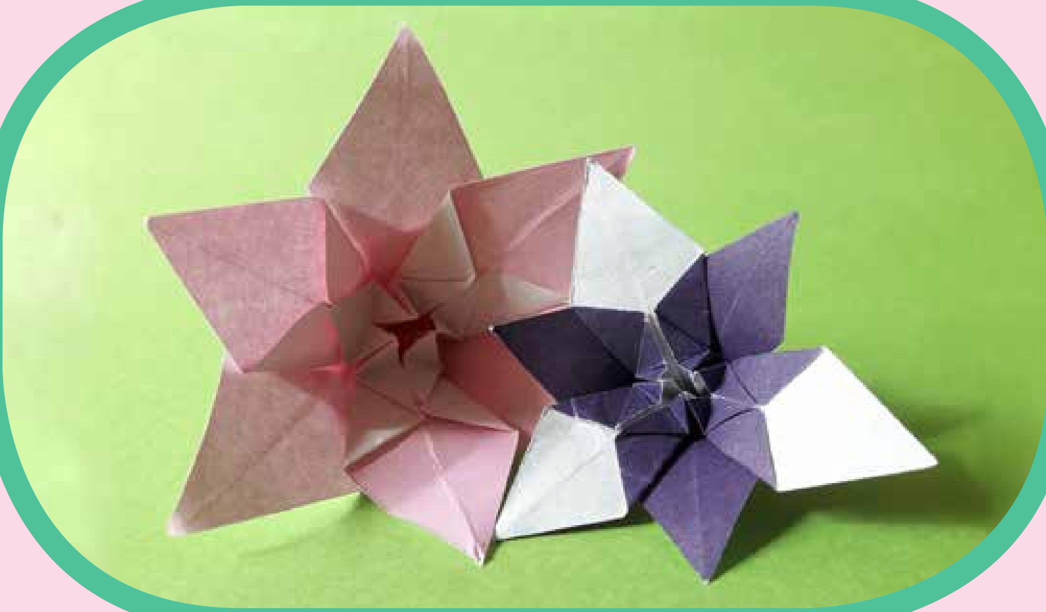
درک مفهوم متغیر زیربنای درک بسیاری از مفاهیم جبری است. اما متأسفانه بسیاری از دانش‌آموزان درک ناقص و محدودی از مفهوم متغیر دارند و نمی‌توانند مفهوم متغیر را با توجه به شرایط مسئله به درستی درک کنند. لذا از شما دانش‌آموزان انتظار می‌رود که در کلاس درس به کاربردهای متفاوت متغیر توجه کنید و با تمرین بیشتر نسبت به یادگیری عمیق‌تر این مفهوم اهتمام ورزید.

کاغذوتا

اریگامی

گل سوسن

برای مشاهدهٔ مراحل ساخت، رمزینه را پویش کنید.



بیست و دوم بهمن

سالگرد پیروزی
انقلاب اسلامی ایران

گرامی باد.