بســــــم الله الرحمن الرحیم

اللّهم صل علی محمد و آل محمد و عجل فرجهم

رشد برهان ریاضی ۷

زکات دانش، آموزش آن به کسانی است که شایستهٔ آن هستند و نیز کوشش در عمل به آن است (امام علی علیه‌السلام، غرر الحکم و درر الکلم، ص۳۹۱).

وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی www.roshdmag.ir
دوره بیست و هشتم/ شمارهٔ پی در پی **۱۳۷** / فروردین **۱۴۰۲**
ماهنامه آموزشی و تربیتی برای دانش‌آموزان دورهٔ اول متوسطه
ISSN:1735-4943 / پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲/ **۴۰** صفحه

مدیرمسئول: محمدصالح مذنبی/ **سردبیر:** حسین نامی ساعی/ **مدیرداخلی:** پری حاجی خانی
هیئت تحریریه: محرم ایردموسی، رضا حیدری قزلجه، روح‌الله خلیلی بروجنی، خسرو داودی، محمدرضا سیدصالحی، مرتضی مرتضوی، داود معصومی مهوار، محمود نصیری
ویراستار: بهروز راستانی/ **مدیر هنری:** کوروش پارسانژاد/ **طراح گرافیک:** حسین یوزباشی
تصویرگر: حسین یوزباشی

در این ماه؛ فروردین ۱۴۰۲: ◂**اول:** جشن نوروز ◂**سوم:** آغاز ماه مبارک رمضان ◂**دوازدهم:** روز جمهوری اسلامی ایران ◂**هجدهم:** ولادت امام حسن مجتبی (ع) و روز جهانی بهداشت ◂**بیستم:** سالروز شهادت آقاسیدمرتضی آوینی، روز هنر انقلاب اسلامی و روز ملی انرژی هسته‌ای ◂**بیست‌ودوم:** آغاز شب‌های قدر ◂**بیست‌وچهارم:** شهادت حضرت علی (ع)
◂شرح مناسبت های ماه را با پویش رمزینه ببینید.

شاید نزدیک به یک دهه با هم به «دانشگاه شریف» می‌رفتیم و در طول راه با هم گفت‌وگو می‌کردیم. در دانشکدهٔ ریاضی هم دفتر کارمان در کنار هم بود. من در دفتر کار خودم کار نمی‌کردم، بلکه ...

صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ را بخوانید.

قیمت ۷۵۰۰۰ ریال

خانوادهٔ مجلات رشد همهٔ تلاش خود را کرده است تا این مجله در **دسترس عموم** دانش‌آموزان قرار گیرد و همهٔ کودکان و نوجوانان میهن عزیز اسلامی‌مان **امکان تهیهٔ** آن را داشته باشند.

برای مشاهدهٔ شرایط ارسال مطلب و همکاری با ماهنامهٔ رشد ریاضی برهان متوسطهٔ اول، رمزینه را پویش کنید.

آش خوش‌مزه
ادویهٔ اندازه

رکاب بزن، سرعت بگیر

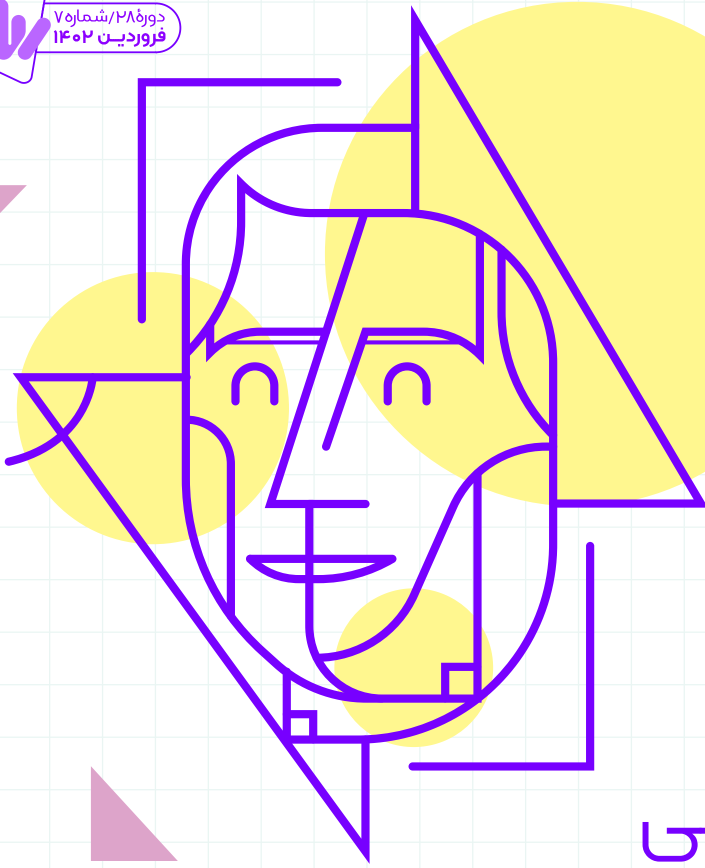
حسین نامی‌ساعی

سلام دوستان. آغاز سال نو و بهار طبیعت، همچنین حلول ماه پربرکت رمضان را به شما تبریک می‌گویم. امیدوارم طاعات و عباداتتان مورد قبول حق تعالی قرار بگیرد.
همراهان عزیز برهان، طبق قراری که داشتیم، در این دوره و در هر شماره دربارهٔ یکی از مفهوم‌های اساسی ریاضیات صحبت می‌کنیم. در این شماره می‌خواهیم دربارهٔ متغیر و انواع آن صحبت کنیم. یادم هست، زمانی که دانش‌آموز دورهٔ راهنمایی بودم که الان دورهٔ اول متوسطه شده است، دبیر ورزش و تربیت‌بدنی ما برای دانش‌آموزان مسابقهٔ دوچرخه‌سواری برگزار کرد. مسابقه‌ای بود که از مدرسهٔ ما تا مدرسهٔ دیگری که حدود پنج کیلومتر تا مدرسهٔ ما فاصله داشت، برگزار شد. من هم در آن مسابقه شرکت کردم. مسابقه با سوت دبیرمان شروع شد. مسافت پنج کیلومتر ثابت بود، ولی سرعت دوچرخه‌ها و زمان طی‌کردن مسافت پنج کیلومتری متغیر و عامل اصلی برای برنده‌شدن بود. در واقع برنده کسی بود که با سرعت بیشتر و در زمان کمتری مسیر مسابقه را طی می‌کرد. هر چه سریع‌تر رکاب می‌زدی، سرعتت بیشتر می‌شد و در زمان کمتری می‌توانستی مسافت ثابت پنج کیلومتر را طی کنی. در مسابقهٔ دوچرخه‌سواری، بعضی از متغیرها با متغیرهای دیگر نسبت مستقیم داشتند و با زیاد شدنشان متغیر دیگری هم زیاد می‌شد؛ مانند متغیر رکاب‌زدن که هر چه سرعت رکاب‌زدن دوچرخه‌سوار بیشتر می‌شد، سرعت دوچرخه هم بالاتر می‌رفت. بعضی متغیرها هم نسبت معکوس داشتند. مثلاً هرچه سرعت دوچرخه بیشتر می‌شد، در زمان کمتری مسیر و فاصلهٔ بین دو مدرسه را طی می‌کردیم. در نهایت در این مسابقه دانش‌آموزی برنده شد که با سرعت بیشتر و زمان کمتر مسافت پنج کیلومتر را طی کرد. در طول زندگی، پیوسته به معادله‌هایی برمی‌خوریم که مجبوریم برای متغیرهای مجهول آن‌ها، مقدارهایی را محاسبه و یا انتخاب کنیم و به جای آن‌ها قرار دهیم. در نتیجهٔ این محاسبه و انتخاب ما، جوابی برای این معادله‌ها حاصل می‌شود. اگر انتخاب و محاسبهٔ درستی داشته باشیم، معادله به تساوی درستی تبدیل می‌شود و در غیر این‌صورت معادله نادرست خواهد شد. بنابراین متغیرها مشخصه‌هایی هستند که می‌توانیم مقدارهای متفاوتی را به جای آن‌ها قرار دهیم؛ مانند پاسخ این سؤال‌ها:

● نام و نام خانوادگی شما چیست؟ ● چند سال دارید؟ ● قدتان چند سانتی‌متراست؟ ● درآمد ماهانهٔ خانوادهٔ شما چقدراست؟ ● اهل کدام شهر و استان هستید؟
● نمرهٔ درس ریاضی‌تان در نیم‌سال گذشته چند شده است؟ ● خانه‌تان چند متر است؟ و سؤال‌های دیگر.

به طور قطع پاسخ هر کدام از شما به این سؤال‌ها متفاوت است. اگر برای پاسخ‌هایتان مربع‌های توخالی‌در نظر بگیریم، پاسخ‌های هر کدام از شما برای پرکردن این خانه‌های خالی متفاوت خواهد بود. این خانه‌های خالی که شما پر می‌کنید، متغیر هستند. به بیانی ساده‌تر، متغیرها کمیت‌هایی قابل تغییر هستند. در ریاضیات متغیرها از اجزای اصلی جبر هستند. در یک معادله و یا یک عبارت جبری، به جای یک مقدار عددی، مجهول قرار می‌گیرد. در جبر، متغیرها را با نمادهایی به صورت حرف انگلیسی نشان می‌دهند. به معادلهٔ $x+8=15$ دقت کنید. در این معادله متغیر x است. شما به جای متغیر x هر مقداری را می‌توانید بگذارید، اما مقداری که معادله را به تساوی درستی تبدیل می‌کند، عدد ۷ است.

دقت کنید که در این معادله، مقدارهای ۸ و ۱۵ ثابت هستند و x متغیر است. متغیرهای رایج مورد استفاده در ریاضی و جبر عبارت‌اند از حرف‌هایی مانند x، y، z و ... که مجهول هستند و عددهای واقعی به جای آن‌ها قرار می‌گیرند. علاوه بر x، y، z و ... متغیرهای دیگری هم وجود دارند مانند: t که متغیر زمان است، v متغیر سرعت، r متغیر شعاع، s طول قوس است و ... . در ریاضی و جبر ثابت‌ها در مقابل متغیرها قرار دارند. ثابت‌ها مقدارهایی هستند که تغییر نمی‌کنند؛ مثل پهنا و بلندی منارجنبان، طول یک متر، یک درجهٔ سانتی‌گراد و یا یک کیلوگرم. اما متغیرها همان‌طور که از اسمشان معلوم است، تغییر می‌کنند. از طرف دیگر، در ریاضی دو نوع متغیر وجود دارند: «متغیر مستقل» و «متغیر وابسته». متغیر مستقل متغیری است که توسط شما انتخاب می‌شود و اختیارش در دست شماست. اما متغیر وابسته به متغیر مستقل بستگی دارد. یعنی با کم و زیادکردن متغیر مستقل آن هم تغییر می‌کند. **مثلاً در مسابقهٔ دوچرخه‌سواری، «سرعت رکاب‌زدن» در اختیار شماست که متغیری مستقل است. اما «سرعت دوچرخه» و «زمان طی مسیر» به سرعت رکاب زدن بستگی دارد و بنابراین متغیری است وابسته. همچنین، شور، بی‌نمک، تند، خوش‌مزه و بی‌مزه بودن آشی که شما می‌پزید، متغیرهای وابسته به نمک، فلفل، ادویه و موادی هستند که شما با اختیار خودتان و به میزان دل‌خواه و مستقل درون آش می‌ریزید. پس ادویه‌ها را به مقداری بریزید که آشی خوش‌مزه بپزید.**



محمود نصیری

مفهوم‌های هندسی و حل مسئله

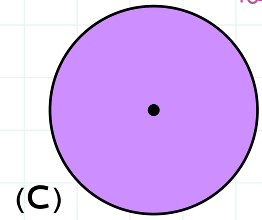
تقارنِ دَورانی

اشاره

در قسمت قبل با تعریف تقارن به‌عنوان یک تبدیل طولپا آشنا شدیم. تقارن خطی را نیز تعریف و مثال‌هایی از آن بیان کردیم. در این بخش با نوع دیگری از تقارن که به «تقارن دورانی» یا «تقارن چرخشی» معروف است، آشنا می‌شویم. سپس سعی می‌کنیم مثال‌های متفاوتی همراه با حل‌های متنوع از آن‌ها بیان کنیم.

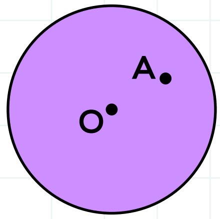
گفتیم تقارن تبدیلی است که تحت آن شکل بر خودش منطبق می‌شود. وقتی شکلی دارای تقارن خطی است، این شکل دو نیمه دارد که هر نقطهٔ یک نیمه، تحت بازتاب نسبت به خط تقارن، بر نیمهٔ دیگر واقع می‌شود. در بخش قبل توضیح دادیم که علاوه بر تقارن خطی که به وسیلهٔ بازتاب یک شکل بر خودش منطبق می‌شود با چرخاندن یا همان دوران نیز می‌توان یک شکل را بر خودش منطبق کرد. همهٔ نقطه‌های روی و درون یک دایره، یک «ناحیهٔ دایره‌ای» نامیده می‌شود. به آن «دیسک» نیز می‌گویند (شکل ۱).

شکل ۱



اگر این دیسک را به اندازهٔ هر زاویهٔ دلخواه به دور مرکز آن بچرخانیم، یا در اصطلاح ریاضی دوران دهیم، در این صورت شکل همواره بر خودش منطبق می‌شود. یعنی با دورانی به اندازهٔ هر زاویهٔ دلخواه چنین اتفاقی رخ می‌دهد. اکنون پرسشی را مطرح می‌کنیم: توجه داریم که در این دوران‌ها دیسک بر خودش منطبق می‌شود، اما ممکن است هر نقطه روی خود آن نقطه واقع نشود. مثلاً اگر A نقطهٔ معینی روی این دیسک باشد (شکل ۲)، با هر دورانی نقطهٔ A روی خودش واقع نمی‌شود.

شکل ۲



اما دوران‌هایی هم وجود دارند که سبب می‌شوند، هر نقطهٔ دیسک مانند A بر خودش منطبق شود. آیا می‌توانید آن‌ها را مشخص کنید؟

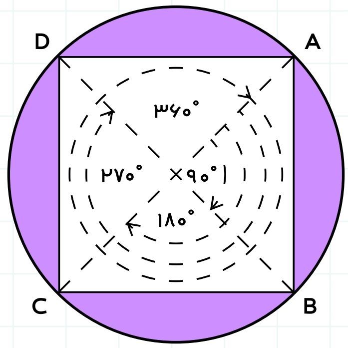
یعنی: «دیسک را گرد مرکز آن چقدر بچرخانیم تا نقطهٔ A دوباره روی خودش واقع شود؟»

این چرخاندن یا دوران دادن اگر یک دور کامل، دو دور کامل و به‌طور کلی هر تعداد دور کامل باشد، از نظر ریاضی دوران به اندازه $1\times360^\circ$، $2\times360^\circ$، $3\times360^\circ$ و کلاً $k\times360^\circ$ است، که k برابر ۱، ۲، ۳ و ... خواهد بود.

بنابراین، طبق تعریفی که از تقارن کردیم، این دوران‌ها نیز یک تقارن شکل هستند. حال به جای یک دیسک شکل ۳ را در نظر می‌گیریم که شامل یک دایره و یک مربع است با مجموعه نقطه‌های بین آن‌ها دو قطر مربع که دو قطر دایره نیز هستند، بر هم عمودند. این

شکل را گرد مرکز دایره که همان مرکز مربع نیز هســـت، در جهت ســاعت‌گرد دوران می‌دهیم. آیا مانند دیسک شکل ۱ در هر دورانی شکل ۳ بر خودش منطبق می‌شود؟

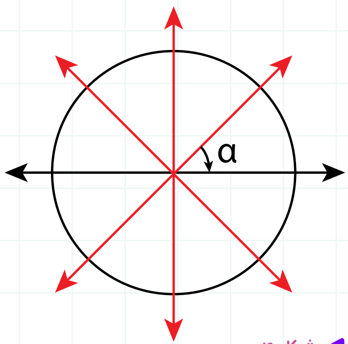
شکل ۳



با کمی دقت مشاهده می‌کنیم که چنین نیســت. فقط با دوران‌های به اندازه‌های ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰° و ۳۶۰° این شکل بر خودش منطبق می‌شود.
پس طبق تعریف، هریک از این دوران‌ها را یــک تقارن دورانی یا چرخشــی این شکل می‌نامیم.
اکنون قبل از آنکه به مثال‌های بیشتری بپردازیــم، اجازه بدهیــد تعریف تقارن دورانی را بیان کنیم:

تعریف: هرگاه در صفحهٔ شکل F، دوران R به مرکز O و زاویه به اندازهٔ α را داشته باشیم که: $0<\alpha\leq 360^\circ$ اگر: R(F)=F، یعنی دوران‌یافتهٔ F در دوران بــه مرکــز O و انــدازهٔ α بــر خودش منطبــق شــود، در این صورت R را یک تقــارن دورانـــی یا پیچشی شکل F می‌نامیم.

با توجــه به این تعریــف می‌توان گفت دایره و دیسک بی‌شــمار تقارن دورانی دارنــد، زیرا با هر زاویه بــه اندازهٔ α که: $0<\alpha\leq 360^\circ$، در دورانی به زاویهٔ α و به مرکز O، مرکز این دایره یا دیسک بر خودش منطبق می‌شود (شکل ۴).
البتــه با توجه به تعریــف تقارن خطی، دایره یا دیسک بی‌شمار تقارن خطی نیز دارد.



شکل ۴

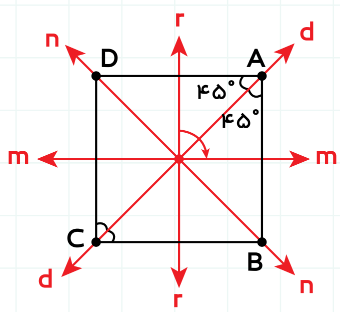
هر خط شامل یک قطر دایره یا دیسک، یک تقارن خطی آن است و هر دوران که مرکز آن روی مرکز دایره یا مرکز دیسک باشد و با هر زاویهٔ α که: $0<\alpha\leq 360^\circ$ یک تقارن دورانی دایره و دیسک است.

بنابراین:

هر دایره یا دیسک بی‌شمار تقارن خطی و دورانی دارد.

اکنون دوباره بــه مربع برمی‌گردیم. فکر می‌کنید مربع چند تقارن خطی و چند تقارن دورانی دارد؟

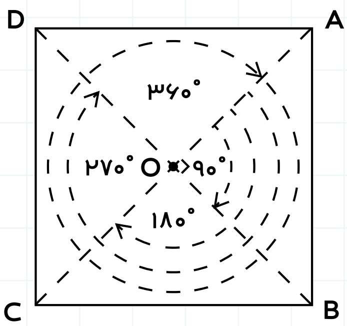
شکل ۵



در شکل ۵ خطهای d و n شامل قطرهای مربع هستند. آیا با تا کردن صفحهٔ کاغذ روی این دو خط، یک نیمهٔ مربع بر نیمهٔ دیگر آن منطبق می‌شود؟ چرا؟ به غیر از اینکه به‌طور شهودی و همچنین با انجام آن به‌طــور عملی می‌توانید این انطباق را نشــان دهید، آیا با یک استدلال ریاضی هم می‌توانید آن را ثابت کنید؟ می‌توانید از هم‌نهشتی دو مثلث استفاده کنید. آیا می‌توانید نشــان دهید رأس B بازتاب یا قرینه رأس D نســبت به بازتاب با خط d است؟
بنابرایــن، خطهــای d و n که شــامل قطرهای مربع هستند، هرکدام تقارن‌های خطی مربع محسوب می‌شوند. به همین ترتیب، خطهــای r و m که هرکدام به ترتیب از وسطهای دو ضلع مقابل مربع می‌گذرنــد نیز تقارن‌هــای خطی مربع هستند. بنابراین:

مربع دارای چهار تقارن خطی است.

حال به ســراغ تقارن‌هــای دورانی مربع می‌رویم. با توجه بــه توضیح‌های قبلی فکر می‌کنم می‌توانیم تقارن‌های دورانی مربع را پیدا کنیم. با یک دوران به اندازهٔ زاویــهٔ ۹۰°، گرد مرکز مربع و در جهت ساعت گرد، رأس A روی رأس B و رأس B روی رأس C واقع می‌شود (شکل ۶).



شکل ۶

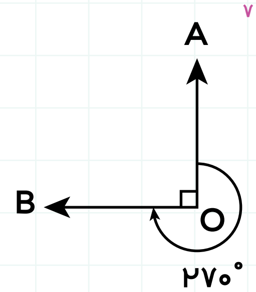
پس ضلع AB مربع روی ضلع BC واقع می‌شــود. به همین ترتیب رأس C روی رأس D و بالاخــره رأس D روی A واقع می‌شــود. در نتیجه ضلع BC روی ضلع CD، ضلــع CD روی ضلع DA و ضلع DA روی ضلع AB قرار می‌گیرد. با این دوران، مربع بر خودش منطبق می‌شود. یعنی دوران ۹۰° گــرد مرکز مربع یک تقارن دورانی آن است که آن را به صورت R_{90° نشان می‌دهیم. برای آن می‌توانید یــک اثبــات ریاضــی نیز بیــان کنید. می‌توانید از اینکه: OA=OB=OC=OD و اندازهٔ زاویه‌ها کمک بگیرید.
به همین ترتیب با یــک دوران گرد O، مرکز مربــع و زاویهٔ ۱۸۰° نیز این مربع بر خــودش منطبق می‌شــود. رأس C دوران‌یافتهٔ رأس A و رأس D دوران‌یافتهٔ رأس B گــرد مرکز مربع و با زاویه‌ای به اندازهٔ ۱۸۰° است.

شاید با زاویه‌های با اندازه‌های بزرگ‌تر از 180° کمتر آشنایی داشته باشید. در هندسه معمولاً با این نوع زاویه‌ها کمتر سروکار داریم. اما در درسی به نام «مثلثات» که بعداً با آن آشنا می‌شوید، زاویه‌ها به اندازه‌های متفاوت تعریف می‌شوند. حتی زاویه‌هایی به اندازه‌های بزرگ‌تر از 360° داریم. همهٔ این زاویه‌ها به کمک دوران تعریف می‌شوند. بعداً با زاویه‌های مثلثاتی با اندازه‌های منفی هم آشنا می‌شوید که به جهت چرخیدن بستگی دارند. مثلاً قرارداد می‌کنند که چرخیدن یا دوران در جهت ساعت‌گرد را مثبت و در جهت خلاف ساعت‌گرد را جهت منفی اختیار کنند.

چنانچه در تعریف بیان کردیم، در تقارن‌های دورانی فقط با زاویه‌های بزرگ‌تر از صفر و کوچک‌تر یا مساوی 360° سروکار داریم.

برای آنکه در مربع با تقارن 270° بهتر آشنا شوید، تصور کنید سه دوران به اندازهٔ 90° را پشت سر هم انجام داده‌اید: $270^\circ=3\times 90^\circ$.

شکل ۷



از نظر هندسی شما یک زاویه به اندازهٔ 90° را مشاهده می‌کنید (شکل ۷)، اما از نظر دوران یا چرخیدن، می‌توانید تصور کنید که به اندازهٔ 270° در جهت ساعت‌گرد نقطهٔ A چرخیده یا دوران کرده تا بر نقطهٔ B منطبق شده است. حال اگر در خلاف جهت ساعت‌گرد حرکت کنید، با زاویه‌ای به اندازهٔ 90° می‌توانید A را بر B منطبق کنید اما برای آنکه این دو دوران به‌طور مجزا مشخص باشند، برای آن‌ها جهت قائل می‌شویم. پس می‌توانیم قرارداد کنیم که نقطهٔ A با دورانی به اندازهٔ -90° بر B منطبق می‌شود. در واقع دوران به اندازهٔ 270° در جهت ساعت‌گرد معادل دوران به اندازهٔ 90° در جهت خلاف ساعت‌گرد یا -90° است، به همین اندازه توضیح بسنده می‌کنیم و وارد موضوع زاویه‌هایی از این نوع که جهت‌دار با اندازهٔ منفی هستند، نخواهیم شد.

بالاخره مانند دوران 270° می‌توانیم دورانی به اندازهٔ 360° یا همان یک دور کامل را نیز تعریف و توجیه کنیم. با توجه به آنچه در بالا توضیح دادیم، مربع چهار تقارن دورانی نیز دارد که آن‌ها را به صورت‌های زیر نشان می‌دهیم:

R_{90°، R_{180°، R_{270°، R_{360°

پس مربع به‌طور کلی دارای هشت تقارن است. به این معنی که مربع را می‌توانیم به وسیلهٔ هشت تبدیل طولپا بر خودش منطبق کنیم.

تقارن همانی

اگر مثلث غیرمشخصی را که هیچ دو ضلع آن هم‌اندازه نیستند بررسی کنیم، پی می‌بریم که هیچ تقارن خطی ندارد، اما دارای تقارن دورانی 360° است. اکنون به یک پرسش اساسی می‌رسیم: «آیا هر شکلی می‌تواند دارای تقارن 360° باشد؟»

جواب به این پرسش ساده است: بله با دوران 360° هر شکلی بر خودش منطبق می‌شود. در واقع یک دور کامل است. این در زبان عامیانه نیز گاهی به کار می‌رود که دوباره به جای اول برگشتیم. بنابراین همهٔ شکل‌ها می‌توانند، دارای تقارن دورانی 360° باشند. در واقع این تقارن با تقارن‌های دیگر یک تفاوت دارد. آیا می‌توانید این تفاوت را بیان کنید؟

در تقارن‌های به غیر از 360° شکل بر خودش منطبق می‌شود، اما هر نقطهٔ شکل بر خودش منطبق نمی‌شود. در حالی که در تقارن 360°، هر نقطهٔ شکل بر خودش منطبق می‌شود. بنابراین تقارن 360° را «تقارن همانی» نام‌گذاری می‌کنیم. همانی به معنی اینکه هر نقطه بر خود همان نقطه منطبق می‌شود. پس تعریف زیر را داریم:

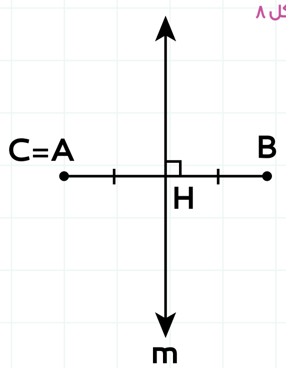
تعریف: تقارنی را که هر نقطهٔ شکل بر خود آن نقطه منطبق شود، تقارن همانی می‌نامیم.

بنابراین، تقارن دورانی 360° یک تقارن همانی است.

آیا به غیر از تقارن دورانی 360° تقارن همانی دیگری می‌شناسید؟ دو تبدیل طولپای انتقال و بازتاب را در نظر بگیرید. آیا حالتی وجود دارد که این تبدیل‌ها همانی شوند. با کمی تفکر درمی‌یابیم، انتقال به اندازهٔ بردار صفر این ویژگی را دارد. زیرا انتقال به اندازهٔ بردار صفر هر نقطه را به خود آن نقطه تبدیل می‌کند. به بیان دیگر، انگار هیچ حرکتی صورت نگرفته است. اما این موضوع در مورد بازتاب جذابیت بیشتری دارد.

بازتاب S_m را در نظر می‌گیریم (شکل ۸). اگر نقطهٔ A در صفحهٔ خط m مفروض باشد، بازتاب نقطهٔ A را نسبت به m نقطهٔ B می‌نامیم. اکنون بازتاب نقطهٔ B نسبت به m چیست؟

شکل ۸



مسلماً چون: $AH=HB$، پس اگر بازتاب نقطهٔ B را نسبت به m پیدا کنیم، دوباره همان خود نقطهٔ A است: $B=S_m(A)$ و $C=S_m(B)$.

در نتیجه: $A=C$. یعنی C بر A منطبق شده است.

این یعنی دو بار بازتاب پیدا کردن نسبت به m، تبدیل همانی است. بنابراین، S_m و به دنبال آن دوباره S_m نیز تقارن همانی است.

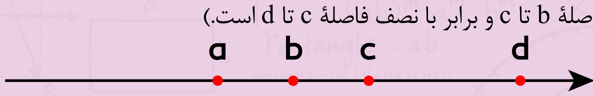
در تقارن‌های هر شکل همواره تقارن همانی را نیز در نظر می‌گیریم. در قسمت بعدی به تعیین تقارن‌های بعضی شکل‌های معروف به ویژه چندضلعی‌ها می‌پردازیم.

چکش‌کاری استدلال

(قسمت دوم)

داود معصومی‌مهوار

من: جلسهٔ پیش به این پرسش از آزمون پرداختیم:
روی محور عددها جای چهار عدد a، b، c و d نسبت به هم در شکل زیر مشخص و نمایش داده شده است. جای میانگین آن‌ها را روی همین محور تعیین کنید و برای ادعای خود دلیل بیاورید. (فاصلهٔ a تا b برابر با فاصلهٔ b تا c و برابر با نصف فاصلهٔ c تا d است.)

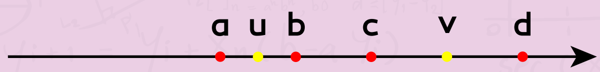


ندا به کمک من عدد اول را a گرفت و دومی را $b=a+s$ و سومی را $c=a+2s$ و بالاخره عدد چهارم را $d=a+4s$ گرفت. سپس میانگین را حساب کرد:

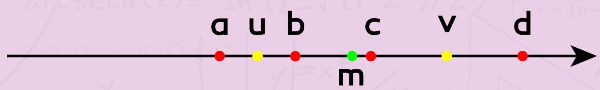
$$\text{میانگین} = \frac{(a)+(a+s)+(a+2s)+(a+4s)}{4} = \frac{4a+7s}{4} = a+s+\frac{3s}{4}$$

او به سادگی توانست حکم کند که میانگین به مقدار $\frac{s}{4}$ از عدد سوم، یعنی $a+2s$، کوچک‌تر است. اما قرار شد باز هم به این مسئله بپردازیم.

زهرا: بعد از بحث جلسهٔ پیش من راه‌حل کوتاهی پیدا کردم. خیلی ساده، میانگین a و b را u، و میانگین c و d را نیز v نامیدم. فهمیدیم که عدد u وسط a و b جای گرفته و عدد v نیز وسط c و d نشسته است.



حالا تلاش می‌کنم جای میانگین u و v را روی محور پیدا کنم. این میانگین را m می‌نامم. اگر فاصلهٔ دو عدد a و b را مانند گذشته s بگیریم، فاصلهٔ u تا v برابر با $\frac{5}{2}s$ است. پس وسط آن دو که جای m است، باید $\frac{5}{4}s$ از هر کدام فاصله داشته باشد. یعنی m باید از v به اندازهٔ $\frac{5}{4}s$ عقب‌تر باشد. از آنجا که c به اندازهٔ s از v عقب‌تر است، پس m باید از c به اندازهٔ $\frac{1}{4}s$ عقب‌تر باشد. این همان چیزی است که با استدلال‌های قبلی دریافته بودیم.



ملیکا: زهرا میانگین دو عدد را درست وسط آن دو گرفته است. این با تمام آنچه جلسهٔ پیش گفتیم مخالف است. یادم هست که شما تأکید کردید که میانگین ممکن است هر جایی قرار بگیرد. تنها می‌توانیم مطمئن باشیم که از بزرگ‌ترین عدد کوچک‌تر است و از کوچک‌ترین عدد نیز بزرگ‌تر است.

من: آنچه جلسهٔ پیش گفتیم دربارهٔ میانگین چند عدد بود نه دو عدد. دربارهٔ دو عدد زهرا درست حکم کرده است و محض احتیاط از او می‌خواهم که این بخش از استدلالش را کامل کند و توضیح دهد.

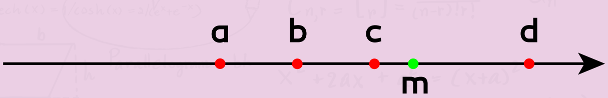
زهرا: میانگین دو عدد a و b بنا بر تعریف $\frac{a+b}{2}$ است که می‌توان آن را به‌صورت $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{a}{2}-\frac{a}{2}$ یا $a+\frac{b-a}{2}$ نوشت. بنابراین میانگین دو عدد a و b درست به اندازهٔ نصف اختلاف a و b، از a بزرگ‌تر است.

من: استدلال زهرا تقریباً درست است. یک دقیقه وقت دارید تا فکر کنید و آن را تصحیح کنید.

الهام (پس از چندی): فکر می‌کنم زهرا بی‌آنکه بگوید، فرض کرد که a از b کوچک‌تر است و آنچه را در شکل‌های قبلی دیده بود، فرض گرفت. به همین دلیل تصور کرد که $\frac{b-a}{2}$ همیشه عددی مثبت است و بنابراین حکم کرد که میانگین، یعنی $a+\frac{b-a}{2}$ به مقدار $\frac{b-a}{2}$، یعنی نصف اختلاف دو عدد، از عدد کوچک‌تر یعنی a، بزرگ‌تر است. درصورتی‌که ممکن است a از b بزرگ‌تر باشد و در این حالت $\frac{b-a}{2}$ عددی منفی است و باید حکم کرد که میانگین به مقدار نصف اختلاف دو عدد، از عدد بزرگ‌تر یعنی a، کوچک‌تر است.
یعنی باز هم می‌فهمیم که میانگین درست وسط دو عدد جای می‌گیرد و اگرچه باز هم به همان نتیجهٔ قبلی که زهرا گفت می‌رسیم، ولی زهرا در استدلال خود باید همهٔ فرض‌هایش را به روشنی بیان می‌کرد.

من: الهام عالی استدلال کرد، ولی هنوز استدلال اصلی زهرا ناقص است. راه‌حل زهرا بسیار ساده و زیباست، ولی او بخش مهمی از استدلالش را بیان نکرده است. باز هم وقت دارید استدلال زهرا را برای یافتن جای m نقد کنید.

پریسا (پس از دو دقیقه): من نمی‌دانم ایراد استدلال زهرا کجاست، ولی همان استدلال را با کمی تغییر در همین مسئله به کار بردم و نتیجه‌ای عجیب گرفتم! من اول سراغ میانگین a و c رفتم و دیدم که میانگین آن دو خود b است. میانگین خود b و b این بار به‌عنوان میانگین دو عدد قبلی نیز به روشنی خود b است. بالاخره میانگین b و d هم به‌عنوان میانگین قبلی‌ها عدد m است که از c بزرگ‌تر است؛ زیرا باید درست وسط b و d قرار داشته باشد.



زهرا: من الان فهمیدم که بخش مهمی از استدلالم را نگفته‌ام. من باید

این‌جوری آغاز می‌کردم که:

$$\frac{a+b+c+d}{۴}=\frac{\frac{a+b+c+d}{۲}}{۲}=\frac{\frac{a+b}{۲}+\frac{c+d}{۲}}{۲}=\frac{u+v}{۲}$$

برابری‌های بالا نشان می‌دهند که چرا من می‌توانم به جای محاسبهٔ میانگین چهار عدد، ابتدا میانگین دو تا از آن‌ها را حساب کنم و مثلاً آن را u بنامم. سپس میانگین دو تای دیگر را حساب کنم و آن را v بنامم. در آخر میانگین u و v را حساب کنم و مطمئن باشم که این میانگین، میانگین چهار عدد ابتدایی خواهد بود.

پریسا: خب چرا همین کار با ترتیب دیگر به نتیجهٔ دیگری رسید؟ من هم همین کار را کردم!

اعظم: پریسا تو همین کار را نکردی! تو میانگین a و c را حساب کردی و برابر با b شد. یعنی توجه کردی که $\frac{a+c}{۲}=b$ است. سپس میانگین b و d را حساب کردی. پس داریم $\frac{b+d}{۲}=k$ حالا انتظار داری که این k میانگین همان چهار عدد باشد. ولی با جاگذاری می‌بینیم که:

$$k=\frac{b+d}{۲}=\frac{\frac{a+c}{۲}+d}{۲}=\frac{\frac{a+c+۲d}{۲}}{۲}=\frac{a+c+۲d}{۴}$$

یعنی آنچه محاسبه کرده‌ای میانگین a، c، d و d است. می‌توانستی شبیه زهرا پیش بروی. یعنی اول میانگین a و c را محاسبه کنی و مثلاً آن را u بنامی. بعد میانگین b و d را v بنامی و در آخر میانگین u و v را پیدا کنی؛ این‌جوری:

$$m=\frac{a+b+c+d}{۴}=\frac{\frac{a+c}{۲}+\frac{b+d}{۲}}{۲}=\frac{u+v}{۲}$$

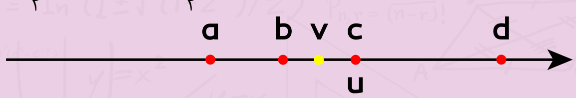
اما در این مسئله، از آنجا که b واقعاً میانگین a و c است، داریم:

$$m=\frac{a+b+c+d}{۴}=\frac{b+\frac{b+d}{۲}}{۲}$$

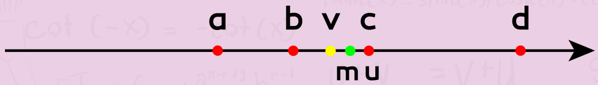
یعنی می‌توانستی وسط b و d را پیدا کنی و مثلاً v بنامی و بعد وسط v و b را پیدا کنی و ادعا کنی که جای میانگین چهار عدد مسئله را پیدا کرده‌ای. به سادگی می‌توان بررسی کرد که این راه همان نتیجهٔ قبلی را می‌دهد.

مریم: زهرا ابتدا میانگین a و b را حساب کرد. اعظم هم راه پریسا را اصلاح کرد و در نتیجه ابتدا میانگین a و c را حساب کرد. اما شاید بهتر باشد کار دیگری بکنیم و تنها راه باقی‌مانده را آزمایش کنیم. یعنی ابتدا میانگین a و d را حساب کنیم و آن را u بنامیم و البته حواسمان هست که این u همان c است؛ زیرا بنا بر فرض‌های مسئله، c درست وسط a و d نشسته است. حالا سراغ میانگین a و c می‌رویم و آن را v می‌نامیم:

$$\frac{a+d}{۲}=u=c\ ,\ \frac{b+c}{۲}=v$$



حالا بنا بر توضیحاتی که زهرا در استدلال کامل خود گفت، کافی است که وسط v و c را پیدا کنیم و مطمئن خواهیم بود که آنجا جای میانگین چهار عدد a، b، c و d روی محور خواهد بود. به‌روشنی هم می‌بینیم که این میانگین یا همان وسط v و c، به اندازهٔ یک‌چهارم فاصلهٔ b و c از عدد c عقب‌تر است.



به این ترتیب مشخص‌کردن جای میانگین ساده‌تر از حالت‌هایی است که زهرا یا پریسا و اعظم انجام داده بودند.

من: خیلی عالی شد. موضوع جالب‌تری خود را نشان داد. ببینید زهرا یک موضوع ساده را نوشت:

$$\frac{a+b+c+d}{۴}=\frac{\frac{a+b+c+d}{۲}}{۲}=\frac{\frac{a+b}{۲}+\frac{c+d}{۲}}{۲}=\frac{u+v}{۲}$$

و نتیجه گرفت که برای محاسبهٔ میانگین چهار عدد کافی است که آن چهار عدد را در دو گروه دو تایی دسته‌بندی کنیم و بعد میانگین هر گروه را بیابیم و در نهایت میانگین آن دو میانگین را محاسبه کنیم. در این صورت می‌توانیم مطمئن باشیم که عدد به دست آمده میانگین چهار عدد نخست خواهد بود. خود او در محاسبه‌هایش a و b را در یک گروه گرفت و خود به خود دو عدد دیگر در گروه بعدی جای خواهند گرفت. پریسا در راه خودش a و c را در یک گروه گرفت. او می‌خواست از این بخش فرض که می‌گفت b از a و c به یک فاصله است استفاده کند تا پیدا کردن a و c ساده و بی‌دردسر پیش برود.
تنها حالت باقی‌مانده این بود که عدد a را با d در یک گروه بگیریم. این حالت هم ساده پیش رفت. زیرا بنا بر فرض‌های مسئله، c درست وسط a و d نشسته است و بنابراین میانگین a و d خود c خواهد بود. بعد هم دیدیم که ادامهٔ محاسبه و استدلال در این حالت از همهٔ حالت‌های دیگر ساده‌تر است. موضوع جالبی که گفتم همین است. وقتی یک استدلال و روش حل درست پیدا می‌کنید، بی‌درنگ آن را ننویسید. ممکن است با کمی دستکاری بتوان همان استدلال را ساده‌تر و روان‌تر نوشت و بیان کرد. الان این یک مورد را دیدید. در آینده کم‌کم موردهای مشابه را گوشزد خواهم کرد.

سایه: وقتی در آزمون با این مسئله روبه‌رو شدم، واقعاً به نظرم سخت و عجیب‌وغریب آمد. جلسهٔ پیش هم با اینکه راه ندا را دیدم، باز هم نظرم عوض نشد. ولی با توجه به راه‌حل‌های امروز می‌توانم بگویم که سؤال بدخیمی نبوده است. البته همچنان نمی‌دانم چرا این چیزها به ذهن خودم نرسید!

من: خوش‌حالم که مسئله را خوش‌خیم می‌بینید و از خود انتظار دارید که راه‌حل‌ها را خودتان بیابید. امیدوارم کم‌کم پیشرفت کنید و چنین روش‌هایی را در ذهن خود بسازید. هنوز با این مسئله کار داریم و به آن خواهیم پرداخت.

برای مطالعهٔ قسمت اول
رمزینه را پویش کنید.

یک مسئله و چند راه‌حل
مجموع عددهای مثلثی

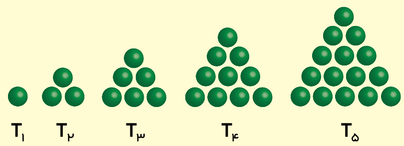
محسن کیخائی، حسین کریمی

عدد مثلثی kاُم که آن را با T_k نمایش می‌دهیم، به این صورت است:

$$T_k = ۱+۲+...+K$$

بنابراین: $T_۱ = ۱$ و $T_۲ = ۱+۲$ و $T_۳ = ۱+۲+۳$ و ...

در نتیجه دنبالهٔ عددهای مثلثی به‌صورت ...,۱,۳,۶,۱۰,۱۵,۲۱ است.
شکل ۱ علت استفاده از عنوان عدد مثلثی در نام‌گذاری این عددها را نشان می‌دهد.



شکل ۱

نکتهٔ ۱: با توجه به رابطه‌ای که از قبل می‌دانید، می‌توان نوشت:

$$T_n = ۱+۲+...+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

مثال۱. حاصل عبارت روبه‌رو را به دست آورید.

$$T_۱ + T_۲ + T_۳ + T_۴ + T_۵ + T_۶ + T_۷ = ?$$

به کمک نکتهٔ ۱ داریم:

$$T_۱ = ۱, T_۲ = ۳, T_۳ = ۶, T_۴ = ۱۰, T_۵ = ۱۵, T_۶ = ۲۱, T_۷ = ۲۸$$

پس حاصل این عبارت برابر است با: ۸۴
واضح است که در این مثال، با افزایش تعداد جمله‌ها، پیداکردن حاصل کاری مشکل و زمان‌بر خواهد بود. با اثبات مسئلهٔ مقابل به راهکاری مناسب برای حل این مشکل خواهیم رسید:

مسئله: نشان دهید:

$$T_۱ + T_۲ + ... + T_n = \frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$$

قبل از پرداختن به اثبات، این رابطه را برای مثال ۱ بررسی می‌کنیم:

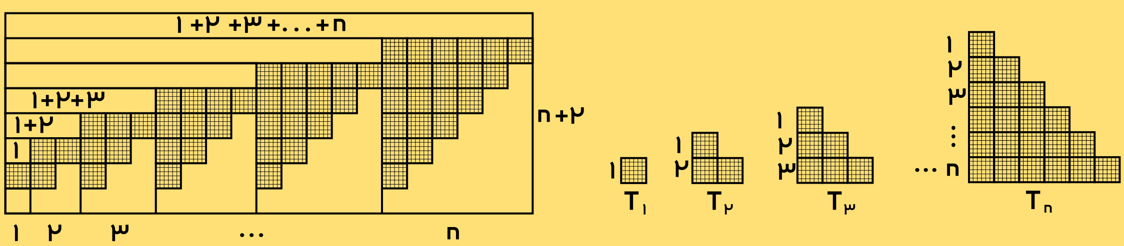
$$T_۱ + T_۲ + ... + T_۷ = \frac{۷(۷+۱)(۷+۲)}{۶} = ۸۴$$

اکنون با سه روش متفاوت مسئلهٔ موردنظر را اثبات می‌کنیم.

روش اول

در شکل ۲، با استفاده از شکل‌های سمت راست، مستطیل را ساخته‌ایم.

شکل ۲



تعداد کل مربع‌های ۱×۱ موجود در این مستطیل از این قرار است:

$$N' = (۱+۲+۳+...+n)(n+۲) = \frac{n(n+۱)(n+۲)}{۲}$$ (بررسی کنید)

با توجه به شکل، مقدار $T_۱ + T_۲ + ... + T_n$ برابر با یک‌سوم این تعداد کل است (چرا؟)، در نتیجه:

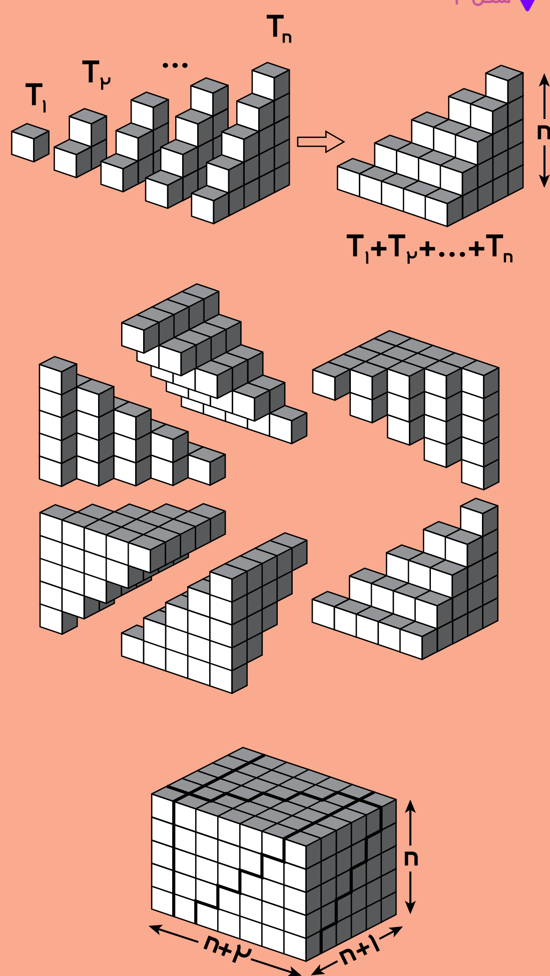
$$T_۱ + T_۲ + ... + T_n = \frac{N'}{۳} = \frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$$

روش دوم

با توجه به شکل ۳ داریم:

$$T_۱+T_۲+\ldots+T_n=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$$

شکل ۳



روش سوم

در شکل ۴، حاصل مجموع این سه قسمت برابر است با: $۳(T_۱+T_۲+\ldots+T_n)$ (چرا؟)

شکل ۴

$$\begin{array}{l} ۱\\ ۱\ \ ۲\\ ۱\ \ ۲\ \ ۳\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ ۱\ \ ۲\ \ \ldots\ \ n-۱\\ ۱\ \ ۲\ \ \ldots\ \ n-۱\ \ n \end{array} + \begin{array}{l} ۱\\ ۲\ \ ۱\\ ۳\ \ ۲\ \ ۱\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ n-۱\ \ n-۲\ \ \ldots\ \ ۱\\ n\ \ n-۱\ \ \ldots\ \ ۲\ \ ۱ \end{array} + \begin{array}{l} n\\ n-۱\ \ n-۱\\ n-۲\ \ n-۲\ \ n-۲\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ ۲\ \ ۲\ \ \ldots\ \ ۲\\ ۱\ \ ۱\ \ \ldots\ \ ۱\ \ ۱ \end{array}$$

اگر اعداد سطرهای این سه قسمت را نظیر به نظیر با هم جمع کنیم، شکل ۵، به دست می‌آید و مجموع عددها در شکل ۵ برابر است با:

$$(n+۲)+۲(n+۲)+۳(n+۲)+\ldots+n(n+۲)=$$

$$(n+۲)(۱+۲+۳+\ldots+n)=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۲}$$

(درستی این قسمت را بررسی کنید)

$$\begin{array}{l} n+۲\\ n+۲\ \ n+۲\\ n+۲\ \ n+۲\ \ n+۲\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ n+۲\ \ n+۲\ \ \ldots\ \ n+۲\\ n+۲\ \ n+۲\ \ \ldots\ \ n+۲\ \ n+۲ \end{array}$$

شکل ۵

بنابراین:

$$۳(T_۱+T_۲+\ldots+T_n)=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۲}$$

$$\Rightarrow T_۱+T_۲+\ldots+T_n=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$$

تمرین

الف) حاصل عبارت روبه‌رو را به دست آورید:

$$T_۱+T_۲+\ldots+T_{۱۲}=?$$

ب) چندمین عدد مثلثی برابر ۶۶۶ است؟

ج) ثابت کنید:

$$T_۱+T_۲+\ldots+T_n=\frac{T_n.(n+۲)}{۳}$$

ایده‌های

بیایید کمی فکر کنیم!

خسرو داودی

کمی فکر کنیم!

یکی از مشـــکلات فعلی کشور ما موضوع اشتغال جوانان است. تعداد زیادی جوان داریم که بعد از فارغ‌التحصیل شدن از مدرسه یا دانشگاه، حتی با مدارک کارشناسی ارشد و دکترا، دنبال کار هستند ولی شغل مناسب پیدا نمی‌کنند. بسیاری از آن‌ها به کارهایی روی می‌آورند و تن می‌دهند که ارتباطی با تحصیلاتشان ندارد. تمام دولت‌ها و دولتمردان سعی کرده‌اند به نوعی این مشکل را حل کنند، ولی تا امروز توفیق زیادی نداشته‌اند. بله این یک واقعیت است. باید به دنبال راه‌هایی برای اشتغال‌زایی بود. اما روی دیگر این سکه هم واقعیتی دیگر است.

چقدر از جوانان تحصیل‌کردهٔ ما بعد از فراغت از تحصیل مهارت‌های لازم را برای کار کردن کسب کرده‌اند؟ برای مثال، یک مهندس بعد از پایان درس‌هایش که غالباً هم به‌صورت نظری بوده است، وارد بازار کار می‌شود، اما کارگران در نوع کاری که انجام می‌دهند از او تبحر بیشتری دارند و به نوعی او را قبول ندارند. تا اینکه به تدریج آن فرد مثل یک کارگر کار کند و تجربه پیدا کند و به علمی که خوانده است مرتبط شود.

تعداد زیادی از جوانان ما دنبال کار راحت، پردرآمد و پشت‌میزنشـــینی هستند. برای مثال، شغل‌های زیادی در مکان‌های صنعتی و منطقه‌های آزاد و نفت‌خیز وجود دارند، اما اغلب جوانان حاضر نیستند برای کار به آن منطقه‌ها بروند. در حال حاضر، پروژه‌های

درآمـــــــــدزا

عظیم گاز و پتروشیمی در منطقه‌های جنوبی، مثل «عسلویه» فعال هستند که نیازمند مهندسان تحصیل‌کرده‌اند و حقوق خوبی هم می‌دهند، اما عده‌ای به این کارها، به‌علت سختی‌کار، گرمای هوا، دوری از خانه و مسئله‌هایی مانند آن، تن نمی‌دهند. از طرف دیگر، تحصیل‌کرده‌های ما آمادگی ایجاد شغل و راه‌اندازی کار جدید (استارت‌آپ) را هم ندارند؛ کارهایی که ممکن است با سرمایه‌ای اندک آغاز شوند و به تدریج توسعه پیدا کنند. به همین دلیل است که در دورهٔ دوم متوسطه درسی به نام «کارآفرینی» تعریف شده است تا دانش‌آموزان ما کم‌کم با این مهارت آشنا شوند و پس از اتمام درس و مدرسه بتوانند وارد کاری شوند و یا کاری را خودشان آغاز کنند. با این مقدمه بیایید به یک خبر توجه کنید و با محاسبه‌های ریاضی به جذابیت آن پی ببریم.

محاسبه کنیم!

آیا گاهی شده است که فکر کنید بدون اینکه کار کنید پول دربیاورید؟ شوخی نمی‌کنم! منظور دزدی کردن و این حرف‌ها نیست. یعنی برای انجام کار کم‌ارزشی پول دریافت کنید و برای خودتان شغلی دست و پا کنید. به این خبر توجه کنید:

«آقای **شوجی موریموتو**، مرد ۳۸ سالهٔ اهل توکیوی ژاپن، دقیقاً همین شغل نامتعارف را دارد و برای انجام کارهای کم‌ارزش، دستمزد می‌گیرد.» کار او فقط همراهی با مشتریانش است. مشتریان او برای اینکه از تنهایی فرار کنند یا کسی را کنار خود داشته باشند، او را استخدام می‌کنند. از رفتن به ایستگاه قطار برای دست تکان دادن برای یک غریبهٔ نیازمند توجه تا رفتن به پارک برای بازی الاکلنگ. او برای همراهی با هر مشتری ۱۰ هزار ین ژاپن معادل ۷۱ دلار در هر جلسه دریافت می‌کند. آن‌طور که خودش می‌گوید: او در چهار سال گذشته چهارهزار بار به مشتریانش خدمات ارائه کرده است.

ماشین‌حساب را بیاورید و آماده باشید.

درآمدچهارسال (ین) ۴۰۰۰۰۰۰۰=۱۰۰۰۰ین×۴۰۰۰جلسه

درآمد چهارسال (دلار) ۲۸۴۰۰۰ = ۷۱ دلار×۴۰۰۰جلسه

درآمد یک سال (دلار) ۷۱۰۰۰ = ۴ ÷ ۲۸۴۰۰۰

به فرض اینکه هر دلار ۴۵۰۰۰ تومان باشد، خواهیم داشت:

۳۱۹۵۰۰۰۰۰۰ = ۴۵۰۰۰ × ۷۱۰۰۰

درآمد یک سال ۳۱۹۵۰۰۰۰۰۰ (تومان)

۲۶۶۲۵۰۰۰۰=۱۲÷ ۳۱۹۵۰۰۰۰۰۰

درآمد ماهانه: ۲۶۶۲۵۰۰۰۰ (تومان)

باورتان می‌شود؟ در آمد ماهانهٔ حدود ۲۶۶ میلیون تومانی؟! برای هیچ! فقط برای همراهی کردن؟! به نظرم خبر جذابی است. از این نظر که چه راه‌هایی برای کارآفرینی وجود دارند و با چه ابتکارهایی می‌توان چه درآمدهایی کسب کرد.

بیشتر فکر کنیم!

این خبر و محاسبهٔ قبل دو نکتهٔ مهم را به ما یادآوری می‌کند. نکتهٔ اول این است که در دنیای امروز و با توجه به گسترش روزافزون امکانات و ابزارهای ارتباطی و شبکه‌های اجتماعی، راه‌های جدیدی برای ایجاد اشتغال و کسب درآمد به وجود آمده‌اند. عده‌ای با تولید محتوا و جمع کردن تعداد زیادی دنبال‌کننده در فضای مجازی، با گرفتن تبلیغ درآمدزایی می‌کنند. بعضی‌ها در وبگاه‌هایی مثل «آپارات» محتواهای مناسب تولید می‌کنند و بعد از آنکه محتوایشان زیاد دیده شد، مبالغی را از وبگاه دریافت می‌کنند. عده‌ای با بازی کردن هم پول در می‌آورند. آن‌ها امکانات و ابزارهای بازی را خرید و فروش می‌کنند، یا روش‌های بازی کردن خودشان را به نمایش می‌گذارند و یا آموزش می‌دهند و درآمدزایی می‌کنند. خلاصه اینکه راه‌های زیادی در دنیای ارتباطات امروزی برای کسب درآمد به وجود آمده‌اند. آقای شوجی هم از همین ابزارهای ارتباطی استفاده کرده و با معرفی خود به‌عنوان یک همراه، به نیاز هم‌وطنانش در ژاپن پاسخ داده و برای خودش اشتغال‌زایی کرده است. درآمد خوبی هم دارند.

نکتهٔ دوم این است که مردم ژاپن چقدر احساس تنهایی و خلاء دارند که به یک همراه برای کارهایشان نیازمند می‌شوند. در اینجا نمی‌خواهیم به قضاوت بنشینیم و این موضوع را در جامعهٔ ژاپن تحلیل کنیم. نکتهٔ قابل توجه برای ما این است که به‌منظور ایجاد اشتغال در کشور خودمان باید به نیازهای مردم و احتیاجاتشان، متناسب با جامعه و فرهنگ خودمان فکر کنیم، یعنی اگر کسی بخواهد مثل آقای شوجی چنین کسب‌وکاری را در ایران راه‌اندازی کند، ممکن است موفق نباشد؛ چون فرهنگ مردم ما با ژاپنی‌ها متفاوت است.

اکنون با این دو نکته کمی بیشتر فکر کنید. آیا جوانان ما برای کار کردن یا کارآفرینی در دنیای امروز آماده می‌شوند؟ آیا به درستی نقش خود را در این خصوص بازی می‌کنند؟ یا به بهانهٔ کنکور، کارآفرینی را کنار می‌گذارند؟ آیا دانشگاه‌های ما چنین مهارت‌هایی را به دانشجویان می‌آموزند؟ خودِ ما چقدر ایده و ابتکار داریم؟ چقدر خلاقیت داریم؟ بیایید کمی فکر کنیم!

• محمدحسین دیزجی

شعبدهٔ ریاضیات در زیباسازی

گفت‌وگو با علیرضا محمدی‌اقدم، مخاطب دیروز و طراح تزیینات و نماسازی ساختمانِ امروز

بارها برای ما پیش آمده که هنگام گذر از کنار یک ساختمان، چنان محو نمای زیبای آن شده‌ایم که دقایقی را به تماشا ایستاده‌ایم. شاید مصالح، آجرها، سنگ‌ها و رنگ‌های مورد استفاده در آن کار خیلی هم خاص و عجیب نبوده‌است و برای ساختمان‌های اطراف آن نیز از همان مصالح استفاده شده باشد. پس تفاوت در کجاست؟ تفاوت در طراحی و اجرای همان مصالح است. کسانی که در کار طراحی نما و تزیینات داخل یا خارج یک ساختمان کار می‌کنند، اگر به‌درستی بتوانند از شکل‌ها و طرح‌های گوناگون استفاده کنند، این حیرت و شگفتی را رقم می‌زنند. اگر کمی حوصله به خرج دهیم درمی‌یابیم که این شگفتی در طراحی و استفاده از آجر یا سنگ، ریشه در دانش ریاضی دارد. در مورد همین موضوع به دیدار **علیرضا محمدی‌اقدم** رفتیم که در این حرفه فعالیت می‌کند و از او در مورد جایگاه ریاضیات در حرفه‌اش پرسیدیم. او نقشه‌کشی خوانده و با معماری هم آشناست. همچنین تجربه‌های خوبی در غواصی، کار در ارتفاع و نصب دوربین‌های مداربسته دارد. با هم این گفت‌وگو را می‌خوانیم.

***

● **شاید برای مخاطبان ما جالب باشد که بدانند فعالیت‌های شما، یعنی طراحی نمای داخلی یا بیرونی ساختمان، چقدر می‌تواند با ریاضی در ارتباط باشد. آشنایی با دانش ریاضی تا چه اندازه در کار شما اثرگذار است؟**

● اصل اولیهٔ این حرفه اندازه‌گیری است و این کار همان ریاضیات است و بس. یعنی وقتی می‌خواهید روی یک دیوار، طرح و شکلی را به‌صورت هندسی اجرا کنید و از آجرنما، رنگ، کاغذدیواری و سنگ‌های متنوع برای تزیین استفاده کنید، در قدم اول باید اندازه‌های فضای کار را به‌درستی محاسبه کنید. بعد از دانستن دقیق اندازه‌های کار، حالا باید محاسبهٔ دقیقی از اندازه‌های کار به نسبت اندازه‌های آجرنما، سنگ، کاغذدیواری و حتی مقدار رنگ مصرفی داشته باشید.

● **لطفاً یکی دو مثال بزنید تا موضوع کمی شفاف‌تر شود.**

● فرض کنید اندازهٔ یک آجرنما ۵/۵ در ۲۶ سانتی‌متر باشد. پس شما باید بدانید که چه تعداد از یک آجرنما، یک مترمربع را پوشش می‌دهد. حالا اگر قرار باشد آجرنما را با بند یک‌طرفه، دوطرفه یا چهار طرفه نصب کنید، این بندکشی هم خودش اندازه دارد و مقداری از فضا را دربرمی‌گیرد. برای همین، بندکشی هم انواع متفاوتی دارد؛ از بندهای میلی‌متری تا بندهای سانتی‌متری. لذا در محاسبهٔ مصرف مواد کار و تعداد آجر، نوع بند نقش دارد و اگر در محاسبه‌ها خطا کنید، کلی خسارت مادی خواهید داشت.

همچنین تصور کنید می‌خواهید طرحی قاب‌مانند با آجرهای طرح‌دار روی یک دیوار اجرا کنید. برای این کار، هم باید تعداد آجرهای موردنیاز را محاسبه کنید و هم شکل‌های متفاوت هندسی، مثل مربع، مثلث، مستطیل، لوزی و غیره را درست بشناسید و کار را دقیق طراحی کنید. اگر این دقت و محاسبه درست نباشد، شکلی نازیبا روی دیوار درمی‌آید و کلی مواد و مصالح را هدر می‌دهید. تمام این کار ارتباط مستقیمی با ریاضی و به‌ویژه هندسه دارد.

برخی این تصور را در ذهن خود دارند که ریاضی بسیار سخت و پیچیده است. نگاه شما به این درس چگونه است؟

سختی یا آسانی هر کاری یا هر چیزی به زاویهٔ نگاه ما بستگی دارد. اگر ما آن کار را دشوار تصور کنیم، پس دشوار خواهد بود. از آنجا که ریاضی به یک ذهن خلاق و باز همراه با تمرکز نیاز دارد، برای بعضی‌ها سخت جلوه می‌کند و اصولاً انسان از هر کاری که دشوار به نظرش برسد، لذتی نمی‌برد و پرهیز می‌کند. اما من معتقدم ریاضی لذت‌بخش است. من در حرفهٔ خودم از محاسبه‌ها لذت می‌برم. وقتی مشتری کار را به من واگذار می‌کند، من با محاسبه‌هایی که می‌کنم، با کمترین هزینه و دورریز، کار را به سرانجام می‌رسانم. موفقیت در این کار را مرهون دانش ریاضی هستیم.

در دوران مدرسه چقدر به مطالعهٔ مباحث درسی توجه داشتید و اصلاً دنبال یادگیری از طریق کتاب غیردرسی و مجله‌ها هم بودید؟

من از همان ابتدا به ریاضی علاقه داشتم و می‌دانستم که در آینده وارد هر حرفه‌ای بشوم، به‌یقین با ریاضیات سروکار خواهم داشت. لذا از همان زمان مباحث ریاضی را با دقت یاد گرفتم و امروز در حرفهٔ خودم از آن استفاده می‌کنم. من معتقدم افراد در هر زمان و شرایطی که هستند باید متناسب با کار یا تحصیل خود مطالعه داشته باشند.

معمولاً چه توصیه‌ای برای خریداران سنگ‌های تزیینی یا همکارانی دارید که قرار است کار هنری کنند؟

مهم‌ترین توصیهٔ اولیهٔ ما در این کار به افراد، محاسبهٔ دقیق اندازه‌های فضای کار آن‌هاست تا در زمان خرید مواد اولیه و مصالح لازم دچار اشتباه نشوند، پول اضافه هزینه نکنند و کمترین دورریز را داشته باشند. در خصوص طراحی و شیوهٔ کار هم ما پیشنهاد می‌دهیم، اما تابع سلیقهٔ مشتری هستیم.

شاید به نظر بعضی‌ها برسد که این محاسبهٔ اولیهٔ اندازه‌ها اگر کم یا زیاد باشد خیلی مهم نیست و بعداً هم می‌توان مثلاً مقدار مصالح یا آجرنمای لازم را دوباره تهیه کرد. شما دراین‌باره چه نظری دارید؟

سؤال جالبی کردید. باید عرض کنم، اگر مثلاً آجرنما اضافه بیاورند، ممکن است فروشنده آن‌ها را پس نگیرد و این مصالح و مواد دیگر به کار شخص نیاید و ناچار آن‌ها را دور بریزد. اگر هم کمتر باشد ممکن است هنگام مراجعهٔ مجدد، آن نوع از مواد دیگر موجود نباشد و کار شخص ناقص بماند تا وقتی‌که مجدداً تولید شود. در این صورت، شخص زمان را از دست می‌دهد و چه‌بسا هزینهٔ اضافی هم داشته باشد. لذا محاسبهٔ اولیه در این کار بسیار مهم است.

در مجلهٔ رشد ریاضی برهان به کدام بخش‌ها بیشتر علاقه و توجه داشتید؟ مثلاً زندگی بزرگان ریاضی، مباحث علمی، سرگرمی و معما و ...

من در مجلهٔ رشد ریاضی برهان به معما و سرگرمی بیشتر علاقه دارم. زیرا معما ذهن شما را به چالش می‌کشد و ناچار می‌اندیشید و به دنبال کشف نکته‌های جدید می‌روید. این خلاقیت در کار و زندگی هم به انسان کمک می‌کند و ایده‌های تازه پیدا می‌کنید. در بازی‌ها هم بیشتر سراغ سرگرمی‌های معمایی می‌روم.

یکی از کارهای جالب در حرفهٔ شما طراحی‌های متنوع و کاربرد شکل‌های متفاوت در تزیینات داخلی است؛ مثلاً شکل‌های ستاره، مثلث، مربع و ... که با هندسه ارتباط مستقیم دارد. بر اساس چه مبنا و اصولی معمولاً این نوع شکل‌ها را به مخاطبان در ساختمان آن‌ها پیشنهاد می‌دهید؟

در این کار زیبایی‌شناسی بسیار حائز اهمیت است و ما باید به‌گونه‌ای طرح و ایده به مخاطب بدهیم، تا او هر بار نگاهش به آن طرح می‌افتد از آن شکل و زیبایی لذت ببرد. لذا ما برای موفقیت در این کار باید به‌طور مستمر مطالعه کنیم و الگوها و نمونه‌های متفاوت را ببینیم و گردآوریم و در کنار آن، ایده‌های خودمان را هم طراحی و نمونه‌سازی کنیم. در این بخش از کار ما، هندسه بسیار نقش دارد.

تصور کنیم دو دوست می‌خواهند هنر طراحی دکوراسیون داخلی یا بیرونی یک ساختمان را فرا بگیرند. یکی علاقه‌مند به ریاضی است و آن دیگری شوقی در این زمینه ندارد. تفاوت این دو نفر در ارائهٔ کار چگونه خواهد بود؟

اصل و اساس این کار آشنایی با ریاضیات است. از محاسبه و اندازه‌گیری دقیق اندازه‌های محل کار و روی دیوارها گرفته تا تعیین دقیق مقدار مواد مصرفی موردنیاز و ارائهٔ شکل‌های زیبای هندسه، همه نیازمند ریاضیات است. مثلاً گاهی در یک کار لازم است از تعدادی آجر تزیینی در اندازه‌های یک‌سوم یا یک‌چهارم کار کنید تا شکل زیبا شود.

در دوران مدرسه وضعیت درس ریاضی شما چطور بود و معمولاً چه نمره‌هایی می‌گرفتید؟

در دوران ابتدایی نمره‌های ریاضی من عالی بودند و در سال‌های بالاتر در این درس نمرهٔ کمتر از ۱۷ نداشتم. البته بخش قابل‌توجهی از علاقهٔ من به ریاضی به سبب داشتن دبیر خوبی بود که فوق‌العاده جذاب تدریس می‌کرد. جا دارد در این فرصت از ایشان قدردانی کنم. در دوران مدرسه دبیری هم داشتم که من متوجه تدریس ایشان نمی‌شدم و کم‌کم داشتم به مرحله‌ای می‌رسیدم که ریاضی را کنار بگذارم. اما همان زمان با معلمی به نام آقای طبیعت‌شناس آشنا شدم که روش تدریس خوب ایشان باعث شد دوباره به ریاضی علاقه‌مند شوم و این مسیر را دنبال کنم.

مطالعه در حوزهٔ کار شما چقدر اهمیت دارد و شما در این زمینه چه مقدار و چگونه میزان آگاهی خود را افزایش می‌دهید تا همواره به‌روز باشید؟

ما در تمام ابعاد زندگی تا پایان عمر نیازمند مطالعه هستیم. در هر کار و حرفه‌ای پیشرفت به‌سرعت اتفاق می‌افتد و اگر بخواهیم پا به پای دنیا در جهان علم و صنعت پیش برویم، باید مطالعه داشته باشیم. ما معمولاً باید نمونهٔ مصالح، الگوها و طرح‌های متفاوت را پیدا کنیم و بر این اساس خودمان را به‌روز نگه داریم.

از حضورتان در این گفت‌وگو سپاسگزاریم.

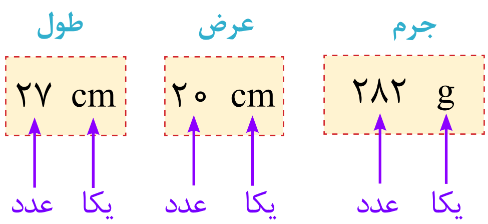
نقش عددها در اندازه‌گیری

روح‌الله خلیلی بروجنی

اساس تمامی علوم تجربی، مهندسی‌ها و پزشکی «اندازه‌گیری» است. حتی در شاخه‌های گوناگون علوم انسانی، از جمله علوم اجتماعی و پدیده‌های مرتبط با آن‌ها، پس از اندازه‌گیری برخی از شاخص‌ها و مقایسهٔ بین عددهای به‌دست‌آمده، درک بهتری از موضوع به دست می‌آید. افزون بر این‌ها، حتی زندگی روزمرهٔ ما نیز ارتباط تنگاتنگی با اندازه‌گیری و عددهای به‌دست‌آمده از اندازه‌گیری دارد. در تصویر ۱ تعدادی از ابزارهای اندازه‌گیری نشان داده شده است که در شغل‌های متفاوت از آن‌ها استفاده می‌شود. حتی برخی از این ابزار در فعالیت‌های روزمرهٔ ما نیز کاربرد فراوانی دارند.

تصویر ۱. برای اندازه‌گیری هر کمیت باید از ابزار مناسب آن باید استفاده کنیم

برای بیان نتیجهٔ اندازه‌گیری از عددها و یکای مناسب استفاده می‌کنیم. برای مثال، نتیجهٔ اندازه‌گیری طول، عرض و جرم کتاب علوم تجربی پایهٔ هفتم شما به همراه یکای مناسب آن‌ها در تصویر ۲ آمده است.

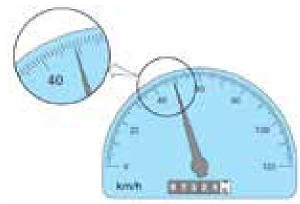


تصویر ۲. نتیجهٔ اندازه‌گیری همواره باید با یک عدد و یکای مناسب آن بیان شود

توجه: برای کاهش خطا در اندازه‌گیری هر کمیت دل‌خواه، معمولاً اندازه‌گیری آن را چند بار تکرار می‌کنند. اگر عددهای به‌دست‌آمده متفاوت باشند، میانگین آن عددها به عنوان نتیجهٔ اندازه‌گیری پذیرفته می‌شود. البته در میان عددهای متفاوت، اگر یک یا دو عدد اختلاف زیادی با بقیه داشته باشند، در میانگین‌گیری به حساب نمی‌آیند.

تا چند دههٔ قبل همهٔ ابزارهای اندازه‌گیری به صورت مدرج (درجه‌بندی‌شده) ساخته می‌شدند (تصویر ۳). دقت ابزارهای اندازه‌گیری مدرج، برابر کمینهٔ درجه‌بندی آن ابزار است. برای مثال، دقت «تندی‌سنج» خودرویی که در تصویر ۴ نشان داده شده، برابر کمینهٔ درجه‌بندی آن، یعنی ۱km/h است.

تصویر ۳. تا چند دههٔ قبل همهٔ ابزارهای اندازه‌گیری به صورت مدرج ساخته می‌شدند



تصویر ۴. کمینهٔ درجه‌بندی هر ابزار مدرج اندازه‌گیری برابر دقت آن است

شما پاسخ دهید: تصویر ۵ سرنگی را نشان می‌دهد که برای تزریق دارو به بدن بیمار استفاده می‌شود. دقت این سرنگ چند میلی لیتر (ml) است؟

تصویر ۵. سرنگ تزریق دارو

به‌منظور سهولت و سرعت در خواندن نتیجهٔ اندازه‌گیری، امروزه بیشتر ابزارهای اندازگیری به صورت رقمی (دیجیتال) ساخته می‌شوند (تصویر ۶). دقت ابزارهای اندازه‌گیری رقمی، برابر یک واحد از آخرین رقمی است که آن ابزار نمایش می‌دهد. برای مثال، دقت تندی‌سنج باد که در تصویر ۷ نشان داده شده است به این صورت به دست می‌آید که باید آخرین رقم آن را بررسی کنیم که در اینجا عدد ۳ صدم است و یک واحد آن یک صدم است. به این ترتیب دقت این تندی‌سنج باد برابر ۰/۰۱ m/s است.

تصویر ۶. امروزه همهٔ ابزارهای اندازه‌گیری به صورت رقمی (دیجیتال) ساخته می‌شوند

تصویر ۷. یک واحد از آخرین رقمی که ابزار اندازه‌گیری دیجیتال نشان می‌دهد، برابر دقت آن است

شما پاسخ دهید: تصویر ۸ وسیله‌ای به نام «گلوکومتر» را نشان می‌دهد که برای اندازه‌گیری غلظت «گلوکز» (قند) در خون به کار می‌رود. این وسیله یکی از وسایل معمول برای اندازه‌گیری قند بیماران دیابتی در خانه است. یک قطرهٔ کوچک از خون که توسط سوزن‌زدن به پوست به‌دست‌آمده، روی یک صفحهٔ یک‌بار مصرف آزمایش قرار می‌گیرد تا دستگاه از آن استفاده کند و قند خون را اندازه‌گیری کند. دقت این گلوکومتر چند میلی‌گرم بر دسی‌لیتر (mg/dL) است؟

تصویر ۸. گلوکومتر

خوب است بدانید: برخی از ابزارهای قدیمی، مانند ساعت آبی که در تصویر ۹ نشان داده شده است، از پیمانه برای اندازه‌گیری استفاده می‌کردند. ساعت آبی ایرانی ابزاری ساده و در عین حال دقیق و کارآمد بوده و در زندگی جامعهٔ کشاورزی ایران، به ویژه در مناطق کویری که آب مایهٔ حیات و عنصر اصلی زندگی اجتماعی بوده، نقش کارآمدی داشته است. در قدیم افرادی به نام «میراب» تقسیم سهمیهٔ آب تعیین‌شده (برحسب تعداد کاسه) برای هر باغ یا کشتزار را برعهده داشتند. میراب در کنار مجرای اصلی آب و محل انشعاب آن میان کشاورزان، بر سکویی می‌نشست و کاسه‌ای فلزی را که سوراخ بسیار ریزی ته آن تعبیه شده بود، در ظرفی بزرگ‌تر و پر از آب قرار می‌داد که پس از پرشدن کاسه (و با توجه به سهم هر کشاورز برحسب تعداد کاسه)، آب را قطع و آن را به جوی کشاورز دیگری باز می‌کرد.

تصویر ۹. ساعت آبی ایرانی

تمرین: «ذرع» و «فرسنگ» از جمله یکاهای قدیمی ایرانی برای طول است. هر ذرع، معادل ۱۰۴ سانتی‌متر و هر فرسنگ برابر ۶۰۰۰ ذرع است. طول بزرگ‌ترین جزیرهٔ خلیج فارس، «قشم» که مساحتی بیشتر از مساحت بیش از ۲۰ کشور جهان دارد، حدود ۱۲۰ کیلومتر است. طول این جزیره را بر حسب ذرع و فرسنگ بیان کنید.

برای مشاهدهٔ توضیحات بیشتر، رمزینه را پویش کنید.

(قسمت هفتم)

شراره تقی‌دستجردی، صبا قاسمی

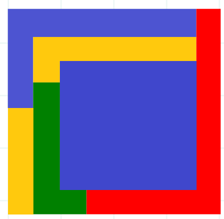
استدلال‌های غلطِ درست‌نما

در خانهٔ رها

تعطیلات نوروز بود. رها در اتاقش در حال ورق‌زدن مجله‌ای بود که مدرسه برای نوروز هدیه داده‌بود. مجله موضوع‌های متنوعی داشت و رها که عاشق ریاضی بود، یک‌راست به سراغ بخش ریاضی‌اش رفت. بعد از چند متن کوتاه، متن بلندی با عنوان «قضیهٔ چهاررنگ» خیلی خوب به چشم می‌آمد. قضیه چنین بود:

● برای رنگ‌کردن هر نقشه، به‌طوری‌که کشورها و ناحیه‌های همسایه در نقشه هم‌رنگ نباشند، فقط چهار رنگ کافی است.

صورت این قضیه برای رها جالب آمد. پیش از آنکه متن را مطالعه کند، دو مثال از نقشه‌هایی که در آنجا کشیده شده بودند، توجه رها را به خود جلب کردند.



یکی از آن نقشه‌ها با چهار رنگ، رنگ شده بود و دیگری نقشهٔ ایران بود که باید آن را رنگ می‌کرد. هنوز چند دقیقه‌ای تا آمدن مهمان‌ها باقی مانده بود و رها وقت داشت تا نقشهٔ ایران را رنگ کند.

او ابتدا کوشید تا آن را با سه رنگ، رنگ کند، اما نتوانست. برای آنکه ناحیه‌های مجاور هم‌رنگ نباشند، به رنگ چهارمی نیاز داشت. پس از آنکه رها از کار رنگ‌آمیزی فارغ شد، دو نقشهٔ دیگر کشید که باز هم به چهار رنگ نیاز داشتند تا رنگ شوند. رها مشغول کشیدن نقشهٔ سوم بود که زنگ در به صدا درآمد. دفترش را بست و به استقبال مهمان‌ها رفت.

فردای آن روز رها و پدرش تصمیم گرفتند شطرنج بازی کنند. دقایقی از بازی آن‌ها می‌گذشت و نوبت رها بود. پدر منتظر بود تا رها حرکت بعدی‌اش را انجام دهد، اما رها بدون اینکه پلک بزند و تکانی بخورد، مبهوت صفحهٔ شطرنج بود.

پدر با تعجب چند دقیقه‌ای رها را در همان حال نظاره کرد. آخر بازی هنوز به جاهای پیچیده‌ای نرسیده بود که رها بخواهد برای حرکت بعدی‌اش این قدر فکر کند. اما رها مبهوت چیز دیگری به جز شطرنج بود. در واقع او به رنگ سیاه و سفید خانه‌های شطرنج فکر می‌کرد و به قضیهٔ چهاررنگ! صورت قضیه را دقیق به یاد می‌آورد. اما چرا باید چنین قضیه‌ای در ریاضی داشته باشیم، در حالی که صفحهٔ شطرنج را می‌توان تنها با دو رنگ، رنگ کرد؟!

رها مشغول فکرکردن به اشکال کار بود که با صدای پدرش به خود آمد.

پدر: رها، خوبی؟

رها: اوه، ببخشید. من به یک‌باره حواسم از بازی پرت شد. داشتم به یک قضیهٔ ریاضی فکر می‌کردم. امکان دارد بازی را بعداً ادامه بدهیم؟

پدر که از روحیهٔ رها آگاه بود، لبخندی زد و گفت: «حتماً.»

رها با عجله به اتاقش رفت. مداد و کاغذی برداشت و چند نقشه کشید. نقشه‌های ساده‌ای که می‌شد با دو یا سه رنگ آن‌ها را رنگ کرد. به صورت قضیه شک کرد. دوباره آن را وارسی کرد. چشمش که به «فقط چهار رنگ کافی است» افتاد، خیالش راحت شد که حافظه‌اش هنوز هم خوب کار می‌کند. او نقشه‌هایی داشت که برای رنگ‌آمیزی به کمتر از چهار رنگ نیاز داشتند. این نقشه‌ها خیلی ساده بودند. حتماً ریاضی‌دان‌ها این قدر هوشمند هستند که این نقشه‌ها را درنظر بگیرند. پس ایراد کار کجاست؟ چرا صفحهٔ شطرنج مثال نقضی برای قضیهٔ چهاررنگ نیست؟!

***

برای آنکه مثال نقضی برای یک جمله بیاوریم، باید بتوانیم نقیض آن جمله را بیابیم و سپس برای جملهٔ جدیدمان یک مثال ارائه دهیم. رها نیز سعی کرد مثال‌های نقضی برای قضیه چهاررنگ بیاورد، اما چرا این مثال‌ها، مثال نقض نیستند؟

در اینجا دو اشکال ممکن است پیش آمده باشد: یا نقیض جملهٔ اصلی (یعنی همان صورت قضیهٔ چهاررنگ) اشتباه است، یا مثال‌ها درست نیستند. برای اینکه اشکال کار را بهتر درک کنیم، بیایید با نقیض جمله‌های متفاوت بیشتر آشنا شویم.

در جدول زیر، در ستون سمت راست جمله و در ستون چپ نقیض آن جمله نوشته شده است. دقت کنید که در اینجا بررسی درستی این جمله‌ها مورد نظر نیست، بلکه می‌خواهیم شما را با صورت‌های مختلف نقیض یک جمله آشنا کنیم. شما هم بکوشید جاهای خالی را پر کنید.

امروز چهارشنبه است	امروز چهارشنبه نیست. یا به عبارت دیگر، امروز یا شنبه است یا یک‌شنبه، یا دوشنبه، یا سه‌شنبه، یا پنج‌شنبه و یا جمعه
۵ عددی زوج است	۵ عددی زوج نیست. یا به عبارت دیگر، ۵ عددی فرد است.
همهٔ عددهای اول فرد هستند.	همهٔ عددهای اول فرد نیستند (چنین نیست که همهٔ عددهای اول فرد باشند). یا به عبارت دیگر، وجود دارد عدد اولی که فرد نیست. پس وجود دارد عدد اولی که زوج است.
مجموع دو عدد گنگ، گنگ است.	مجموع دو عدد گنگ، گنگ نیست؛ دو عدد گنگی وجود دارند که مجموعشان گنگ نیست.
	a بزرگ‌تر از یا مساوی با b است.
ضرب سه عدد متوالی همواره بر ۶ بخش‌پذیر است.	
مرغی وجود دارد که تخم طلا می‌گذارد.	
هیچ عدد طبیعی بین صفر و یک نیست.	
	هیچ وقت خورشید از شرق طلوع نمی‌کند.
برای رنگ‌کردن هر نقشه، به‌طوری که کشورها و ناحیه‌های همسایه در نقشه هم‌رنگ نباشند، فقط چهار رنگ کافی است.	

قبل از اینکه به شکل‌های مثال نقض رها برای قضیهٔ چهاررنگ برگردیم، خوب است این نکته را متذکر شویم که برای رنگ‌آمیزی یک نقشه، به طوری که دو ناحیهٔ مجاور هم‌رنگ نباشند، همواره می‌توان به تعداد ناحیه‌ها رنگ انتخاب کرد. اما این کار چالشی ایجاد نمی‌کند. در واقع قضیهٔ چهاررنگ از این نظر اهمیت دارد که حداقل تعداد رنگ را برای رنگ‌آمیزی هر نقشه‌ای تعیین می‌کند. در واقع برای رنگ‌آمیزی هر نقشه‌ای با شرایط خواسته شده، فقط چهار رنگ کافی است.

دلیل خطای رها این بود که او فقط به قسمت آخر جمله توجه کرده بود. در صورتی که این کلمهٔ «هر» در صورت قضیه است که قضیه را مهم می‌کند. دقیقاً این بی‌توجهی رها به کلمهٔ «هر» بود که او را به اشتباه انداخت. کلمه‌هایی مانند هر، همه، هیچ، «وجود دارد» و «وجود ندارد»، در قضیه‌های ریاضی و گزاره‌ها از اهمیت بالایی برخوردار هستند و هنگام نقیض‌کردن جمله‌هایی که این کلمه‌ها را دارند، باید دقت کافی داشته باشیم.

برای مثال، آیا دو جملهٔ زیر نقیض یکدیگر هستند؟

امروز همهٔ دانش‌آموزان در کلاس حاضر هستند.	امروز هیچ دانش‌آموزی در کلاس حاضر نیست.

یکی از اشتباه‌های رایج دانش‌آموزان هنگام نقیض‌کردن جمله‌ها، تبدیل «هر» (یا همه) به «هیچ» است. در واقع نقیض جملهٔ سمت راست این است:

«چنین نیست که امروز همهٔ دانش‌آموزان در کلاس حاضر باشند.» یا به عبارت دیگر: «دانش‌آموزی وجود دارد که امروز در کلاس حاضر نیست.»

با نگاه دوباره به جدول بالا نیز درمی‌یابید که هر جا کلمه‌هایی مانند «هر»، «همه»، «همیشه»، «همواره» یا «هیچ» آمده، در نقیض آن از «وجود دارد» استفاده شده است. با توجه به این امر، پس نقیض قضیه عبارت است از: «نقشه‌ای وجود دارد که برای رنگ‌آمیزی آن چهار رنگ کافی نیست و شما به رنگ‌های بیشتری نیاز دارید.»

پس برای اینکه مثال نقضی برای قضیهٔ چهاررنگ بیاورید، باید بتوانید نقشه‌ای پیدا کنید که در اختیار داشتن چهار رنگ برای رنگ‌آمیزی آن کافی نباشد. با این توضیح‌ها، آیا صفحهٔ شطرنج مثالی برای نقیض این گزاره است؟ واضح است که خیر، زیرا نه تنها با چهار رنگ بلکه حتی با دو رنگ هم می‌توان آن را رنگ کرد!

پس شما می‌توانید خود را به چهار رنگ مسلح کنید و هر نقشه‌ای را به مبارزه بطلبید. البته در این میان ممکن است برای رنگ‌آمیزی برخی نقشه‌ها بتوانید فقط از دو یا سه رنگ از چهار رنگتان استفاده کنید.

برای مشاهدهٔ پاسخ، رمزینه را پویش کنید.

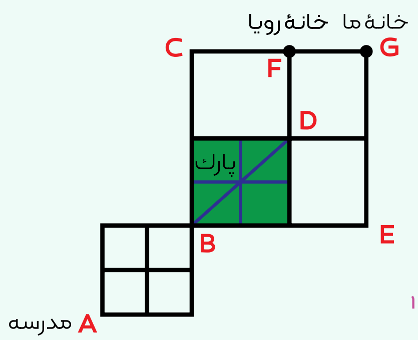
داستان‌های مریم

داستان هفتم: ریاضیات در خیابان

محرم ایردموسی

برای دیدن شش داستان قبل رمزینه را پویش کنید.

زنگ که خورد، دفترودستکم را جمع کردم و آمادهٔ خروج از کلاس و مدرسه شدم. من مسیر خانه تا مدرسه را همیشه پیاده طی می‌کنم و از این پیاده‌روی لذت می‌برم. آن روز باران هم آمده بود و هوا کمی تمیزتر بود و لذت پیاده‌روی دوچندان شده بود. مسیر مدرسه تا خانه را معمولاً در ۱۵ تا ۲۰ دقیقه طی می‌کردم و خوش‌بختانه این مسیر با تنوع همراه بود (شکل ۱).



شکل ۱

از مدرسه که خارج شدم، **رویا** را دیدم که منتظر بود. پرسیدم: «پیاده بریم؟» رویا هم اهل پیاده‌روی بود. گفت: «موافقم، از کدوم مسیر بریم؟»

شیطنتم گل کرد و پرسیدم: «مگه چند تا مسیر داریم تا خونهٔ شما؟»

رویا که متوجه داستان شده بود، گفت: «خیلی!»

برای اینکه وادار به شمردن تعداد مسیرها بشود، گفتم: «نه رویا، جدی پرسیدم. چند مسیر از مدرسه به خونهٔ شما وجود داره؟ تا حالا این سؤال رو از خودت پرسیدی؟»

رویا گفت: «آره حساب کردم. همون اوایل سال چند باری سعی کردم مسیرهای متفاوت رو امتحان کنم و بشمارم. من فکر می‌کنم ۷۲ مسیر متفاوت از مدرسه به خانهٔ ما وجود داره.»

پرسیدم: «چرا؟ چطور شمردی؟ آیا همهٔ ۷۲ مسیر رو طی کردی؟»

رویا با تعجب گفت: «نه. همهٔ مسیرها رو طی نکردم. سعی کردم با تکیه بر اصول شمارش، مسیرها رو بشمارم.»

به خودم گفتم مگر شمارش هم اصول دارد. رویا که متوجه غوطه‌ورشدن من در افکارم شده بود گفت: «شمارش دو اصل داره: اصل جمع و اصل ضرب. من این‌ها رو توی کتاب برادرم که از من بزرگ‌تره خوندم. می‌خوای برای تو هم توضیح بدم؟»

مشتاقانه جواب مثبت دادم و گفتم: «پس تو اصل‌ها را بگو، اما اجازه بده من به کمک اصل‌ها، تعداد مسیرهای مدرسه تا خانهٔ شما رو بشمارم.»

رویا گفت: «اصل ضرب می‌گه اگر کاری رو در دو مرحلهٔ پشت سر هم انجام بدیم و مرحلهٔ اول آن به a طریق و مرحلهٔ دوم آن به b طریق انجام بشه، اون وقت برای انجام اون کارِ دو مرحله‌ای، ab طریق وجود داره ...»

گفتم: «خیلی جالبه! مثل زمانی که می‌خوایم شلوار و پیراهن برای پوشیدن انتخاب کنیم. اگر ۳ شلوار و ۴ پیراهن داشته باشیم، برای انتخاب یک شلوار و یک پیراهن، ۴×۳ یعنی ۱۲ انتخاب داریم. درسته؟»

رویا گفت: «کاملاً درسته.» بعد ادامه داد: «اصل جمع هم می‌گه اگر بخوای از مجموعهٔ k عضوی A یا مجموعهٔ m عضوی B، یک عضو انتخاب کنی، در صورتی که دو مجموعهٔ A و B عضو مشترک نداشته باشند (یعنی $A \cap B = \varnothing$)، آنگاه k+m انتخاب وجود داره.»

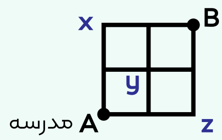
اصل جمع به نظرم ساده‌تر از اصل ضرب بود. به رویا گفتم: «این اصل خیلی ساده به نظر می‌رسه. مثل زمانی که می‌خوایم یک نفر از میان دانش‌آموزان دو کلاس انتخاب کنیم. مثلاً اگر کلاس اول ۳۰ دانش‌آموز و کلاس دوم ۲۵ دانش‌آموز داشته باشه، برای انتخاب یک نفر از میان دانش‌آموزان این دو کلاس ۳۰+۲۵، یعنی ۵۵ انتخاب وجود داره. درسته؟»

رویا گفت: «کاملاً درسته. حالا می‌تونی به مسئلهٔ اصلی فکر کنی.»

گفتم: «برای رفتن از مدرسه به خانهٔ شما، در مرحلهٔ اول باید از نقطهٔ A (مدرسه) به نقطهٔ B (نبش پارک) (شکل ۲) و در مرحله بعد، از نقطهٔ B به نقطهٔ F (خانهٔ رویا) (شکل ۳) بریم. تا اینجا درسته؟»

رویا گفت: «درسته. پس اول به این فکر کن که از A به B (مرحلهٔ اول) چند مسیر وجود داره.»

شکل ۲



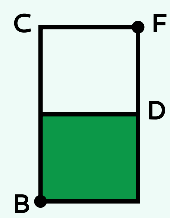
شمردن تعداد مسیرهای A به B سخت نبود. البته قصد ما این بود که کوتاه‌ترین مسیرها را بشماریم. گفتم: «برای رسیدن به B یا باید از x بگذریم یا y و یا z. تعداد مسیرهای A به B که از x می‌گذره یکی و تعداد مسیرهای A به B که از z می‌گذرد هم یکیه. اما تعداد مسیرهای A به B که از y می‌گذره، چهارتاست. پس بر اساس اصل جمع، ۱+۴+۱، یعنی ۶ مسیر وجود داره.»

رویا گفت: «درسته. پس مرحلهٔ اول کار رو به ۶ طریق می‌تونیم انجام بدیم. حالا تعداد مسیرهای مرحلهٔ دوم، یعنی از B به F رو باید بشماری.»

گفتم: «برای مرحلهٔ دوم آیا مسیرهایی رو هم که از داخل پارک می‌گذرند، در نظر بگیریم یا نه؟»

رویا گفت: «فعلاً مسیرهای داخل پارک را در نظر نگیر.»

شکل ۳



شمردن مسیرهای B به F راحت بود. گفتم: «مسیرهای B به F، یا از C می‌گذرند یا از D. مسیرهایی که از C می‌گذرند یکی و مسیرهایی که از D می‌گذرند ۲ تا هستند. پس ۳ مسیر از B به F وجود داره.»

رویا گفت: «درسته. پس در کل چند مسیر از مدرسه به خانهٔ ما وجود داره، البته اگر نخوایم از داخل پارک بگذریم؟»

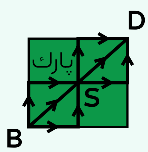
پاسخ به این سؤال با توجه به ضرب ساده بود. ۶ مسیر برای رفت از A به B و ۳ مسیر برای رفتن از B به F وجود دارد. پس طبق اصل ضرب، ۶×۳ یعنی ۱۸ مسیر برای رفتن از مدرسه (A) به خانهٔ رویا (F) وجود دارد. گفتم: «۱۸ مسیر وجود داره. اما اگر بخوایم حتماً از داخل پارک بگذریم، چند مسیر از A به F وجود داره؟»

رویا گفت: «چون تعداد مسیرها در کل ۷۲ مسیره، پس تعداد مسیرهایی که از داخل پارک می‌گذرند، می‌شود: ۵۴=۱۸-۷۲.»

گفتم: «می‌شه با اصل ضرب به این عدد هم رسید؟»

رویا گفت: «آره. هر مسیر A به F که از داخل پارک می‌گذره، از سه تکه مسیر تشکیل شده: ۱. A به B؛ ۲. B به D از داخل پارک؛ ۳. D به F. برای رفتن از A به B، همون‌طور که گفتی ۶ مسیر وجود داره. برای رفتن از B به D از داخل پارک، اول باید به نقطهٔ وسط پارک (S) بریم که ۳ مسیر داریم و بعد از S به D بریم که اون هم ۳ مسیر متفاوته. پس تعداد مسیرهای B به D می‌شه: ۹=۳×۳ مسیر (شکل ۴). برای رفتن از D به F هم تنها یک مسیر وجود داره. پس در کل تعداد مسیرهای مدرسه به خانهٔ ما (با شرط عبور از پارک) می‌شه: ۱×۹×۶=۵۴ مسیر.»

شکل ۴



آن‌قدر گرم صحبت‌کردن و محاسبه بودیم که متوجه نشدیم به خانهٔ رویا رسیده‌ایم و از داخل پارک هم گذشته‌ایم. از خانهٔ رویا تا خانهٔ ما راهی نبود. رویا گفت: «حالا که تعداد مسیرهای مدرسه تا خونهٔ ما رو شمردیم، بهتره تو هم تعداد مسیرهای مدرسه تا خونهٔ خودتون رو بشماری.»

من که به این قسمت ماجرا هم فکر کرده بودم، بدون فوت وقت گفتم: «۱۴۴ مسیر بین مدرسه و خونهٔ ما وجود داره!»

رویا پرسید: «چطور این قدر سریع شمردی؟»

وقت نداشتم که توضیح بدهم. در حالی که چند قدمی از رویا دور شده بودم گفتم: «به نقشهٔ ۱ (شکل ۱) نگاه کن!»

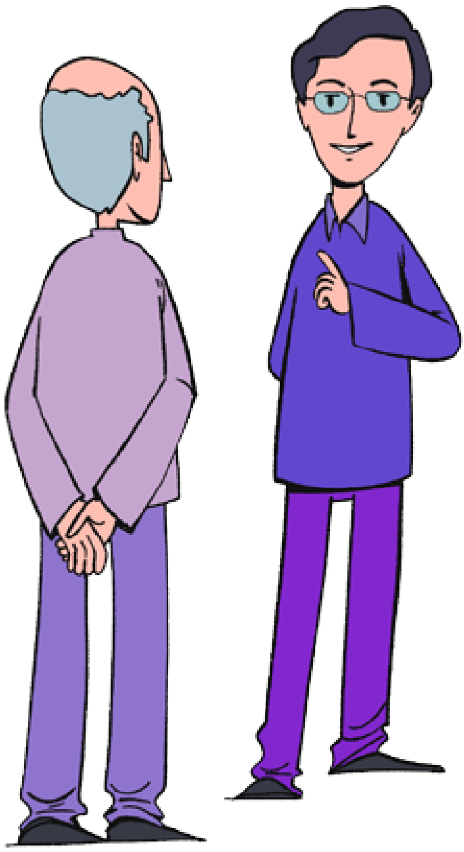
رویا هنوز جلوی در خانه‌شان ایستاده بود و در ذهن خودش نقشه را مرور می‌کرد. اما مطمئن بودم نکته را خودش پیدا می‌کند. اگر راستش را بخواهید، از همان ابتدای مسیر هم مشخص بود که من برای رفتن به خانه دو برابر رویا مسیر برای انتخاب دارم. برای همین هم می‌خواستم تعداد مسیرهای مدرسه تا خانهٔ رویا را پیدا کنم.

به خانه که رسیدم داشتم به این فکر می‌کردم که طول همهٔ این ۱۴۴ مسیر از خانهٔ ما تا مدرسه یکسان نیست و وقت‌هایی که عجله دارم و مسیر تا مدرسه را دوان‌دوان طی می‌کنم، مجبور می‌شوم از داخل پارک، مسیری قطری را بدوم. در این حالت چند مسیر از خانهٔ ما به مدرسه وجود دارد؟ شما می‌دانید؟

همگام با ستارگان

آیا او را می‌شناسید؟

آرش رستگار ● تصویرگر: حسین یوزباشی



شـــاید نزدیک به یک دهه با هم به «دانشگاه شـــریف» می‌رفتیم و در طول راه با هم گفت‌وگو می‌کردیم. در دانشکدهٔ ریاضی هم دفتر کارمان در کنـــار هم بود. من در دفتر کار خـــودم کار نمی‌کردم، بلکه در دفتر کار او میز کار خودم را داشـــتم. طبعاً کلید دفتر یکدیگر را هم داشتیم. موضوع‌هایی که با او دربارهٔ آن‌ها صحبت می‌کردیم، از ریاضیات، آموزش ریاضیات و فلسفهٔ ریاضیات گرفته تا تعلیم‌وتربیت، تعلیم‌وتربیت نخبگان و ساختار آموزش عالی، و حتی عرفان و تفسیر قرآن را در بر می‌گرفتند. او اولین فرد المپیادی بود که تصمیم گرفت برای تحصیلات دورهٔ دکترا در ایران بماند و با اســـتادان دانشگاه شریف پایه‌های تحقیقات ریاضی خـــود را پی‌ریزی کنـــد. پس از او خیلی از المپیادی‌هـــا به پیروی از او در ایران ماندند و به قوی شـــدن دکترای داخـــل خدمت کردند؛ البته ریاضی‌دانان بزرگی هم شـــدند. او از تحصیلات و تربیت یک ریاضی‌دان محض برخوردار بود، ولی به مســـائل کاربردی علاقه داشـــت. یک‌بار با هم شـــمردیم و او در ۱۰ شاخه از ریاضیات کاربردی کار کرده بود، که از ریاضیات نفت شـــروع می‌شد و به ریاضیات زیستی می‌رسید. در این مسیر چندین جوان محقق هم تربیت کرد. چندین شرکت دانش‌بنیان را بنیان‌گذاری کرد که در برخی از آن‌ها هنوز هم عضو هیئت مدیره یا حتی رئیس هیئت مدیره است.

به این بهانه بود که تجربیات اقتصادی قابل‌توجهی به دســـت آورد. البته ارتباط او با اقتصاد به سبب شغل پدرش بود که با اقتصاد سروکار داشت. در نهایت چند سالی به‌عنوان معاون مالی و اداری دانشگاه صنعتی شریف نیز خدمت کرد.

بعد از سه ســـال که مسئولیت «کمیتهٔ المپیـــاد ریاضی ایران» را داشـــتم، این مســـئولیت را به او تحویـــل دادم. او نیز سه‌سال در این مسئولیت خدمت کرد. در دوران مسئولیت او بهترین نتیجهٔ ایران رتبهٔ پنجم در المپیاد جهانی ریاضیات در اســـپانیا بود. او بر بسیاری از دانشجویان المپیادی تأثیر مستقیم و عمیق گذاشت. فعالیـــت در کشـــورش را بـــه همه چیز ترجیح می‌داد و دوســـت داشت در ایران خدمت کند.

ثروت موجب قدرت است و دانش موجب شهرت. اخلاق موجب محبوبیت است، اما خدمت نتیجه‌اش ابدیت است.

او در شاخهٔ سامانه‌های (سیستم‌های) دینامیکی تخصص داشت و تحت‌تأثیر دکتر **شهشهانی** به سامانه‌های دینامیکی کشیده شده بود، اما مانند دکتر شهشهانی، به کاربرد سامانه‌های دینامیکی در زیست‌شناسی علاقه‌مند شد. تحقیقات او در ریاضیات زیستی به دینامیک سلول‌های عصبی مربوط می‌شوند. زیر نظر دکتر **عبدالحسین عباسیان** که او هم شخصیت تأثیرگذاری مانند دکتر شهشهانی است، گروهی از محققان ایرانی در زمینهٔ شبکه‌های عصبی تحقیق می‌کنند. این را می‌گویم چون تحقیقات گروهی، بسیار سخت در ایران شکل گرفته‌اند. در ریاضیات محض فقط در سه شاخهٔ «ترکیبیات»، «جبر جابه‌جایی» و «منطق فازی» تحقیقات گروهی انجام می‌شوند که در آن ریاضی‌دانان ایرانی از کارهای یکدیگر مطلع هستند.

او در سال ۱۳۷۹، دکترای خود را در موضوع «سیستم‌های دینامیکی» از دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف دریافت کرد. پس از فارغ‌التحصیلی برای تحصیل دورهٔ پسادکترا در «مرکز تحقیقات بین‌المللی فیزیک نظری (تئوریک) و ریاضیات» در «تریسته» ایتالیا که امروز با نام «مؤسسهٔ عبدالسلام» مشهور است، به آن کشور رفت. اما پس از چند ماهی این دوره را نیمه تمام رها کرد و به ایران بازگشت. مدتی در «مؤسسهٔ تحقیقات عالی زنجان» مشغول به کار بود و سپس به دانشگاه صنعتی شریف پیوست. او از مؤسسان شرکت‌های «عطار» و «شمارا» و چندین شرکت دانش‌بنیان دیگر است و اکنون ریاست «هیئت مدیرهٔ شرکت سیلیکون‌آراز» را بر عهده دارد. در دوران ریاست دکتر روستا آزاد در دانشگاه صنعتی شریف، معاونت مالی و اداری دانشگاه را به عهده داشت. تا کنون چند تن از دانشجویان دکترای دانشگاه صنعتی شریف تحت نظر او در رشتهٔ «ریاضیات زیستی» فارغ‌التحصیل شده‌اند و به دریافت درجهٔ دکترا نائل آمده‌اند.

مسئله: چند مربع روی دستگاه مختصات می‌توان در نظر گرفت که یک رأس آن نقطهٔ $A\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ باشد و حداقل یکی از محورهای مختصات محور تقارن آن باشد؟ پاسخ کدام گزینه است؟

۱. ۲ ۲. ۳ ۳. ۴ ۴. ۵ ۵. ۶

برای آشنایی با شخصیت شمارهٔ قبل رمزینه را پویش کنید.

برای مشاهدهٔ پاسخ، رمزینه را پویش کنید.

تألیف و ترجمه: مریم جعفرآبادی

یک بلیت برای دو نفر

چرا شرکت‌های هواپیمایی بیشتر از ظرفیت یک پرواز بلیت می‌فروشند؟

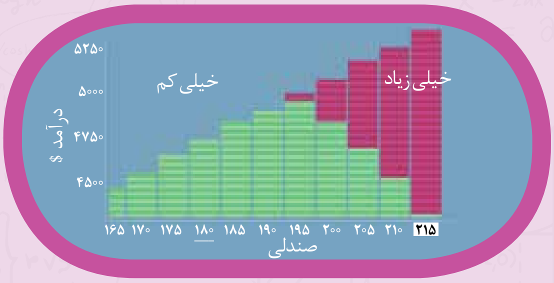
آیا تا به حال پیش آمده است، با وجود اینکه برای ساعت مشخصی از یک پزشک وقت گرفته‌اید، باز هم مجبور باشید برای مدتی طولانی در مطب منتظر بمانید؟ یا برای یک پرواز بلیت تهیه کرده باشید، ولی وقتی می‌خواهید سوار شوید، ببینید بلیت شما را به مسافر دیگری هم فروخته‌اند و برای شما جایی نیست؟

این‌ها همه علائم «ذخیرهٔ (رزرو) بیش از حد» هستند. کاری که صاحبان کسب‌وکار انجام می‌دهند تا سود بیشتری ببرند و تا حد امکان جلوی ضررهای احتمالی‌شان را بگیرند و از منابع در دسترسشان نهایت استفاده را ببرند. منشی یک پزشک می‌داند که ممکن است بعضی مراجعان نتوانند سر قرار حاضر شوند، برای همین بیشتر از تعداد بیمارانی که یک پزشک می‌تواند در طول یک روز معاینه کند، برای مراجعان وقت تعیین می‌کند. یا شرکت‌های هواپیمایی می‌دانند که بعضی مسافران از پرواز جا می‌مانند و بیشتر از ظرفیت واقعی یک پرواز بلیت می‌فروشند که یک وقت صندلی‌ای خالی نماند.

طبیعی است که این کار گاه باعث خشم مشتری می‌شود. چون برخلاف تصور، همهٔ مسافرانی که بلیت گرفته‌اند سر وقت به فرودگاه می‌رسند و هر دو مراجع به مطب پزشک می‌روند!

خط‌های هوایی نمونهٔ کلاسیک این موضوع هستند. سالانه حدود ۵۰ هزار نفر به‌خاطر فروش بیش از حد بلیت شرکت‌های هواپیمایی از پروازهای خود خارج و به پرواز دیگری منتقل می‌شوند یا جریمهٔ پرواز به آن‌ها پرداخت می‌شود و مجبورند بلیت دیگری تهیه کنند. این رقم برای خود خط‌های هوایی هم کمی تعجب‌آور است. آن‌ها می‌توانند از آمار پروازهای گذشته برای تعیین تعداد دقیق بلیت‌هایی که باید بفروشند، استفاده کنند.

فروش کمتر از آن مقداری که آمارها می‌گویند، باعث تلف‌شدن صندلی‌ها و ضرر شرکت‌ها، و فروش بیش از آن عدد، باعث جریمه‌های زیادی می‌شود که شرکت‌ها مجبور می‌شوند به مسافران بپردازند؛ جریمهٔ لغو پرواز؛ جریمهٔ هتلی که مسافران ذخیره (رزرو) کرده‌اند، نارضایتی مسافران و ... .

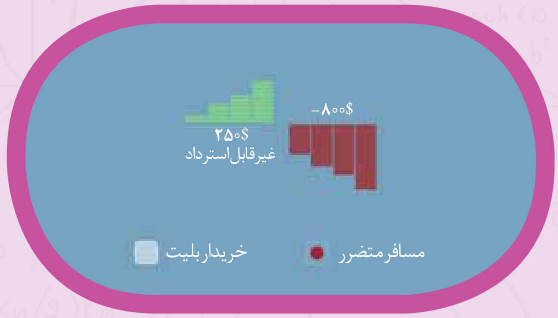


خط‌های هوایی طی سال‌ها، اطلاعات دقیقی دربارهٔ اینکه کدام مسافران تجربهٔ جا ماندن از پروازها را دارند، یا در چه مسیرهای هوایی بیشترین تعداد مسافران غایب وجود دارند، جمع‌آوری کرده‌اند. مثلاً می‌دانند که در فلان خط هوایی ۹۰ درصد مسافران به‌موقع برای پرواز حاضر می‌شوند. بیایید برای راحتی کار و ساده‌کردن مطلب فرض کنیم تمام مسافران تنها هستند و کسی خانوادگی و گروهی در حال سفر نیست.

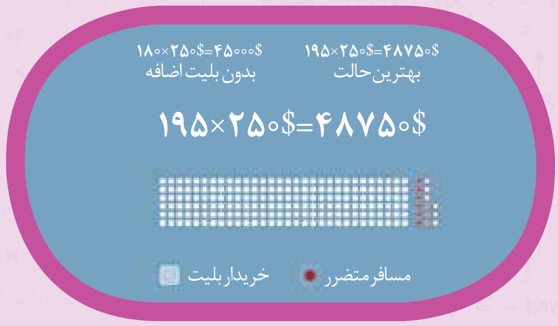
اگر هواپیما ۱۸۰ صندلی داشته باشد و ۱۸۰ بلیت هم فروخته شود، در حالتی که ۹۰ درصد مسافران به موقع برای پرواز حاضر باشند، ۱۶۲ مسافر در هواپیما خواهند بود. (حواسمان هست که داریم در فضای احتمالی حرف می‌زنیم و تعداد مسافرانی که حاضر می‌شوند می‌تواند از این عدد بیشتر یا کمتر هم باشد.)

احتمال وقوع هر کدام از اتفاق‌ها، با رابطه‌ای به نام توزیع دوجمله‌ای به دست می‌آید و نشان داده می‌شود.

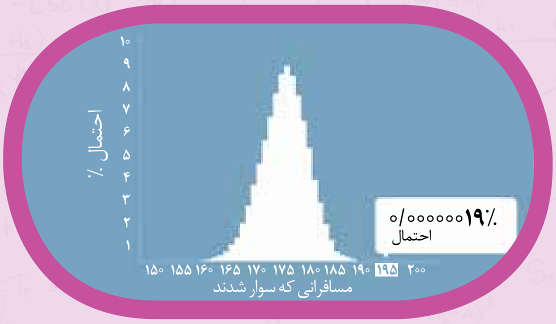
احتمال هر پیشامد با نمودار و رابطه‌ای که توزیع دوجمله‌ای نامیده می‌شود، داده می‌شود. در جایی که بیشترین احتمال وجود دارد، این نمودار به اوج یا قلهٔ خود می‌رسد.
حالا بیایید کمی دربارهٔ درآمد صحبت کنیم. شرکت‌های هواپیمایی از طریق فروش بلیت درآمد کسب می‌کنند و برای هر مسافری که او را از پرواز خارج می‌کنند و به جای او بلیت دیگری هم فروخته بودند، باید پولی را به‌عنوان جریمه بپردازند که برای شرکت ضرر خواهد بود.
فرض کنید هر بلیت ۲۵۰ دلار باشد و مسافر را نتوانند به پرواز دیگری نیز منتقل کنند. جریمه‌ای را که شرکت به مسافر پرداخت می‌کند نیز ۸۰۰ دلار در نظر بگیریم. در اینجا اگر شرکت بلیت اضافه نفروشد، ۴۵۰۰۰ دلار درآمد دارد و اگر ۱۵ بلیت اضافه بفروشد، ۴۸۷۵۰ دلار فروش داشته است. بهترین حالت این است که آن ۱۵ بلیت اضافه را درست و به اندازه فروخته باشد و هیچ مسافری اضافه نیاید!



اما اگر ۱۵ نفری که به‌جای آن‌ها بلیت اضافه فروخته شده است، برای سفر حاضر شوند، شرکت مجبور به پرداخت خسارت، نفری ۸۰۰ دلار به این افراد می‌شود که در این صورت درآمد او فقط ۳۶۷۵۰ دلار خواهد بود؛ یعنی حتی کمتر از وقتی که همان ۱۸۰ بلیت را می‌فروخت.



اما فقط این موضوع مهم نیست که یک فرانامه (سناریو) از نظر مالی چقدر به نفع یا به ضرر شرکت است. این موضوع هم بسیار مهم است که آن فرانامه چقدر احتمال دارد رخ بدهد یا نه.
با استفاده از توزیع دوجمله‌ای می‌بینیم که احتمال اینکه همهٔ ۱۹۵ مسافر برای پرواز حاضر شوند، تقریباً صفردرصد است. احتمال سوارشدن ۱۸۴ مسافر تقریباً یک درصد است. و به همین ترتیب احتمال حضور تعداد دیگری از مسافران را هم می‌توانیم روی نمودار بعدی ببینیم.



بیایید این احتمال‌ها را در درآمد حاصل از بلیت فروخته شده برای آن تعداد مسافر ضرب و همهٔ آن‌ها را با هم جمع کنیم. بعد هم این عددها را با هم مقایسه کنیم و ببینیم در کدام حالت شرکت هوایی بیشترین درآمد حاصل از فروش بلیت‌ها را داشته است. این درآمد در مثالی که زدیم، از فروش ۱۹۸ بلیت برای پرواز ۱۸۰ نفره به‌دست می‌آید. با یک حساب و کتاب ساده می‌بینیم که شرکت هواپیمایی از ذخیره (رزرو) بیش از اندازهٔ بلیت‌های این پرواز تقریباً ۴۰۰۰ دلار درآمد اضافه کسب کرده است. این عدد فقط برای یک پرواز است. اگر آن را در میلیون‌ها پرواز یک شرکت در طول سال ضرب کنید، رقم بسیار قابل‌توجهی خواهد بود. محاسبهٔ واقعی اندازهٔ ذخیره (رزرو) بیش از حد، به عوامل بیشتری بستگی دارد و پیچیده‌تر از مثالی است که ما زدیم.

برخی افراد می‌گویند این کار غیراخلاقی است، چون داریم برای یک منبع قابل استفاده از دو نفر پول می‌گیریم و انگار جنسی را هم‌زمان به دو نفر بفروشیم و مسئولیتش را هم قبول نکنیم.
بعضی‌ها می‌گویند اگر ۱۰۰ درصد مطمئن باشیم که مسافری نمی‌آید، باز این‌قدر بد نیست! اما اگر اطمینان ما از آمدن یا نیامدن یک مسافر ۹۵ درصد باشد چطور؟ حالا این کار کارِ خوبی است یا خیر؟ اگر این احتمال ۷۵ درصد شود چه؟
آیا عددی وجود دارد که غیراخلاقی بودن یک کار را نشان دهد؟ اگر فقط ۹۵ درصد مطمئن باشند، خوب است صندلی آن‌ها را بفروشند اما اگر ۷۵ درصد اطمینان داشته باشند ... . آیا غیراخلاقی بودن یا نبودن این کار را هم می‌توانیم با اعداد و ارقام نشان دهیم و بررسی کنیم؟

منبع

https://www.ted.com/talks/nina_klietsch_why_do_airlines_sell_too_many_tickets?language=en

درمانگاه ریاضی

افشین خاصّه‌خان

سلام و خسته نباشید خدمت دوستداران درمانگاه ریاضی. سال نو به همهٔ عزیزان مبارک باشد. امیدوارم با صبر و حوصله مفاهیم ریاضی را یاد بگیرید تا بتوانید از آن‌ها در زندگی روزمرهٔ خود استفاده کنید. مراجعه‌کنندهٔ این هفته دانش‌آموز هفتمی به نام **کیا تهمتن لشکری** است. پدر کیا مدیر یک سردخانه و مادرش معلمی باتجربه در دورهٔ ابتدایی است. کیا با مادرش به درمانگاه آمده است. بعد از سلام و احوال‌پرسی با آن‌ها، کیا را به اتاق درمانی دعوت می‌کنم. طبق معمول «گفت‌وگوی سقراطی» را با کیا آغاز کردم و در حین بحث در مورد چند سؤال از ریشه‌گیری، که کیا با خود به درمانگاه آورده بود، مشکل تفکر ریاضی او را حدس زدم.

تشخیص

یکی از سؤال‌هایی که در پرسش و پاسخ با کیا توجه مرا جلب کرد، این پرسش بود:

کدام گزینه درست است؟

۱. ریشهٔ دوم ۱۳ برابر است با $\sqrt{۱۳}$

۲. $\sqrt{۱۶} = \pm ۴$

۳. ریشهٔ دوم ۲۵ از ریشهٔ دوم ۱۶ بیشتر است

۴. ریشهٔ دومِ منفیِ عدد ۱۲ برابر است با $-۲\sqrt{۳}$

به نظر کیا گزینه های ۱ تا ۳ درست و گزینهٔ ۴ نادرست بود. دلایلی که برای این ادعا داشت نشان می‌داد که مشکل کیا نارسایی در درک مفهوم ریشهٔ دوم، نماد ریاضی آن و همچنین برداشت نادرست از ریشهٔ دومِ منفیِ یک عدد است.

درمان

برای درمان نارسایی درک این مفهوم، دوباره پرسش و پاسخ را آغاز کردم. اولین سؤالی که لازم بود از کیا بپرسم این بود: «ریشهٔ دوم یک عدد مثبت یعنی چه؟»

کیا با کمی مکث پاسخ داد: «استاد یعنی رادیکال آن عدد.»

پرسیدم: «رادیکال آن عدد به چه معناست؟»
کیا به فکر فرو رفت. برای آنکه بتوانیم راحت‌تر بحث کنیم، سؤال را عوض کردم و پرسیدم: «ریشهٔ دوم عدد ۲۵ یعنی چه؟»
او گفت: «$\sqrt{۲۵} = ۵$»
گفتم: «من هنوز جوابم را نگرفته‌ام.» بعد از کمی مکث انگار که چیزی را کشف کرده باشد گفت: «متوجه شدم. یعنی کدام عدد است که وقتی در خودش ضرب شود برابر ۲۵ می‌شود؟»
تأیید کردم، اما به او یادآوری کردم که غیر از ۵ عدد دیگری هم داریم. کیا چند عدد را در ذهنش مرور کرد و گفت: «مطمئن هستید؟»
سرم را به نشانهٔ تأیید تکان دادم. مکث کیا طولانی شد. گفتم: «چرا در عددهای منفی جست‌وجو نمی‌کنی کیا جان؟»
بلافاصله گفت: «آهاااان، ۵-»
بعد گفت: «مگر نگفته‌ایم که ریشهٔ دوم عددها نمی‌تواند منفی شود؟»
جواب دادم: «نه، چنین جمله‌ای وجود ندارد و شما به همین خاطر گزینهٔ ۴ را رد می‌کنی.»
پرسید: «جملهٔ درست چیست؟»
گفتم: «ریشهٔ دوم عددهای منفی تعریف نشده است.»
پرسید: «تعریف نشده است یعنی چه؟»
با یک مثال سعی کردم او را قانع کنم. گفتم: «فرض کنیم ما معلم و دانش‌آموز سمجی هستیم که می‌خواهیم ریشهٔ دوم عددهای منفی را تعریف کنیم؛ مثلاً ریشهٔ دوم ۱۶-. حال باید عددی را پیدا کنیم که وقتی در خودش ضرب می‌کنیم حاصل ۱۶- شود.»
پس از آزمون و خطا کیا گفت: «۱۶=۴×۴ و ۱۶=(۴-)×(۴-) نمی‌شود.»
گفتم: «ما همچنان سماجت به خرج می‌دهیم تا ببینیم چه اتفاقی می‌افتد. در این صورت یا باید حاصل‌ضرب عدد مثبت در عدد مثبت را برابر یک عدد منفی بگیریم و یا حاصل‌ضرب عدد منفی در عدد منفی را برابر یک عدد منفی بپذیریم. یعنی باید تمامی تعریف‌ها و قضیه‌هایی را که بر پایهٔ تعریف اولیهٔ +=(+)×(+) و +=(-)×(-) ساخته شده‌اند، بر هم بزنیم و از نو بسازیم. به نظر شما این کار عاقلانه‌تر است یا سماجت را کنارگذاشتن و این قرارداد جدید را به دنیای ریاضی تحمیل نکردن؟»
کیا گفت: «به نظرم دومی بهتر است.»
او را تأیید کردم و توضیح دادم که تعریف نشده یعنی مجوز ورود به دنیای ریاضی را نگرفته است؛ چون سایر قوانین ریاضی را بر هم می‌زند.
بعد از این بحث کیا با تعجب پرسید: «مگر ریشهٔ دوم همان رادیکال نیست؟ در سؤال بالا گزینهٔ درست کدام است؟»
گفتم: «اشتباهی که شما در این سؤال مرتکب شدی، جزو اشتباه‌های متداول در ریاضی است. وقتی می‌گوییم ریشهٔ دوم ۱۶، منظور ما این است که کدام عددها هستند که وقتی به توان دو می‌رسند، برابر ۱۶ می‌شوند. اما زمانی که می‌گویی $\sqrt{۱۶}$، در واقع منظور ما ریشهٔ دومِ مثبتِ عدد ۱۶ است و چون معمولاً پسوند مثبت ذکر نمی‌شود، خطای $\sqrt{۱۶} = \pm ۴$ به طور متداول اتفاق می‌افتد. لذا گزینهٔ ۲ نادرست است. اکنون می‌توانی درستی یا نادرستی گزینهٔ ۱ را تشخیص دهی؟»
کیا با نگاهی دوباره به سؤال گفت: «بله متوجه شدم، ریشهٔ دوم ۱۳ برابر است با $\pm\sqrt{۱۳}$ اما ریشه دومِ مثبتِ عدد ۱۳ برابر $\sqrt{۱۳}$ و ریشه دومِ منفیِ عدد ۱۳ برابر $-\sqrt{۱۳}$ خواهد بود.» و بلافاصله ادامه داد: «پس گزینهٔ ۴ پاسخ صحیح می‌شود.»
آفرین گفتم و پرسیدم: «به نظر شما چرا گزینهٔ ۳ نادرست است؟ می‌توانی برای رد آن مثالی بیاوری؟»
او با کمی تأمل جواب داد: «اگر ریشهٔ دوم ۲۵ را ۵- و ریشهٔ دوم ۱۶ را ۴ در نظر بگیریم، جملهٔ گزینهٔ ۳ برقرار نمی‌شود.»
به نظرم نارسایی کیا در درک مفهوم ریشه و رابطهٔ آن با توان، و همچنین مفهوم نماد رادیکال برطرف شده بود. حال نوبت تجویز دستورالعمل‌های درمانی بود.

تجویز

۱. به او توصیه کردم، متن فصل ۷ کتاب درسی ریاضی هفتم را به دقت بخواند و فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌هایش را حل کند.
۲. بعضی از مسئله‌های مهم مربوط به توان، جذر و ریشه‌گیری را برایش تعیین و سفارش کردم که برای حلشان آزمون و خطا انجام دهد و تا حد امکان بکوشد تا خودش آن‌ها را حل کند و از نگاه‌کردن به پاسخ مسئله اجتناب کند. اگر نشد، حداقل روند حل آن‌ها را تحلیل و تعقیب کند.
۳. برای سؤال‌هایی که نتوانسته جواب دهد، در طول هفته دوباره چالشی انجام دهد. حل یک مسئله بعد از چندین بار تلاش، بسیار لذت‌بخش خواهد بود.
۴. اگر امکان داشته باشد، سؤال‌های توان، جذر و ریشه‌گیری را با روش‌های متفاوت حل کند و از این کار لذت ببرد.
۵. اگر علاقه‌مند باشد، چند سؤال در همین زمینه طراحی کند و با دوستانش به حل و بحث بگذارد تا نقاط قوت و ضعف سؤالش آشکار شود.

ژما جواهری‌پور

دنیای بازی و ریاضی

آیـا تابه‌حال تجربهٔ یک بازی رایانه‌ای را داشـــته‌اید؟ کدام بازی مورد علاقهٔ شماست؟ دوست دارید فوتبال بازی کنید یا گنج بیابید؟ به بازی رانندگی با خودرو علاقه‌مند هســـتید و یا عبور از جنگل و رودخانه را دوست دارید؟ انواع متفاوتی از بازی‌های رایانه‌ای در بازار وجود دارند که مشتریان کودک و نوجوان و حتی بزرگ‌سالان پیگیر آن‌ها هستند. تنوع در محصول‌ها و رقابت در جذب مشتری، موضوع‌هایی هستند که شرکت‌های بزرگ تولید بازی‌های رایانه‌ای که سرمایه‌گذاری عظیمی در این تجارت پرســود کرده‌اند، به آن‌ها توجه می‌کنند. برنامه‌نویسی بازی‌های رایانه‌ای از جمله شغل‌های پردرآمد است و شرکت‌ها با توجه به اســتعداد و خلاقیت طراحان بازی‌ها، دستمزدهای بالایی به آن‌ها می‌پردازند.

اگر شما هم دوست دارید پس از سال‌ها تجربهٔ بازی در فضای مجازی، در دنیای ساخت و تولید این بازی‌ها مشغول به کار شوید، باید بدانید دانش ریاضی اولین ابزاری است که به آن نیاز دارید. بازی‌های رایانه‌ای از ریاضیات برای انجام تک‌تک وظایف استفاده می‌کنند؛ از پرداز زدن (رندر) گرفته تا پویانمایی، و از فیزیک تا هوش مصنوعی. ریاضیات همه جا هست. ریاضیات زیربنای تمام عملیات اولیهٔ انجام شده توسط یک موتور بازی است. شما حتی نمی‌توانید یک شخصیت (کاراکتر) بازی را بدون ریاضی روی صفحه حرکت دهید.

بیایید دانـش ریاضی خود را در بازی‌های رایانه‌ای مرور کنیم. از یک بازی ساده شروع کنیم؛ مثل تصویر زیر:

فرودآمدن چترباز از هواپیما یک بازی ساده است که برای تعیین نقطهٔ فرود، برنامه‌نویس نیاز دارد اطلاعات یک دستگاه مختصات و سرعت هواپیمـــا را به عنوان داده‌های اولیه در بازی وارد کند. می‌توانید برای درک این بازی پاک‌کن خود را به عنوان چترباز در دستتان نگه دارید و با حرکت دســـت خود، مانند هواپیما و یک خط‌کش روی میز، این بازی را انجام دهید. با چند بار تکرار حرکت توانستید پاک‌کن خود را دقیقاً روی عدد ۱۰ سانتی‌متر خط‌کش رها کنید؟ تمام این اطلاعات در فضای دو بعدی هندســـی بر پایهٔ ریاضیات تنظیم می‌شـــوند و با کدنویسی یک بازی می‌سازند. به سراغ یکی از بازی‌های آشنای دیگر برویم: بازی فوتبال در یک فضای هندسی سه بعدی طراحی می‌شود.

در این بازی، زاویهٔ پرتاب توپ و سرعت اولیهٔ توپ در نتیجهٔ پرتاب‌ها (شوت‌ها) تأثیرگذار است. پس شما باید علاوه بر آشنایی با دستگاه‌های مختصات سه بعدی، دانش ریاضی در ماتریس و شناسایی زاویهٔ پرتابی و معادله‌های ریاضی این مفاهیم را برای طراحی بازی بشناسید.

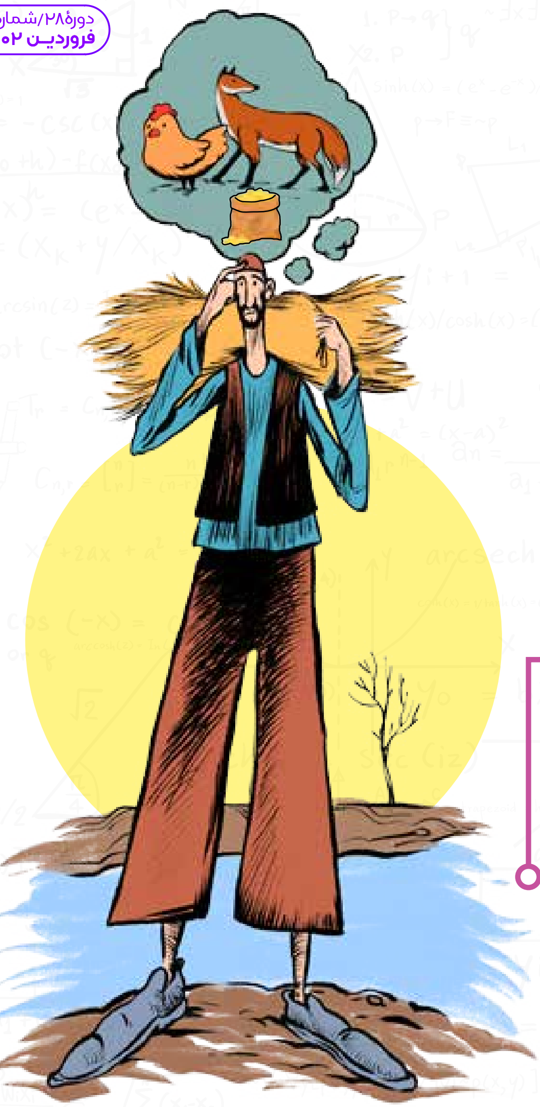
موضوع بعدی در بازی‌های رایانه‌ای که اهمیت بسیار زیادی در جلب مشتریان دارد، طراحی گرافیکی و توجه به جنبه‌های زیبایی‌شناسی پویانمایی‌های (انیمیشن‌های) بازی‌هاست.

محاسبهٔ ابعاد شـــخصیت‌های (کاراکترهای) بازی و نحوهٔ حرکت این پویانمایی‌ها، همه و همه نیازمند دانش ریاضی است. بنابراین اگر بنا دارید دنیای بازی‌های رایانه‌ای را برای کار حرفه‌ای خود انتخاب کنید، به توسعهٔ دانش ریاضی‌تان بپردازید.

منبع
The effects of modern mathematics achievement and class motivation /2010/ mansureh kebritchi, atsusi Hirumi.

ریاضیات در ادبیات

جعفر ربانی



در این شماره می‌خواهیم یکی از نویسندگان اولیهٔ مجلهٔ رشد ریاضی برهان را که به‌طور هم‌زمان به ریاضیات و ادبیات علاقه‌مند بود، معرفی کنیم. او دکتر احمد شرف‌الدین، استاد محقق و پژوهشگر دانشگاه هرمزگان بود. از وی کتابی باقی‌مانده که برای استفادهٔ دانش‌آموزان بسیار مفید است و در آن بعضی از پیوندهای میان ادبیات و ریاضیات گفته شده‌اند. نام کتاب «ریاضی دلاویز در ادب گهرریز» است و انتشارات مدرسه بارها آن را منتشر کرده است.

حکایتی از مسئلهٔ گراف

این حکایت را در کتاب‌های فارسی قدیم نوشته بودند:

حکایت: دهقانی در کنار رودی قرار دارد. او با خود یک مرغ، مقداری دانه و یک روباه دارد. دهقان می‌خواهد آن‌ها را با قایقی که فقط گنجایش خود او و یکی از سه چیز یاد شده را دارد، به طرف دیگر رودخانه ببرد. دهقان چگونه باید عمل کند تا در غیاب او نه روباه مرغ را بخورد و نه مرغ دانه‌ها را؟

پاسخ: دهقان ابتدا مرغ را با خود می‌برد. در این صورت روباه دانه‌ها را نمی‌خورد. (این روباه فقط گوشت‌خوار است.) دهقان مرغ را در آن‌سوی رود می‌گذارد و خودش تنها برمی‌گردد و این بار دانه‌ها را برمی‌دارد و به آن‌سوی رود می‌برد. وقتی به آنجا می‌رسد دانه‌ها را می‌گذارد و مرغ را با خود باز می‌گرداند و این بار روباه را با خود می‌برد. اکنون در آن‌سوی رود باز روباه و دانه‌ها قرار دارند. در پایان دهقان باز می‌گردد و مرغ را ـ برای مرتبهٔ دوم ـ به آن‌سو می‌برد.

آیا می‌دانید اهمیت این مسئله از نظر ریاضی چیست؟ این است که از مسائل «گراف» است. حال می‌پرسید گراف چیست؟ از معلم ریاضی خود بپرسید، اما همین اندازه بدانید که امروز برای مثال «اسنپ» برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر رسیدن به مقصد، از علم گراف بهره می‌گیرد.

این یکی از مسائلی است که شادروان احمد شرف‌الدین در کتاب خود آورده و ما با اندکی تغییر برای شما نقل کردیم.

و اما، این بیتی از **فردوسی** در توصیف یکی از جنگ‌هاست:

ز گرد ستوران در آن پهن دشت
زمین شد شش و آسمان گشت هشت

معنای بیت: در گذشته مردم معتقد بودند که زمین و آسمان هر یک، هفت طبقه دارند که البته امروز این حرف اعتبار ندارد. فردوسی می‌خواهد بگوید که آن جنگ چنان عظیم بود که در نتیجهٔ تاختن اسب‌ها، یک طبقه از زمین گرد شد و به آسمان رفت؛ در نتیجه: زمین ۶=۱-۷ و آسمان ۸=۱+۷.

شاعر و ریاضیات!

همانندی تخیل آفرینندهٔ ریاضیات و شاعر، همواره مورد توجه دانشمندان بوده است. **هانری پوانکاره**، ریاضی‌دان، فیزیک‌دان و فیلسوف بزرگ می‌گوید: «ریاضی‌دان کامل باید تا اندازه‌ای شاعر باشد.» همو گوید: «نام دانشمند به‌خصوص ریاضی‌دان را باید به کسی داد که در کار خود به احساس یک هنرمند برسد و به اندازهٔ یک هنرمند از محصول کار خود لذت ببرد.»

منظور پوانکاره این نیست که ریاضی‌دان کامل باید به‌صورت معمول شعر بگوید یا دیوان شعر داشته باشد، بلکه بدین معناست که ریاضی‌دان کامل کسی است که دارای تخیل شاعرانه باشد.

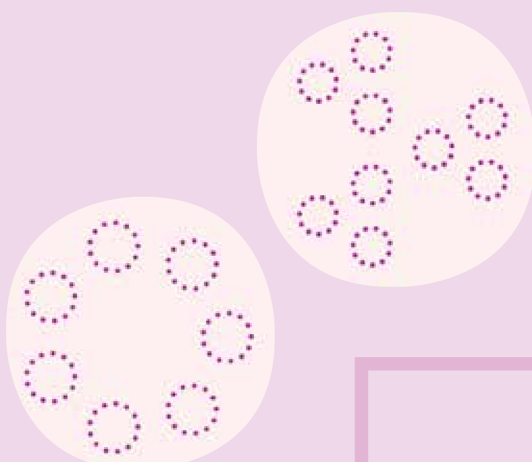
زهره پندی

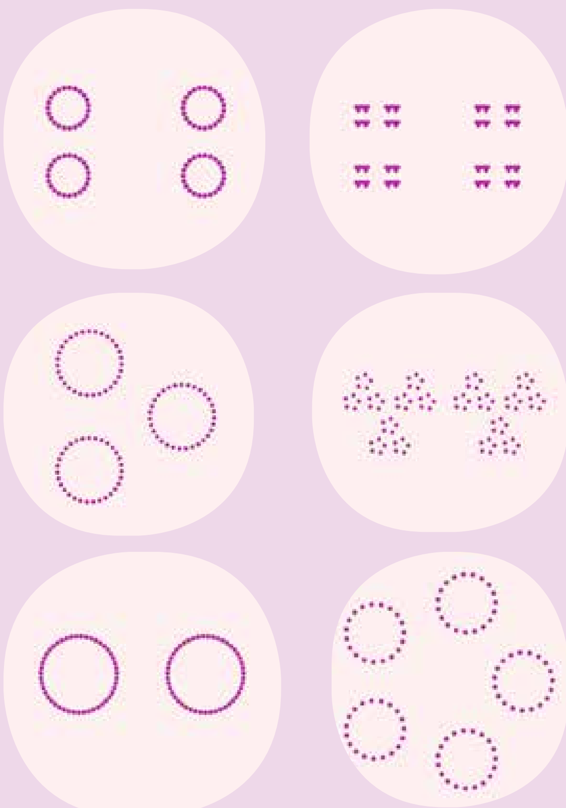
ابزار تجزیه و چیدمان عددها

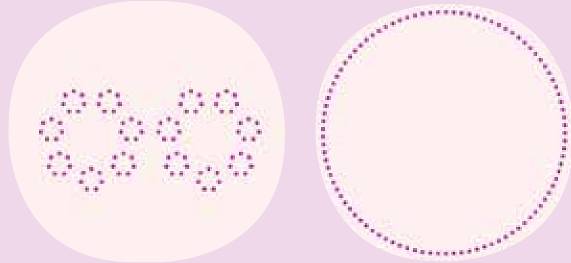
ریاضی فکر کن! برای همه!

در این شماره یکی از ابزارهای وبگاه «ریاضی فکر کن» را به نام «ابزار تجزیه و چیدمان عددها» معرفی می‌کنیم که آقای هوشمند حسن‌نیا، از اعضای قدیمی همین مجله، آن را ساخته است.

اما پیش از ارائۀ نشانی این ابزار، بیایید به نتیجۀ چیدمانی که روی برخی عددها انجام داده است، نگاهی بیندازیم. تصویرهای زیر چیدمان نهایی عددهای دورقمی با دهگان ۹، یعنی عددهای ۹۰ تا ۹۹ هستند؛ یعنی در هر یک از این تصویرها به تعداد یکی از این عددها مهره وجود دارد که تا جای ممکن در دسته‌های مساوی قرار گرفته‌اند و چیدمان نهایی را ساخته‌اند.





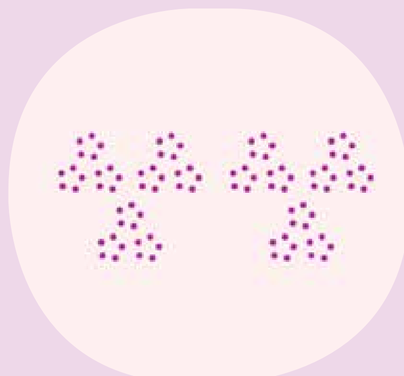


تا جای ممکن، یعنی اینکه اگر بتوان یک دسته را به دو یا چند دستۀ مساوی تقسیم کرد، ابزار این کار را انجام می‌دهد. مثلاً ۹۰ را دو تا ۴۵ تا می‌کند، بعد هر کدام از ۴۵ها را سه تا ۱۵ تا می‌کند. بعد هر کدام از ۱۵ها را سه تا ۵ تا می‌کند! و حالا تصویر نهایی است؛ چون ۵ها را نمی‌توان به دو یا چند دستۀ مساوی تقسیم کرد.

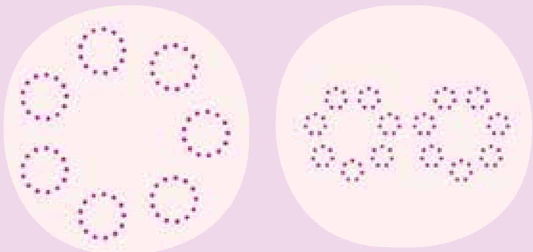
به ۱۰ تصویر قبل خوب نگاه کنید. با این توضیحات آیا می‌توانید تصویر عدد ۹۰ را پیدا کنید؟

اگر درست عمل کرده باشید، این تصویر را برای ۹۰ یافته‌اید:

۹۰=۲×۳×۳×۵

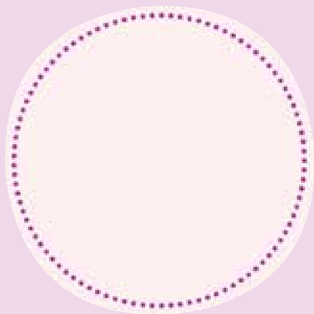


آیا به‌جز شمردن مهره‌ها، راهی برای یافتن تصویر عدد ۹۱ داریم؟ عدد ۹۱ برابر حاصل‌ضرب ۷ در ۱۳ است! در میان این عددها، عدد ۹۸ نیز مضرب ۷ است؛ یعنی حاصل ضرب ۷ در ۱۴. به تصویرهای زیر نگاه کنید. در هر یک از این دو تصویر، هفت دسته‌ای‌ها دیده می‌شوند. فکر می‌کنید کدام تصویر ۹۱ و کدام تصویر ۹۸ است؟



اگر درست انتخاب کرده باشید، تصویر عدد ۹۱، هفت دستۀ ۱۳تایی را نشان می‌دهد که دیگر قابل دسته‌بندی در دو یا چند دسته نیستند. تصویر عدد ۹۸، دو دسته را نشان می‌دهد که هر کدام هفت دستۀ هفت‌تایی هستند؛ چرا که: ۷×۷×۲=۹۸.

یکی از تصویرهایی که در ابتدای متن دیدیم، به نظر جالب می‌رسد! به این تصویر نگاه کنید:



به نظر می‌رسد که تصویر نهایی عددی که در این تصویر نمایش داده شده، تنها یک دسته است و امکان دسته‌بندی مهره‌ها در دو یا چند دستۀ مساوی وجود نداشته است. می‌دانید این تصویر کدام یک از عددهای ۹۰ تا ۹۹ را نشان می‌دهد؟

جواب درست ۹۷ است. عدد ۹۷ تنها عدد اول در میان عددهای ۹۰ تا ۹۹ است و نمایش آن در این ابزار به شکل یک دایره از مهره‌هاست. در این ابزار، مهره‌هایی که تعدادشان عددهای اول است، به همین ترتیب دور یک دایره چیده می‌شوند. شما می‌توانید به این ابزار مراجعه کنید و با استفاده از آن چیزهای تازه‌ای دربارۀ عددها یاد بگیرید. و اما نشانی این ابزار. برای دیدن این ابزار به نشانی زیر مراجعه کنید:

https://mathink.ir/ابزار-چیدمان-اعداد/

وقتی روی پیوند (لینک)، یعنی «ابزار چیدمان اعداد» تلیک (کلیک) کنید، ابزار را مشاهده می‌کنید. یک عدد به جای عدد ۱۰ وارد کنید (با رقم‌های انگلیسی) و دکمۀ «برو» را بزنید. به همان تعداد مهره در صفحه نمایش داده می‌شود. سپس عدد مرحله به مرحله تجزیه می‌شود و همان مهره‌ها هم‌گام با تجزیۀ عدد، به شکل‌های متفاوت در صفحه چیده می‌شوند. از این ابزار می‌توان برای پژوهش دربارۀ عددها، تجزیۀ آن‌ها و دیدن هر عدد به صورت ترکیب ضربی عددهای دیگر استفاده کرد. راستی قبل از آنکه به این ابزار سری بزنید، به عدد ۱۰۰ فکر کنید. پیش‌بینی می‌کنید که این ابزار، عدد ۱۰۰ را چطور نمایش می‌دهد؟ پاسختان را یادداشت کنید، سپس سراغ ابزار بروید و ببینید که خروجی آن چقدر به پیش‌بینی شما شبیه است.

مهدیه مسیبی

چالش‌هایی برای نگاه چندبعدی به جهان

گفت‌وگو با سیده ستایش ضیا و بهار آب‌خو، دانش‌آموزان برگزیدهٔ مقاله‌نویسی و مخاطبان امروز مجله

اشاره

پژوهش فرصتی افزون‌تر از مطالعهٔ کتاب درسی است. یک چراغ پرنور، مسیری گسترده و امکانی است که اگر با سعی و تلاش بیشتر همراه باشد، رسیدن به موفقیت را لذت‌بخش‌تر می‌کند. ما با این باور به آبادان رفتیم تا در «پژوهش‌سرای بصیرت» با دو دانش‌آموز اهل تحقیق و مطالعه بیشتر آشنا شویم. آنان در کنار فعالیت‌های درسی خود در دورهٔ اول متوسطه، مقاله‌نویسی، شرکت در رقابت‌های علمی و کارهای پژوهشی را هم دنبال می‌کنند. در این مسیر موفقیت‌های متعددی را هم کسب کرده‌اند. **سیده ستایش‌ضیا** و **بهار آب‌خو**، دو دانش‌آموز مخاطب ما هستند. در این گفت‌وگو، **زهره معلمیان**، مدیر پژوهش‌سرای دانش‌آموزی بصیرت آبادان و **سیدمهدی هاشمی**، دبیر ریاضی پژوهش‌سرا هم در کنار ما بودند و هر جا لازم بود، با توضیح‌های خود اطلاعات تکمیلی ارائه می‌کردند. با هم می‌خوانیم.

***

پیش از شروع گفت‌وگو، ابتدا خانم معلمیان چنین آغاز کرد: «از مهم‌ترین هدف‌های تأسیس پژوهش‌سراهای دانش‌آموزی ترویج فرهنگ پژوهش و تحقیق فردی و گروهی، رشد و توسعهٔ بنیهٔ علمی و پژوهشی دانش‌آموزان، و ایجاد زمینه برای بروز خلاقیت‌های فردی در راستای علاقه‌ها و استعداد آنان است. در این راستا و در حوزهٔ ریاضیات، پژوهش‌سرای دانش‌آموزی بصیرت آبادان از سال ۱۳۹۶ **انجمن ریاضیات** را با حضور مدرسان توانمند و دانش‌آموزان علاقه‌مند سه دورهٔ تحصیلی تأسیس کرد. مهم‌ترین اقدام انجام شده در این انجمن برگزاری نشست‌های علمی و دوره‌های حل مسئله و همچنین مسابقه‌های گوناگون حل مسئله است.»

● **با موضوع مقاله‌نویسی برای درس ریاضی چطور و از کجا آشنایی پیدا کردید؟**

○ **ستایش:** در کلاس ریاضی استاد **هاشمی** در پژوهش‌سرای بصیرت، با بحث مقاله‌نویسی در حوزۀ ریاضی آشنا شدم. این اتفاق هم به دلیل چالشی که در کلاس بر سر یکی از مباحث ریاضی پیش آمد، مرا به پژوهش و نوشتن مقاله با راهنمایی استاد هاشمی ترغیب کرد.

بهار: از آنجا که خانوادۀ من خانواده‌ای دانشگاهی است، من با مقولۀ مقاله‌نویسی بیگانه نبودم و تا حدودی آشنایی داشتم. اما اولین قدم‌ها را در زمینۀ مقاله‌نویسی ریاضی در «مسابقه‌های کاپ ریاضی پروفسور کرم‌زاده» آغاز کردم. این مسابقه‌ها در ارتباط با موضوع «کمی‌سازی داده‌های کیفی» بودند که برای من خیلی جذابیت داشت و مرا به دنیای «آشنایی با مجله‌های حرفه‌ای ریاضی» برد.

● **چه کسی انتخاب کرد یا پیشنهاد داد در چه مبحثی مقاله بنویسید؟**

○ **بهار:** چون اولین گام‌هایم را در مقاله‌نویسی ریاضی با مسابقه‌های «کاپ استاد **کرم‌زاده**» برداشتم، در وهلۀ اول به موضوع‌های مندرج در شیوه‌نامه محدود بودم. با این حال، از آنجا که به آمار و کاربرد آن در کمی‌سازی مسائل کیفی بسیار علاقه‌مندم، سعی کردم طوری مقاله را بنویسم که هم موضوع‌های مرتبط با آن‌ها را رعایت کرده باشم و هم به علاقه‌مندی خودم پاسخ گفته باشم. البته استادم، استاد **هاشمی**، همیشه پیشنهادهای جذابی در زمینۀ ریاضی برای من داشته‌اند.

ستایش: چون این سؤال در کلاس ریاضی در پژوهش‌سرای بصیرت برای من پیش آمد، برای رسیدن به جواب، استاد هاشمی به من پیشنهاد دادند با نوشتن مقاله در این مسیر، به جواب سؤال خود نیز برسم.

● **پرداختن به مقاله‌نویسی در حوزۀ ریاضی به یادگیری درس ریاضی شما چه کمکی کرد؟**

○ **بهار:** ریاضی را از یک درس صرفاً فرمولی درآورد و به آن بُعد داد. برای من ریاضی دیگر صرفاً یک درس ساده نبود. من به مسئله‌های ریاضی به چشم چالش‌هایی نگاه می‌کردم که قادر بودند مشکلات جدی جهانِ پیرامونم را حل کنند. بنابراین به‌جرئت می‌توانم بگویم که مقاله‌نویسی دید مرا نسبت به درس ریاضی عوض کرد و باعث شد به حل هر مسئله به‌صورت چندبُعدی نگاه کنم. بنابراین یادگیری مفاهیم درس ریاضی را برایم بسیار لذت‌بخش‌تر کرد.

ستایش: درست است که من در خیلی زمینه‌ها و مسابقه‌ها در درس ریاضی شرکت کرده‌ام و مقام‌های زیادی کسب کرده‌ام، اما حقیقتاً مقاله‌نویسی چون به مطالعۀ کتاب‌های فرادرسی، مقاله‌های سطح بالا و منابع تحقیقاتی معتبر نیاز دارد، سبب شد ذهن من بسیار باز شود و مطالب به‌خوبی در ذهنم جا بیفتند و از این نظر که خودم با تحقیق به جواب سؤال‌هایم رسیدم، نوشتن مقاله خیلی برایم دلنشین و جذاب شد.

● **نوشتن مقاله چقدر زمان برد، چند صفحه بود، از چه کسانی در این زمینه کمک گرفتید و از چه منابعی استفاده کردید؟**

○ **بهار:** من تا به حال چند مقالۀ ریاضی کار کرده‌ام. نوشتن هر مقاله حداقل دو تا سه ماه و حتی گاهی بیشتر زمان می‌برد. دلیل این امر هم برمی‌گردد به نحوۀ آماده‌سازی داده‌ها برای کار مقاله‌نویسی که کار تقریباً زمان‌بری است. اینکه یک مقاله چند صفحه باشد، به شیوه‌نامۀ مجله‌ای بستگی دارد که مقاله را برای آن آماده می‌کنیم. مثلاً بعضی مجله‌ها یا مسابقه‌ها محدودیت تعداد صفحه دارند و بعضی محدودیت ندارند. تعداد صفحه‌های مقاله به‌طور میانگین می‌تواند بین ۱۰ تا ۱۵ صفحه باشد.

در نوشتن مقاله از استادان محترم پژوهش‌سرای بصیرت، به‌خصوص آقای هاشمی، کمک گرفتم. ایشان برای جواب به سؤال‌های ما همیشه زمان می‌گذاشتند. من همین‌جا می‌خواستم از ایشان تشکر کنم. منابع یک مقالۀ حرفه‌ای حتماً باید از مجله‌ها و کتاب‌های معتبر ریاضی انتخاب شوند. در این زمینه استفاده از موتورهای جست‌وجوی مقالۀ فارسی (مثل سید[1] و سیویلیکا[2]) و انگلیسی (مثل گوگل اسکالر[3]) برای من خیلی کارآمد بود. ضمن اینکه کتاب‌هایی که آقای دکتر هاشمی در اختیار من قرار دادند هم راه‌گشا بودند.

ستایش: مقالۀ من حدود شش صفحه بود و نوشتن آن تقریباً دو ماه طول کشید. در این مسیر استاد هاشمی بزرگوار، و پدر و مادرم که بزرگ‌ترین پشتوانۀ زندگی من هستند، در کنارم بودند و مرا راهنمایی کردند. من از کتاب‌ها و منابع علمی متفاوتی بهره بردم.

● **ظاهراً هر دو نفر شما عضو پژوهش‌سرای بصیرت در شهر آبادان هستید. دربارۀ این پژوهش‌سرا و فعالیت‌های آن برای ما بفرمایید. پژوهش‌سرا به ارتقای سطح علمی شما، به‌ویژه در درس ریاضی، چه کمکی می‌کند؟**

○ **ستایش:** زمانی که من با پژوهش‌سرای بصیرت آبادان و استادان مجرب آن آشنا شدم و در کلاس‌های گوناگون آن، از جمله کلاس ریاضی شرکت کردم، روحیۀ پژوهشگری در من بیشتر شد. با تشویق‌ها و راهنمایی‌های خانم معلمیان عزیز هم در مسیری قرار گرفتم که دریچه‌ای تازه از زندگی به رویم باز شد. خانم معلمیان گرامی و همکارانشان، با استعدادیابی در زمینۀ ریاضی و برگزاری مسابقه‌ها، نه تنها باعث پیشرفت ذهنی من، بلکه بسیاری از دانش‌آموزان شدند. به‌جرئت می‌توانم بگویم در آبادان کمتر جایی به این شکل وجود دارد. در اینجا لازم می‌دانم از مدیریت محترم پژوهش‌سرای بصیرت، خانم معلمیان بزرگوار و استادم جناب آقای هاشمی که صادقانه در کنار ما دانش‌آموزان آبادانی هستند، سپاسگزاری کنم.

بهار: باید عرض کنم، کمک‌هایی را که این پژوهش‌سرا در زمینۀ ریاضی به من کرد می‌توانم به دو بخش تقسیم کنم: اول کلاس‌هایی که به‌صورت کاملاً علمی برای دانش‌آموزان برگزار می‌شدند؛ مثل کلاس‌های حل مسئله، ریاضی‌های پایه و حتی دوره‌های کوتاه مقاله‌نویسی. دوم، حمایت‌های مدیریت و استادان پژوهش‌سرا از دانش‌آموزانی که علاقۀ بیشتری برای یادگیری حرفه‌ای یک شاخه داشتند. هرگاه در انجام پژوهش با چالشی مواجه می‌شدم، دلگرمی و حمایت علمی دکتر هاشمی و خانم معلمیان، برای برخاستن دوباره و غلبه بر مشکل و حل چالش یاری‌ام می‌کرد.

● **شما در کارسوق‌های ریاضی هم شرکت می‌کنید. از این کارسوق‌ها برایمان بگویید.**

○ **ستایش:** از آنجا که کارسوق ریاضی به‌صورت کارگاه آموزشی برگزار می‌شد و در این کلاس‌ها و کارگاه‌ها افتخار آشنایی با استادان بزرگ ریاضی را داشتم، بسیار برایم آموزنده بود. ضمن اینکه کار گروهی و تیمی باعث افزایش بهره‌وری و افزایش کیفیت کار، هم‌فکری و مشورت می‌شود. این شرایط سبب موفقیت تیم ما در این زمینه شد.

بهار: ببینید، کارسوق‌ها مجموعه مسابقه‌هایی زیرمجموعهٔ «سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان» (سمپاد) هستند. با برگزاری هر کارسوق، تمامی دانش‌آموزان زیرمجموعهٔ «سمپاد»، به انجام چالشی دعوت می‌شوند که می‌باید با تکیه بر مجموعه همایش‌هایی که یا به‌صورت برخط و یا حضوری هستند، انجام دهند. در مورد کارسوق ریاضی استاد کرم‌زاده هم روال به همین شکل بود و در نهایت ما با انجام یک کار تیمی موفق شدیم مقام اول را در این چالش علمی به‌دست آوریم.

هاشمی: استادان برگزارکنندهٔ کارسوق یک سلسله مبحث‌ها را انتخاب و دوره‌ای در این زمینه برای همکار برگزار می‌کنند. سپس چند سؤال چالشی از طرف هیئت برگزارکننده به گروه‌های دانش‌آموزی داده می‌شود و آن‌ها به همراه استادان راهنمای خود به دنبال بهترین پاسخ‌ها می‌روند.

● کلاسی به نام کلاس حل مسئله دارید. منظور از این کلاس چیست؟ چگونه مسئله‌هایی در این کلاس مطرح و چگونه حل می‌شوند؟ اصولاً این کلاس چه چیزی یاد می‌دهد؟

○ **ستایش:** در کلاس حل مسئلهٔ ریاضی که با حضور استاد هاشمی و استاد بحرینی برگزار شد، این بزرگواران، مسئله‌هایی فراتر از سطح کتاب مطرح می‌کردند که چالش‌برانگیز بودند و بیشتر مسئله‌ها را از چندین راه می‌شد حل کرد. به این ترتیب ما با راه‌حل‌های متفاوت آشنا می‌شدیم. این روش باعث رشد فکری دانش‌آموز می‌شود و به نوعی ورزش ذهن است.

بهار: کلاس‌های حل مسئله کلاس‌هایی هستند که به ابتکار مرکز پژوهش‌سرای بصیرت و به همت استادانی مانند استاد هاشمی برگزار می‌شوند. ابتدا آزمونی می‌گیرند و سپس دانش‌آموزان یک دورهٔ تحصیلی در سطح شهرستان آبادان که در این آزمون برگزیده شده باشند، از طرف پژوهش‌سرا به شرکت در این کلاس‌ها دعوت می‌شوند. از آنجا که من هم یکی از برگزیدگان این آزمون بودم، توانستم در کلاس حل مسئله شرکت کنم. در این کلاس‌ها ما با تکیه بر علم ریاضی چگونگی فرایند مواجهه با یک مسئله و همین‌طور حل قدم‌به‌قدم آن را یاد می‌گرفتیم. در واقع فنون علمی حل مسئله به ما آموزش داده می‌شد.

هاشمی: در این کلاس‌ها تأکید بر حل مسئله به روش‌های چندگانه است. به اصطلاح از روش «روش تدریس باز»[4] استفاده می‌شود.

● معمولاً کلمهٔ آزمایشگاه در ذهن افراد با درس شیمی، فیزیک یا زیست‌شناسی مرتبط می‌شود. اما ظاهراً این پژوهش‌سرا آزمایشگاه ریاضی دارد. دربارهٔ این آزمایشگاه و فعالیت‌های آن برای ما بگویید.

○ **ستایش:** در زمان برگزاری مسابقه‌های خوارزمی ریاضی که یکی از مباحث آن آزمایشگاه ریاضی بود، با توجه به اینکه در کلاس ریاضی استاد هاشمی در پژوهش‌سرای بصیرت شرکت داشتم، از راهنمایی‌های استاد هاشمی بهره گرفتم و به کمک «نرم‌افزار جئوجبرا»[5] در این زمینه کار کردم. استاد هاشمی خیلی از مواقع هنگام تدریس از این برنامه استفاده می‌کرد. جئوجبرا در فهم بهتر مسئله‌ها به دانش‌آموزان کمک می‌کند، ضمن اینکه به جذابیت و شیرینی درس ریاضی هم می‌افزاید.

بهار: یکی از جذاب‌ترین و زیباترین بخش‌های علم ریاضی که به‌واسطهٔ پژوهش‌سرای بصیرت با آن آشنا شدم، کاربرد آزمایشگاه ریاضی در حل مسئله‌های ریاضی است. ما دانش‌آموزان عاشق استفاده از آزمایشگاه هستیم، چون علم را به‌صورت شهودی به ما آموزش می‌دهد. پیش از این رنگ و شکل محلول‌ها و اسیدها به درک بهتر ما از علم شیمی کمک می‌کردند و اینکه بتوانیم مسئله‌های ریاضی را هم به‌صورت شهودی درک کنیم، بسیار جذاب بود. از ابزارهای آزمایشگاه ریاضی در سطح دورهٔ دوم متوسطه می‌توانم به نرم‌افزارهای «دسموس»[6] و جئوجبرا اشاره کنم.

هاشمی: آزمایشگاه ریاضی در آموزش ریاضی به معنای استفاده از وسایل کمک‌آموزشی و نرم‌افزارهای آموزشی مانند جئوجبرا است و به‌طور مستمر از این وسایل در کلاس‌ها استفاده می‌شود.

بهار: مثلاً من در پروژه‌ای که به بخش نوجوان خوارزمی ارائه دادم و در سطح آبادان پذیرفته شد و مقام دوم را به دست آورد، برای اثبات و درک بهتر مبحث تشابه از نرم‌افزار دسموس بهره گرفتم. در محیط این نرم‌افزار با استفاده از خط‌ها، منحنی‌ها، زاویه‌ها، و دیگر ابزار مرتبط، تصویر می‌کشیم و شکل‌ها را متحرک می‌کنیم. من با استفاده از خط‌ها دو مثلث ایجاد کردم و با استفاده از متحرک‌سازی آن‌ها تشابه را به شکل شهودی نشان دادم.

هاشمی: مثلاً فرمول حجم هرم را که یک‌سوم حجم منشور است، با این نرم‌افزار می‌توان نشان داد.

● و سؤال پایانی این است که با مجلهٔ رشد ریاضی برهان تا چه اندازه آشنایی دارید و چه بخش‌هایی از آن را دوست دارید و مطالعه می‌کنید؟ اصولاً مطالعه و خواندن مباحث ریاضی از طریق مجله یا کتاب‌های غیردرسی چقدر می‌توانند به یادگیری کمک کنند؟

○ **ستایش:** مجلهٔ رشد ریاضی برهان، علاوه بر آشناسازی ما با مشاهیر مطرح ریاضی و برنامه‌ها و نرم‌افزارهای مرتبط با درس ریاضی، مباحث پیچیدهٔ ریاضی را برای ما باز می‌کند و اخبار و اطلاعات در خصوص این درس را برای ما شرح می‌دهد. با توجه به اینکه کتاب ریاضی دانش‌آموزان به‌صورت کلی است و برای همهٔ دانش‌آموزان برنامه‌ریزی شده است، مطالعهٔ مباحث ریاضی از طریق مجله‌هایی مثل مجلهٔ رشد ریاضی برهان و یا کتاب‌های غیردرسی می‌تواند به رشد فکری دانش‌آموزان کمک کند و سطحشان را بالاتر ببرد.

بهار: «رشد ریاضی برهان» یکی از مجله‌های حرفه‌ای و در عین حال جذاب برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضی است. من بخش گفت‌وگو و همچنین ریاضی کاربردی را دوست دارم و با علاقهٔ بیشتری دنبال می‌کنم. من به‌عنوان کسی که به کتاب و مجله علاقهٔ زیادی دارم و کتاب خواندن جزئی از فعالیت‌های روزمره‌ام محسوب می‌شود، استفاده از کتاب و مجله‌ها را برای درک بهتر مسئله‌ها، به‌خصوص مسئله‌های ریاضی خیلی پیشنهاد می‌کنم. به‌خصوص مجله‌هایی مثل برهان که ریاضی را از حالت صرفاً محاسبه و کاربرد فرمول خارج می‌کند و جنبه‌های قشنگ، جدی و حتی گاه سرگرم‌کنندهٔ ریاضی را به ما نشان می‌دهد.

● ممنون از شما.

پی‌نوشت‌ها

1. SID.ir
2. Civilica.com
3. Google scholar
4. open teaching metod
5. geogebra
6. desmos

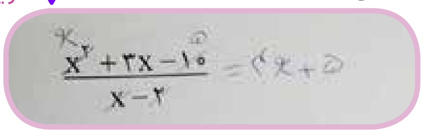
مرتضی مرتضوی

تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای

دانش‌آموزان عزیز در این شماره می‌خواهیم مبحث «تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای» را شرح دهیم که از موضوع‌های مهم ریاضی نهم است و برخی در انجام آن با مشکل مواجه می‌شوند. به نمونه سؤال‌های زیر که دانش‌آموزان پایهٔ نهم به آن‌ها پاسخ داده‌اند، توجه کنید. سعی کنید اشتباه‌های موجود در این نمونه‌ها را شناسایی و آن‌ها را اصلاح کنید.

در سؤال اول از دانش‌آموزان خواسته شده بود که خارج‌قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم $\frac{x^2+3x-10}{x-2}$ را به دست آورند. همان‌طور که در تصویر ۱ راه‌حل را ملاحظه می‌کنید، دانش‌آموز به اشتباه عامل x و ۲ در صورت و مخرج را ساده کرده و در نهایت نتوانسته است پاسخ صحیحی برای این سؤال بنویسد.

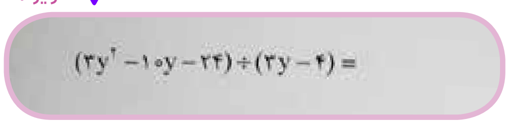
تصویر ۱



درحالی‌که می‌دانیم، زمانی می‌توانیم عاملی را حذف کنیم که بتوانیم آن را به‌صورت ضرب در عبارت دیگری بنویسیم. برای مثال، اگر عبارت $\frac{x^2(x-2)(x+3)}{x(x+5)(x-2)}=\frac{x(x+3)}{(x+5)}$ را داشته باشیم، می‌توانیم عامل x و (x-۲) را در صورت و مخرج کسر ساده کنیم. لذا چون در تجزیهٔ صورت کسر داده شده، عامل مشترکی با مخرج وجود ندارد، لازم است برای انجام تقسیم، آن را به‌صورت $x^2+3x-10\,\big|\,\underline{x-2}$ بنویسیم و مراحل تقسیم به این روش را ادامه دهیم.

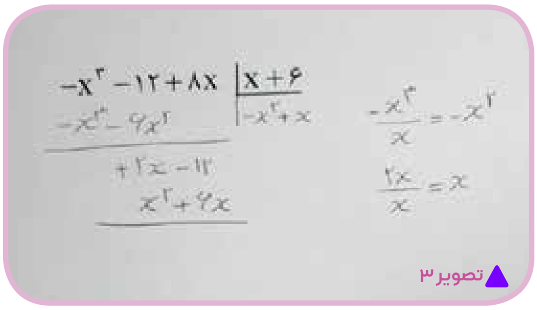
به سؤال دوم در تصویر ۲ توجه کنید. اغلب دانش‌آموزان پاسخی به این سؤال ندادند که به نظر می‌رسد یکی از دلایل اصلی آن استفاده از متغیر y به جای متغیر x در صورت سؤال است. یک دلیل دیگر هم می‌تواند شکل تقسیم باشد!

تصویر ۲



یکی دیگر از اشتباهات رایج بین دانش‌آموزان در انجام تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای هنگامی است که حاصل‌ضرب جملهٔ خارج‌قسمت در مقسوم‌علیه را از مقسوم کم می‌کنیم. در واقع برخی از دانش‌آموزان هنوز نمی‌دانند چرا و چگونه باید حاصل را از مقسوم‌علیه کم کنند. به خاطر دارید وقتی که می‌خواستیم عدد ۹ را بر ۲ تقسیم کنیم، می‌گفتیم در ۹ تا چند ۲ تا هست؟ پاسخ ۴ تا بود و سپس حاصل‌ضرب ۴ در ۲ را از ۹ کم می‌کردیم و باقی‌مانده را می‌نوشتیم. چون باقی‌مانده یعنی ۱ بر ۲ بخش‌پذیر نبود، دیگر تقسیم را ادامه نمی‌دادیم.

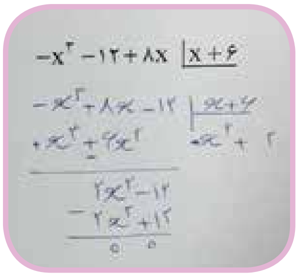
$$\begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ \cline{2-2} \underline{-8} & 4 \\ 1 & \end{array}$$



تصویر ۳

در تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای هم همین کار را انجام می‌دهیم. اما از پاسخ‌های دانش‌آموزان معلوم شد که اغلب آن‌ها درک نادرستی از تفریق چندجمله‌ای‌ها دارند. برای مثال، در تصویرهای ۳ تا ۵ چند نفر جملهٔ $6x^2$ را از $8x$ کم کردند، درحالی‌که می‌دانیم فقط جمله‌های متشابه را می‌توانیم از هم کم و یا با هم جمع کنیم.

اشتباه‌ها در انجام تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای متنوع است که برخی از آن‌ها به نداشتن درک درست از فرایند انجام تقسیم برمی‌گردد و برخی هم با مفاهیم پیش‌نیاز مانند جمع، تفریق و تقسیم یک‌جمله‌ای‌ها مرتبط است.

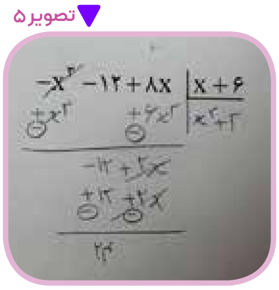


تصویر ۴

سؤال: با توجه به اینکه حاصل تقسیم $\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{-6} & 2 \\ 1 & \end{array}$ را می‌توان به‌صورت $\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$ نوشت، حاصل تقسیم x^2+1 بر $x+1$ را نیز به همین صورت بنویسید.

سؤال بالا با این هدف که ببینیم آیا دانش‌آموزان درک درستی از تقسیم و حاصل آن دارند و آیا قادرند آن را به‌صورت کسر بنویسند، داده شده است. متأسفانه هیچ‌کدام از دانش‌آموزان پاسخ درستی به این سؤال ندادند. درحالی‌که اگر دانش‌آموز ساختار و اجزای تقسیم، یعنی مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج‌قسمت و باقی‌مانده را به خوبی بشناسد، به‌راحتی از صورت سؤال هم می‌تواند پاسخ صحیح را دریافت کند.

تصویر ۵



توجه داشته باشید که با توجه به مفهوم تقسیم و کسر همواره می‌توانیم رابطهٔ $\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} \underline{\quad} & q \\ r & \end{array}$ را به صورت $\frac{a}{b}=q+\frac{r}{b}$ یا $\frac{a}{b}=q\frac{r}{b}$ بنویسیم.

فاطمه درویشی

معرفی برنامهٔ ریاضی فرمولا فری

فناوری به دانش‌آموزان کمک می‌کند ریاضی را در هر جای دنیا که هستند، بیاموزند. گسترهٔ جهان مدرسهٔ جدید دانش‌آموزان است. این مدرسهٔ جهانی در مورد هر موضوع ریاضی، می‌تواند ایده‌های تازه به دانش‌آموزان بدهد و روند یادگیری ریاضی را برایشان آسان کند. ریاضی یکی از درس‌های پایه و بسیار مهم در دوران تحصیل هر فردی است. دانشمندان معتقدند که یادگیری ریاضی در سن پایین نه تنها مهارت محاسبه‌های پایه را در کودک تقویت می‌کند، بلکه مهارت‌های دانش ریاضی، به انسان قدرت درگیرشدن با مسئله و یافتن راه‌حل را می‌دهد. اما متأسفانه درس ریاضی در طول تحصیل برای بیشتر دانش‌آموزان دشوار، سرد و بی‌روح است و علاقهٔ چندانی به این درس ندارند. آن‌ها ریاضی را درسی می‌دانند که باید گذرانده شود تا به پایهٔ بالاتر راه یابند. اما با استفاده از فناوری‌های نوین و ورود آن به آموزش، روش تدریس ریاضی و در نتیجه دیدگاه دانش‌آموزان به این درس را می‌توان تغییر داد.

یکی از برنامه‌هایی که به شما کمک می‌کند اکثر مباحث ریاضی را به‌صورت خلاصه و کامل (فرمول‌وار) همواره در تلفن همراهتان داشته باشید، برنامه‌ای است به نام «فرمولا فری»[1]. در این برنامه فرمول‌های ریاضی در موضوع‌های متفاوت، مانند هندسه، مشتق، هندسهٔ تحلیلی، جبر، انتگرال، ماتریس، تبدیل واحدها و ... ارائه شده است. از ویژگی‌های خوب این برنامه، امکان تنظیم آن به زبان فارسی است. برنامه ظاهری ساده دارد و درعین‌حال بسیار کاربردی است.

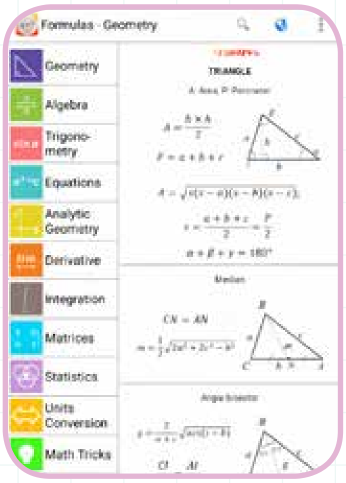
در این قسمت از مقاله قصد داریم به مباحث هندسی مرتبط با دورهٔ اول دبیرستان که در این برنامه آموزش داده شده‌اند، نگاهی داشته باشیم.

برای نصب برنامه کافی است به نشانی زیر مراجعه کنید:

https://cafebazaar.ir/app/com.nsc.mathformulas.lite

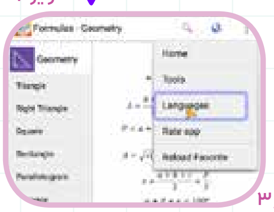
پس از نصب، شمایل روی صفحهٔ گوشی شما ظاهر خواهد شد که دروازهٔ ورود به این برنامه است. پس از ورود به برنامه تصویر ۱ را مشاهده خواهیم کرد که در آن دسته‌بندی مطالب را به زبان انگلیسی آمده است. برای درک بهتر می‌توانیم آن را از روشی که گفته می‌شود، به زبان فارسی تبدیل کنیم.

تصویر ۱



فارسی‌کردن محیط این برنامه با کلیک (تلیک) روی سه نقطهٔ بالا، سمت راست صفحهٔ شروع و مانند تصویر ۲ و ۳ انجام می‌شود:

تصویر ۲



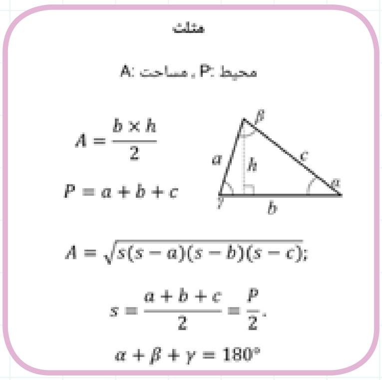
تصویر ۳

برای اینکه از مطالب هندسی این برنامه استفاده کنیم، کافی است به اولین بخش از قسمت سمت چپ صفحه یعنی هندسه مراجعه کنیم.

در این بخش، مباحث هندسی ساده، مانند مثلث و مربع تا شکل‌های سه‌بعدی، به‌صورت فرمول‌وار معرفی و آموزش داده شده است.

در تصویر ۴ که به مبحث مثلث اختصاص دارد، شما موارد زیر را ملاحظه می‌کنید:

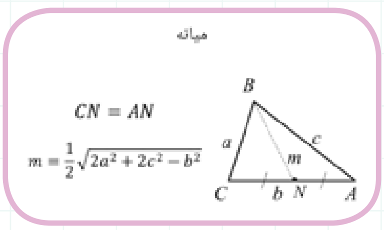
تصویر ۴



- آشنایی با شکل مثلث و نام‌گذاری اجزای آن (زاویه‌ها، ضلع‌ها و ارتفاع).
- نحوهٔ محاسبهٔ مساحت مثلث (A) که از حاصل‌ضرب ارتفاع در قاعده، تقسیم بر ۲ به‌دست می‌آید.
- نحوهٔ محاسبهٔ محیط (P) که از مجموع اضلاع آن به دست می‌آید.
- محاسبهٔ مساحت مثلث از طریق (s) که مشخص‌شده نصف محیط مثلث است.
- مجموع زاویه‌های مثلث که برابر با ۱۸۰ است.

در تصویر ۵ هم شما با میانهٔ مثلث آشنا می‌شوید.

تصویر ۵

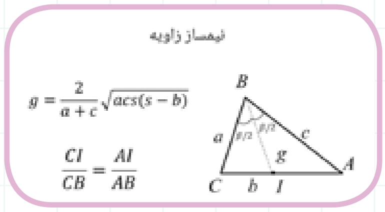


- در یک مثلث دلخواه شکل میانه را به شما معرفی می‌کند: خطی است که از رأس به وسط ضلع روبه‌رو برخورد می‌کند. بنابراین دو قطعهٔ مساوی ایجاد می‌کند.
- نحوهٔ محاسبهٔ اندازهٔ میانه با استفاده از اندازهٔ ضلع‌های مثلث را بیان می‌کند.

در تصویر ۶ با نیمساز یک مثلث آشنا می‌شوید.

● در تصویر ۶ یک مثلث و نیم‌ساز یکی از رأس‌های آن رسم شده و مشخص شده است که نیم‌ساز زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

تصویر ۶



● در بخش بعد هم این قضیه را بیان می‌کند: «در هر مثلث، نیم‌ساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع مقابل خود را به نسبت اضلاع خود قسمت می‌کند.»

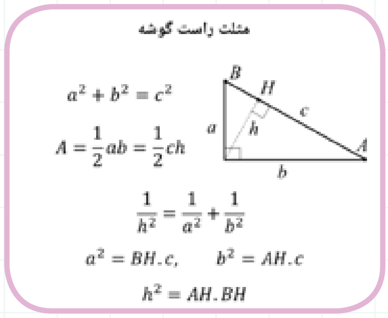
در ادامهٔ بحث به خصوصیات مثلث قائم‌الزاویه که در این برنامه مثلث راست‌گوشه ترجمه شده، پرداخته شده است.

● در این بخش مانند تصویر ۷ نیز ابتدا شکل و اجزای مثلث قائم‌الزاویه معرفی می‌شود.

● به قضیهٔ **فیثاغورث** $a^2+b^2=c^2$ اشاره می‌کند (طول وتر به توان دو برابر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر است).

● فرمول‌های محاسبهٔ $A = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$ مساحت مثلث را معرفی می‌کند.

تصویر ۷

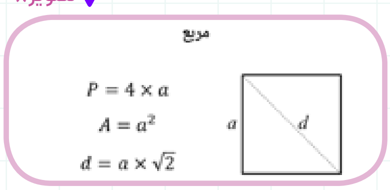


● در بقیهٔ قسمت‌ها یک‌سلسله تناسب مربوط به این نوع مثلث معرفی شده است.

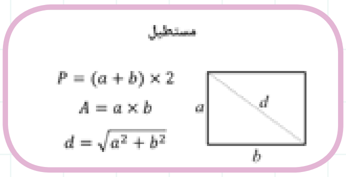
بعد از اتمام مباحث مربوط به مثلث‌ها (سه‌گوشه‌ها) به مباحث شکل‌های چهارگوشه یا چهارضلعی‌ها پرداخته شده است.

در تصویرهای ۸ و ۹ در مورد مربع و مستطیل آموزش‌های لازم داده شده است.

تصویر ۸



تصویر ۹



● شکل مربع و مستطیل و یکی از قطرهای آن‌ها رسم شده است.

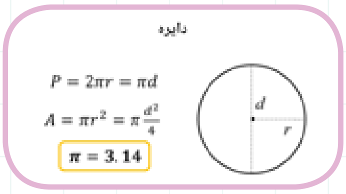
● محیط و مساحت آن‌ها معرفی شده است.

● نحوهٔ به‌دست‌آوردن اندازهٔ قطر هر شکل فرمول‌بندی شده است.

در ادامهٔ مباحث شکل‌های چهارگوش یا چهارضلعی‌ها، به‌صورت کامل به متوازی‌الاضلاع، لوزی، ذوزنقه و چهارضلعی کوژ پرداخته شده است.

دایره مبحث بعد از چهارضلعی‌هاست که در این برنامه آموزش داده شده است.

تصویر ۱۰

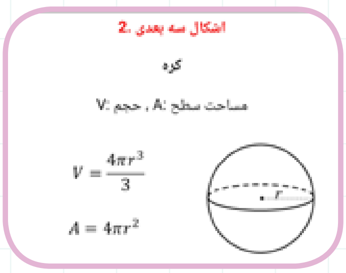


● در تصویر ۱۰ یک دایره با یک قطر و شعاع به منظور معرفی این شکل رسم شده است.

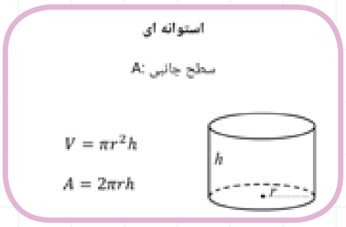
● محیط و مساحت دایره با مقدار تقریبی عدد پی معرفی شده است.

مباحث بعد از دایره تا بخش شکل‌های سه‌بعدی، خارج از بحث دورهٔ تحصیلی شما دانش‌آموزان دورهٔ اول است. بنابراین بهتر است به مباحث شکل‌های سه‌بعدی بپردازیم. شکل‌های سه‌بعدی که در این قسمت معرفی شده‌اند، عبارت‌اند از: کره، استوانه، مخروط، هرم، مکعب و منشور (تصویرهای ۱۱ تا ۱۶).

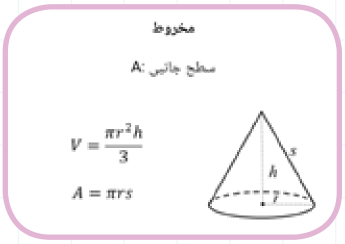
تصویر ۱۱



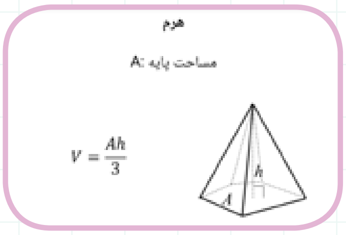
تصویر ۱۲



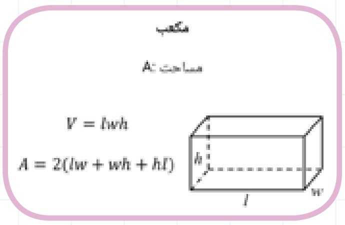
تصویر ۱۳



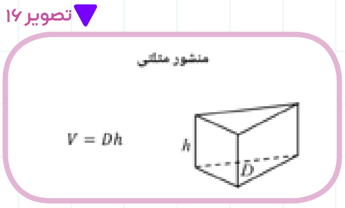
تصویر ۱۴



تصویر ۱۵



تصویر ۱۶



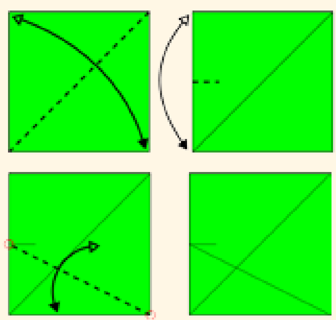
در معرفی شکل‌های سه‌بعدی اجزای مهم و نحوهٔ محاسبهٔ حجم و مساحت هر یک از آن‌ها بیان شده است.

کاردستی‌های کاغذی
کاغذ، تا، تقسیم

علیرضا محمدصالحی

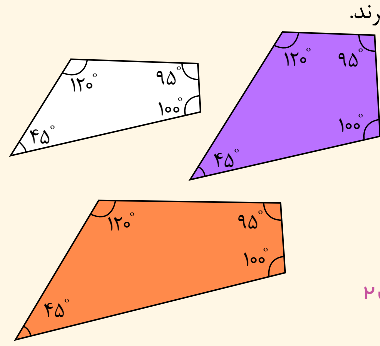
اندازه‌گیری با خط‌کش همیشه برایم کار سختی بوده است و حوصلهٔ تنظیم درجه‌های آن را نداشته‌ام. به‌خصوص وقتی سر و تهِ چیزی را که اندازه می‌گیرم، دقیقاً روی درجه‌بندی خط‌کش نمی‌افتد. از بچگی دنبال روش‌هایی می‌گشتم که بتوانم با دست خالی، طول یک چیز را به چند قسمت مساوی تقسیم کنم. زمانی که با «کاغذتایی» (اوریگامی) آشنا شدم، می‌دیدم که فقط با تازدن خود کاغذ و بدون هیچ ابزار اضافه‌ای همه چیز ساخته می‌شود.

یادم نیست اولین بار دقیقاً کِی بود که به طرح‌هایی برخوردم که باید برای ساختنشان صفحه را به چند قسمت مساوی تقسیم می‌کردم. مثلاً اگر تابه‌حال فرفرهٔ کاغذی (بدون چسب و قیچی) ساخته باشید، شما هم با این تقسیم‌ها آشنایی دارید. در ساده‌ترین فرفره، صفحه را چهار بخش می‌کنیم. در شمارهٔ قبلی با تقسیم به سه قسمت آشنا شدیم و یک مدل فرفره با سه قسمت‌کردن کاغذ ساختیم. اگر کمی دیگر صبر کنید، طرح‌های دیگری هم خواهیم دید.



مجموعه‌شکل ۱

در مجموعه‌شکل ۱ دو مثلث داریم که به یکدیگر شباهت دارند یا به قول ریاضی‌بلدها متشابه‌اند. (کدام مثلث‌ها؟) در چندضلعی‌هایی که با هم متشابه باشند، زاویه‌های متناظر با هم برابرند و ضلع‌های متناظر با هم تناسب دارند. یعنی نسبت ضلع‌های متناظر به یکدیگر مقدار ثابتی است. مثلاً در مجموعه‌شکل ۲، چهارضلعی سفید با چهارضلعی نارنجی متشابه است، ولی با چهارضلعی بنفش نه! هرچند در هر سه شکل، زاویه‌های داخلی با هم برابرند.



مجموعه‌شکل ۲

پیش از این از خوبی‌های مثلث‌ها کمی صحبت کردیم. نکتهٔ جالب این است که برای متشابه‌بودن دو مثلث فقط کافی است که زاویه‌های یکی با زاویه‌های دیگری برابر باشند. تناسب داشتن ضلع‌های متناظر، ارتفاع و ... خودبه‌خود حل می‌شود. اگر زاویه‌های داخلی دو مثلث با هم برابر باشند، ضلع‌های آن‌ها با هم تناسب دارند. مثلاً اگر دقت کنید (مجموعه‌شکل ۳)، طبق نام‌گذاری زیر، در مثلث‌های قرمز و نارنجی داریم:

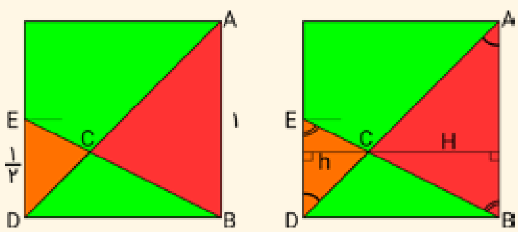
$\hat{A}=\hat{D}=45^\circ$ (AD نیمساز)

B=E (خطوط موازی و مورب)

$C_{\text{قرمز}}=C_{\text{نارنجی}}$ (متقابل به رأس)

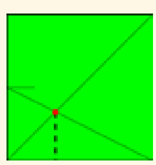
مشخص است که طول ضلع بزرگِ مثلثِ بزرگ، دو برابر ضلع بزرگِ مثلثِ کوچک است (چرا؟).

مجموعه‌شکل ۳



اگر اندازهٔ ضلع مربع (AB) برابر ۱ باشد، پس: $ED=\frac{1}{2}$. بنابراین ارتفاع مثلث بزرگ (H) دو برابر ارتفاع مثلث کوچک (h) است. همچنین با توجه به مجموعه‌شکل ۳ روشن است که جمع ارتفاع‌های رسم‌شدهٔ مثلث‌ها برابر ضلع مربع، یعنی همان ۱ است. پس: $H=\frac{2}{3}$ و $h=\frac{1}{3}$.

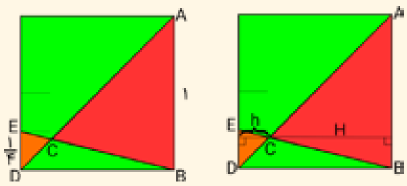
حالا اگر از نقطهٔ C بر ضلع پایین مربع (DB) عمود کنیم (شکل ۴)، کنار ضلع پایینی هم، اندازهٔ $\frac{1}{3}$ را خواهیم داشت. (لطفاً بپرسید چرا؟!)



شکل ۴

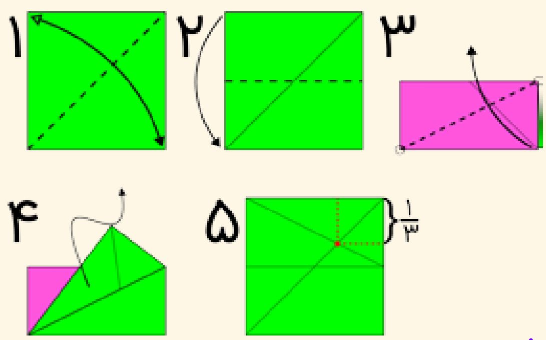
حالا که خیالمان از تقسیم به ۲، ۳ و ۴ راحت شد (و البته اگر یادتان باشد: ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ...)، می‌رسیم به عدد طبیعی بعدی، یعنی ۵. خبر خوب این است که با همین روش می‌توانیم $\frac{1}{5}$ صفحه را هم پیدا کنیم. اما خبر بهتر اینکه روش اخیر برای ساختن هر کسر دیگری هم

مجموعه شکل ۵



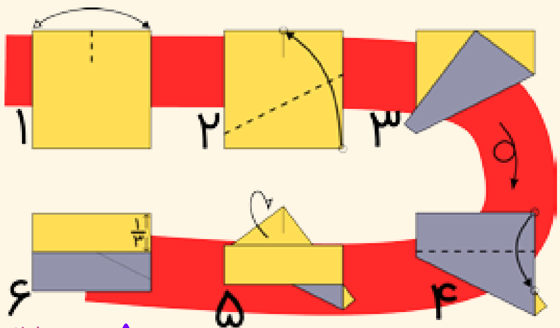
به درد می‌خورد! مجموعه‌شکل ۵ به ما نشان می‌دهد چطور با استفاده از $\frac{۱}{۴}$ صفحه، کسر $\frac{۱}{۵}$ را هم تولید کنیم.
همان طور که پیداست (شاید هم نباشد!)، نسبت h به H برابر ۱ به ۴ است؛ بنابراین: $H = \frac{۴}{۵}$ و $h = \frac{۱}{۵}$.
این روش برای پیداکردن هر کسر دل‌خواهی از کنار صفحه جواب می‌دهد. روش تقسیم به ۷ قسمت یا ۹، ۱۰، ۱۱ و ... را پیدا کنید. (پیشنهاد می‌کنم پیش از تازدن، برای روش خودتان شکل بکشید.)

روشی که در بالا دیدیم از نظر ریاضی کاملاً درست است، ولی وقتی کار به تازدن کاغذ می‌رسد، یک مشکل به همراه دارد. اگر دقت کنید، در مرحلهٔ سوم خط تا از گوشه می‌گذرد و تازدن خطی که از گوشهٔ کاغذ بگذرد (به‌جز وقتی که قطر مربع را تا می‌زنیم)، معمولاً کار ساده‌ای نیست. می‌توانید امتحان کنید و ببینید که این گونه تازدن، چطور شما را به چالش خواهد کشید. برای راحت‌ترشدن این مرحله می‌توان کمی فرایند ساخت را عوض کرد. مثلاً پس از تازدن قطر، ابتدا ضلع مربع را از وسط کامل تا بزنیم و یک مستطیل بسازیم. سپس قطر مستطیل را تا بزنیم (مانند مجموعه‌شکل ۶). برای تا زدن قطر مستطیل باید حواسمان باشد، همان گوشه‌ای را بالا بکشیم که قطر مربع از آن گذشته.



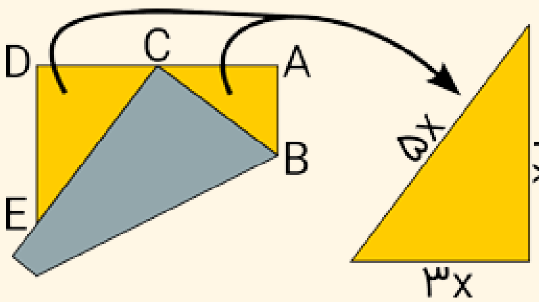
مجموعه شکل ۶

این مشکل زمانی برای شما جدی خواهد شد که بخواهید کسرهای کوچک‌تری بسازید یا وقتی صفحه پر از خط‌های اضافی باشد.
اگر مجله را چند صفحه ورق بزنید، یک صدف حلزونی کاغذی خواهید دید که یکی از ساده‌ترین صدف‌های کاغذتایی است. در مجموعه شکل ۷، مرحله‌های ابتدایی ساخت این صدف را می‌بینیم.



مجموعه شکل ۷

مرحله‌های کامل ساخت این صدف در همان صفحهٔ پشت جلد در دسترس شماست. اما همان طور که می‌بینید، باز هم به $\frac{۱}{۳}$ رسیدیم. این بار با خط‌های تایی که هیچ کدام از گوشهٔ کاغذ نمی‌گذرند. چطور به کسر $\frac{۱}{۳}$ رسیدیم؟ یک بار دیگر مرور کنیم: مثل روش قبلی وسط ضلع (یا همان $\frac{۱}{۲}$ ضلع) را علامت زدیم [مرحلهٔ ۱]. گوشهٔ پایین سمت راست را روی علامت وسط ضلع بالا گذاشتیم [مرحلهٔ ۲]. همین‌جا تمام چیزی که انتظار داشتیم ساخته شده است و مرحله‌های بعدی فقط یک علامت‌گذاری ساده هستند. شاید بپرسید چرا؟ به مجموعه‌شکل ۸ که نتیجهٔ مرحلهٔ ۲ است، نگاه کنید.



مجموعه شکل ۸

قسمت جدا شده در بالای ضلع سمت چپ، یعنی DE، برابر $\frac{۲}{۳}$ است. این موضوع را از مرحله‌های بعدی می‌فهمیم. (چطور؟) اما چگونه با این یکی روش به $\frac{۱}{۳}$ رسیدیم؟
کلید فهمیدن این موضوع دو مثلث تشکیل‌شده در مجموعه‌شکل ۸ هستند. اگر با قضیهٔ فیثاغورس، یا به‌طور درست‌تر پیتاگوراس[1]، آشنا باشید، احتمالاً مثلث‌هایی را که نسبت اضلاعشان ۳، ۴ و ۵ باشد می‌شناسید. به هر حال مثلث‌های ABC و CDE که پس از تای شمارهٔ ۲ به وجود آمده‌اند، نسبت اضلاعشان ۳، ۴ و ۵ است. آیا این حرف درست است؟ اگر درست باشد چه ربطی به تقسیم به ۳ دارد؟ اگر هم ربط داشته باشد، با تقسیم‌های دیگر چه کنیم؟

پی‌نوشت
1. Pythagoras

سکه‌های تقلبی را پیدا کن

محرم ایردموسی

● معمای اول

سه سکهٔ مشابه داریم که یکی از آن‌ها تقلبی است. سکهٔ تقلبی سبک‌تر از سکهٔ اصل است. البته آن‌قدر هم اختلاف وزن ندارند که بشود سکهٔ تقلبی را بدون ترازو، تشخیص داد. یک ترازوی دوکفه‌ای هم داریم که می‌توانیم وزن دو سکه یا هر دو شیء را با هم مقایسه کنیم. نشان دهید با یک بار استفاده از ترازوی دوکفه‌ای می‌توان سکهٔ تقلبی را پیدا کرد.

● راهنمایی: اگر دو سکه را در دو کفهٔ ترازو قرار دهیم، چند حالت برای نتیجهٔ مقایسهٔ وزن این دو سکه پیش می‌آید؟ در هر حالت چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

توجه: بهتر است تا معمای اول را حل نکرده‌اید، ادامهٔ مطلب را نخوانید! اگر معما را حل کردید، ادامهٔ مطلب را بخوانید تا از درستی راه‌حل خود مطمئن شوید.

راه‌حل: دو سکه را در دو کفهٔ ترازو قرار می‌دهیم. اگر وزن یکی از آن‌ها کمتر از دیگری باشد، می‌فهمیم که همان سکه تقلبی است. در غیر این صورت دو سکه هم‌وزن هستند و در نتیجه سکهٔ سوم (که در کفه‌ها قرار نگرفته) همان سکهٔ تقلبی است.

● معمای دوم

فرض کنید ۹ سکه داریم که یکی از آن‌ها تقلبی است و سکهٔ تقلبی از سکهٔ اصل کمی سنگین‌تر است. همچنین ترازویی دوکفه‌ای در اختیار داریم. با دو بار استفاده از ترازو سکهٔ تقلبی را پیدا کنید.

● راهنمایی: ۱. از معمای اول استفاده کنید. ۲. ۹ سکه را به سه دستهٔ سه‌تایی تقسیم کنید. قبول دارید که یک دسته از این سه دسته شامل سکهٔ تقلبی است؟ اگر این دسته را دستهٔ تقلبی و دو دستهٔ دیگر را دستهٔ اصلی نام‌گذاری کنیم، آیا می‌توانید با یک بار استفاده از ترازو دستهٔ تقلبی را مشخص کنید؟ حتماً می‌توانید.

توجه: بهتر است تا معمای دوم را حل نکرده‌اید، ادامهٔ مطلب را نخوانید! اگر معمای دوم را حل کردید، به شما آفرین می‌گوییم. پس راه‌حل آن را بخوانید و با راه‌حل خود مقایسه کنید.

راه‌حل: همان‌طور که در راهنمایی ۲ گفته شد، ۹ سکه را به سه دستهٔ سه‌تایی افراز می‌کنیم (یعنی تقسیم می‌کنیم). دستهٔ حاوی سکهٔ تقلبی را دستهٔ تقلبی و دو دستهٔ دیگر را دستهٔ اصلی می‌نامیم. همانند راه‌حل معمای اول می‌توانیم دستهٔ تقلبی را با یک بار استفاده از ترازو پیدا کنیم. کافی است دو دسته را در دو کفهٔ ترازو قرار دهیم و با مقایسهٔ وزن آن‌ها دستهٔ تقلبی مشخص خواهد شد. حال که دستهٔ تقلبی مشخص شد، باید با یک بار وزن‌کردن سکهٔ تقلبی را از میان سه سکهٔ این دسته پیدا کنیم. آیا این بخش از معمای دوم، همان معمای اول نیست؟ پس همان‌گونه عمل می‌کنیم که در راه‌حل معمای اول عمل کردیم و با یک بار وزن‌کردن سکهٔ تقلبی را مشخص می‌کنیم.

سؤال ۱. اگر به‌جای ۹ سکه، ۸ سکه داشتیم (شامل یک سکهٔ تقلبی) راه‌حل چگونه بود؟ ۷ سکه چطور؟ ۶ سکه چطور؟

معمای سوم

۲۷ سکه داریم که یکی از آن‌ها تقلبی و سبک‌تر از سکه‌های سالم است. با ۳ بار استفاده از ترازوی دوکفه‌ای، سکهٔ تقلبی را پیدا کنید (این معما را خودتان حل کنید).

سؤال ۲. آیا ارتباطی بین سه معما می‌بینید؟ آیا می‌توانید (به قول ریاضی‌دانان) این معماها را تعمیم دهید و یک معمای کلی‌تر طرح کنید؟ به متن زیر دقت کنید:

۱ بار استفاده از ترازو ← ۳ سکه
۲ بار استفاده از ترازو ← $۳^۲$ سکه
۳ بار استفاده از ترازو ← $۳^۳$ سکه
.
.
.
... بار استفاده از ترازو ← ... سکه

معمای چهارم

۱۲ سکه داریم که یکی از آن‌ها تقلبی است. سکهٔ تقلبی سبک‌تر یا سنگین‌تر از سکه‌های سالم است و ما نمی‌دانیم که سبک‌تر است یا سنگین‌تر. با سه بار استفاده از ترازوی دوکفه‌ای، سکهٔ تقلبی را مشخص کنید. (این معما را خودتان حل کنید.)

معمای پنجم

دو تا کیسهٔ پر از سکه داریم. همهٔ سکه‌های یک کیسه سالم هستند و همهٔ سکه‌های کیسهٔ دوم تقلبی هستند. ما نمی‌دانیم کدام کیسه حاوی سکه‌های تقلبی است. یک ترازوی یک‌کفه‌ای هم داریم که وزن هر شیء را که روی کفهٔ آن قرار دهیم، به ما می‌دهد (ترازوی دیجیتال). با یک بار استفاده از ترازوی یک‌کفه‌ای مشخص کنید که کدام کیسه دارای سکه‌های تقلبی است. این را هم می‌دانیم که سکهٔ سالم ۱۰۰ گرم و سکهٔ تقلبی ۹۹ گرم وزن دارد.

توجه: تا معما را حل نکرده‌اید، ادامهٔ مطلب را نخوانید.
احتمالاً معما را در کسری از دقیقه حل کرده‌اید. کافی است یک سکه از یک کیسهٔ دلخواه را وزن کنید. اگر وزن آن ۱۰۰ باشد، کیسه حاوی سکه‌های سالم و اگر وزن آن ۹۹ باشد، کیسه حاوی سکه‌های تقلبی است و معما حل می‌شود. صبر کنید! معماهای عجیب‌تر را هنوز نگفته‌ایم. مطلب را پی بگیرید.

معمای ششم

در معمای قبل، فرض کنید به‌جای دو کیسه سه کیسه دارید که دو کیسه حاوی سکه‌های سالم هستند، اما در یک کیسه که نمی‌دانیم کدام کیسه است همهٔ سکه‌ها تقلبی هستند. سکهٔ سالم ۱۰۰ گرم و سکهٔ تقلبی ۹۹ گرم است. تنها با یک بار استفاده از ترازو، کیسهٔ حاوی سکه‌های تقلبی را مشخص کنید.

راهنمایی: می‌توانید از هر کیسه‌هر تعدادی خواستید بردارید. این امکان را دست‌کم نگیرید.

توجه: تا معما را حل نکرده‌اید، قول بدهید که ادامهٔ مطلب را نخوانید. مطمئن هستم معما را حل کرده‌اید، پس راه‌حل را بخوانید.

راه‌حل: از کیسهٔ اول ۱ سکه از کیسهٔ دوم ۲ سکه و از کیسهٔ سوم ۳ سکه برمی‌داریم و همهٔ آن‌ها را (۶ سکه) یکجا وزن می‌کنیم. اگر همهٔ سکه‌ها سالم بودند (که نیستند)، ترازو عدد ۶۰۰ را نمایش می‌داد. اما ترازو عدد کمتری را نشان خواهد داد. اگر ترازو عدد ۵۹۹ را نشان بدهد، نتیجه می‌گیریم که تنها یک سکهٔ تقلبی در میان ۶ سکه وجود دارد. بنابراین سکه‌های کیسهٔ اول تقلبی هستند. اگر ترازو عدد ۵۹۸ را نشان دهد، می‌فهمیم ۲ سکه از ۶ سکه تقلبی هستند. پس کیسهٔ دوم حاوی سکه‌های تقلبی است. اگر هم ترازو عدد ۵۹۷ را نشان دهد، ۳ سکه از ۶ سکه تقلبی هستند و در نتیجه کیسهٔ سوم شامل سکه‌های تقلبی است. معما حل شد.

سؤال ۳. آیا با برداشتن تعداد کمتری از سکه‌ها (کمتر از ۶ سکه) هم می‌توان معما را حل کرد؟

معمای هفتم

در دو معمای قبل، اگر تعداد کیسه‌ها (به‌جای ۲ و ۳) برابر ۱۰ کیسه باشد، با یک بار استفاده از ترازو، کیسهٔ حاوی سکه‌های تقلبی را مشخص کنید.

سؤال ۴. اگر ترازو دیجیتال اشیای با وزن حداکثر ۴/۵ کیلو را بتواند وزن کند، سعی کنید معمای هفتم را مجدداً حل کنید.

معمای هشتم

فرض کنید ۱۰ کیسه دارید. سکه‌های هر کیسه هم‌وزن هستند، اما ممکن است سکه‌های دو کیسهٔ متفاوت هم‌وزن نباشند. وزن هر سکه عددی صحیح حداقل برابر ۱ و حداکثر برابر ۹ است. سکه‌ها از لحاظ ظاهری شبیه هم هستند. با یک بار وزن کردن وزن هر سکه از هر کیسه را مشخص کنید!

توضیح بیشتر: در معمای هشتم، ۱۰ کیسه داریم و در نتیجه معما از شما می‌خواهد ۱۰ مجهول را پیدا کنید: وزن هر سکه از کیسهٔ اول، وزن هر سکه از کیسهٔ دوم، ...، وزن هر سکه از کیسهٔ دهم. اما تنها مجاز هستید یک بار از ترازوی دیجیتال استفاده کنید. البته محدودیتی روی تعداد سکه‌هایی که می‌خواهید وزن کنید ندارید! حتی اگر تعداد سکه‌ها آن‌قدر زیاد باشند که به اندازهٔ بار کامیون باشند! اصلاً فرض کنید یک ترازوی بزرگ یک‌کفه‌ای دارید که یک کامیون یا کانتینر روی کفهٔ آن جا می‌شود؛ مثل باسکول‌هایی که در بندرها وجود دارند.

راهنمایی آخر: از نمایش عددها در مبنای ۱۰ استفاده کنید! راستی می‌دانستید که ریاضی‌دانان ایرانی در توسعهٔ نمایش عددها نقش مهمی داشتند و در این زمینه به همراه ریاضی‌دانان چینی و هندی پیشرو بودند؟

بازی مار و پله
با چاشنی بخش‌پذیری

عباس قلعه‌پوراقدم

اگر اهل بازی «منچ» باشید، حتماً بازی «مار و پله» را هم می‌شناسید و بعید است که تا به حال این بازی را انجام نداده باشید. مار و پله بین دو نفر یا بیشتر و روی صفحه‌ای دارای مربع‌های کوچک که معمولاً تعداد آن‌ها ۱۰۰ عدد است، با ریختن تاس انجام می‌شود. نفر اول تاس را می‌اندازد و مهرهٔ خود را از نقطهٔ شروع به تعداد عدد ظاهر شده روی تاس به جلو حرکت می‌دهد. هر یک از بازیکنان، وقتی به خانه‌ای می‌رسند که شروع یک نردبان (پلکان) است، به عنوان جایزه، مهرهٔ خود را تا خانه‌ای که انتهای نردبان در آن قرار دارد، بالا می‌برند. همچنین اگر مهرهٔ یکی از بازیکنان به خانه‌ای که سر مار در آن قرار دارد وارد شود، باید به عنوان جریمه، مهرهٔ خود را تا انتهای مار (دم مار) عقب ببرد. هر بازیکنی که مهرهٔ خود را زودتر به خانهٔ پایانی برساند، برنده می‌شود. در این بخش می‌خواهم برای شما عزیزان یک بازی شبیه مار و پله ترتیب دهم که تفاوت آن با مار وپله، تعداد خانه‌های کمتر و عددهای نوشته شده در خانه‌های آن است. در سطح سادهٔ آن که در این بخش می‌آورم، مار وجود ندارد؛ یعنی حرکت به عقب نداریم. تفاوت دیگر این بازی با مار وپله آن است که خبری از نردبان روی صفحهٔ بازی نیست و این خود بازیکنان هستند که تشخیص خواهند داد روی خانه‌ای قرار گرفته‌اند که ابتدای یک نردبان است یا دهان یک مار. در ادامه با این بازی بیشتر آشنا خواهید شد.

نحوهٔ انجام بازی

ابتدا با یکی از روش‌های معمول، مانند«گل یا پوچ» یا «سنگ، کاغذ، قیچی»، نفر اول و نفر دوم را مشخص کنید. سپس نفر اول تاس را بیندازد و به تعداد عدد ظاهر شده از نقطهٔ شروع خانه‌ها را بشمارد و جلو برود تا به خانهٔ مقصد برسد. حال اگر:

- عدد خانهٔ مورد نظری که مهرهٔ بازیکن در آن قرار گرفته است، بر دو بخش‌پذیر باشد، یک خانهٔ دیگر به جلو می‌رود. (خانه‌ای که عدد آن بر دو بخش‌پذیر است، به عنوان یک نردبان عمل می‌کند؛ نردبانی که طول آن یک خانه است.)
- عدد خانهٔ مورد نظر بر سه بخش‌پذیر باشد، دو خانهٔ دیگر به جلو می‌رود.
- عدد خانه بر شش بخش‌پذیر باشد، سه خانه به جلو می‌رود.
- هیچ کدام از سه مورد بالا نبود، در همان خانه می‌ایستد.

جدول زیر را روی یک مقوا رسم و شروع به بازی کنید.

شروع	۱۶	۱۵	۲۴	۱۹	۲۲	۳۶	۲۱	۸۷	۹۴
۱۰۱	۲۲۵	۳۴۶	۵۵	۴۳۲	۱۱۱	۲۰۶	۹۷	۳۱۵	۴۷
۸۲	۱۴۷	۳۰۰	۳۶	۱۴	۵۲۵	۴۰۱	۶۲	۷۸	۱۰۰
پایان	۹۵	۷۳۰	۲۰۷	۵۰۴	۴۰۵	۱۴۴	۷۲	۹۱	۶۳۴