نکاتی درباره‌ی معادلات درجه‌ی دوم به بالا

احمد قندهاری

نکته‌ی ۱

در هر معادله‌ی درجه‌ی سوم که به صورت $x^3 + px + q = 0$ باشد، داریم.

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2$$

الف) $\Delta > 0$ یا $p > 0$

درنتیجه معادله یک ریشه‌ی حقیقی مخالف علامت q دارد.

ب) $\Delta < 0$

درنتیجه معادله یک ریشه‌ی حقیقی مخالف علامت q و دو ریشه‌ی حقیقی موافق علامت q دارد.

ج) $\Delta = 0$

درنتیجه معادله یک ریشه‌ی ساده‌ی مخالف علامت q و یک ریشه‌ی مضاعف موافق علامت q دارد.

ریشه‌ی مضاعف $= \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$

ریشه‌ی ساده $= -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$

مسئله ی۱: در معادله‌ی $x^3 - 3x + (m-2) = 0$، حدود m را چنان بیابید که معادله سه ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

حلّ:

$$x^3 - 3x + (m-2) = 0$$

$$p = -3 \quad q = m-2$$

باید $\Delta < 0 \Rightarrow 4p^3 + 27q^2 < 0$

$$\Rightarrow 4(-27) + 27(m-2)^2 < 0$$

$$\Rightarrow -4 + (m-2)^2 < 0$$

$$\Rightarrow (m-2)^2 < 4 \Rightarrow -2 < m-2 < 2$$

$$\Rightarrow 0 < m < 4$$

مسئله ی۲: به ازای چه مقادیر m، معادله‌ی زیر یک ریشه‌ی حقیقی مثبت و دو ریشه‌ی حقیقی منفی دارد.

$$x^3 - 3x + (m-5) = 0$$

حل: باید

$$q < 0, \Delta < 0$$

$$p = -3, q = m-5$$

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ q < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4p^3 + 27q^2 < 0 \\ q < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4(-27) + 27(m-5)^2 < 0 \\ m-5 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(m-۵)^۲ < ۴ \Rightarrow \begin{cases}-۲ < m-۵ < ۲ \Rightarrow \\ m < ۵\end{cases} \\ m < ۵ \qquad\qquad \Rightarrow \end{cases}$$

،

$$\begin{cases} ۳ < m < ۷ \\ m < ۵ \end{cases} \Rightarrow ۳ < m < ۵$$

روابط بین ضرایب و ریشه‌ها در معادله‌ی

$$ax^۳ + bx^۲ + cx + d = ۰$$

اگر γ, β, α ریشه‌های این معادله باشند، داریم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a} \\ \alpha.\beta.\gamma = -\frac{d}{a} \\ \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} + \frac{۱}{\gamma} = -\frac{c}{d} \end{cases}$$

مسئله‌ی ۳: اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^۳ - ۹x^۲ + mx - ۱۵ = ۰$ تصاعد عددی بسازند، مقدار m را بیابید.

حل:

γ, β, α تصاعد عددی بسازند $\Rightarrow ۲\beta = \alpha + \gamma$

داریم: $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

$$۲\beta + \beta = ۹ \Rightarrow ۳\beta = ۹ \Rightarrow \beta = ۳$$

$$\beta = ۳ \Rightarrow ۲۷ - ۸۱ + ۳m - ۱۵ = ۰$$

$$۳m = ۶۹ \Rightarrow m = ۲۳$$

مسئله‌ی ۴: اگر ریشه‌های معادله‌ی زیر تصاعد هندسی بسازند، مقدار m را بیابید.

$$x^۳ - ۷x^۲ + (m-۱)x - ۸ = ۰$$

حل: γ, β, α تصاعد هندسی بسازند $;\ \beta^۲ = \alpha.\gamma$

داریم : $\alpha.\beta.\gamma = -\frac{d}{a} \Rightarrow \beta^۲.\beta = ۸ \Rightarrow \beta^۳ = ۸ \Rightarrow \beta = ۲$

$$\beta = ۲ \Rightarrow ۸ - ۲۸ + ۲(m-۱) - ۸ = ۰$$

$$۲(m-۱) = ۲۸ \Rightarrow m - ۱ = ۱۴ \Rightarrow m = ۱۵$$

مسئله ی۵: اگر γ, β, α ریشه‌های معادله‌ی زیر باشند و داشته باشیم $\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} = -\gamma$، آن‌گاه مقدار m را بیابید.

$$x^۳ + (m-۱)x^۲ + ۱ = ۰$$

حل: داریم: $\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} + \frac{۱}{\gamma} = -\frac{c}{d}\ ,\ c = ۰$

$$-\gamma + \frac{۱}{\gamma} = ۰ \Rightarrow \frac{-\gamma^۲ + ۱}{\gamma} = ۰ \Rightarrow \gamma^۲ = ۱ \Rightarrow \gamma = \pm ۱$$

$$\gamma = ۱ \longrightarrow ۱ + m - ۱ + ۱ = ۰ \Rightarrow m = -۱$$

$$\gamma = -۱ \longrightarrow -۱ + m - ۱ + ۱ = ۰ \Rightarrow m = ۱$$

توجه $m = ۱$ غیرقابل قبول است، زیرا اگر $m = ۱$ آن‌گاه معادله به صورت $x^۳ + ۱ = ۰$ است. در این صورت $x = -۱$ یعنی معادله فقط یک ریشه دارد.

مسئله ی۶: اگر γ, β, α ریشه‌های معادله‌ی زیر باشند و داشته باشیم $\alpha^۲ + \beta^۲ + \gamma^۲ = ۳۵$، آن‌گاه مقدار m را بیابید.

$$x^۳ - ۹x^۲ + (m-۱)x - ۱۵ = ۰$$

حل: $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = ۹$; دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم، داریم:

$$\underbrace{\alpha^۲ + \beta^۲ + \gamma^۲}_{۳۵} + ۲(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = ۸۱$$

$$۳۵ + ۲(\frac{c}{a}) = ۸۱ \Rightarrow ۳۵ + ۲(m-۱) = ۸۱$$

$$۲(m-۱) = ۴۶ \Rightarrow m - ۱ = ۲۳ \Rightarrow m = ۲۴$$

مسئله ی۷: اگر γ, β, α ریشه‌های معادله‌ی زیر باشند و داشته باشیم $\frac{۱}{\alpha^۳} + \frac{۱}{\beta^۳} + \frac{۱}{\gamma^۳} = -\frac{۳}{۲}$، آن‌گاه مقدار m را بیابید.

$$x^۳ - ۵x^۲ + (m-۱) = ۰$$

حل: داریم: ; $\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} + \frac{۱}{\gamma} = -\frac{c}{a} = ۰$

بنا به اتحاد اولر : $\frac{۱}{\alpha^۳} + \frac{۱}{\beta^۳} + \frac{۱}{\gamma^۳} = ۳(\frac{۱}{\alpha})(\frac{۱}{\beta})(\frac{۱}{\gamma})$

$$-\frac{۳}{۲} = ۳(\frac{۱}{\alpha.\beta.\gamma}) \Rightarrow -\frac{۱}{۲} = (\frac{۱}{-\frac{d}{a}}) \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{m-۱}$$

$$\Rightarrow m - ۱ = ۲ \Rightarrow m = ۳$$

مسئله ی ۸: اگر γ, β, α ریشه‌های معادله‌ی زیر باشند و $k = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta}$، آن‌گاه مقدار k را بیابید.

$$ax^۳ + bx^۲ + cx + d = ۰$$

حل:

$$k = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta}$$

$$k + ۳ = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} + ۱ + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + ۱ + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + ۱$$

$$k + ۳ = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma} + \frac{\beta+\gamma+\alpha}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha+\beta}{\beta}$$

$$k+3=(\alpha+\beta+\gamma)(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})$$

$$k+3=(-\frac{b}{a})(-\frac{c}{d})\Rightarrow k+3=\frac{bc}{ad}\Rightarrow k=\frac{bc}{ad}-3$$

مسئله‌ی ۹: اگر α,β,γ ریشه‌های معادله‌ی $x^3+px+q=0$ باشند، حاصل $k=\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}+\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}+\frac{\gamma^2}{\alpha\beta}$ را بیابید.

حل: $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}=0$

بنا به اتحاد اولر: $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ رابطه‌ی (۱)

بنابه رابطه‌ی (۱) $k=\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}+\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}+\frac{\gamma^2}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}$

$$k=\frac{3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}\Rightarrow k=3$$

نکته‌ی ۲

هر معادله که به صورت $ax^{3n}+bx^n+c=0$، $n\in N$ باشد، با فرض $x^n=y$، تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی اصلی قابل بررسی است.

مسئله ی ۱۰: معادله‌ی $x^6-3x^2+1=0$ چند ریشه با چه علامت‌هایی دارد؟

حل: $x^2=y$ و $x^6-3x^2+1=0\Rightarrow y^3-3y+1=0$

$$p=-3\ ,\ q=1$$

$$\Delta=4p^3+27q^2=4(-27)+27(1)=-81<0$$

پس معادله‌ی y سه ریشه دارد. چون $q=1$ پس یک ریشه منفی و دو ریشه مثبت‌اند، یعنی ریشه‌های این معادله چنین است:

$$y_1<0<y_2<y_3$$

داریم: $x^2=y\begin{cases}x^2=y_1 & \text{غ‌ق‌ق}\\ x^2=y_2\Rightarrow x=\pm\sqrt{y_2}\\ x^2=y_3\Rightarrow x=\pm\sqrt{y_3}\end{cases}$

پس معادله‌ی اصلی چهار ریشه‌ی اصلی متمایز دارد.

نکته‌ی ۳

هر معادله که به صورت $ax^{2n}+bx^2+c=0, n\in N$ باشد، با فرض $x^n=y$ به معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل می‌شود که قابل حل است.

مسئله ی ۱۱: معادله‌ی $x^{16}-97x^8+1296=0$ را حل کنید.

حل: $x^8=y$ فرض می‌شود.

$$x^{16}-97x^8+1296=0\quad ,\quad x^8=y$$

$$\Rightarrow y^2-97y+1296=0$$

$$\Rightarrow y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{97\pm\sqrt{9409-5184}}{2}$$

$$y=\frac{97\pm\sqrt{4225}}{2}=\frac{97\pm 65}{2}\Rightarrow\begin{cases}y_1=\frac{97+65}{2}=81\\ y_2=\frac{97-65}{2}=16\end{cases}$$

$$x^8=y\Rightarrow\begin{cases}x^8=81\Rightarrow x=\pm\sqrt[8]{81}=\pm\sqrt[8]{3^4}=\pm\sqrt{3}\\ x^8=16\Rightarrow x=\pm\sqrt[8]{16}=\pm\sqrt[8]{2^4}=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

نکته‌ی ۴

اگر در معادله‌ای مجموع ضرایب صفر باشد، آن معادله بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است.

در حالت کلّی اگر $x=a$ یک ریشه‌ی معادله‌ای باشد، آن معادله بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

مسئله ی ۱۲: معادله‌ی $x^3-10x^2+mx-14=0$ مفروض است. اگر $x=2$ یکی از ریشه‌های معادله باشد، معادله را حل کنید.

حل: چون $x=2$ یکی از ریشه‌های معادله است، پس $x=2$ در معادله صدق می‌کند.

توجه:

$$x=2\longrightarrow 8-40+2m-14=0$$

$$\Rightarrow 2m=46\Rightarrow m=23$$

$$m=23\ ;\ x^3-10x^2+23x-14=0$$

چون $x=2$ یکی از ریشه‌های این معادله است، معادله را بر $(x-2)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} x^3-10x^2+23x-14 & x-2\\ \hline 0 & x^2-8x+7\end{array}$$

$$x^3-10x^2+23x-14=(x-2)(x^2-8x+7)=0$$

$$x=2,\ x^2-8x+7=0\Rightarrow x=1, x=7$$

نکته‌ی ۵

اگر در معادله‌ی زیر مجموع ضرایب توان‌های فرد x مساوی مجموع ضرایب توان‌های زوج x به اضافه‌ی عدد ثابت باشد، آن‌گاه یک ریشه‌ی معادله (۱-) و معادله بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است.

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + k = 0, n \in N$$

مسئله ی ۱۳: معادله‌ی $x^3 - 8x^2 + 11x + 20 = 0$ را حل کنید.

حل:

عدد ثابت + مجموع ضرایب توان‌های زوج x = مجموع ضرایب توان‌های فرد x

$$1 + 11 = -8 + 12 \Rightarrow 12 = 12$$

پس عبارت معادله بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است.

$$x^3 - 8x^2 + 11x + 20 \,\Big|\, \underline{x+1}$$
$$0 \qquad x^2 - 9x + 20$$

$$x^3 - 8x^2 + 11x + 20 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - 9x + 20) = 0$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{9+1}{2} = 5 \\ x_3 = \frac{9-1}{2} = 4 \end{cases}$$

نکته‌ی ۶

اگر ریشه‌های معادله‌ی زیر، عضو Z باشند، آن‌گاه عدد k بر هر یک از ریشه‌ها بخش‌پذیر است. به عبارت دیگر، ریشه‌های معادله عضو مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های جبری (k) است.

$$x^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + k = 0 \qquad (n \in N)$$

مسئله‌ی ۱۴: اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$، عضو Z باشند، معادله را حل کنید.

حل: بنا به درس ریشه‌های معادله عضو مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های جبری عدد (۱۲) است.

مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۲ = $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

نکات ۴ و ۵ درس در این معادله برقرار نیست، پس (± 1) ریشه‌های معادله نیست.

از $x = 2$ شروع می‌کنیم.

$$x = 2; \quad 8 - 12 - 8 + 12 = 0$$

پس $x = 2$ یکی از ریشه‌های معادله است. عبارت معادله را بر $(x-2)$ تقسیم می‌کنیم.

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \,\Big|\, \underline{x-2}$$
$$0 \qquad x^2 - x - 6$$

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x-2)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$x_1 = 2, \quad x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

نکته‌ی ۷

اگر ریشه‌های معادله‌ی زیر به صورت $\frac{p}{q}$، $q \neq 0$ باشد، (p و q عضو Zاند)، آن‌گاه p یکی از مقسوم‌علیه‌های (k) و q یکی از مقسوم‌علیه‌های عدد (a) است.

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + k = 0$$

مسئله‌ی ۱۵: اگر ریشه‌های معادله $8x^3 - 36x^2 + 46x - 15 = 0$ عضو مجموعه‌ی Q، یعنی به صورت $\frac{p}{q}$ باشند، معادله را حل کنید.

حل: عدد ۱۵ بر $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$ و عدد ۸ بر $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ بخش‌پذیر است.

$$x = \frac{3}{2} \longrightarrow 27 - 81 + 69 - 15 = 0$$

پس یک ریشه‌ی معادله $x = \frac{3}{2}$ است. در نتیجه، عبارت معادله بر $(x - \frac{3}{2})$ بخش‌پذیر است.

$$A = 8x^3 - 36x^2 + 46x - 15 \,\Big|\, \underline{x - \tfrac{3}{2}}$$
$$0 \qquad 8x^2 - 24x + 10$$

$$A = (x - \tfrac{3}{2})(8x^2 - 24x + 10) = 0$$

$$x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$$

$$8x^2 - 24x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{8} = \frac{12 \pm 8}{8}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{12+8}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \\ x_3 = \frac{12-8}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

پس $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}$ ریشه‌های این معادله‌اند.

نکته‌ی ۸

اگر مشتق معادله‌ای همواره مثبت یا همواره منفی باشد، آن معادله یک ریشه‌ی حقیقی دارد که علامت آن مخالف علامت عدد ثابت معادله است.

مسئله ی ۱۶: معادله‌ی $x^5 + 2x^3 + \sqrt{3}x + \sqrt{5} = 0$ چند ریشه با چه علامتی دارد؟

حل:
$$f(x) = x^5 + 2x^3 + \sqrt{3}x + \sqrt{5}$$
$$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + \sqrt{3} > 0 \Rightarrow$$
معادله یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

عدد ثابت معادله، $\sqrt{5}$ است، پس معادله یک ریشه‌ی حقیقی منفی دارد.

نکته‌ی ۹

به کمک فاکتورگیری از راه دسته‌بندی، بعضی از معادله‌ها قابل حلّ‌اند.

مسئله ی ۱۷: معادله‌ی $x^5 - 3x^4 - 16x + 48 = 0$ را حل کنید.

حل:
$$x^5 - 3x^4 - 16x + 48 = 0$$
$$x^4(x-3) - 16(x-3) = 0$$
$$(x-3)(x^4-16) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x^4 - 16 = 0 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

نکته‌ی ۱۰

به کمک اتحاد اولر، برخی از معادله‌ها قابل حل‌اند.

مسئله ی۱۸: معادله‌ی زیر را حل کنید.
$$(x^2-2)^3 + (2x^2-5)^3 + (7-3x^2)^3 = 0$$

حل:
$$a = x^2 - 2, b = 2x^2 - 5, c = 7 - 3x^2$$
$$a + b + c = x^2 - 2 + 2x^2 - 5 + 7 - 3x^2 = 0$$
$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

پس با فرض $A = (x^2-2)^3 + (2x^2-5)^3 + (7-3x^2)$ داریم:
$$A = 3(x^2-2)(2x^2-5)(7-3x^2) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ 2x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \\ 7 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{7}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \end{cases}$$

نکته‌ی ۱۱

پرانتزهایی که توان زوج دارند، مثبت یا صفرند.

مسئله ی۱۹: معادله‌ی زیر چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟
$$(x^2 - 4x + 3)^{10} + 5(x^2 - 3x + 2)^4 + (x^2 - 1)^2 = 0$$

حل:
$$\begin{matrix} x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \\ x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} x = 1, x = 3 \\ x = 1, x = 2 \\ x = 1, x = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

پس این معادله یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

نکته‌ی ۱۲

اگر معادله‌ای دارای ریشه‌ی مضاعف $x = a$ باشد، آن‌گاه $x = a$ یکی از ریشه‌های ساده‌ی مشتق آن است.

مسئله ی ۲۰: به ازای چه مقادیر m، معادله‌ی زیر ریشه‌ی مضاعف دارد؟
$$x^7 - 7x + (m-2) = 0$$

حل: مشتق معادله: $7x^6 - 7 = 0 \Rightarrow x^6 = 1$
$$x = 1, x = -1$$
$$x = 1 \longrightarrow 1 - 7 + m - 2 = 0$$
$$\Rightarrow m = 8$$
$$x = -1 \longrightarrow -1 + 7 + m - 2 = 0$$
$$\Rightarrow m = -4$$

نکته‌ی ۱۳

اگر ریشه‌های معادله‌ی $ax^4 + bx^2 + c = 0$ تصاعد عددی بسازند، داریم $9b^2 = 100ac$.

مسئله ی ۲۱: m را چنان بیابید تا ریشه‌های معادله‌ی $mx^4 - 10x^2 + m = 0$ تصاعد عددی بسازند.

حل:

$$9b^2 = 100ac \Rightarrow 9(100) = 100m^2$$
$$\Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$$

نکته‌ی ۱۴

در حل بعضی از معادله‌ها، قسمتی از عبارت معادله را y فرض می‌کنیم. پس از حل معادله برحسب y، ریشه‌های اصلی معادله قابل بررسی‌اند.

مسئله ی ۲۲: معادله‌ی $(2x^2 - 3x - 5)(2x^2 - 3x - 2) = 6$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

حل: فرض می‌کنیم $2x^2 - 3x = y$

$$(\underbrace{2x^2 - 3x}_{y} - 5)(\underbrace{2x^2 - 3x}_{y} - 2) = 4$$
$$(y - 5)(y - 2) = 4 \Rightarrow y^2 - 7y + 10 = 4$$
$$\Rightarrow y^2 - 7y + 6 = 0$$

مجموع ضرایب صفر است. $\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 6 \end{cases}$

الف) $2x^2 - 3x = y_1 \Rightarrow 2x^3 - 3x = 1$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد

ب) $2x^2 - 3x = y_2 \Rightarrow 2x^3 - 3x = 6$

$2x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ دو ریشه‌ی حقیقی

پس این معادله چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

نکته‌ی ۱۵

معادلاتی که به یکی از صورت‌های زیر باشند، بی‌شمار ریشه دارند.

$$[p] + [-p] = 0 \qquad [p] + [-p] = -1$$

برای مثال، معادله‌ی $[x^2 - 2x] + [-x^2 + 2x] = 0$ بی‌شمار ریشه دارند.

زیرا: اگر $x \in Z \Rightarrow (x^2 - 2x) \in Z$

$$\Rightarrow [(x^2 - 2x)] + [-(x^2 - 2x)] = 0$$

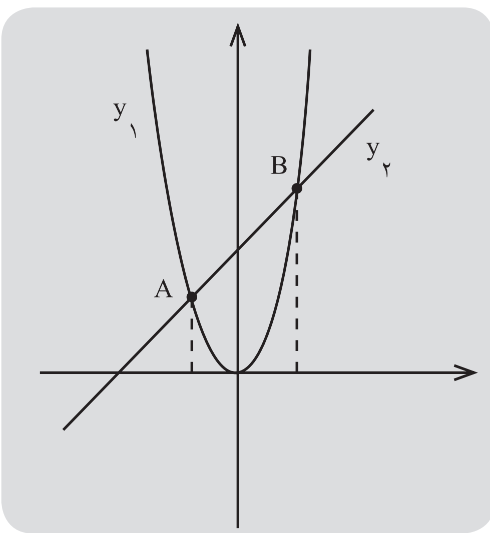
نکته‌ی ۱۶

در بررسی تعداد ریشه‌های برخی از معادله‌ها، قسمتی از معادله را y_1 و بقیه را با علامت مخالف y_2 می‌نامیم. تعداد نقاط برخورد نمودارهای دو تابع y_1 و y_2 برابر تعداد ریشه‌های معادله‌ی اصلی است.

مسئله ی۲۳: معادله‌ی $x^{20} - x - 2 = 0$ چند ریشه دارد؟

حل: فرض می‌کنیم $y_2 = x + 2, y_1 = x^{20}$

به طوری که شکل نشان می‌دهد، نمودارهای y_1 و y_2 یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. پس معادله‌ی $x^{20} - x - 2 = 0$، دو ریشه‌ی حقیقی دارد که عبارت‌اند از x_A و x_B.



❊❊❊

ادب ریاضی

باید طبیعت ریاضیات را آشکار و مطرح کنیم؛ ریاضی علمی محض و علمی کاربردی، نظامی از ابزارهای مختلف برای اعمال و تصمیم گیری‌هاست، همچنین باید حوزه‌ی زیبایی‌شناسی آن را بنمایانیم و سرانجام، آن را به‌عنوان یکی از عمده‌ترین موضوع‌های تدریس و یادگیری در عصر جدید بشناسانیم.