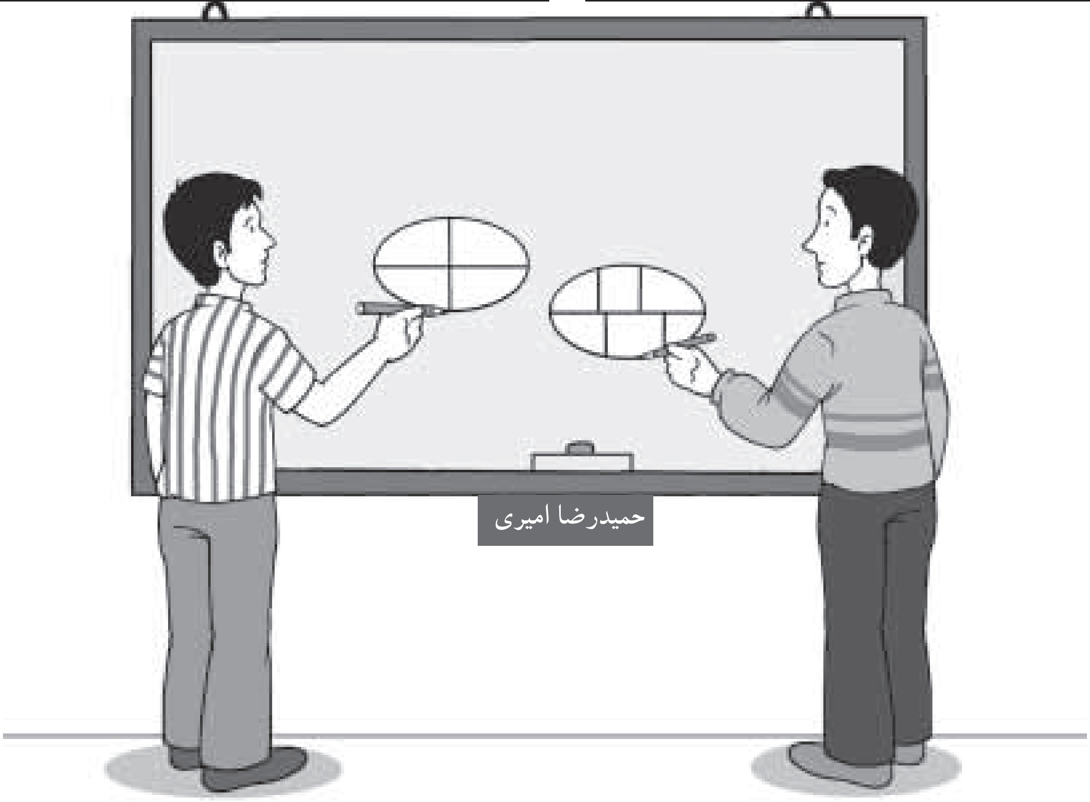
رابطه‌های هم‌ارزی کلاس‌های هم‌ارزی



حمیدرضا امیری

رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی ناتهی A می‌تواند دارای خواص بازتابی (انعکاسی)، تقارنی، پادتقارنی و تعدّی (تراگذاری) باشد. برای مثال، اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و رابطه‌ی R را به صورت: $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a)\}$ تعریف کنیم، مشاهده می‌شود که رابطه‌ی R سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدّی را دارد. در حالت کلی، به چنین رابطه‌هایی که هر سه خاصیت انعکاسی،تقارنی و تعدّی را با هم داشته باشند، یک رابطه‌ی هم‌ارزی می‌گویند. لازم است یادآوری کنیم که اگر رابطه‌ی R سه خاصیت فوق و علاوه بر آن خاصیت دیگری را نیز داشته باشد، باز هم یک رابطه‌ی هم‌ارزی نامیده می‌شود.

مثال: رابطه‌ی R روی $\mathbb{Z}$، به صورت زیر تعریف می‌شود. ثابت کنید که این رابطه، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. (m عددی صحیح و ثابت است.)

$$xRy \Leftrightarrow x-y=mk \quad (k\in\mathbb{Z})$$

حل: می‌دانیم صفر مضرب هر عدد است، به خصوص $m\times ۰=۰$:

پس:

$$۱)\ x-x=۰=m\times ۰ \Leftrightarrow xRx$$

$$۲)\ xRy \Rightarrow x-y=mk_۱$$
$$\Rightarrow y-x=m\underbrace{(-k_۱)}_{k_۲\in Z}$$
$$\Rightarrow y-x=mk_۲ \Rightarrow yRx$$

یعنی، با فرض این که xRy، ثابت کردیم که yRx، پس خاصیت تقارنی نیز برقرار است.

$$۳)\ xRy\ ,\ \ yRz \Rightarrow x-y=mk_۱\ \ ,\ \ y-z=mk_۲$$

$$\Rightarrow x-z=m\underbrace{(k_۱+k_۲)}_{k_۳\in\mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow x-z=mk_۳ \Rightarrow xRz$$ (خاصیت تعدّی دارد)

بنابراین رابطه‌ی R، یک رابطه‌ی هم ارزی است.

(لازم است توضیح دهیم که رابطه‌ی R در مثال قبل به رابطه‌ی هم نهشتی به پیمانه‌ی m معروف است.)

خواص انعکاسی، تقارنی و تعدّی در یک رابطه‌ی هم ارزی مانند R که روی مجموعه‌ی A تعریف شده است و ارتباط بین این سه خاصیت می‌تواند بین اعضایی از A که با هم رابطه‌ی R داشته باشند، ارتباطی خاصی برقرار کند. برای مثال، اگر در مثال قبل قرار دهیم $m = ۳$، داریم:

$$xRy \Leftrightarrow x - y = ۳k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

در حقیقت، اعدادی از $\mathbb{Z}$ با هم رابطه‌ی R دارند که تفاضل آن‌ها مضرب ۳ باشد. برای مثال، ۶R۱۵، زیرا $۶ - ۱۵ = -۹$ یا $۶ - ۱۵ = ۳\times(-۳)$. حال اگر a عضوی از $\mathbb{Z}$ باشد و همه‌ی اعداد صحیح که با a رابطه‌ی R دارند (تفاضل هر یک از آن‌ها با a مضرب ۳ باشد) را در نظر بگیریم، مجموعه‌ای حاصل می‌شود که آن را کلاس هم ارزی a می‌نامند و با نماد [a] نمایش می‌دهند. در حالت کلی داریم:

اگر R یک رابطه‌ی هم ارزی روی مجموعه‌ی A باشد و $a \in A$، کلاس هم ارزی a را با نماد [a] نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[a] = \{x \in A \mid xRa\}$$

به عبارت دیگر: $x \in [a] \Leftrightarrow xRa$

برای مثال، در رابطه‌ی زیر داریم:

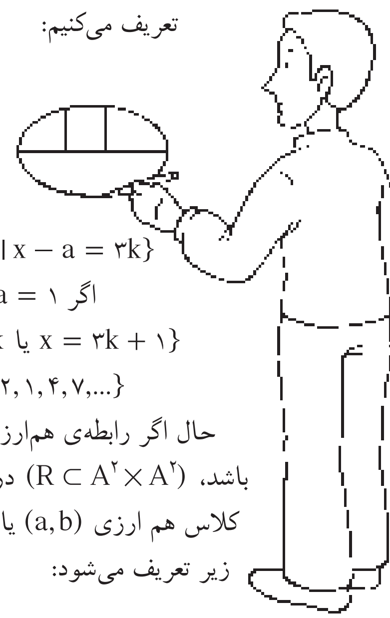
$$xRy \Leftrightarrow x - y = ۳k$$

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z} \mid xRa\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - a = ۳k\}$$

اگر $a = ۱$، در این صورت داریم:

$$[۱] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - ۱ = ۳k \text{ یا } x = ۳k + ۱\}$$

$$\Rightarrow [۱] = \{\dots, -۵, -۲, ۱, ۴, ۷, \dots\}$$



حال اگر رابطه‌ی هم‌ارزی R روی مجموعه‌ی $A^۲$ تعریف شده باشد، $(R \subset A^۲ \times A^۲)$ در این صورت، برای هر $(a,b) \in A^۲$ کلاس هم ارزی (a,b) یا $[(a,b)]$ مطابق تعریف اصلی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$[(a,b)] = \{(x,y) \in A^۲ \mid (x,y)R(a,b)\}$$

مثال: رابطه‌ی هم ارزی R روی $\mathbb{R}^۲$ به صورت زیر تعریف شده است. اولاً، نوع نمودار کلاس‌های هم ارزی را مشخص کنید. ثانیاً، $[(۱,\sqrt{۲})]$ را به صورت مجموعه‌ای تشکیل دهید.

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

حل: با نوشتن یک کلاس هم ارزی دلخواه مانند $[(a,b)]$، نمودار هر کلاس هم ارزی مشخص می‌شود:

$$\begin{aligned}[(a,b)] &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid (x,y)R(a,b)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid x + b = y + a\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid y = x + (b - a)\}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [(۱,\sqrt{۲})] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid y = x + (\sqrt{۲} - ۱)\}$$

و همان‌طور که مشاهده می‌شود، نمودار دسته‌های هم ارزی این رابطه، خط‌هایی به شکل $y = x + (b - a)$ است که می‌بینیم a و b تأثیری در ضریب زاویه‌ی این خط‌ها ندارند و فقط عرض از مبدأ را تعیین می‌کنند؛ یعنی، نمودار همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی، خط‌هایی موازی با هم هستند.

مثال: رابطه‌ی R را روی مجموعه‌ی $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$R = \{(۲,۲),(۴,۴),(۶,۶),(۸,۸),(۴,۶),(۶,۴)\}$$

واضح است که رابطه‌ی R، یک رابطه‌ی هم ارزی است. حال کلاس‌های هم ارزی این رابطه را تشکیل می‌دهیم:

$$[۲] = \{x \in A \mid xR۲\} = \{۲\}$$

$$[۴] = \{x \in A \mid xR۴\} = \{۴,۶\}$$

$$[۶] = \{x \in A \mid xR۶\} = \{۶,۴\}$$

$$[۸] = \{x \in A \mid xR۸\} = \{۸\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، اوّلاً هیچ کدام از کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه‌ی هم‌ارزی، تهی نیست، ثانیاً کلاس‌های هم ارزی، یا از هم جدا هستند و عضو مشترکی ندارند یا برابرند $([۶] = [۴])$ ثالثاً اجتماع کلاس‌های هم ارزی رابطه‌ی R، برابر با مجموعه‌ی A است؛ یعنی:

$$[۲] \cup [۴] \cup [۸] = \{۲\} \cup \{۴,۶\} \cup \{۸\} = \{۲,۴,۶,۸\} = A$$

در این جا، خواصی را که درباره‌ی کلاس‌های هم ارزی در مثال قبل مشاهده کردید، در حالت کلّی و به عنوان یک قضیه، مطرح و اثبات می‌کنیم.

قضیه: اگر رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی ناتهی A یک رابطه‌ی هم ارزی باشد، در این صورت داریم:

الف) کلاس‌های هم ارزی رابطه‌ی R، ناتهی‌اند.

ب) اگر $b \in [a]$، آن‌گاه $[a] = [b]$.

ج) اجتماع همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی رابطه‌ی R، برابر با مجموعه‌ی A است.

اثبات: الف) فرض کنیم [a] یک کلاس هم ارزی دلخواه باشد. چون رابطه‌ی R هم ارزی است، پس خاصیت انعکاسی دارد، لذا aRa. بنابراین طبق تعریف کلاس‌های هم ارزی $a \in [a]$، پس: $[a] \neq \varnothing$.

ب) برای این که ثابت کنیم $[a] = [b]$، (با فرض $b \in [a]$)

کافی است ثابت کنیم $[a]\subset[b]$ و $[b]\subset[a]$.

فرض کنیم:

$$x\in[a]\Rightarrow xRa; b\in[a]\Rightarrow aRb$$

و داریم:

$$aRb \xrightarrow{xRa} xRb \Rightarrow x\in[b]\Rightarrow[a]\subset[b] \quad (1)$$

حال اگر:

$$x\in[b]\Rightarrow xRb; b\in[a]\Rightarrow bRa$$

و داریم:

$$bRa \xrightarrow{xRb} x\in[a]\Rightarrow[b]\subset[a] \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2)\Rightarrow[a]=[b]$$

تذکر: قسمت (ب) نشان می‌دهد که هر دو کلاس هم ارزی، یا مساوی یکدیگرند یا هیچ اشتراکی با هم ندارند.

ج) اجتماع همه‌ی کلاس‌های هم ارزی را با E نشان می‌دهیم، چون طبق تعریف کلاس‌های هم ارزی، هر کلاس هم ارزی زیر مجموعه‌ی A است، پس اجتماع این کلاس‌های هم ارزی، یعنی E نیز زیرمجموعه‌ی A است؛ بنابراین $E\subseteq A$. حال اگر فرض کنیم $x\in A$ واضح است که $x\in[x]$. پس هر عضو از A، در یکی از کلاس‌های هم ارزی رابطه‌ی R وجود دارد و بنابراین در اجتماع کلاس‌ها، یعنی E وجود خواهد داشت؛ یعنی $A\subseteq E$ و در کل ثابت شد $A=E$.

مثال: مجموعه‌ی $A=\{x\in\mathbb{R} \mid 0\le x\le 1\}$ را در نظر می‌گیریم و رابطه‌ی R را روی A^2 به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow y=t$$

که $A^2=A\times A=\{(x,y) \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$:

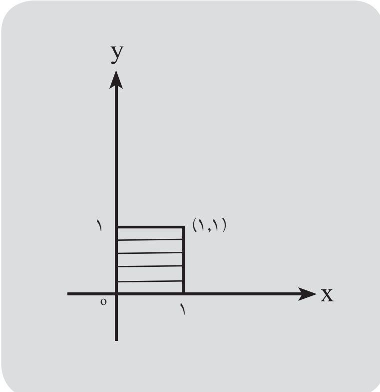
(مجموعه‌ی $A=\{x\in\mathbb{R} \mid 0\le x\le 1\}$ را به شکل $A=[0,1]$ نیز نشان می‌دهند.)

اوّلاً، به راحتی می‌توان ثابت کرد که رابطه‌ی R یک رابطه‌ی هم ارزی است (اثبات به عهده‌ی خواننده).

ثانیاً، همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مجموعه‌ی A^2، یعنی $[0,1]\times[0,1]$، سطح مربع واحد را نشان می‌دهد و اگر بخواهیم نمودار هر کلاس هم ارزی این رابطه را بشناسیم، داریم:

$$\begin{aligned}[(a,b)] &= \{(x,y)\in A^2 \mid (x,y)R(a,b)\}\\ &= \{(x,y)\in A^2 \mid y=b\}\end{aligned}$$

یعنی نمودار هر کلاس هم ارزی، پاره خطی است داخل سطح مربع واحد و موازی با محور xها، که هیچ کدام از این پاره خط‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند، زیرا هر یک از این پاره‌خط‌ها به یک کلاس هم ارزی تعلق دارد و می‌دانیم که (ثابت شده) که کلاس‌های هم ارزی، عضو مشترک ندارند.



مثال: رابطه‌ی R را روی $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow y-x^2=t-z^2$$

الف) ثابت کنید که R رابطه‌ی هم ارزی است.

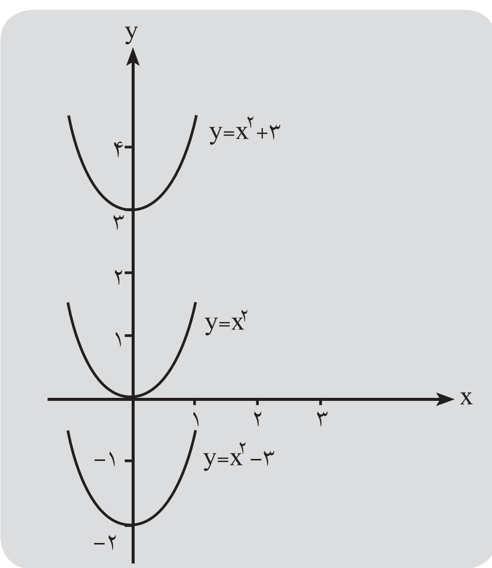
ب) نمودار هر کلاس هم ارزی در این رابطه، چه شکلی را در صفحه‌ی مختصات معین می‌کند؟

اثبات: اثبات قسمت (الف) به عهده‌ی خواننده.

ب) برای مشخص کردن نمودار هر کلاس هم ارزی، یک کلاس هم ارزی دلخواه مانند $[(a,b)]$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}[(a,b)] &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)R(a,b)\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y-x^2=b-a^2\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2+(b-a^2)\}\end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، نمودارهای کلاس‌های هم ارزی این رابطه، سهمی‌هایی به شکل $y=x^2+(b-a^2)$ هستند. برای مثال، نمودار $[(1,2)]$، سهمی $y=x^2+1$ است.



$[(1,1)] \to y = x^2$

$[(0,3)] \to y = x^2 + 3$

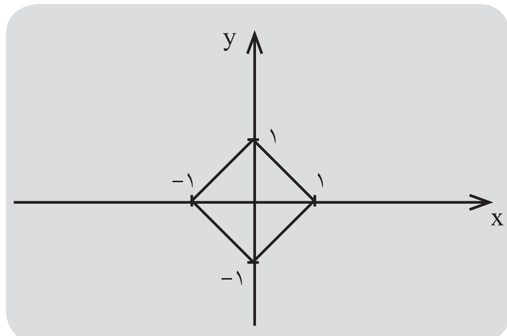
$[(-1,-1)] \to y = x^2 - 2$

مثال: رابطه‌ی هم‌ارزی R روی $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف می‌شود، شکل کلاسی هم‌ارزی [(۱و۰)] را مشخص کرده و نحوه‌ی افراز $\mathbb{R}^2$ را توسط کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه توضیح دهید.

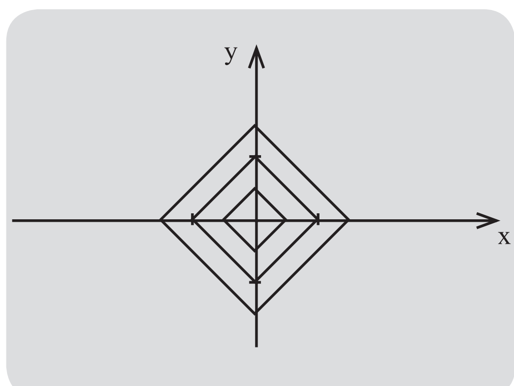
$$(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow |x|+|y|=|z|+|t|$$

حل:

$$[(0,1)] = \{(x,y \in \mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| = |0|+|1|\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| = 1\}$$



همان‌طور که مشاهده می‌شود نمودار هر کلاس هم‌ارزی مانند [(a,b)] یک مربع است که چهار رأس آن روی محورهای مختصات قرار دارد و مرکز همه‌ی این مربع‌ها (با طول اضلاع متمایز) مبدأ مختصات است و بنابراین هیچ‌کدام دیگری را قطع نمی‌کند در واقع $\mathbb{R}^2$ توسط این مربع‌های هم مرکز افراز می‌شود.



تمرین: رابطه‌ی هم‌ارزیِ زیر روی $\mathbb{R}^2$ تعریف شده این رابطه، مجموعه‌ی $\mathbb{R}^2$ را توسط چه نمودارهایی افراز می‌کند؟

$$(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2 + t^2$$

تعریف افراز یک مجموعه: هرگاه A یک مجموعه‌ی ناتهی باشد و بتوانیم تعدادی متناهی از زیرمجموعه‌های متمایز A مانند $A_1, A_2, ..., A_n$ بیابیم، به قسمی که اوّلاً هر یک از زیرمجموعه‌ها ناتهی باشند، ثانیاً هیچ دوتایی از آن‌ها با هم اشتراکی نداشته باشند (دو به دو از هم جدا باشند) و ثالثاً اجتماع این زیرمجموعه‌های برابر با مجموعه‌ی A شود، در این صورت می‌گوییم که مجموعه‌های A_1، A_2، ... و A_n مجموعه‌های افراز کننده‌ی مجموعه‌ی A هستند و مجموعه‌ی $E = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ یک افراز n عضوی از مجموعه‌ی A است.

تبصره– در حالتی که $n = 1$، یعنی E یک افراز یک عضوی از مجموعه‌ی A باشد، داریم: $E = \{A\}$. حال اگر بخواهیم تعریف افراز یک مجموعه را توسط نمادهای ریاضی یا به زبان ریاضی بیان کنیم، می‌گوییم:

مجموعه‌ی $E = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ یک افراز n عضوی برای مجموعه‌ی ناتهی A است، هرگاه:

۱) برای هر $1 \le i \le n$: $A_i \ne \varnothing$

۲) برای هر j و i که $1 \le i$ و $j \le n$ و $i \ne j$، $A_i \cap A_j = \varnothing$

۳) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.

مثال: یک افراز ۴ عضوی، یک افراز ۳ عضوی و یک افراز ۲ عضوی برای مجموعه‌ی $A = \{1,2,3,4\}$ بنویسید.

حل: ۱– اگر فرض کنیم که $A_1 = \{1\}$ و $A_2 = \{2\}$ و $A_3 = \{3\}$ و $A_4 = \{4\}$، در این صورت $E_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ یک افراز ۴ عضوی برای A است.

۲– اگر فرض کنیم که $B_1 = \{1,4\}$، $B_2 = \{2\}$ و $B_3 = \{3\}$، در این صورت $E_2 = \{B_1, B_2, B_3\}$ یک افراز ۳ عضوی برای A است.

۳– و بالاخره اگر فرض کنیم که $C_1 = \{1,2\}$ و $C_2 = \{3,4\}$، در این صورت $E_3 = \{C_1, C_2\}$ یک افراز ۲ عضوی از A است.

مثال: برای مجموعه‌ی اعداد حقیقی، می‌توان به صورت $E = \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-, \{0\}\}$ یک افراز ۳ عضوی نوشت.

مثال: اگر مجموعه‌ی اعداد صحیح زوج را با $\mathbb{Z}_E$ و مجموعه‌ی اعداد صحیح فرد را با $\mathbb{Z}_O$ نمایش دهیم، در این صورت، $E = \{\mathbb{Z}_E, \mathbb{Z}_O\}$ یک افراز ۲ عضوی برای $\mathbb{Z}$ است.

حال با توجه به قضیه‌ای که درباره‌ی کلاس‌های هم ارزی یک رابطه‌ی هم ارزی مانند R اثبات شد و با توجه به تعریف افراز، بدیهی است که:

اگر R رابطه‌ی هم ارزی روی مجموعه‌ی ناتهی A باشد، مجموعه‌ی کلاس‌های هم ارزی رابطه‌ی R، یک افراز برای مجموعه‌ی

A است. (طبق قضیه‌ی کلاس‌های هم ارزی، هر سه خاصیت افراز را دارند.)

مثال: دیدیم که رابطه‌ی $xRy \Leftrightarrow x-y=۳k$ یک رابطه‌ی هم ارزی روی $\mathbb{Z}$ است و کلاس‌های هم ارزی این رابطه به قرار زیرند:

$$[۰]=\{...,-۶,-۳,۰,۳,۶,...\}$$
$$[۱]=\{....,-۵,-۲,۱,۴,۷,....\}$$
$$[۲]=\{...,-۴,-۱,۲,۵,۸,...\}$$

و واضح است که $\mathbb{Z}=[۰]\cup[۱]\cup[۲]$؛ یعنی: $E=\{[۰],[۱],[۲]\}$ یک افراز $\mathbb{Z}$ است.

مثال: رابطه‌ی هم ارزی R روی $\mathbb{R}^۲$ به صورت زیر تعریف می‌شود، شکل کلاس هم ارزی $[(۰,۱)]$ را مشخص کرده و نحوه‌ی افراز $\mathbb{R}^۲$ را توسط کلاس‌های هم ارزیِ این رابطه توضیح دهید.

$$(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow |x|+|y|=|z|+|t|$$

حل:
$$[(۰,۱)]=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \middle| |x|+|y|=|۰|+|۱|\right\}$$
$$=\left[(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \middle| |x|+|y|=۱\right]$$

همان طور که مشاهده می‌شود نمودار هر کلاس هم ارزی مانند $[(a,b)]$ یک مربع است که چهار رأس آن روی محورهای مختصات قرار دارد و مرکز همه‌ی این مربع‌ها (با طول اضلاع متمایز) مبدأ مختصات است و بنابراین هیچ‌کدام دیگری را قطع نمی‌کند در واقع $\mathbb{R}^۲$ توسط این مربع‌های هم مرکز افراز می‌شود.

تمرین: رابطه‌ی هم ارزیِ زیر روی $\mathbb{R}^۲$ تعریف شده این رابطه، مجموعه‌ی $\mathbb{R}^۲$ را توسط چه نمودارهایی افراز می‌کند؟

$$(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow x^۲+y^۲=z^۲+t^۲$$

مشاهده کردید که کلاس‌های هم ارزی هر رابطه‌ی هم ارزی مانند R روی مجموعه‌ی A، یک افراز برای A است. حال این سؤال پیش می‌آید که آیا عکس مطلب فوق نیز برقرار است؟ یعنی آیا به ازای هر افراز برای A، رابطه‌ای هم ارزی روی A می‌توان تعریف کرد که این افراز، همان کلاس‌های هم ارزی آن رابطه باشند؟ جواب مثبت است و برای به دست آوردن آن رابطه‌ی هم ارزی کافی است هر یک از مجموعه‌های افراز کننده را در خودش ضرب دکارتی کرده و اجتماع همه‌ی آن‌ها، همان رابطه هم ارزی است.

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

احسان یارمحمدی

www.combinatorics.org

این سایت به معرفی یک مجله‌ی الکترونیکی ریاضی در زمینه‌ی ریاضیات گسسته می‌پردازد که دربرگیرنده‌ی موضوعات متنوع ریاضیات گسسته شامل مباحث نظریه‌ی گراف‌ها، ترکیبیات و... است.

در سمت چپ صفحه‌ی اصلی این سایت می‌توانید با اعضای دست‌اندرکار در این مجله‌ی الکترونیکی به شرح زیر آشنا شوید.

ویراستار افتخاری (Honorary Editor)
مدیران مسئول (Editors- in- Chief)
کمک ویراستاران (Associate Editors)
مدیر مسئول (Managing Editors)
هیئت تحریریه (Editorial Board)

صفحه‌ی اصلی این سایت نیز دربرگیرنده‌ی عناوین زیر است که هر یک از آن‌ها حاوی زیرعنوان‌ها و مطالب متنوع، جالب توجه و پیشرفته درباره‌ی مباحث ریاضیات گسسته است.

نمایی کلی از مجله (View the Journal)
مجلدهای فعلی و اخیر (Current and Recent Volumes)
تمام مجلدها (All Volumes)
ضمیمه‌ی نویسندگان (Index of Authors)
بازدیدهای پویا (Dynamic Surveys)
درباره‌ی مجله (About the Journal)
هدف مجله (The Purpose of the Journal)
هیئت تحریریه (Editorial Board)
اطلاعات برای نویسندگان (Information for Authors)
سایت‌های کپی برابر اصل[۱] (Mirror Sites)
ثبت نام برای دریافت اطلاعات از راه پست الکترونیک.
(Sign up to Receive Abstract Via E- mail)
نسخه‌ی چاپی از مجله (The Print Version of the Journal)
سپاس‌گزاری (Thanks)
تبادل ترکیبیات جهانی
(The World Combinatorics Exchange)

بقیه در صفحه‌ی ۲۷