# آشنایی با بسته‌ی نرم‌افزاری مَتِمَتیکا (۲)
# Mathematica

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی

کلید واژه‌ها: دستورالعمل‌های Simplify، Expand، Factor، Coefficient، Roots، Solve، List

**مقدمه**

در کتاب ریاضیات ۱، سال اول متوسطه دانش‌آموزان با اعمال ریاضی روی عبارت‌های جبری، ساده‌کردن عبارت‌ها و تجزیه‌کردن آن‌ها به حاصل‌ضرب عوامل اول و هم‌چنین اتحادهای جبری آشنا می‌شوند .این‌گونه عملیات که به صورت دستی انجام می‌شوند و در اکثر موارد نیاز به ابتکار عمل و تفکر زیادی دارند، در بسته‌ی نرم‌افزاری مَتِمتیکا به سادگی انجام می‌گیرد. در این قسمت به معرفی دستورالعمل‌های اصلی در این بسته‌ی نرم‌افزاری که مربوط به محاسبات روی عبارت‌های جبری است، می‌پردازیم. مجدداً توصیه می‌شود خوانندگان گرامی هم‌زمان با مطالعه‌ی این سری از مقالات دستورالعمل‌های معرفی شده را روی رایانه‌ی خود در

محیط مَتمتیکا اجرا کنند تا بهتر با عملکرد این دستورها آشنا شوند. بیش‌تر مَسائل داخل کتاب درسی را می‌توانید به عنوان تمرین با به‌کارگیری این دستورالعمل‌ها حل کنید و پاسخ نهایی را در اختیار داشته باشید.

در قسمت قبلی شما را با چند عمل مقدماتی و هم‌چنین محیط بسته‌ی نرم‌افزاری مَتمتیکا آشنا کردیم. در پنجره Basic Math Input که در صفحه‌ی اصلی متمتیکا قابل نمایش است، نمادهای بسیاری از اعمال مهم ریاضی از جمله توان‌رسانی، ریشه‌گیری، کسر و... مشخص شده‌اند. نمادهای دیگر این پنجره در قسمت‌های بعدی معرفی خواهند شد. یادآوری می‌شود که برای محاسبه‌ی هر سلول به‌طور هم‌زمان، باید دکمه‌های shift+Enter را فشار دهیم.

ابتدا چند دستورالعمل مقدماتی را معرفی می‌کنیم.

**۱.** دستور [عبارت] Simplify عبارت داخل کروشه را به ساده‌ترین صورت ممکن ساده می‌کند.

**مثال:**

**Simplify[$\frac{1}{3(1+x)}-\frac{-1+2x}{6(1-x+x^2)}+\frac{2}{3(1+\frac{1}{3}(-1+2x)^2}$]**

$\frac{1}{1+x^3}$

**Simplify[$x^4+4x^3y-15y^3x-6x^3y+4xy^3+7x^4$]**

$8x^4+4xy^3-2x^3y-15xy^3$

**۲.** دستور [فرض، عبارت] Simplify تحت فرض داده شده در داخل کروشه، عبارت موردنظر را ساده می‌کند.

**مثال:**

**Simplify[Sqrt[x ^ 2], x > 0]**

x

**Simplify[Sqrt[x ^ 2], x < 0]**

$-x$

**۳.** دستور [عبارت] Expand حاصل عبارت داخل کروشه را گسترش می‌دهد.

**مثال:**

**Expand[(a + b) ^ 6]**

$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^2+6ab^5+b^6$

**Expand[(1 + x + y)(2 - x) ^ 3]**

$8-4x-6x^2+5x^3-x^4+8y-12xy+6x^2y-x^3y$

**Expand[(1 + $\sqrt{x}$) ^ 6]**

$1+6\sqrt{x}+15x+20x^{3/2}+15x^2+6x^{5/2}+x^3$

توجه شود که علامت «^» به معنای توان‌رسانی است و (a+b)^6 همان $(a+b)^6$ است.

**۴.** دستور [عبارت] Factor، عبارت داخل کروشه را به شکل حاصل‌ضربی از عوامل اول تجزیه می‌کند. در این حالت اگر عبارت داخل کروشه تجزیه‌ناپذیر باشد، خود عبارت در خروجی مشخص می‌شود.

**مثال:**

**Factor[x ^ 5 - y ^ 5]**

$(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$

**Factor[Power[a, 4] + Power[b, 4]]**

$a^4+b^4$

**Factor[2x ^ 6 - 8y ^ 10]**

$2(x^3-2y^5)(x^3+2y^5)$

**Factor[$x^2+xy-6y^2+x+13y-6$]**

$-6+x+x^2+xy+13y-6y^2$

**۵.** دستور [جمله، عبارت] Coefficient ضریب جمله ی بیان‌شده‌ی داخل کروشه را در عبارت مفروض مشخص می‌کند. هم‌چنین دستور [n، جمله، عبارت] Coefficient ضریب $(\text{جمله})^n$ را در عبارت داخل کروشه مشخص می‌کند.

**مثال:** فرض کنید می‌خواهیم ضریب $x^2y^4$ را در عبارت $(2x+3y)^6$ بدانیم. برای این‌کار از دستور فوق به صورت زیر استفاده می‌کنیم و با اجرای آن ضریب این جمله را به دست می‌آوریم:

**Coefficient[(2x + 3y) ^ 6, x ^ 2y ^ 4]**

4860

حال فرض کنید می‌خواهیم ضریب جمله‌ی $a^3$ را در عبارت $(a-2)^{10}$ بدانیم. در این حالت به صورت زیر از دستور فوق استفاده می‌کنیم:

**Coefficient[(a - 2) ^ 10, a, 3]**

-15360

با استفاده از این دستور می‌توانید هر یک از ضرایب بسط دو جمله‌ای نیوتن به صورت کلی $(a+b)^n$ را به دست آورید. مجدداً یادآوری می‌شود برای به‌کارگیری عمل توان‌رسانی هم می‌توانید از پنجره‌ی Basic Math Input و نماد ■□ استفاده کنید و هم

می‌توانید از نماد «^» یا دستورالعمل Power که قبلاً معرفی شد، بهره گیرید.

۶. دستور [جمله، عبارت] Exponent توان جمله‌ی مذکور در داخل کروشه را در عبارت مفروض بیان می‌کند.

**مثال:**

**Exponent[(1 + x ^ 2)^3 - (y + x ^ 2 + ax ^ 3) ^ 2, x]**

6

**Exponent[6a^3 - 24ab^2 - 4a^2b + 5b^3, ab^2]**

1

۷. دستور [متغیر و عبارت] Collect

جملاتی را که در عبارت داده شده دارای توان یکسانی نسبت به متغیر مفروض هستند، دسته‌بندی می‌کند.

**مثال:**

**Collect[ax + by + cx, x]**

$(a + c)x + by$

**Collect[(1 + a + x) ^ 4, x]**

$1 + 4a + 6a^2 + 4a^3 + a^4 + (4 + 12a + 12a^2 + 4a^3)x$

$+(6 + 12a + 6a^2)x^2 + (4 + 4a)x^3 + x^4$

۸. دستور [عبارت] Together عبارت داخل کروشه را به شکل یک کسر نمایش می‌دهد.

**مثال:**

**Together[1/(x+1) + 2/(x^2 - 1)]**

$\frac{1}{-1+x}$

**مثال:** برای نمایش عبارت $\frac{x^۲}{x^۲-۱}+\frac{x}{x^۲-۱}$ به شکل یک کسر به صورت زیر از این دستور استفاده می‌شود. این دستور نتیجه را به صورت یک کسر ساده شده اعلام می‌کند. توجه کنید که می‌توان برای ورود کسرها هم از نماد / و هم از نماد $\frac{\blacksquare}{\square}$ د رپنجره‌ی Basic Math Input استفاده کرد.

**Together[x ^ 2 / (x ^ 2 - 1) + x / (x ^ 2 - 1)]**

$\frac{x}{-1+x}$

هم‌چنین به مثال‌های زیر نیز توجه کنید:

**Together[(x^3 - 2x^2)/(x^2 - 25) × (5x + 10)/(x^2 - 2x)]**

$\frac{5x(2+x)}{-25+x^2}$

**Together[4/(x^2 + x) + 1/(x^2 + 3x + 2)]**

$\frac{8+5x}{x(1+x)(2+x)}$

۹. دستور [عبارت] Apart، عبارت داخل کروشه را به شکل مجموعی از کسرهای جزئی تجزیه می‌کند.

**Apart[1 / ((1 + x)(5 + x))]**

$\frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{4(5+x)}$

**Apart[x/(x^3 - 1)]**

$\frac{1}{3(-1+x)} + \frac{1-x}{3(1+x+x^2)}$

۱۰. دستور [عبارت] Cancel عوامل مشترک در صورت و مخرج عبارت داخل کروشه را حذف می‌کند.

**مثال:**

**Cancel[(x^2 - 5x + 6)/(5x - 10)]**

$\frac{1}{5}(-3+x)$

البته از دستور Simplify نیز می‌توان استفاده کرد.

**مثال:**

**Cancel[(x^2 + 5x + 6)/(x^2 + 3x + 2)]**

$\frac{3+x}{1+x}$

در ادامه، چند دستورالعمل تکمیلی دیگر را معرفی می‌کنیم:

به منظور ورود یک عبارت برای استفاده از هر کدام از دستورالعمل‌های فوق به جای تایپ عبارت در داخل کروشه، می‌توان نامی برای عبارت در نظر گرفت و سپس با استفاده از این نام در داخل کروشه به جای کل عبارت فقط نام آن را تایپ کرد. در این حالت، باید بعد از تایپ عبارت علامت ; را تایپ کرد.

**مثال:**

**p = x^8 - 41x^4 + 400;**

**Factor[p]**

$(-2+x)(2+x)(-5+x^2)(4+x^2)(5+x^2)$

در مثال زیر یک چندجمله‌ای با دو متغیر به نام poly معرفی شده و با استفاده از دستور Collect یک بار نسبت به متغیر x و یک بار نسبت به متغیر y دسته‌بندی شده است.

poly = ۱ + ۲x + ۳y + ۴xy + ۵x^۲y + ۶xy^۲ + ۷x^۲y^۲;

**Collect[poly, x]**

$1 + 3y + x(2 + 4y + 6y^2) + x^2(5y + 7y^2)$

**Collect[poly,y]**

$1+2x+(3+4x+5x^2)y+(6x+7x^2)y^2$

**۱۱.** دستورالعمل‌های Polynomial GCD [P1, P2, ...] و Polynomial LCM [P1, P2, ...] به ترتیب بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک عبارت‌های داخل کروشه را مشخص می‌کنند. توجه شود هنگام استفاده از این دستورها حروفی که به صورت بزرگ در دستور آمده‌اند به همین شکل تایپ شوند.

**مثال:**

**PolynomialGCD[x ^ 2 - 1, x ^ 3 - 1, x ^ 2 + x - 2]**

$-1+x$

در مثال زیر، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عبارت $(x+y)(x-y)^3$ و $(3x^2)(x^2-y^2)^2$ به دست‌آمده‌اند.

**PolinomialGCD[(x - y) ^ 3(x + y),(x ^ 2 - y ^ 2) ^ 2(3x ^ 2)]**

$(-x+y)^2(x+y)$

**PolynomialLCM[(x - y) ^ 3(x + y),(x ^ 2 - y ^ 2) ^ 2(3x ^ 2)]**

$3x^2(x-y)^3(x+y)^2$

در دو مثال زیر ابتدا دو چندجمله‌ای p و q معرفی و سپس بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها با به‌کارگیری دو دستور فوق محاسبه شده‌اند.

**p = 2x^4 - 15x^3 + 39x^2 - 40x + 12;**

**q = 4x^4 - 24x^3 + 45x^2 - 29x + 6;**

**a = PolinomialGCD[p,q]**

$-6+17x-11x^2+2x^3$

**b = PolynomialLCM[p,q]**

$(-2+x)(6-29x+45x^2-24x^3+4x^4)$

**p = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3;**

**q = (x - 1)^2(x - 2)(x - 3)^4;**

**PolynomialGCD[p,q]**

$(-3+x)^3(-2+x)(-1+x)$

**PolynomialLCM[p,q]**

$(-3+x)^4(-2+x)^2(-1+x)^2$

**۱۲.** دستور [متغیر و عبارت] CoefficientList فهرستی از تمام ضرایب توان‌های متغیر مفروض را در عبارت داخل کروشه مشخص می‌کند.

**مثال:**

**CoefficientList[(x + 1)^10, x]**

{1,10,45,120,210,252,210,120,45,10,1}

**۱۳.** دستور [متغیر و معادله] Roots ریشه‌های معادله‌ی مفروض را نسبت به متغیر مربوط مشخص می‌کند. در این حالت باید هنگام ورود معادله از دو تساوی متوالی استفاده کرد. برای مثال:

$x^2+x-1==0$

در خروجی، کلیه ریشه‌های معادله برای متغیر x مشخص و بین ریشه‌ها علامت || د رج‌می‌شود.

**مثال:**

**Roots[x^2 + x - 1 == 0, x]**

$x == \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}) \,||\, x == \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$

**Roots[x ^ 3 - x ^ 2 - x + 1 == 0, x]**

$x == -1 \,||\, x == 1 \,||\, x == 1$

**Roots[(x^2 - 5)(x + 2)^3 == 0, x]**

$x == -2 \,||\, x == -2 \,||\, x == -2 \,||\, x == \sqrt{5} \,||\, x == -\sqrt{5}$

**Roots[x^4 + x^3 - 8x^2 - 5x + 15 == 0, x]**

$x == \frac{1}{2}(-1-\sqrt{13}) \,||\, x == \frac{1}{2}(-1+\sqrt{13}) \,||\, x == \sqrt{5} \,||\, x == -\sqrt{5}$

**۱۴.** دستور [متغیر، معادله] Solve، معادله‌ی داخل کروشه را نسبت به متغیر مفروض حل می‌کند. اگر معادله برحسب x و حاصل a باشد، خروجی به صورت {{x → a}} مشخص می‌شود. توجه شود مشابه دستور قبلی باید برای ورود معادله به جای = از == استفاده کرد. اگر معادله فقط دارای یک متغیر باشد نیازی به معرفی متغیرنیست، ولی اگر در معادله بیش از یک متغیر وجود داشته باشد، لازم است که نام متغیر مشخص شود.

**Solve[4x + 5 == -6x + 7]**

$\{\{x \to \frac{1}{5}\}\}$

**Solve[2xy == 3a + y, a]**

$\{\{a \to \frac{1}{3}(2xy - y)\}\}$

از دستور Solve برای حل دستگاه معادلات هم می‌توان استفاده کرد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

**مثال:** می‌خواهیم دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ -x+y=5 \end{cases}$ را حل کنیم. برای این کار معادلات را داخل کروشه تایپ و بین آن‌ها علامت && را قرار می‌دهیم. پس از اجرا، جواب‌های دستگاه مشخص می‌شوند.

**Solve[2x - 3y == 4 && - x + y == 5]**

{{x → -19, y → -14}}

**مثال:** می‌خواهیم دستگاه سه معادله سه مجهولی ذیل را حل کنیم:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 4y - 3z = -1 \\ 7x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

با استفاده از دستور Solve، درون کروشه هر سه معادله را تایپ و بین آن‌ها علامت && را قرار می‌دهیم. پس از اجرا جواب‌های دستگاه به دست می‌آیند:

```
Solve[2x + y - z == 3 && x + 4y - 3z == -1 && 7x - 2y - z == 0]
```

$$\{\{x \to \frac{33}{10}, y \to \frac{13}{2}, z \to \frac{101}{10}\}\}$$

**۱۵.** دستورالعمل‌های PolynomialQuotient[P,S,x] و PolynomialRemainder[P,S,x] به ترتیب خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای P را بر چند جمله‌ای S نسبت به متغیر x مشخص می‌کنند.

**مثال:** می‌خواهیم خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم $P = x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 5x + 9$ را بر $S = x^2 + 1$ به دست آوریم. با تایپ‌کردن این دو چندجمله‌ای و به‌کارگیری دو دستور فوق، نتیجه به صورت زیر حاصل می‌شود. توجه کنید که باید بعد از معرفی هر چندجمله‌ای نماد ; را تایپ کنید.

```
p = x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 5x + 9;
s = x^2 + 1;
q = PolynomialQuotient[p, s, x]
```

$10 - x - 7x^2 + x^3$

```
r = PolynomialRemainder[p, s, x]
```

$-1 - 4x$

**۱۶.** دستور [عناصر] List فهرستی از اشیا را نمایش می‌دهد که می‌توان شامل اعداد یا حروف باشد. مزیت این دستور آن است که هر نوع عمل ریاضی را به راحتی می‌توان روی آن انجام داد. برای مثال، دستور $\frac{1}{\text{List}}$ تمام عناصر موجود در داخل کروشه را معکوس می‌کند یا دستور $\sqrt{\text{List}}$ جذر تمام عناصر موجود در List را می‌گیرد. هم‌چنین می‌توان بین دو فهرست یک عمل حسابی چون جمع را نیز انجام داد. در این حالت عناصر دو فهرست نظیر به نظیر با هم جمع می‌شوند.

**مثال:**

```
List = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
```

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

```
1 / List
```

$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}\}$

```
List^2
```

$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

```
√List
```

$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}\}$

```
List1 = {1, 2, 3, 4, 5};
List2 = {2, 3, 2, 3, 2};
List1 + List2
```

$\{3, 5, 5, 7, 7\}$

در قسمت بعد به معرفی توابع اصلی در مَتمَتیکا و رسم نمودار توابع می‌پردازیم.

## تمرین

پاسخ تمرینات زیر را در محیط بسته‌ی نرم‌افزاری مَتمتیکا به دست آورید:

۱. سه عبارت $p = \frac{2x + 3}{5x - 7}$، $q = \frac{7x - 2}{3x + 1}$ و $r = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ را با هم جمع و نتیجه را در یک کسر بیان کنید.

۲. حاصل $(x + y + z)^3$ را به دست آورید.

۳. بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$a^3 - b^3$ , $(a - b)^3$ , $(a^2 - b^2)(a + b)$

۴. ریشه‌های معادله‌ی $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 = 0$ را بیابید. هم‌چنین عبارت $p = x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$ را به صورت حاصل‌ضرب عوامل اول بنویسید.

۵. فهرست $\text{List} = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ مفروض است حاصل $\text{List}^3 + 2^{\text{List}}$ را به دست آورید.

۶. مقدار تقریبی عدد پی را تا ۱۵ رقم اعشار بیابید.

پی‌نوشت

1. Mathematica

## منابع


۱. کتاب درسی ریاضیات ۱ سال اول متوسطه، ۱۳۸۹

2. Mathematica, second edition, Eugene Don, ph.D., Schaum's Outline Series, McGrowHill, 2009