ماتریس مجاورت گراف‌های ساده

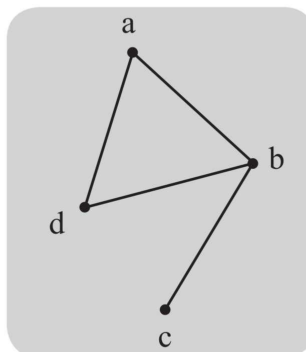
حمیدرضا امیری

اگر G گرافی ساده با مجموعه‌ی رئوس زیر باشد:

$$V = \{V_۱, V_۲, \cdots, V_i, \cdots, V_j, \cdots, V_P\}$$

ماتریس مربعی M از مرتبه‌ی P را طوری تعریف کنیم که هر سطر آن متناظر با یک رأس G و نیز هر ستون آن متناظر با یک رأس G (سطر iام و ستون jام متناظر با رأس V_i) تعریف شود و درایه‌ی m_{ij} را ۱ در نظر بگیریم هرگاه دو رأس V_i و V_j مجاور باشند و صفر در نظر بگیریم هرگاه این دو رأس مجاور نباشند، در این صورت ماتریس M ماتریس مجاورت گراف G نامیده می‌شود.

مثال: ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی زیر را تعریف کنید.



$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

ویژگی‌های ماتریس مجاورت گراف‌های ساده

۱. ماتریس مجاورت هر گراف ساده‌ی ماتریسی متقارن است (درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی، نسبت به قطر قرینه‌اند).

۲. تمام درایه‌های روی قطر اصلیِ هر ماتریس مجاورت صفر می‌باشند.

۳. تعداد یک‌های موجود روی هر سطر (یا ستون) با درجه‌ی رأس متناظر با آن سطر (یا ستون) برابر است.

۴. تعداد کل یک‌های موجود در ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G برابر است با مجموع درجات رئوس گراف G و برابر است با ۲q.

۵. اگر گراف G رأس ایزوله داشته باشد به‌ازای آن رأس ایزوله، یک سطر و ستون نظیر آن صفر است.

۶. اگر ماتریس M متناظر با گراف کامل K_p باشد تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی M یک می‌باشند.

۷. تعداد یک‌های واقع بر ماتریس مجاورت متناظر با گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، برابر است با ۲q و تعداد صفرهای آن $(p^۲-۲q)$ است.

۸. تعداد صفرهای ماتریس مجاورت M متناظر با درخت T از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، برابر است با $(q^۲+۱)$.

ویژگی‌های مربع ماتریس‌های مجاورت

اگر M ماتریس مجاورت متناظر با گراف ساده‌ی G باشد و $M \times M = M^۲$ مربع این ماتریس، در این صورت داریم:

۱. هر درایه‌ی واقع بر قطر اصلی $M^۲$ با درجه‌ی رأس متناظر با سطر (یا ستون) آن درایه برابر است.

۲. مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $M^۲$ همان مجموع درجات رئوس G بوده و برابر است با ۲q.

۳. اگر $m_{ij}^۲$ درایه‌ی غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس $M^۲$ باشد $(i \neq j)$ در این صورت $m_{ij}^۲$ برابر است با تعداد مسیرهای به‌طول ۲ از رأس V_i به رأس V_j.

۴. اگر $G=K_p$ در این صورت هر درایه‌ی روی قطر اصلی $M^۲$، برابر است با $(P-۱)$ و هر درایه‌ی غیرواقع بر قطر اصلی $M^۲$، برابر است با $(P-۲)$.

۵. اگر $G=K_p$ در این صورت مجموع درایه‌های ماتریس $M^۲$، برابر است با $p(p-۱)^۲$.

آزمون **۱.** اگر M ماتریس مجاورت درخت T_p بوده و مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $M^۲$ برابر با ۱۸ باشد ماتریس M چند درایه‌ی صفر دارد؟

۱) ۵۰   ۲) ۳۷

۳) ۶۵   ۴) ۸۲

حل: گزینه‌ی (۴) زیرا،

$۸۲ = q^{۲} + ۱ =$ تعداد صفرهای M $\Rightarrow q = ۹ \Rightarrow ۲q = ۱۸$

آزمون ۲. کدام نمی‌تواند قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} ۳ & & & \\ & ۳ & & \\ & & ۲ & \\ & & & ۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۳ & & & \\ & ۲ & & \\ & & ۲ & \\ & & & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۲ & & & \\ & ۲ & & \\ & & ۱ & \\ & & & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۳ & & & \\ & ۳ & & \\ & & ۲ & \\ & & & ۱ \end{bmatrix}$

حل: گزینه‌ی (۴) زیرا، درایه‌های قطر اصلی $M^{۲}$ همان درجات رئوس ماتریس G می‌باشند و دنباله‌ی $S:۳,۳,۲,۱$ گرافیکال نیست.

(دو رأس ماکزیمم دارد و حداقل درجه‌ی هر رأس باید ۲ باشد).

مثال ۱: اگر M ماتریس مجاورت گراف کامل K_p باشد و درایه‌ی واقع بر سطر دوم و ستون سوم ماتریس $M^{۲}$، برابر با ۵ باشد مطلوب است:

الف) تعداد یال‌های این گراف

ب) مجموع درایه‌های ماتریس $M^{۲}$

حل: چون ۵ درایه‌ی غیرواقع بر قطر اصلی است پس باید $p-۲=۵$ یا $p=۷$ و داریم:

الف) $q = \dfrac{p(p-۱)}{۲} = ۲۱$

ب) $M^{۲}$ مجموع درایه‌های $= p(p-۱)^{۲} = ۷ \times ۶^{۲} = ۲۵۲$

آزمون ۳. اگر ماتریس M دارای ۶ سطر و ۱۱ درایه‌ی صفر باشد در این صورت مقدار Δ (ماکزیمم درجه‌ی گراف) کدام عدد می‌تواند باشد.

۱) ۶ ۲) ۵

۳) ۴ ۴) ۳

حل: گزینه‌ی (۲) زیرا، از ۱۱ درایه‌ی صفر، ۶ درایه روی قطر اصلی قرار دارد، حال اگر ۵ صفر باقی‌مانده را بخواهیم روی ۶ سطر ماتریس M قرار دهیم به حداقل یکی از سطرها صفری تعلق نمی‌گیرد و آن سطر دارای ۵ درایه‌ی یک بوده و بنابراین $\Delta = ۵$ خواهد شد.

آزمون ۴. اگر M ماتریس مجاورت درخت T_p باشد، حداکثر مقدار برای هر درایه‌ی غیرواقع بر قطر اصلی $M^{۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) صفر ۴) حداقل ۲

حل: گزینه‌ی (۱) زیرا، تعداد مسیرهای از هر رأس به هر رأس در یک درخت ۱ است و چون تعداد مسیرهای به طول ۲ از رأس V_i به رأس $V_j\ (i \neq j)$ ۱ می‌باشد، طبق نکته‌ی ذکر شده در ویژگی‌های ماتریس $M^{۲}$ حداکثر مقدار برای این درایه‌ها ۱ می‌باشد.

آزمون ۵: اگر $M = \begin{bmatrix} x & z & y & t \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ y & ۱ & ۰ & ۱ \\ u & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس مجاورت گراف همیلتنی G باشد حاصل (x+y+z+t+u) کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۵

حل: گزینه‌ی (۲) زیرا با توجه به این‌که درایه‌های قطر اصلی M باید همگی صفر باشد لذا $x=۰$ و چون M متقارن است $z=۰$ و چون در هر گراف همیلتنی حداقل درجه‌ی هر رأس باید ۲ باشد پس $y=t=۱$ و لذا $u=۱$ بنابراین:

$x + y + z + t + u = ۳$

آزمون ۶. اگر M ماتریس مجاورت درخت T_p باشد و درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $M^{۲}$ به‌صورت ۱,...,۱,۱,۲,۳,۴,۴,۵,۵ مرتب شده باشند ماتریس M چند ستون دارد؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸

۳) ۱۹ ۴) ۱۷

حل: گزینه‌ی (۳)، می‌دانیم هر درایه‌ی روی قطر اصلی ماتریس $M^{۲}$ درجه‌ی یک رأس درخت T_p است لذا اگر تعداد یک‌ها مشخص شود، تعداد رئوس درخت مورد نظر و درنتیجه تعداد ستون‌ها مشخص می‌شود:

تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱ در درخت $= \sum_{\deg v_i \geq ۳} (\deg v_i - ۲) + ۲$

تعداد رأس‌های درجه‌ی۱ =(۳-۲)+(۴-۲)+(۴-۲)+(۵-۲)+(۵-۲)+۲=۱۳

پس تعداد رأس‌های این درخت یعنی p، برابر است با ۱۹=۲+۲+۱+۱+۱۳ پس M ماتریس ۱۹×۱۹ است.

آزمون ۷. اگر M ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G باشد کدام عدد نمی‌تواند حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی $M^{۲}$ باشد؟

۱) ۸۱ ۲) ۱۲

۳) ۳۶ ۴) ۱۸

حل: گزینه‌ی (۴) زیرا:

$۱۸=۳^{۲}\times۲$ یا ۱۸=۳×۳×۲×۱

و دنباله‌ی $S:۳,۳,۲,۱$ گرافیکال نیست.