

رابطه‌ی بین مجذور اعداد و مجذور مقلوب آن‌ها

هادی خانی
دانش‌آموز دبیرستان شهید مفتاح،
شهرستان خدابنده



اشاره

نظریه‌ی اعداد شاخه‌ای از ریاضی است که به مطالعه‌ی اعداد و روابط بین آن‌ها می‌پردازد و در این میان، شگفتی‌های زیادی از زیبایی‌های روابط و قاعده‌های جاری میان اعداد حاصل می‌شود.

مطالعه و پژوهش در زمینه‌ی اعداد به کشف این روابط قوی و بنیادی می‌انجامد که یکی از نتایج مهم آن، سرعت بخشیدن به محاسبات عظیمی است که امروزه در جوامع صنعتی و دانشگاهی و حتی امور روزانه‌ی سازمان‌ها و کارهای شخصی وجود دارد. در این مجال به معرفی یک رابطه‌ی جالب ریاضی میان مجذور یک عدد و مجذور مقلوب آن عدد می‌پردازیم. فرض کنیم \overline{xy} نماد یک عدد دو رقمی باشد که در این صورت مقلوب آن \overline{yx} خواهد بود.

حال قصد داریم $(\overline{yx})^2$ را از روی $(\overline{xy})^2$ به دست آوریم. ادعا می‌کنیم که:

$$(\overline{yx})^2 = 99(y^2 - x^2) - (\overline{xy})^2 \quad (1)$$

یعنی مربع عدد مقلوب برابر است با:

$$99(\text{عدد داده شده}) + (\text{مجذور رقم یکان} - \text{مجذور رقم دهگان}) \times 99$$

اثبات:

$$\begin{aligned} (\overline{yx})^2 &= (10y + x)^2 = 100y^2 + 20xy + x^2 \\ &= 99y^2 - 99x^2 + 100x^2 + 20xy + y^2 \\ &= 99(y^2 - x^2) + (10x + y)^2 \\ &= 99(y^2 - x^2) + (\overline{xy})^2 \end{aligned}$$

مثال: می‌دانیم که $169 = (13)^2$ می‌باشد حال می‌خواهیم $(31)^2$ را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} (31)^2 &= 99\{(3)^2 - (1)^2\} + 169 \\ &= 99(9 - 1) + 169 = 99 \times 8 + 169 \\ &= 792 + 169 = 961 \end{aligned}$$

که همان مجذور عدد ۳۱ است و در این محاسبه از مجذور ۱۳ (مقلوب آن ۳۱) استفاده شده است. این قاعده در مورد اعداد سه رقمی نیز به شکل مشابه برقرار است: مقلوب عدد سه رقمی (\overline{xyz}) عدد (\overline{zyx}) است. حال قصد داریم $(\overline{zyx})^2$ را از روی $(\overline{xyz})^2$ به دست آوریم. رابطه‌ی زیر را ادعا و اثبات می‌کنیم.

$$\begin{aligned} (\overline{zyx})^2 &= 9999\{(z)^2 - (x)^2\} \\ &+ 1980y(z - x) + (\overline{xyz})^2 \quad (2) \end{aligned}$$

اثبات: طرف چپ رابطه‌ی (۲) برابر است با:

$$\begin{aligned} (\overline{zyx})^2 &= (100z + 10y + x)^2 \\ (\overline{zyx})^2 &= 10000z^2 + 2000zy + 100y^2 + x^2 + 200xz + 20xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\overline{zyx})^2 &= 9999z^2 - 9999x^2 + 1980zy \\ &+ 1980xy + (100x + 10y + x)^2 \\ &= 9999z^2 - 9999x^2 + 1980yz - 1980xy + 10000x^2 \\ &+ 100y^2 + z^2 + 2000xy + 200xz + 20yz \\ &= 10000z^2 + 2000yz + 100y^2 + x^2 + 200xz + 20yz \end{aligned}$$

می‌بینیم که دو طرف رابطه‌ی داده شده با هم برابرند.

مثال: می‌دانیم که $84681 = (291)^2$ است. حال قصد داریم حاصل $(192)^2$ را از روی مجذور (291) به دست آوریم.

$$\begin{aligned} (192)^2 &= 9999(4 - 1) + 1980 \times 9 \times (1 - 2) + (291)^2 \\ &= (-29997) - (17820) + (84681) = 36864 \end{aligned}$$

خاطر نشان می‌شود که با توجه به الگوریتم محاسبه‌ی چنین روابطی می‌توان روابط مشابه را برای اعداد n رقمی به دست آورد.