پژوهش‌سرای دانش‌آموزی محمدبن‌زکریای رازی شهر ری

استفاده از رایانه در شناخت بهتر فراکتال‌ها

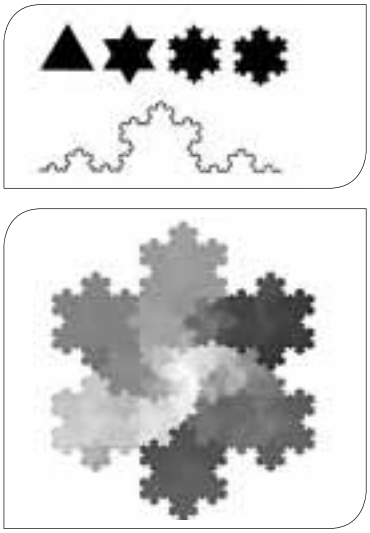
● **مریم شفیعی، غلامحسین رستگارنسب**
دانش‌آموزان: مهسا قادر، محدثه کلبعلی، فاطمه محمدی، معصومه احمدی، سمانه سخی، زهرا تشکری

کلیدواژه‌ها: برف دانه، کخ، فرکتال‌ها.

با دانش‌آموزان وارد سایت شدیم. موضوع بحث ما در کلاس «برف دانهٔ کخ» بود. در کتاب هندسهٔ ۲ مختصر با این موضوع آشنا شده بودیم. دانش‌آموزان به گروههای دو نفره تقسیم شدند و هر گروه قدم به قدم از شمارهٔ ۱ شروع به جست‌وجو در اینترنت کردند. سه موضوع به دانش‌آموزان داده شد. این موضوعات کمک بسیار زیادی می‌کرد تا از پراکندگی مطالب در ذهن دانش‌آموزان هنگام جست‌وجو جلوگیری شود. این موضوعات عبارت بودند از:

- برف دانهٔ کخ چیست و چه شکلی دارد؟
- علت نام‌گذاری این اشکال به برف دانه چیست؟
- آیا می‌توان کاربردی برای آنها در زندگی، طبیعت یا صنعت پیدا کرد؟

نتایج بسیار جالب و شگفت‌انگیز بود. دانش‌آموزان از این‌که چنین اطلاعات جالبی به دست آورده بودند، به وجد آمده بودند و در نهایت اطلاعات خود را به صورتی که خواهید خواند، در برنامه «PowerPoint» دسته‌بندی کردند. ابتدا یک مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر می‌گیریم و هر ضلع آن را به سه قسمت تقسیم می‌کنیم. سپس به جای پاره‌خط وسط هر ضلع، یک مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر جای‌گزین می‌کنیم. این عمل را بارها انجام می‌دهیم. وقتی تعداد مراحل انجام کار بالاتر رود و در حقیقت تعداد این اعمال تا بی‌نهایت ادامه پیدا کند، برف دانهٔ کخ ایجاد می‌شود. این اشکال توسط ریاضیدانی آلمانی به نام فون‌کخ در سال ۱۹۰۴ ابداع شد. این اشکال خود متشابه‌اند و به همین علت در گروه فراکتالها قرار می‌گیرند.

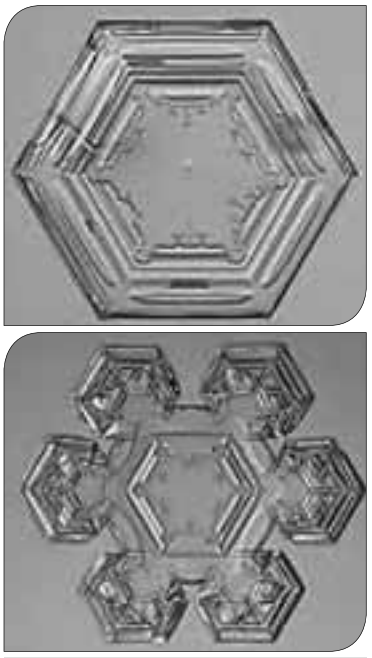


تصویر ۱. نمونهٔ بزرگ‌شده فراکتال دانهٔ برفی کخ

این اشکال شباهت زیادی به دانه‌های برف دارند. به راستی چرا بلورهای برف شش‌پر و متقارن هستند؟ داستان زندگی دانهٔ برف، از ابر آغاز می‌شود؛ از زمانی که یک قطرهٔ بسیار ریز ابر یخ می‌زند و به یک ذرهٔ کوچک یخی تبدیل می‌شود.

زمانی که بخار آب روی سطح ذرهٔ یخ شروع به سخت شدن می‌کند، به سرعت در این یخ کوچک، چند وجه به وجود می‌آید و این یخ به یک شش وجهی تبدیل می‌شود. ذره تا مدتی این شکل شش وجهی را حفظ می‌کند، اما به تدریج که بلور بزرگ‌تر و بزرگ‌تر می‌شود، از هر یک از وجوه این شش وجهی شاخه‌ای بیرون می‌آید. از آن‌جا که شرایط جوی (یعنی دما و رطوبت) در همهٔ نقاط این بلور کوچک یکسان است، هر شش شاخهٔ جدید، تقریباً به یک اندازه رشد می‌کنند.

نتیجهٔ نهایی این روند، ایجاد ساختاری شش شاخه و متقارن است. باید توجه داشت که چون هر بلور برف مسیر خاص خود را در ابر می‌پیماید، هر یک شکل خاص خود را پیدا می‌کنند.



تصویر ۲. شکلهای از دانه‌های برف

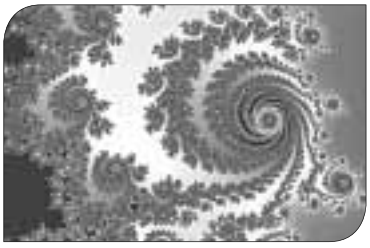
فراکتالهـا (شـکلهای تکرار شـده) همه جا هسـتند! بین گیاهان، میوه‌هـا، کوهها، سـاختمانها و... می‌تـوان نمونه‌هایی از آنها را یافت. به تصویر ۳ نگاه کنید. به سـختی می‌توان باور کرد، این نقشهای زیبا که توسط برنامه‌های پیشرفته رایانه‌ای کشیده شده‌اند، مربوط به یکی از مبحثهای مهم و جالب در علم ریاضیات باشـد. البته شاید در نگاه اول نتوانید متوجه ویژگی مشـترک آنها شوید و به ارتباطشان با دنیای واقعی پی‌ببرید، اما اگر با تعریف آنها آشنا شوید، چه بسا خودتان هم بتوانید مدل تازه‌ای از فراکتالها ارائه کنید!

«فراکتال» به یک شـکل هندسی گفته می‌شود که آرایشی تکرار شونده داشته باشد. یعنی اگر آن را چند تکه کنیم، هر قسـمت، تکراری از قسمت دیگر باشد. به بیان دیگر، هر جزء آن نماینده‌ای از کل است.

فراکتال باید دارای سه ویژگی باشد:

۱. در مقیـاس میکروسـکوپی بسـیار پیچیده باشد.

۲. دارای خاصیت «خود متشابهی»[1] باشد.



تصویر ۳. نمونه‌هایی از فراکتالهایی که توسط رایانه کشیده شده‌اند. اهمیت دارند پیدا کردن کوچک‌ترین جزء و روش تکرار آن‌ها کار راحتی نیست.

۳. «بعد» آن صحیح نباشد. (بعد کسری دارند)

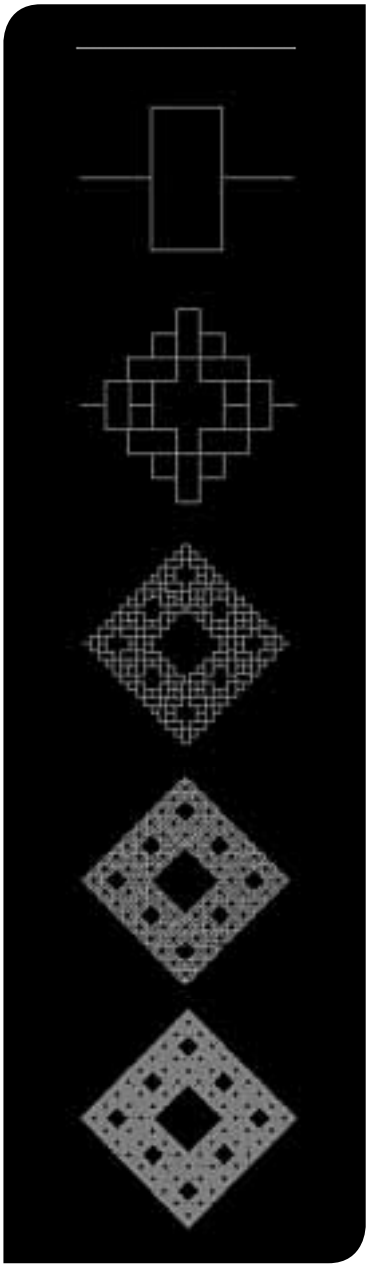
فراکتال‌هـا در علم ریاضـی به این خاطر اهمیـت دارند که بسـیاری از وضعیتهایی را که هندسـهٔ اقلیدس از توضیح آنهـا ناتوان اسـت، می‌تـوان به کمک آنهـا توجیه کرد. همین دلیل باعث گستردگی و کاربرد فراوان فراکتالها در سایر علوم مثل فیزیک، شیمی، نجوم، زمین‌شناسی و حتی هنر و معماری شده است!

فراکتالها تصویری از یـک زندگی واقعی دارند. رایانه‌ها می‌توانند یک شـکل واقعی را بگیرنـد و با تکرار زیاد، به آن شـکل تخیلی بدهند. این‌روزها از فراکتالها به عنوان یکی از ابزارهای مهم در گرافیک رایانه‌ای نام می‌برند و در ساختن موقعیتهای تکرار شونده در بعضی از صحنه‌های انیمیشن، از آن استفاده می‌کنند. فراکتالها در ذخیره‌سازی فایل‌های تصویری، شناسایی و درمان بیماریهای قلبی، پیش‌بینی وضعیت هـوا و بازیهای رایانـه‌ای نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند.

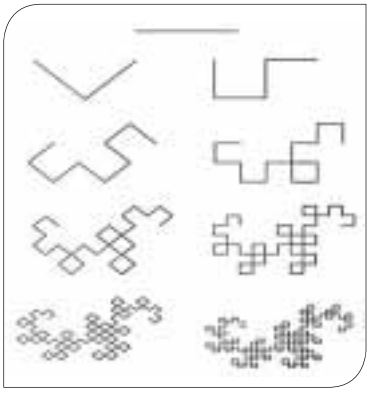
البته باید توجه کنید که همهٔ اشـکال خود متشابه فراکتال نیستند. مثلاً خط راست که در یک صفحه قرار دارد، خود متشابه است، ولی فراکتال نیست (خصوصیتهای دیگر فراکتالها را ندارد).

در ضمـن فراکتالهایی وجـود دارند که خـود متشـابه نیسـتند (از ایـن نمونه در طبیعت بسـیار یافت می‌شود.) هر فراکتال اسم و رسمی برای خود دارد؛ از جمله:

فرش سرپینسکی



اژدهای هرتر - های‌وی



دانش‌آموزان پس از دریافت اطلاعات لازم از اینترنت و ذخیرهٔ اطلاعات مورد نیاز، تصمیم گرفتند تا نمونه‌ای از فراکتال را برای به دست آوردن تجربهٔ عملی، در پژوهش‌سرا بسازند. لذا در جلسات متعددی اطلاعات را آنالیز کردند و پس از بحثهای فراوان، در مورد نوع فراکتال و هم‌چنین اطلاع از امکانات موجود و قابل تهیه در پژوهش‌سرا، تصمیم گرفتند «مثلث سرپینسکی» را بسازند. آنها سپس یک گردهمایی از دانش‌آموزان علاقه‌مند به بحث فراکتالها در ریاضیات تشکیل دادند و از طریق برنامهٔ «PowerPoint» اطلاعاتی را که از قبل دریافت کرده بودند، در اختیار آنها قرار دادند و یا گروه بزرگ‌تری شروع به ساخت مثلث سرپینسکی کردند.

ساخت این مثلث حدود دو ماه طول کشید. در ساخت مثلث سرپینسکی، ۲۵۶ هرم کوچک به اندازهٔ قاعدهٔ ۱۵ سانتی‌متر به کار رفته است. در نهایت، طول هر ضلع در قاعدهٔ هرم ۲۴۰ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۲۰۸ سانتی‌متر شد. جنس هرمها نیز به منظور رعایت سبک بودن و زیبایی از طلقهای رنگی انتخاب شد.

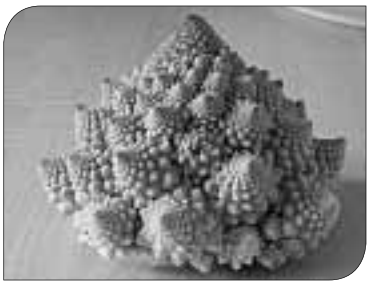
چهار تا از هرمها یک هرم بزرگتر و چهار تا از این چهارتاییها، هرم بزرگ‌تری را ایجاد می‌کند. و این می‌تواند تا بی‌نهایت پیش‌برود.

تصویر ٤. نمونهٔ فراکتال ساخته شده توسط دانش‌آموزان

تصویرهای ۵ تا ۷ نمونه‌هایی از فراکتالهای نامنظم در طبیعت هستند.

تصویر ۵. خطوط درختان

تصویر ٦. خطوط کوهها



تصویر ۷. کلم بروکلی

پی نوشت

1. Self - Similarity

منابع

۱. مجلات رشد آموزش ریاضی
2. http:// mathforum. org/ alejandre/ workshops/ fractal/ fractal3.html
3. http:// en. wikipedia. org/ wiki/ Sierpinski_triangle
4. http:// www. scienceu. com/ geometry/ fractals
5. http:// www. math. umass. edu/~ mcnnors/ fractal/ generate/ carpet.ht
6. www.parsiteb. com/ images/ snow