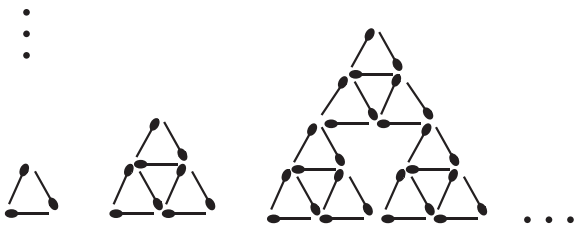


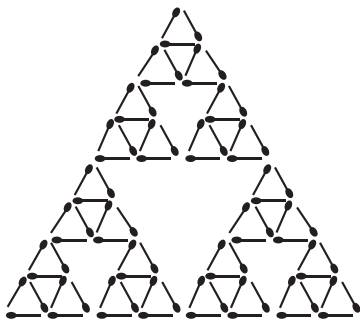
وسپاسخ کبریتی دنباله

مانی رضایی

دانشجوی دکتری ریاضی با گرایش آموزش ریاضی



پاسخ ۱) در هر گام، سه مثلث از گام قبلی کنار هم قرار می‌گیرند و شکل جدید را می‌سازند. بدین ترتیب «سه برابر تعداد چوب‌کبریت‌های مرحله‌ی قبل برای مرحله‌ی جدید نیاز داریم» یعنی در گام اول ۳ تا، گام دوم 3×3 یعنی ۳ تا، گام سوم $3 \times 3 \times 3$ یعنی ۳ تا چوب‌کبریت لازم است و به همین ترتیب در مرحله n ام، 3^n چوب‌کبریت نیاز داریم. بیش‌تر دانش‌آموزان تصویر مثلث سرپنسی را دیده و با ارجاع به آن این تعمیم را ارائه کردند.



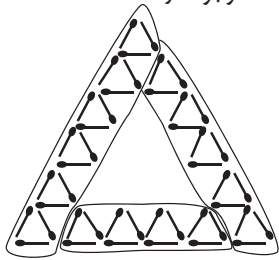
گام چهارم برای پاسخ ۱)

پیدا کردن الگوهای عددی مبتنی بر چند جمله‌ی نخست یک دنباله چندان ساده نیست و ممکن است چند پاسخ «درست» داشته باشد [۱]. اما اگر این دنباله‌ی عددی از یک مدل خاص نتیجه شده باشد می‌تواند «یکتا» باشد. با این حال ممکن است به عنوان معلم، با تفسیرهای مختلف دانش‌آموزان از یک مدل (مثلاً هندسی) روبه‌رو شوید.

به عنوان معلم وقتی در کلاس تمرین زیر را به دانش‌آموزان دادم با پاسخ‌های متفاوتی روبه‌رو شدم. بحث و بررسی راه‌های مختلف یکی از ویژگی‌های کلاس‌هایم است و دانش‌آموزان نیز با این ویژگی آشنا هستند. به آن‌ها اجازه دادم در مورد راه‌حل خود با دیگران بحث کنند و درستی پاسخ خود را به دیگران بنمایانند. در ادامه صورت مسئله (که شاید برای بسیاری از معلمان چنین تمرینی آشنا باشد) و سه پاسخ دانش‌آموزان به ترتیب فراوانی مدافعان آن، آمده است. از بحث‌های کلاس صرف‌نظر شد اما نتیجه‌ی بحث و فشرده‌ای از استدلال نهایی برای به دست آمدن عبارت جبری مرحله‌ی n ام بیان شده است. جزییات بحث همراه با تمثیل‌های جالبی برای این پاسخ‌ها بود، به خصوص پاسخ سوم که تمثیل آن در انتها آمده است.

تمرین: در هریک از شکل‌های زیر، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل n ام را بیابید.

پس در مرحله‌ی بعد ۶، ۵ و ۴ مثلث وجود دارد.



گام چهارم برای پاسخ (۳)

این دانش آموز چنین تفسیر کرد که گام اول از یک ساختار مثلثی شروع شده است. گام اول از ۱، ۲ و ۰ مثلث ساخته شده است و گام دوم از ۳، ۴ و ۲ مثلث ساخته شده است به همین ترتیب در مرحله $(n+1)$ م به ترتیب $2n$ ، $2n-1$ و $2n-2$ مثلث داریم و چون هر مثلث از ۳ چوب کبریت ساخته شده برای ساختن شکل مرحله‌ی $(n+1)$ م چوب کبریت لازم است.

$$3(6n-3)$$

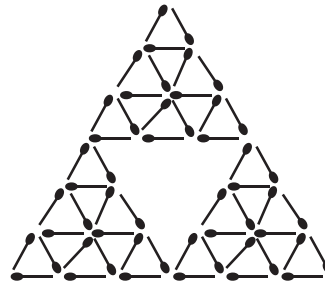
وی این شکل را به دهانی تشبیه کرد که باز می‌شود و درسه ضلع آن (سر لب) دندان‌هایش آشکار می‌شود. در مرحله اول دهان فرضی بسته است!! اکنون دانش‌آموزان کلاس با یک پرسش جدی روبه‌رو بودند: کدام پاسخ صحیح است؟

بین طرفداران هریک از پاسخ‌ها، با ارائه دلایلی برای درستی پاسخ موردنظر و رد پاسخ‌های دیگر بحث درگرفت. نیم نگاه دانش‌آموزان به تأیید یا رد من (به عنوان معلم) بود تا به بحث خود قوت بدهند و تلاش من بر آن بود که درستی استدلال‌ها را معیار قرار دهم و این سه پاسخ در نهایت مورد تأیید کلاس (و نه معلم) قرار گرفت. ارایه‌کنندگان چند پاسخ دیگر به دلیل آن که در دفاع از آن ناموفق بودند، راه خود را رها کردند. می‌توان تأکید کرد: «یک مسئله حل کن خبره، در اثر تجربه و بررسی‌های متعددی که روی انواع مسئله‌ها انجام داده است، می‌تواند برای مسئله‌ای جدید، رهیافتی متناسب با آن بیابد. این تجربه، تنها با دیدن راه‌حل‌ها به دست نمی‌آید؛ بلکه در مسیر تلاش فردی، حدس زدن، آزمون و خطا و بررسی مکرر، کسب می‌شود.» [۲] و بحث و ارائه استدلال برای هر راه حل، می‌تواند به ارتقای توانایی استدلال‌ها بیانجامد.

منابع

۱. مانی رضایی. دنباله‌های تفاضلی روشی برای محاسبه‌ی جمله‌ی عمومی دنباله‌های ساده. مجله رشد آموزش ریاضی، سال بیستم، شماره ۷۳، پاییز ۱۳۸۲، صص ۴۱-۴۷.
۲. مانی رضایی. گام برداشتن در مسیر حدس، کشف و اثبات. مجله رشد آموزش ریاضی، سال بیست و سوم، شماره ۸۳، بهار ۱۳۸۵، صص ۲۵-۲۹.

پاسخ (۲) در وسط مثلث، یک مثلث وارونه قرار دارد که در گام دوم به ضلع ۱، در گام سوم به ضلع ۲ است. این مثلث در گام اول به ضلع صفر است (وجود ندارد). بنابراین در گام چهارم، طول ضلع وارونه‌ی وسط برابر با ۳ است. پس طول ضلع مثلث اصلی ۶ خواهد بود زیرا در سه گوشه‌ی آن، مثلث‌هایی به ضلع ۳ قرار دارد که بخش‌بندی شده است و شکل آن در گام چهارم مانند زیر است.



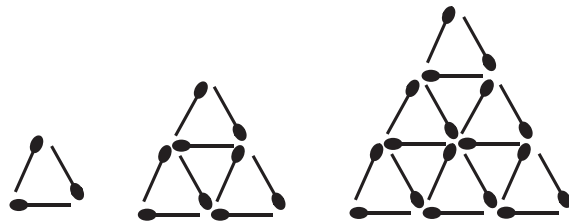
گام چهارم برای پاسخ (۲)

و چون تعداد چوب‌کبریت‌های هریک از این مثلث‌ها (در یکی از تمرین‌های قبل حساب شده بود) $3(1+2+3)$ است بنابراین در مرحله‌ی n سه برابر آن یعنی

$$3^2(1+2+3+ \dots +n)$$

چوب کبریت لازم است.

به نظر می‌رسید دنباله‌ای که در بخش قبلی آمده بود، دانش‌آموزان را به سمت این الگو کشاند.



پاسخ سوم نگاه جالبی به این مسئله است. ابتدا به تفسیر دانش‌آموز برای مرحله ۲ و ۳ توجه کنید در هر مرحله تعداد مثلث‌ها مطابق دسته‌بندی زیر است.

