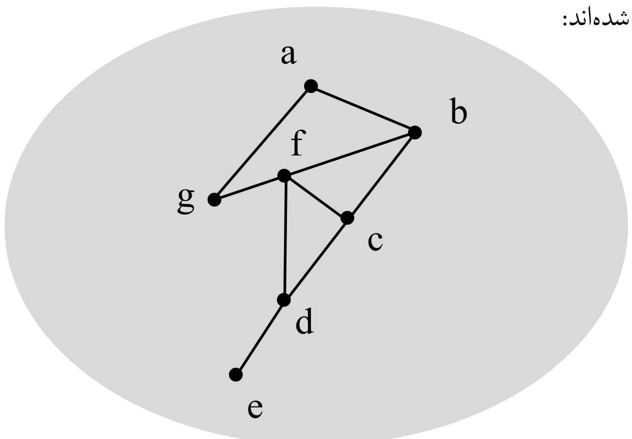
مسیر، دور و هم‌بندی در گراف‌ها

در ادامه‌ی مقاله‌ی گراف‌های کامل در شماره‌ی ۶۸ برهان، در این مقاله با تعریف مسیر و دور در یک گراف و تعریف گراف مکمل، سعی در تکمیل این بحث داریم.

حمیدرضا امیری

تعریف مسیر: در یک گراف از مرتبه‌ی p، مسیری به طول m از رأس a به b دنباله‌ای است شامل (m+۱) رأس دوبه‌دو متمایز که با a شروع و به b ختم شود.

مثال: در گراف زیر، مسیرهایی با طول‌های متفاوت مشخص شده‌اند:



مسیر به طول ۱ ab

مسیر به طول ۲ abc

مسیر به طول ۴ از a به e abcde

نکته: تعداد مسیرهای با طول‌های متفاوت از رأس a به b در گراف کاملِ k_p از دستورهای زیر قابل محاسبه است:

$$k_p \text{ تعداد مسیرهای از رأس a به b در } = \sum_{k=۰}^{p-۲}(p-۲)_k,\ \left((n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}\right)$$

$$k_p \text{ تعداد مسیرهای از رأس a به b در } = \left[(p-۲)!\times e\right]$$

تذکر: اگر تعداد مسیرهای بین a و b (از a به b و از b به a) در گراف k_p را بخواهیم، کافی است تعداد مسیرهای از a به b را دوبرابر کنیم و اگر همه‌ی مسیرهای بین رأسهای متمایز در گراف k_p را بخواهیم، کافی است آن را در $\binom{p}{۲}$ ضرب کنیم (هر دو نقطه از p تعداد مسیرهایی را بین یکدیگر تعریف می‌کنند).

$$k_p \text{ تعداد کل مسیرها بین رؤوس متمایز در } = ۲\times\binom{p}{۲}\times\left[(p-۲)!\times e\right]$$

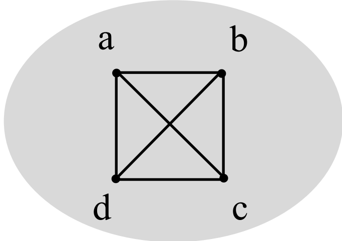
در رابطه‌ی اخیر e عدد اویلر است که تقریباً برابر با ۲/۷۲ در نظر گرفته می‌شود و علامت [ ] نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح است.

تذکر: مسیر از رأس a به رأس a را مسیر به طول صفر تعریف می‌کنیم.

تعریف دور: یک دور به طول m روی رأسی چون a در گراف G از مرتبه‌ی p دنباله‌ای است شامل m رأس دوبه‌دو متمایز که با a شروع و به a ختم شود.

تذکر: دورهایی که رأس‌های به‌کار رفته و یال‌های طی‌شده روی آن‌ها با هم برابر باشد، یک دور به‌حساب می‌آیند.

مثال: در گراف زیر ($k_۴$) هریک از ۶ دور abc و acb و bca و bac و cab و cba یک دور به‌حساب می‌آیند، و دورهای abcda و abdca دو دور متفاوت با طول‌های ۴ هستند.



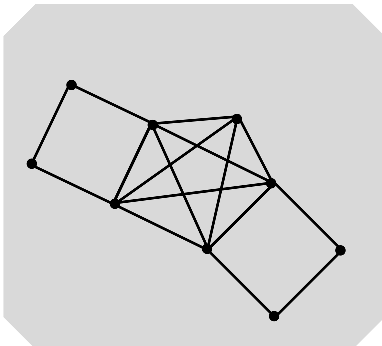
$(k_۴)$

نکته: تعداد دورهای به طول k در گراف کامل k_p از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

k_p تعداد دورهای به طول k در $= \frac{۱}{۲}\binom{p}{k}\times(k-۱)!$

مثال: در گراف ساده‌ی G چند دور به طول ۴ وجود دارد؟

حل: هر ۴ ضلعی بدون قطر فقط یک دور به طول ۴ دارد. بنابراین می‌توان گفت:



G تعداد دورهای به طول ۴ در = $k_۵$ تعداد دورهای به طول ۴ در ۱+ ۱+

$=۱+۱۵+۱=۱۷$

$k_۵$ دورهای به طول ۴ در $= \frac{۱}{۲}\binom{۵}{۴}\times ۳! = \frac{۱}{۲}\times ۵\times ۶ = ۱۵$)

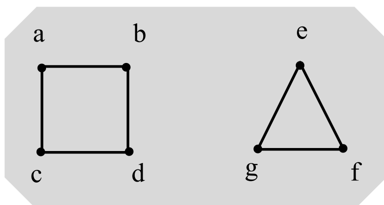
تذکر: تعداد کل دورهای موجود در گراف k_p (از دور به طول ۳ تا دور به طول p) از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

k_p تعداد کل دورها در $= \sum_{k=۳}^{p}\frac{۱}{۲}\binom{p}{k}(k-۱)!$

نکته: رابطه‌ی وجود مسیر بین رؤوس یک گراف، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است (خواص انعکاسی، تقارنی و تعدی را دارد) و اگر G یک گراف k بخشی باشد، دارای k کلاس هم‌ارزی است.

مثال: گراف دوبخشی G به‌صورت زیر دارای دو کلاس هم‌ارزی $[a]=\{a,b,c,d\}$ و $[e]=\{e,g,f\}$ است.

(بین a و b مسیری وجود داشته باشد ⇔ aRb)

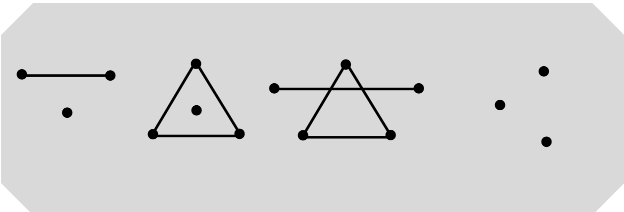


تعریف گراف همبند: گراف G از مرتبه‌ی p را همبند می‌نامیم، هرگاه بین هر دو رأس متمایز در G حداقل ۱ مسیر وجود داشته باشد.

تذکر: گراف $k_۱$ که فقط از یک رأسِ ایزوله تشکیل یافته، گرافی همبند است.

تذکر: هر گراف از مرتبه‌ی $p \geq ۲$ که رأس ایزوله داشته باشد، همبند نیست.

مثال: گراف‌های زیر همگی ناهمبندند:



تذکر: هر گراف کامل همبند است.

نکته: اگر در گراف G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q داشته باشیم $q < p-۱$، در این صورت G همبند نیست. به عبارت دیگر، اگر گراف G همبند باشد، همواره $q \geq p-۱$ است.

نکته: اگر در گراف G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی p داشته باشیم $q \geq \binom{p-۱}{۲}+۱$، در این صورت G همبند است.

نکته: در هر گراف از مرتبه‌ی p که رأس ماکزیمم (رأسی از درجه‌ی p−۱) داشته باشیم، آن گراف همبند است.

پرسش: کدام یک از دنباله‌های زیر مربوط به یک گراف همبند است؟

۱) ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۳

۲) ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۳ و ۳

۳) ۱ و ۲ و ۳ و ۳

۴) ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۴

حل: گزینه‌ی ۲، زیرا در گزینه‌ی ۱ داریم p=۸ و q=۶ و چون $q<p-۱$، پس گراف متناظر با آن همبند نیست. همچنین در گزینه‌ی ۴ داریم p=۹ و q=۷ و $q<p-۱$ و گراف متناظر با آن همبند نیست. گزینه‌ی ۳ نیز مُعرِف دنباله‌ای گرافیکال نیست.

پرسش: گراف G از مرتبه‌ی ۸ ناهمبند است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۲۰   ۲) ۱۹   ۳) ۲۱   ۴) ۲۲

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است، زیرا کافی است یک رأس را ایزوله

کنیم و با هفت رأس باقی‌مانده گراف $k_{۷}$ بسازیم.

$$q_{k_{۷}} = \frac{۷ \times ۶}{۲} = ۲۱$$

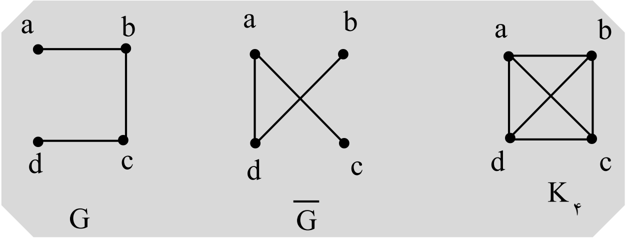
پرســش: گراف G از مرتبه‌ی ۹ مفروض است. این گراف حداقل چند یال باید داشته باشد تا مطمئن باشیم همبند است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۶ ۳) ۲۸ ۴) ۲۹

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است، زیرا:

$$\text{شرط همبندی} \longrightarrow q \geq \binom{p-۱}{۲} + ۱ \Rightarrow q \geq \binom{۸}{۲} + ۱ = ۲۹$$

مکمّـل یک گــراف: مکمّل گراف G از مرتبه‌ی p گرافی اســت چــون $\overline{G}$ از مرتبه‌ی p به طوری که ایــن دو گراف روی هم، گراف کامل از مرتبه‌ی p را تشکیل می‌دهند. به مثال زیر توجه کنید:



تذکر: همواره مجموع یال‌های یک گراف و مکمّل آن گراف برابر است با تعداد یال‌های گراف کاملِ هم‌مرتبه با آن گراف؛ یعنی:

$$q(G) + q(\overline{G}) = \frac{p(p-۱)}{۲}$$

تذکر: اگر G گرافی از مرتبه‌ی p باشد و a رأسی در این گراف و ā رأسِ متناظر با آن در گراف $\overline{G}$ باشد، همواره داریم:

$$\deg a + \deg \bar{a} = p - ۱$$

تذکر: اگر G گرافی $r_{۱}$ ـ منتظم از مرتبه‌ی p باشد، مکمل G نیز گرافی $r_{۲}$ ـ منتظم است و همواره $r_{۱} + r_{۲} = p - ۱$ است.

مثال: چند گرافِ ۳ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ وجود دارد؟

حل: مکمل گرافِ ۳ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ گرافی است ۲ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ و چون تعداد گراف‌های ۲ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ همواره برابر اســت با ۲، یعنی دو گراف زیــر را داریم، پس تعداد گراف‌های ۳ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ نیز ۲ است.