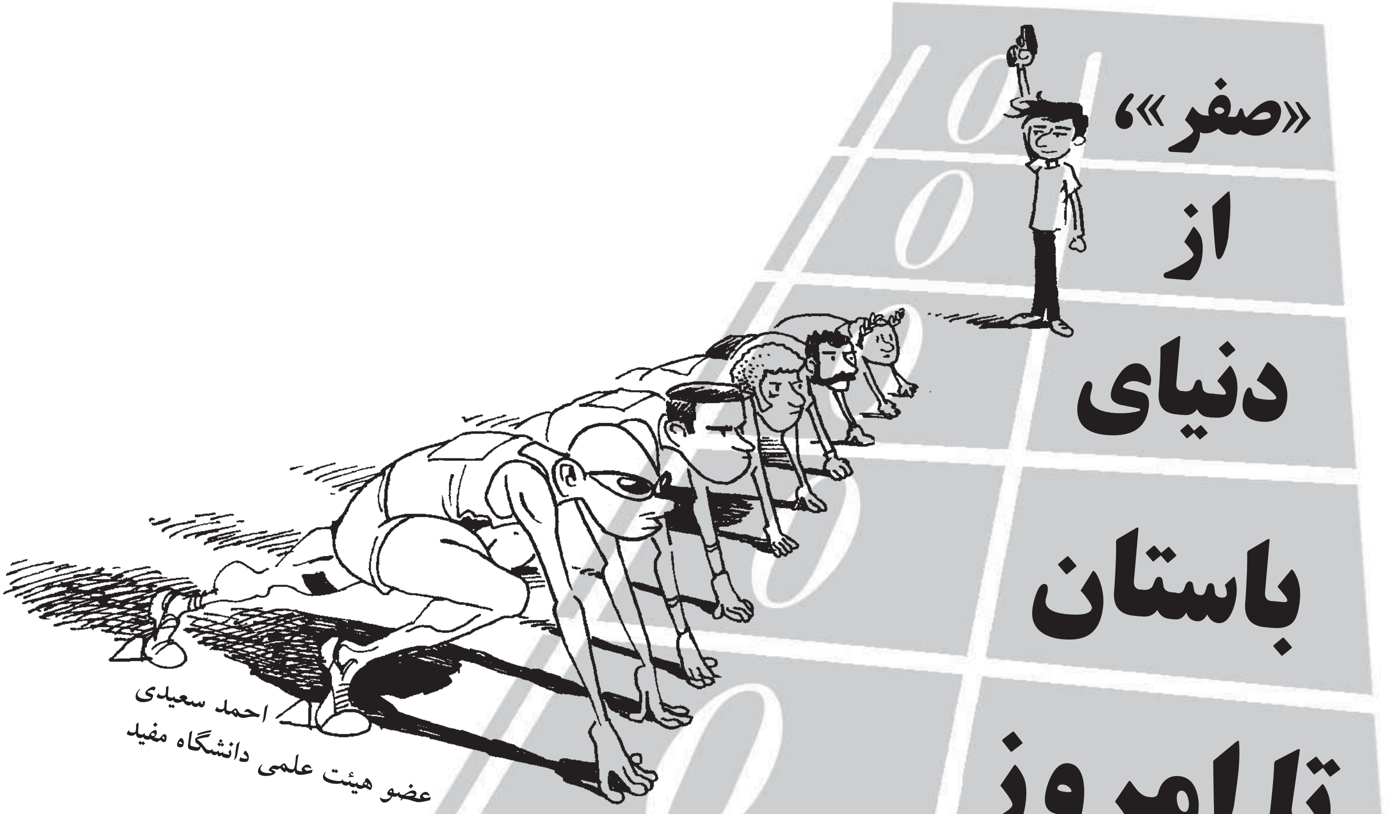

«صفر»، از دنیای باستان تا امروز

احمد سعیدی
عضو هیئت علمی دانشگاه مفید

کلیدواژه‌ها: صفر، ارزش مکانی اعداد، تاریخ صفر، obol، ouden بطلمیوس، براهماگوپتا، باسکارا، قوانین صفر، صفر علامت‌دار.

این سؤالات که صفر چه معنی می‌دهد و چه کسی یا چه کسانی صفر را کشف کرده‌اند؟ از معمول‌ترین سؤالات ما هستند. در «لغت‌نامهٔ دهخدا» دربارهٔ صفر چنین آمده است: «صفر: خالی، ترجمهٔ سانسکریت صونیا (Sunya) در ریاضی هندی و عربی. معادل زرو (Zero) در فرانسه و در عین حال، ریشهٔ کلمات غربی سیفرا (Cifra)، تزیفر (Ziffer) و مشتقات آن‌هاست. رجوع به سیفر (Cipher)، شیفر (Chiffre) و دایره‌المعارف اسلامی (صفر) شود.»

قدما علامت صفر یعنی نمایندهٔ «هیچ» نداشتند. این علامت را هندیان اختراع کردند، به نام «صوفیا»، یعنی تهی و ایرانیان که کتب ریاضی هندی را به عربی ترجمه و نقل کرده‌اند، آن را به صفر عربی که به معنی تهی است، ترجمه کردند و چون ترجمهٔ آنان به لاتینی برگشت، صفر عربی را در لاتینی تغییر دادند و از آن زرو (Zero) ساختند. علامت صفر «۰» است.

به‌دنبال جواب این سؤال نیستم که «چه کسی صفر را کشف یا ابداع کرد؟» به‌دنبال این نیستیم که بگوییم صفر در زمان خاصی و توسط شخص خاصی ابداع شد و دیگران از آن زمان به بعد از آن استفاده کردند.

اولین نکته‌ای که در مورد صفر گفته می شود، این است که دو کاربرد بی‌نهایت مهم اما تا حدی متفاوت دارد اولین کاربردش این است که به عنوان نمایندهٔ جای خالی در سیستم ارزش مکانی اعداد عمل می‌کند. به این دلیل، در عددی مانند ۳۵۰۷ صفر به کار برده شده است تا موقعیت ۳ و ۵ درست باشد. در واقع، ما در این عدد، ۷ تا یکی و ۵ تا صدتایی و ۳ تا هزارتایی داریم. تفاوت این عدد با ۳۵۷ چه خواهد بود؟ ۳۵۷ یعنی ۷ تا یکی و ۵ تا ده‌تایی و ۳ تا صدتایی. دومین کاربرد صفر این است که خودش به‌عنوان یک عدد به‌کار می‌رود که ما به شکل صفر از آن استفاده می‌کنیم. هم‌چنین زوایای متفاوتی از صفر در این دو کاربرد یافت می‌شود. (همان‌طور که در لغت‌نامهٔ دهخدا آمده است، واژهٔ «Zero» از کلمهٔ «Cipher» «Sfir» صفر گرفته شده است.)

هیچ کدام از کاربردهای بالا، تاریخچهٔ توضیح داده شدهٔ

واضحی ندارند. این‌طور نبوده است که اختراع این مفاهیم ناگهانی رخ داده باشد و بعد از آن هم شروع کرده باشند با استفاده از آن‌ها. در گذشته، مسائل ریاضی بیشتر به عنوان مسائل واقعی و کاربردی مطرح بوده‌اند تا مسائل مجرد و انتزاعی. اعداد در زمان‌های تاریخی دور، بیشتر اشیای واقعی پنداشته می‌شدند تا مفاهیمی مجرد (برعکس امروز). تفاوت ذهنی عظیمی بین ۵ اسب و ۵ «چیز» و مفهوم مجرد ۵ وجود دارد که امروزه از آن به‌عنوان عدد اصلی یاد می‌شود. اگر مردم در گذشته مسئله‌ای را در مورد این که یک کشاورز به چند اسب نیاز دارد حل می‌کردند، به‌هیچ‌عنوان مسئله به داشتن ۰ یا ۱۳- اسب ختم نمی‌شد.

ممکن است تصور شود که ابتدا یک سیستم ارزش مکانی اعداد پدید آمد و بعداً ۰ به عنوان نمایندهٔ جای خالی، ایده‌ای اجتناب‌ناپذیر محسوب شد. درحالی که بابلی‌ها از یک سیستم ارزش مکانی اعداد بدون این ویژگی (استفاده از ۰)، برای بیش از ۱۰۰۰ سال استفاده کردند.

هیچ مدرکی هم وجود ندارد که بابلی‌ها دربارهٔ ابهام موجود، مشکلی احساس کرده باشند.

از عصر ریاضیات بابلی‌ها متونی به جای مانده است که روی لوحه‌هایی از گل پخته نشده و با خط میخی[۱] نوشته شده‌اند. لوحه‌های زیادی از حدود ۱۷۰۰ ق.م به‌جای مانده‌اند که قابل خواندن هستند. البته سیستم عددی آن‌ها با سیستمی که امروزه استفاده می‌کنیم، کاملاً فرق دارد[۲]. اما با ترجمهٔ سیستم علامت گذاری آن‌ها به سیستم دهگانی، متوجه می‌شویم که آن‌ها نیز بین ۳۵۰۷ و ۳۵۷تفاوتی قائل نبوده‌اند و فقط از فحوای متن متوجه می‌شدند که واقعاً کدام یک مدنظر بوده است. تا سال ۴۰۰ ق.م، بابلی‌ها علامت را در مکانی که ما صفر قرار می‌دهیم قرار می‌دادند تا نشان دهند منظور ۳۵۷ است یا ۳۵۰۷. در واقع، آن‌ها ۳۵۰۷ را به‌صورت ۳۵"۷ می‌نوشتند.

علامت " تنها علامت مورد استفاده برای این منظور نبوده‌است. بر یک لوح پیدا شده در «کیش»[۳]، نماد دیگری به کار برده شده است. در این لوح که تاریخ آن حدود سال ۷۰۰ ق.م تخمین زده شده، از سه قلاب برای مشخص کردن مکان خالی در سیستم ارزش مکانی استفاده شده است. در لوحه‌های دیگری که در حوالی همان زمان تاریخ‌گذاری شده‌اند نیز یک قلاب تنها برای جای خالی به‌کار رفته است.

یک جنبهٔ مشترک برای این موضوع، کاربرد علامت‌های متفاوت برای مشخص کردن موقعیت خالی است. درست است که جای خالی هرگز در پایان ارقام اتفاق نمی‌افتد، اما همیشه بین دو رقم وجود داشته است. بنابراین، ما با ۳۵"۷ روبه‌رو می‌شویم، اما هیچ‌گاه بـه "۳۵۷ برنمی‌خوریم و این را که کدام یک مدنظر بوده است، باید از متن متوجه شد.

ما امروز نیز از این قرائن برای تفسیر معنای برخی اعداد استفاده می‌کنیم. اگر سوار یک اتوبوس بین‌شهری شوید و مبلغ کرایه را شش و پانصد بگویند، شما آن را به معنای ۶۵۰۰ تومان تفسیر می‌کنید و اگر بخواهید یک اتومبیل بخرید و قیمت آن را شش و پانصد بگویند، شما آن را ۶/۵۰۰/۰۰۰ تومان تفسیر خواهید کرد. از این مثال می‌توانیم دریابیم که کاربرد اولیهٔ صفر برای مشخص کردن مکان خالی، هرگز به معنی استفاده از آن به‌عنوان یک عدد نبوده، بلکه صرفاً به عنوان نوعی علامت‌گذاری بوده است؛ به‌این منظور که تفسیر درستی از اعداد ارائه شود.

یونانیان باستان سهم خود را در ریاضیات حدوداً زمانی آغاز کردند که صفر به عنوان نشانگر مکان خالی در ریاضیات بابلی‌ها به‌کار برده می‌شد. به هر حال، یونانیان یک دستگاه ارزش مکانی را نپذیرفتند. سؤال خوبی مطرح است که این واقعیت دقیقاً به‌چه معناست؟ جواب حقیقی به این سؤال، از پاسخ ساده‌ای که ما می‌دهیم، دقیق‌تر است. اساساً دستاوردهای ریاضیات یونانی بر هندسه مبتنی بود. گرچه موضوع کتاب «اصول» اقلیدس «نظریهٔ اعداد» بود، ولی مبنای هندسی داشت. به عبارت دیگر، از آن‌جا که ریاضی‌دانان یونان با عدد به عنوان طول پاره خط‌ها کار می‌کردند، نیازی به نام‌گذاری اعداد نداشتند.

در آن‌چه بیان کردیم، استثنائاتی هست. استثنا، ریاضی‌دانانی بودند که در ثبت اطلاعات نجومی کار می‌کردند. اولین کاربرد علامتی که امروزه برای نمایش صفر درنظر می‌گیریم، در این حوزه مشاهده شد و برای منجمان یونانی، شروع استفاده از علامت o بود. البته نظریات زیادی در این باب وجود دارند که چرا از این علامت استفاده شد. برخی مورخان ذکر کرده‌اند که آن Omicron است؛ اولین حرف یونانی کلمه «هیچ» (ouden). نیوگبار[۴] این بیان را رد می‌کند، زیرا یونانیان از Omicron به‌عنوان عدد استفاده می‌کردند.[۵] بیان‌های دیگری هم مطرح شده‌اند. از جمله می‌گوید. این علامت «obol» را نمایش می‌دهد (سکه‌ای بدون ارزش) و زمانی به‌وجود می‌آمد که از شمارنده‌ها برای حساب روی تخته ای شنی استفاده می‌شد. در این‌جا وقتی شمارنده برای جاخالی گذاشتن یک ستون برداشته می‌شد، یک تورفتگی روی شن برجای می‌گذاشت که به شکل o به‌نظر می‌رسید.

بطلمیوس در «المجسطی»[۶] که حدود ۱۳۰ م نوشته شده است، دستگاه شصتگانی بابلی‌ها را همراه با نگه‌دارندهٔ جای خالی به‌کار برده است. در این زمان، بطلمیوس این علامت را، هم بین اعداد و هم در پایان آن‌ها به‌کار برده است و این ایده تقویت می‌شود که صفر حداقل به عنوان نماینده‌ی مکان خالی به کار

می‌رفته اســت. این نظر، هم‌چنان دور از واقعیت است. فقط تعداد قلیلی منجم از این نماد اســتفاده کرده‌انــد. (قطعاً بطلمیوس آن را به‌عنوان عدد نمی‌پنداشــت، بلکه آن را علامت نقطه‌گذاری می دانســت.) ایدهٔ جایگاه صفر بعداً خود را در ریاضیات هندی نشان داد.

اکنون صحنه به هندوســتان منتقل می‌شود. جایی که سزاوار اســت گفته شــود اعداد و دســتگاه اعداد متولد شــدند و به‌سوی موجودات بســیار پیشرفته‌ای که امروز می‌بینیم، رشد کردند. البته مراد این نیســت که بگوییم دســتگاه هندی به دستگاه‌های ماقبل خود چیزی مدیون نیســت. مهم این اســت که حدود سال ۶۵۰ م، کاربرد صفر به‌عنوان یک عدد، در ریاضیات هند وارد شده است.

هندی‌ها هم‌چنین سیســتم ارزش مکانــی را به‌کار می‌بردند و صفر برای مشــخص کردن یک مکان خالی به کار برده می‌شد. در واقع، شواهدی از یک جایگاه خالی در سیستم مکانی، از حدود ۲۰۰ م در هند وجود دارد، هرچند هنوز برای آن نمادی نبوده است.

در حدود ســال ۵۰۰ م، آریاباتا[7] دستگاهی عددی به‌جا گذاشت که یک دســتگاه ارزش مکانی بدون صفر بود. او واژه‌ی «Kha» را برای جایگاه به‌کار برد که می‌توانســت بعــداً به‌عنوان نماد صفر به کار برده شود.

شــاهدی وجود دارد که نشــان می‌دهد، از نقطه در نوشته‌های اولیــهٔ هنــدی، به‌منظور نمایش مــکان خالی در سیســتم عددی اســتفاده شده است؛ جالب است که در اســناد مشابه، گاهی‌اوقات از نقطه برای مجهول اســتفاده شــده اســت؛ همــان x که امروزه به‌کار می‌بریم. ســپس ریاضی‌دانان هندی در دستگاه ارزش مکانی نام‌هایــی برای صفر گذاشــتند، در حالی که هنوز علامتی برای آن نداشتند. اولین تاریخی که استفادهٔ هندیان از صفر ثبت شده است، ۸۷۶ م بوده است.

اکنون به بررســی اولین بــاری که صفر به عنــوان عدد به‌کار برده‌شد، می‌پردازیم. از دیرباز، اعداد واژگانی بودند که به مجموعه‌ای از اشــیا اشــاره می‌کردند. قطعاً ایدهٔ اعداد به مرور مجردتر شــده اســت. سپس این تجرد، توجه به صفر و اعداد منفی را که به‌عنوان ویژگی مجموعه‌ای از اشــیا مطرح نیســت، ممکن می‌ســازد. البته مشــکل هنگامی بروز می‌کند که سعی شود صفر و منفی به‌عنوان عدد مطرح شــوند و این که آن‌ها نســبت به اعمال حسابی، جمع، تفریق، ضرب و تقســیم چگونه عمل می‌کنند. ریاضی‌دانان هندی، براهماگوپتا[8]، ماهاویرا[9] و باســکارا[10]، در سه کتاب مهم کوشیدند به این سؤالات پاسخ دهند.

براهماگوپتا در قرن هفتم ســعی می‌کند قوانینی برای حساب ارائــه دهد که صفر و اعداد منفی را نیــز دربرگیرد. او توضیح داد، اگــر یک عــدد را از خودش تفریــق کنید، صفر به‌دســت می‌آید. براهماگوپتــا قانون زیر را برای جمع ارائه کرد که شــامل صفر هم می‌شــود: «حاصل جمــع صفر و یک عدد منفــی، یک عدد منفی است. حاصل جمع یک عدد مثبت و صفر عددی مثبت است. صفر به‌علاوهٔ صفر، صفر می‌شود.»

در مورد تفریق کمی ســخت‌تر اســت: «اگر عددی منفی را از صفر کم کنیم، عددی مثبت به‌دست می‌آوریم. اگر یک عدد مثبت را از صفــر کم کنیم، حاصل عددی منفی اســت. اگرصفر را از یک عــدد منفی کم کنیم، جواب عدد مثبت اســت. اگر صفر را از صفر کم کنیم، حاصل صفر است.»

براهماگوپتا ســپس بیان می‌کند کــه حاصل ضرب هر عدد در صفر، صفر می‌شــود، اما هنگامی که به تقســیم می رسد، تقلا می کند: «یک عدد مثبت یا منفی هنگامی که بر صفر تقسیم می‌شود، کسری با مخرج صفر است. صفر تقسیم بر یک عدد مثبت یا منفی، همان صفر اســت یا به‌طور خاص یک کســر است با صورت صفر و مقدار متناهی در مخرج. صفر تقسیم بر صفر، صفر می‌شود.»

در حقیقت، براهماگوپتا وقتی پیشــنهاد می‌دهد n تقســیم بر صفر برابر $\frac{n}{0}$ است، توجیه چندانی نمی‌آورد. او در این‌جا به وضوح در تقلاســت. زمانی که می‌گوید صفر تقســیم بر صفــر برابر صفر اســت، قطعاً اشــتباه می‌کند. به هر حال، او به عنوان اولین فردی که تلاش کرد قوانین حســاب را به اعداد صفر و منفی تعمیم دهد، تلاش درخشانی کرد.

در ســال ۸۳۰ م، حدود ۲۰۰ ســال بعد از شاهکار براهماگوپتا، ماهاویرا کتاب «Ganita Sara Samgraha» را نوشت که به‌روزشدهٔ کتاب براهماگوپتا بود. او به درستی بیان می‌کند: «یک عدد ضرب در صفر، صفر می‌شــود. هنگامی که صفر از یک عدد تفریق شــود، آن عدد تغییری نمی‌کند.»

با این حال، تلاش‌هــای او برای بهبود اظهارات براهماگوپتا در تقســیم برصفر، به اشــتباه انجامید. وی می‌نویســد: «هنگامی که عددی بر صفر تقسیم شود بدون تغییر باقی می‌ماند.»

باسکارا کتاب خود را ۵۰۰ سال بعد از براهماگوپتا نوشت. با وجود گذر زمان، او هنوز برای توضیح تقســیم بر صفر می‌کوشــید. او می نویسد: «کمیتی که بر صفر تقسیم شود، کسری با مخرج صفر خواهد بود. این تقســیم، اصطلاحاً کمیتی بی‌نهایت اســت. در این کمیت، شامل آن چه در مخرج صفر دارد، تغییری وجود ندارد؛ گرچه ممکن اســت بسیاری درج یا اقتباس شده باشــد. همان‌گونه که اگر جهان خلق یا خراب شــود، هیچ تغییری در خدای بی‌نهایت و تغییرناپذیر رخ نمی‌دهد؛ گرچه نظم بسیاری از هستی، جذب یا منتشر شود.»

بنابراین، باســکارا کوشید مســئله را به وسیلهٔ نوشتن $\frac{n}{0}=\infty$

حل کند. در نگاه اول ممکن است وسوسه شویم و بیندیشیم گفتهٔ باسکارا درست است. اما قطعاً غلط است، زیرا در این صورت $\dots = 2 = 1 = n = \infty \times 0$ یعنی $\infty \times 0$ با هر عددی برابر است. بنابراین، همهٔ اعداد باهم مساوی خواهند بود!! ریاضی‌دانان هندی نتوانستند بپذیرند یک برصفر تقسیم‌پذیر نیست. باسکارا سایر ویژگی‌های صفر را درست بیان کرد: مانند $0^2 = 0$ و $\sqrt{0}$.

کار درخشان ریاضی‌دانان هندی، به ریاضی‌دانان مسلمان بیش از غربی‌ها منتقل شد. این فرصتی برای خوارزمی بود که کتاب «خوارزمی در هنر محاسبهٔ هندوها» را بنویسد و سیستم ارزش مکانی هندیان را که بر مبنای اعداد ۱ تا ۹ و ۰ بود، توضیح دهد. این کار در ایران امروزی اولین کار برای استفاده از صفر به‌عنوان جانگه‌دار در نمادگذاری مکانی بود. ابن‌ازرا در قرن ۱۲ میلادی، سه مقاله بر اعداد نوشت که سبب توجه اروپاییان به نمادهای هندی و ایده‌های اعشاری (دهدهی ـ دهگانی) شد. «کتاب اعداد» دستگاه اعشاری برای اعداد صحیح با ارزش مکانی چپ به راست را توضیح می‌دهد. ابن‌ازرا در این کار صفر را به‌کار می‌برد و آن را گالگال[11] (به معنی چرخ یا دایره) می‌نامد. اندکی بعد در قرن ۱۲ میلادی، السماول چنین می‌نویسد: «اگر از صفر یک عدد مثبت را کم کنیم، همان عدد به صورت منفی باقی می‌ماند. اگر عددی منفی را از صفر کم کنیم، همان عدد به صورت مثبت باقی می‌ماند.»

ایده‌های هندوها همان‌طور که در شرق تا چین گسترش یافت، در غرب هم تا کشورهای اسلامی گسترش پیدا کرد. در سال ۱۲۴۷م، ریاضی‌دان چینی، چین‌چیوشاو[12] مقالهٔ «ریاضی در نه بخش» را نوشت که علامت o را برای صفر به کاربرد. اندکی بعد در سال ۱۳۰۳م، ژوشی‌جی «بازتاب بی‌معنی از چهار عنصر» را نوشت و مجدداً از علامت o برای صفر استفاده کرد.

فیبوناچی یکی از اصلی‌ترین افرادی بود که این ایده‌های جدید سیستم اعداد را به اروپا وارد کرد. آن‌گونه که ایفرا[13] می‌نویسد: «یک رابط مهم بین دستگاه عددی هندو ـ عربی و ریاضیات اروپا، ریاضی‌دان ایتالیایی، فیبوناچی است.»

وی در «لیبرآباسی»[14] در حدود سال ۱۲۰۰م، ۹ نماد هندی را به همراه علامت برای اروپاییان توضیح می‌دهد. اما تا مدت‌ها بعد از او استفادهٔ چندانی از صفر نشد.مشخص است که فیبوناچی آن‌قدر جسور نبود که با صفر همان‌طور رفتار کند که با اعداد رفتار می‌کرد. زیرا وی از صفر به عنوان علامت و از سایر اعداد به‌عنوان نماد یاد می‌کرد. گرچه آوردن اعداد هندی به اروپا اهمیت زیادی داشت، ولی در رفتار با صفر، وی نه به مهارت هندیانی چون براهماگوپتا، ماهاویرا و باسکارا رسید و نه به مسلمانانی چون السماوال.

ممکن است گمان شود که پیشرفت دستگاه‌های اعداد و به‌خصوص صفر، به‌طور مستمر از این زمان به بعد بوده است؛ گرچه این دور از بحث است. کاردان[16] معادلات درجهٔ ۳ و درجهٔ ۴ را بدون استفاده از صفر حل کرد. او این کار را در سال ۱۵۰۰م خیلی آسان‌تر از حالتی که صفر را دراختیار داشته باشد، انجام داد. در سال ۱۶۰۰ م صفر کاربرد گستردهٔ خود را آغاز کرد؛ البته بعد از مواجهه با مقاومت‌های زیاد اما هنوز نشانه‌هایی از مشکلاتی که مسبب آن‌ها صفر بود، وجود داشت.

اخیراً بیشتر مردم جهان، هزارهٔ جدید را در اول ژانویه ۲۰۰۰ جشن گرفتند. البته از آن‌جا که در تقویم تنظیم شده، سال صفر به هیچ زمانی اختصاص داده نشده است، آن‌ها فقط گذر ۱۹۹۹ سال را جشن گرفتند.

هرچند آن خطای اصولی را می‌توان بخشید، ولی کمی شگفت‌آور است که به‌نظر می‌رسد، بیشتر مردم قادر به درک این نیستند که چرا هزارهٔ سوم و قرن بیست‌ویکم، در اول ژانویهٔ ۲۰۰۱ شروع می‌شود!

قوانین صفر در جبر

بارها هنگام تدریس دروس ریاضی با کمال تعجب دیده‌ام، برخی دانشجویان گمان می‌کنند $\frac{n}{0}$ برابر است با ∞. در حالی که این نظر به وضوح غلط است و عبارات و نظراتی از این دست نگران کننده‌اند. شاید لازم باشد در این‌جا، خلاصه‌ای از ویژگی‌ها و قوانین مربوط به‌صفر را بیاوریم:

۱) صفر کوچک‌ترین عدد صحیح نامنفی است. عدد طبیعی تالی صفر عدد ۱ است و عدد طبیعی قبل از صفر وجود ندارد. صفر هم عددی گویا و هم حقیقی و همین‌طور عددی جبری است[17]. صفر نه مثبت است نه منفی. نه اول است نه مرکب. فرد نیست، ولی زوج است.[18]

۲) جمع $x + 0 = 0 + x = 0$ صفر نسبت به جمع خنثاست

۳) تفریق $x - 0 = x \,,\, 0 - x = -x$

۴) ضرب $x . 0 = 0 . x = 0$

۵) تقسیم $\frac{0}{x} = 0$ برای x ناصفر

برای x ناصفر، $\frac{0}{0}$ و $\frac{x}{0}$ تعریف نشده است.

برهان: عبارت $\frac{x}{0}$ تعریف نشده است، زیرا وارون ضربی[19] ندارد. از آن‌جا که طبق قانون ضرب $0.x = 0$، بنابراین هیچ عنصری نیست که حاصل ضرب آن در ۰ برابر ۱ شود. درواقع هیچ عنصری نیست و تعریف نشده است. اما اگر در مخرج کسری عبارتی به صفر هم‌گرا شود (بحثی که در آنالیز ریاضی مطرح می‌شود)، داریم:

$$x>0:\ \lim_{y\to 0^+}\frac{x}{y}=+\infty$$

$$x<0:\ \lim_{y\to 0^-}\frac{x}{y}=-\infty$$

۶) توان $x^0=\frac{x}{x}=1$ به استثنای حالتی که $x=0$ باشد.

تذکر: هم‌چنین $0^x=0$ برای هر x (طبق قانون ضرب، عدد هر چند بار در خودش ضرب شود، برابر صفر می‌شود.)

هم‌چنین 0^0 تعریف نشده است. اما اگر به صورت حدی باشد (بحثی که در آنالیز ریاضی مطرح می‌شود)، جزء حالات مبهم است و باید رفع ابهام شود.

۷) مجموع ۰ عدد صفر برابر است.

۸) حاصل ضرب ۰ عدد برابر صفر است. به عبارت دیگر، اگر x عدد حقیقی باشد: $0.x=0$.

اثبات: $0.x=(0+0).x=0.x+0.x$ بنابراین طبق قانون حذف می‌توان نوشت: $0.x=0$.

۹) هرگاه $x\neq0$ و $y\neq0$، آن‌گاه: $xy\neq0$.

اثبات: فرض کنیم $x\neq0$ و $y\neq0$، ولی $xy=0$. در این صورت بند (۸) نتیجه می‌دهد.

$$1=(\frac{1}{y})(\frac{1}{x})xy=(\frac{1}{y})(\frac{1}{x})0=0$$

که یک تناقض است. پس (۹) برقرار است.

۱۰) صفر فاکتوریل برابر ۱ است؛ $0!=1$.

۱۱) تعریف صفر تابع f: نقطه‌ای مانند x را صفر تابع f گویند اگر $f(x)=0$. مثلاً $x=2$ صفر تابع $f(x)=x^2-3x+2$ است، زیرا: $f(2)=2^2-3\times2+2=0$.

تذکر: در ریاضیات داریم: $-0=+0=0$ به عبارت دیگر، -0 و $+0$ باهم برابرند.

اما صفر علامت‌دار[20] چیست؟

در استانداردهای مختلف نمایش شناور[21] اعداد می‌دانیم که بسته به نوع استاندارد، بعضی از اعداد با وجود این که برابر صفر نیستند، ولی هنگام نمایش با رایانه صفر محسوب می‌شوند. به‌عبارت دیگر، اگر کوچک‌ترین عدد قابل نمایش در آن سیستم خاص ε باشد و عددی مانند x طوری باشد که: $0<x<\varepsilon$، رایانه و سیستم نمایش اعداد آن را ۰ محسوب می‌کند و چون مثبت است، آن را $+0$ نمایش می‌دهد.

همین‌طور است در مورد صفر منفی: اگر کوچک‌ترین عدد قابل نمایش در آن سیستم خاص ε باشد و عددی مانند x طوری باشد که $\varepsilon<x<0$، رایانه و سیستم نمایش اعداد آن را ۰ محسوب می‌کند و چون منفی است، آن را -0 نمایش می‌دهد.

امروزه در علم آنالیز عددی، نه فقط عنصر صفر، بلکه مجموعه‌ای از اعداد صفر محسوب می‌شود. به‌عبارت دیگر، صفر منحصر به‌فرد نیست. همهٔ اعداد بین ε و ε - صفر محسوب می‌شوند.

این تعریف جدید از صفر قوانین خاص خود را دارد که به صورت زیر است:

$$\frac{1}{-0}=-\infty,\ \frac{1}{+0}=+\infty$$

و در این شرایط فقط $\frac{\pm0}{\pm0}$ تعریف نشده است.

مفهوم صفر منفی هم‌چنین کاربردهایی در مکانیک آماری و سایر حوزه‌ها دارد.

پی‌نوشت

۱. علائم روی لوحه‌های گل رس با لبه‌ی شیب‌دار قلمی فولادی حک شده‌اند. هم‌چنین، ظاهری گوه شکل داشته‌اند. به همین دلیل، این خط خط میخی نامیده شده است.

۲. بر مبنای سیستم شصتگانی (sexadecimal) می‌نوشته‌اند و ما بر مبنای سیستم دهگانی (decimal).

۳. شهری در بین‌النهرین قدیم، واقع در شرق بابل که جنوب مرکزی عراق امروزی است.

4. Neugebauer

۵. Omicron ۷۰ را نمایش می‌دهد. دستگاه اعداد یونانیان بر مبنای حروف آن‌هاست.

6. Almajest

7. Aryabhata

8. Brahmagupta

9. Mahavira

10. Bhaskara

11. galgal

12. Ch>in Ciu-Shao

13. Zhu Shijie

14. Ifrah

15. Liber Abaci

16. Cardan

۱۷. عدد جبری عددی است که ریشه‌ی یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا باشد.

۱۸. عدد زوج عددی است که مضربی صحیح از یک عدد صحیح باشد. از آن‌جا که $2\times0=0$، بنابراین ۰ عددی زوج است.

۱۹. گوییم عنصر a وارون ضربی دارد. اگر $a\times\frac{1}{a}=1$، در این‌صورت $\frac{1}{a}=a^{-1}$ وارون ضربی a نام دارد.

20. Signed Zero

21. Floating point