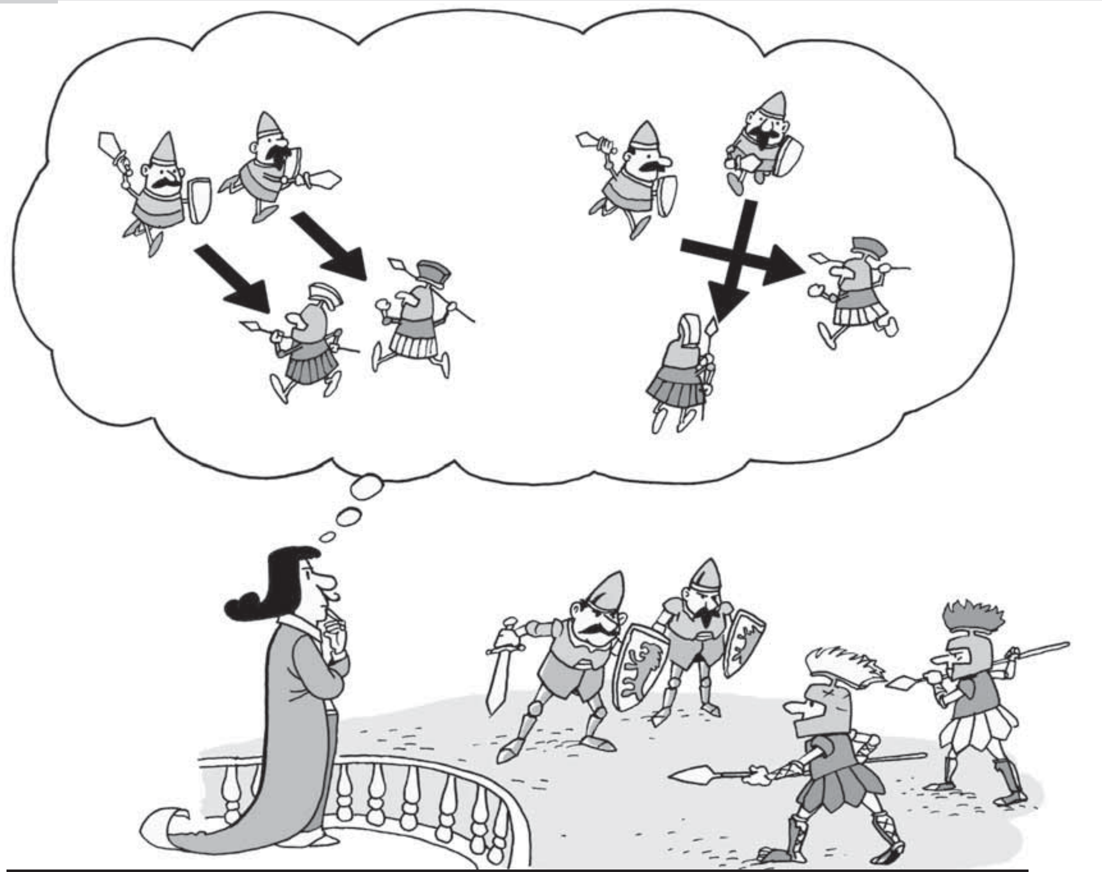


تعداد توابع یک به یک و پوشا

(برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی و پیش‌دانشگاهی)

میرشهرام صدر

اشاره

در کتاب حسابان جدید (سال تحصیلی ۹۰-۸۹)

تعریف تابع $f: A \to B$ چنین آمده است[۱]:

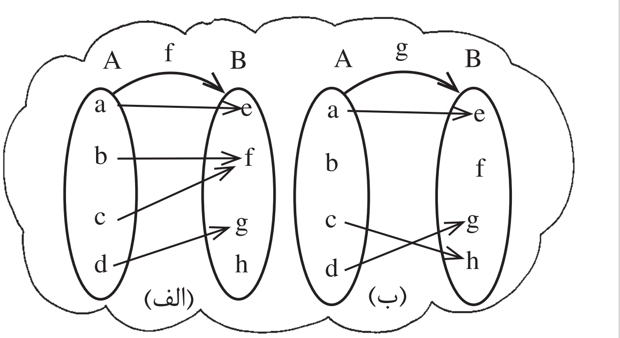
«تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد.»

از این تعریف نتیجه می‌شود که در نمایش تابع f با نمودار ون خواهیم داشت:

الف) از هر عضو A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.

ب) لازم نیست که به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود و ممکن است به یک عضو B یک پیکان یا بیش از یک پیکان وارد شود یا آن‌که اصلاً پیکانی وارد نشود.

برای مثال در زیر دو رابطه از مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ به مجموعهٔ $B=\{e,f,g,h\}$ تعریف شده است:

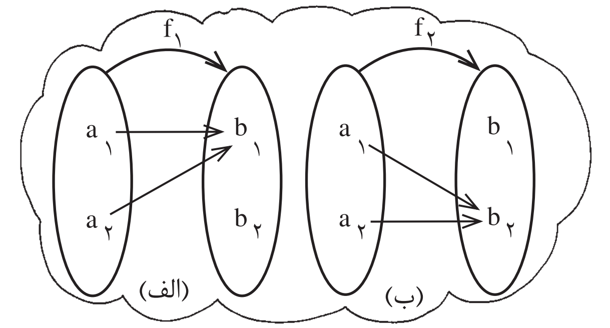


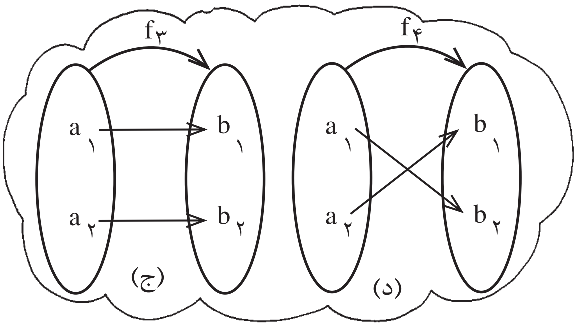
الف) $f(a)=e, f(b)=f, f(c)=f, f(d)=g$

ب) $g(a)=e, g(c)=h, g(d)=g, g(b)=?$

با توجه به تعریف تابع، بدیهی است که $f: A \to B$ تابع است، زیرا از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. اما $g: A \to B$ تابع نیست، زیرا از عضو $b \in A$ پیکانی خارج نشده است، یعنی رابطهٔ g روی همهٔ عضوهای A اثر نکرده است.

اگر فرض کنیم $A=\{a_1,a_2\}$ و $B=\{b_1,b_2\}$ در این صورت چهار تابع مختلف از A به B به صورت زیر وجود دارد.





اکنون با توجه به تعریف تابع واصل ضرب[۲] می‌خواهیم تعداد توابع از مجموعهٔ n عضوی A به مجموعهٔ m عضوی B را محاسبه کنیم. برای این منظور فرض کنیم که:

$A=\{a_۱,a_۲,...,a_n\};\quad B=\{b_۱,b_۲,...,b_m\}$

هم‌چنین فرض می‌کنیم که f از A به B یک تابع باشد، در این صورت تابع f باید روی همهٔ عضوهای A اثر کند. برای مثال وقتی f روی $a_۱$ اثر می‌کند، $f(a_۱)$ می‌تواند برابر با $b_۱$ یا $b_۲$ یا ... یا b_m باشد، یعنی برای $f(a_۱)$، تعداد m انتخاب داریم که عبارتند از:

$f(a_۱)=b_۱$ یا $f(a_۱)=b_۲$ یا ... یا $f(a_۱)=b_m$

به همین ترتیب برای $f(a_۲)$، $f(a_۳)$، ...، $f(a_n)$. هر کدام m انتخاب داریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{array}{cccc} f(a_۱) & f(a_۲) & \cdots & f(a_n) \\ \boxed{m} & \boxed{m} & & \boxed{m} \end{array}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n\ \text{مرتبه}}$$

در نتیجه، طبق اصل ضرب داریم:

$$\text{تعداد توابع f از A به B} = \underbrace{m\times m\times ...\times m}_{n\ \text{مرتبه}} = m^n$$

مثال. تعداد توابعی که از یک مجموعهٔ سه عضوی به یک مجموعهٔ چهار عضوی می‌توان تعریف کرد، چندتاست؟

حل. فرض کنیم f یک تابع از $A=\{a_۱,a_۲,a_۳\}$ به $B=\{b_۱,b_۲,b_۳,b_۴\}$ باشد، در این صورت برای هر یک از مقادیر $f(a_۱)$، $f(a_۲)$ و $f(a_۳)$، چهار انتخاب داریم. لذا طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

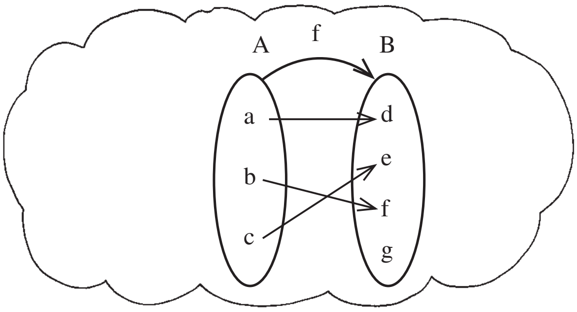
$$\begin{array}{ccc} f(a_۱) & f(a_۲) & f(a_۳) \\ \boxed{۴} & \boxed{۴} & \boxed{۴} \end{array}$$

$$\text{تعداد توابع f از A به B} = ۴\times۴\times۴=۴^۳=۶۴$$

در ادامهٔ مقاله،تعداد توابع یک‌به‌یک و سپس تعداد توابع پوشای f از A به B را محاسبه خواهیم کرد.

تعداد توابع یک‌به‌یک

تابع زیر را از مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به مجموعهٔ $B=\{d,e,f,h\}$ در نظر بگیرید.



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، $f: A\to B$ تابعی یک‌به‌یک است، یعنی اگر تابع f را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسیم، آن‌گاه مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب آن با یکدیگر متمایزند.

$f=\{(a,d), (b,f), (c,e)\}$

تذکر. اگر A یک مجموعهٔ n عضوی و B یک مجموعهٔ m عضوی باشد و $n>m$، در این صورت از A به B تابع یک‌به‌یک نمی‌توان تعریف کرد. بنابراین برای این‌که از مجموعهٔ n عضوی A به مجموعهٔ m عضوی B بتوان تابع یک‌به‌یک تعریف کرد، باید داشته باشیم $n\leq m$.

فرض کنید $A=\{a_۱,a_۲,...,a_n\}$ و $B=\{b_۱,b_۲,...b_m\}$ و $n\leq m$، می‌خواهیم تعداد توابع یک‌به‌یک $f: A\to B$ را محاسبه کنیم، برای این منظور ابتدا تابع f را روی $a_۱$ اثر می‌دهیم. $f(a_۱)$ می‌تواند برابر $b_۱$ یا $b_۲$ یا ... یا b_m باشد، یعنی برای $f(a_۱)$، m انتخاب داریم. فرض کنیم $f(a_۱)=b_j$ که $۱\leq j\leq m$. در مرحلهٔ بعد f را روی $a_۲$ اثر می‌دهیم، برای این‌که تابع f یک‌به‌یک باشد، باید $f(a_۲)\neq bj$، یعنی برای $f(a_۲)$، $(m-۱)$ انتخاب داریم. به همین ترتیب برای $f(a_۳)$، $(m-۲)$ انتخاب و... و برای $f(a_n)$، $(m-n+1)$ انتخاب داریم. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$\begin{array}{ccccc} f(a_۱) & f(a_۲) & f(a_۳) & & f(a_n) \\ \boxed{m} & \boxed{m-۱} & \boxed{m-۲} & \cdots & \boxed{m-n+۱} \end{array}$$

$$\text{تعداد توابع یک‌به‌یک از A به B} = m(m-۱)(m-۲)...(m-n+۱)$$
$$=P(m,n)=\frac{m!}{(m-n)!}$$

مثال. از مجموعهٔ دو عضوی A به مجموعهٔ هفت عضوی B چند تابع یک‌به‌یک می‌توان تعریف کرد؟

حل.

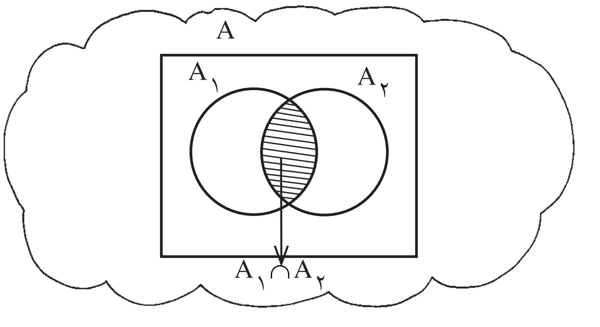
$$P(۷,۲)=\frac{۷!}{(۷-۲)!}$$
$$=\frac{۷!}{۵!}=\frac{۷\times۶\times۵!}{۵!}=۴۲$$

برای محاسبهٔ تعداد توابع پوشا، نیاز به استفاده از اصل شمول و عدم شمول داریم، برای این منظور، این اصل را بیان می‌کنیم.

اصل شمول و عدم شمول

فرض کنیم $A_۱$ و $A_۲$ دو مجموعه از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ متناهی A باشند، تعداد عضوهایی که حداقل به یکی از این دومجموعه تعلق دارند، را با نماد $|A_۱\cup A_۲|$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن را از رابطهٔ زیر معروف به اصل شمول و عدم شمول محاسبه می‌کنیم.

$$|A_۱\cup A_۲|=|A_۱|+|A_۲|-|A_۱\cap A_۲|$$



تعمیم اصل شمول و عدم شمول

فرض کنیم A یک مجموعهٔ متناهی و $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، ...، A_n زیرمجموعه‌هایی از A باشند، در این صورت داریم:

$$|A_۱\cup A_۲\cup A_۳\cup\ldots\cup A_n|=\sum_{i=۱}^{n}|A_i|-\sum_{۱\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \sum_{۱\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\sum_{۱\le i<j<k<l\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l| +\ldots+(-۱)^{n-۱}\left|\bigcap_{i=۱}^{n}A_i\right|$$

تعداد توابع پوشا

فرض کنیم A و B مجموعه‌های دوعضوی باشند. می‌خواهیم تعداد توابع پوشا از A به B را به دست آوریم، برای این منظور، فرض کنیم S مجموعهٔ همهٔ توابع $f: A\to B$ باشد. ابتدا تعداد کل توابع از A به B را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم که اگر A یک مجموعهٔ n عضوی و B یک مجموعهٔ m عضوی باشد، آن‌گاه تعداد کل توابع $f: A\to B$ برابر با m^n است؛ بنابراین داریم:

$$|S|=۲^۲=٤$$

سپس با فرض این‌که $A=\{a_۱,a_۲\}$ و $B=\{b_۱,b_۲\}$، دو مجموعهٔ $A_۱$ و $A_۲$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

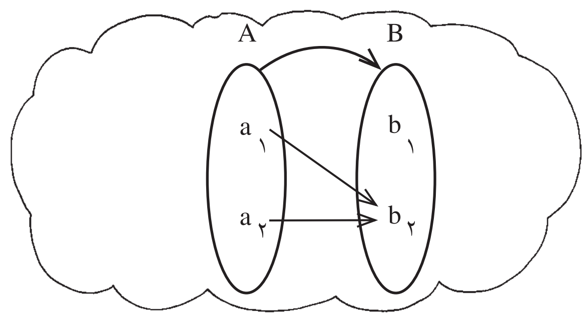
$$A_۱=\{f\in S: f(x)\neq b_۱\};\ A_۲=\{f\in S: f(x)\neq b_۲\}$$

برای محاسبهٔ $|A_۱|$، چون برای هر $x\in A$ داریم: $f(x)\neq b_۱$، بنابراین خواهیم داشت:

$$f(a_۱)=b_۲,\ f(a_۲)=b_۲$$

در نتیجه طبق اصل داریم:

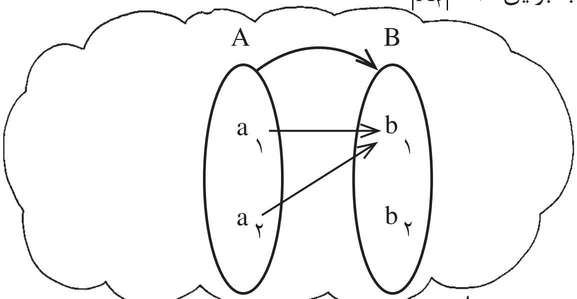
$$\underset{f(a_۱)}{\boxed{۱}}\quad \underset{f(a_۲)}{\boxed{۱}}\ ;\ |A_۱|=|۱\times ۱|=۱$$



از طرفی برای محاسبهٔ $|A_۲|$، چون برای هر $x\in A$ داریم: $f(x)\neq b_۲$، بنابراین خواهیم داشت:

$$f(a_۱)=b_۱,\ f(a_۲)=b_۱$$

بنابراین: $|A_۲|=۱$



هم‌چنین داریم:

$$A_۱\cap A_۲=\{f\in S: f(x)\neq b_۱,b_۲\}=\varnothing\Rightarrow|A_۱\cap A_۲|=۰$$

اکنون $|A_۱\cup A_۲|$ تعداد کل توابع غیرپوشا از A به B را نشان می‌دهد که اگر این مقدار را از $|S|$ کم کنیم، تعداد توابع پوشا از A به B به‌دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$|\overline{A_۱\cup A_۲}|=|S|-|A_۱\cup A_۲|$$
$$=|S|-(|A_۱|+|A_۲|-|A_۱\cap A_۲|)=۴-(۱+۱-۰)=۲$$

مثال. تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ $A=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\}$ به مجموعهٔ $B=\{b_۱,b_۲,b_۳\}$ چندتاست؟

حل. هرگاه S مجموعهٔ همهٔ توابع $f: A\to B$ باشد، آن‌گاه $|S|=۳^۴=۸۱$.

اکنون تعداد توابع غیرپوشای $f: A\to B$ را محاسبه می‌کنیم، سپس با کم کردن این مقدار از $|S|$، تعداد توابع پوشا را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور، مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A_۱=\{f\in S: f(x)\neq b_۱\};A_۲=\{f\in S: f(x)\neq b_۲\};$$
$$A_۳=\{f\in S: f(x)\neq b_۳\}$$

برای محاسبهٔ $|A_۱|$؛ چون برای هر $x\in A$ داریم $f(x)\neq b_۱$، بنابراین $f(x)$ می‌تواند $b_۲$ یا $b_۳$ باشد، یعنی برای $f(x)$ دو حالت وجود دارد. بنابراین، طبق اصل ضرب داریم:

$\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ ;|A_1|=2^4=16$

$f(a_1)\quad f(a_2)\quad f(a_3)\quad f(a_4)$

به همین ترتیب $|A_2|=|A_3|=16$.

چون $|A_1\cup A_2\cup A_3|$ تعداد توابع غیرپوشا را نشان می‌دهد، بنابراین نیاز به محاسبهٔ $|A_1\cap A_2|$ و $|A_2\cap A_3|$ و $|A_1\cap A_3|$ و $|A_1\cap A_2\cap A_3|$ داریم:

$$A_1\cap A_2=\{f\in S:f(x)\neq b_1,b_2\}$$

برای محاسبهٔ $|A_1\cap A_2|$؛ چون برای هر $x\in A$ داریم $f(x)\neq b_1,b_2$، پس $f(x)=b_3$، یعنی تابع ثابت داریم. بنابراین برای f(x) همواره یک حالت وجود دارد. پس طبق اصل ضرب داریم:

$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ ;|A_1\cap A_2|=1^4=1$

$f(a_1)\quad f(a_2)\quad f(a_3)\quad f(a_4)$

به همین ترتیب $|A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_3|=1$.

$$A_1\cap A_2\cap A_3=\{f\in S:f(x)\neq b_1,b_2,b_3\}=\varnothing$$
$$\Rightarrow |A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

مقدار $|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|$ تعداد توابع پوشاست، بنابراین داریم:

$$|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|$$
$$=81-(16+16+16-1-1-1+0)=36$$

قضیه. فرض کنید A یک مجموعهٔ n عضوی و B یک مجموعهٔ m عضوی با شرط $n\geq m$ باشند. ثابت کنید تعداد توابع پوشای $f:A\to B$ برابر است با:

$$m^n-\binom{m}{1}(m-1)^n+\binom{m}{2}(m-2)^n-\binom{m}{3}(m-3)^n$$
$$+\cdots+(-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}\times 1^n$$

برهان. فرض کنیم $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ و $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$ در صورتی که S مجموعهٔ همهٔ توابع $f:A\to B$ باشند، آن‌گاه $|S|=m^n$.

در صورتی که تعداد توابع غیرپوشای $f:A\to B$ را محاسبه کنیم، با کم کردن این مقدار از $|S|$، تعداد توابع پوشا را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور مجموعهٔ زیر را تعریف می‌کنیم.

$$A_i=\{f\in S\,|\,f(x)\neq b_i\};1\leq i\leq m$$

برای محاسبهٔ $|A_1|$؛ چون برای هر $x\in A$ داریم $f(x)\neq b_i$ بنابراین f(x) می‌تواند b_1 یا b_2 یا ... یا b_{i-1} یا b_{i+1} یا ... یا b_m باشد، یعنی برای f(x)، (m-1) حالت وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$\boxed{(m-1)}\ \boxed{(m-1)}\ \boxed{(m-1)}\ \boxed{(m-1)}\ \cdots\ \boxed{(m-1)}$

$f(a_1)\quad f(a_2)\quad f(a_3)\quad f(a_4)\quad\quad f(a_n)$

$$|A_1|=(m-1)^n$$

از طرفی تعداد مجموعه‌هایی به شکل A_i برابر با $\binom{m}{1}$ است، زیرا تعداد مجموعه‌های به شکل A_i برابر با تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی مجموعهٔ A است. بنابراین داریم:

$$\sum_{i=1}^{m}|A_i|=\binom{m}{1}(m-1)^n$$

چون $(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)$ تعداد توابع غیرپوشا را نشان می‌دهد، بنابراین نیاز به محاسبهٔ $|A_i\cap A_j|$ برای $1\leq i<j\leq m$ و $|A_i\cap A_j\cap A_k|$ برای $1\leq i<j<k\leq m$ و ... و $|A_i\cap A_j\cap\cdots\cap A_l|$ برای $1\leq i<j<\cdots<l\leq m$ و $|\bigcap_{i=1}^{m}A_i|$ داریم:

$$A_i\cap A_j=\{f\in S:f(x)\neq b_i,b_j\};1\leq i<j\leq m$$

برای محاسبهٔ $|A_i\cap A_j|$ برای $1\leq i<j\leq m$، چون برای هر $x\in A$ داریم $f(x)\neq b_i,b_j$، بنابراین برای f(x) همواره (m-2) حالت وجود دارد. پس طبق اصل ضرب داریم:

$\boxed{(m-2)}\ \boxed{(m-2)}\ \boxed{(m-2)}\ \cdots\ \boxed{(m-2)}$

$f(a_1)\quad f(a_2)\quad f(a_3)\quad\quad f(a_n)$

$$|A_i\cap A_j|=(m-2)^n$$

تعداد مجموعه‌هایی به شکل $A_i\cap A_j$ برای $1\leq i<j\leq m$ برابر با $\binom{m}{2}$ است، زیرا تعداد مجموعه‌هایی به این شکل برابر با تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی مجموعهٔ A است. بنابراین داریم:

$$\sum_{1\leq i<j\leq m}|A_i\cap A_j|=\binom{m}{2}(m-2)^n$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\sum_{1\leq i<j<k\leq m}|A_i\cap A_j\cap A_k|=\binom{m}{3}(m-3)^n$$
$$\vdots$$
$$\sum_{\underbrace{1\leq i<j<\cdots<l\leq m}_{(m-1)\text{ اندیس}}}|A_i\cap A_j\cap\cdots\cap A_l|=\binom{m}{m-1}(m-(m-1))^n$$
$$=\binom{m}{m-1}\times 1^n$$

و بالاخره داریم:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{m}A_i\right|=0$$

مقدار $\overline{(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)}$ تعداد توابع پوشاست، بنابراین داریم:

$$\overline{(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)}=|S|-(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)$$
$$=m^n-(\sum_{i=1}^{m}|A_i|-\sum_{1\leq i<j\leq m}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leq i<j<k\leq m}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$

$$-\cdots+(-۱)^m \sum_{\underbrace{۱\le i<j<\cdots<l\le m}_{(m-۱)\ \text{اندیس}}} \left|A_i\cap A_j\cap\cdots\cap A_l\right| + (-۱)^{m-۱}\left|\bigcap_{i=۱}^{m} A_i\right|)$$

$$\overline{(\bigcup_{i=۱}^{m} A_i)} = m^n - \binom{m}{۱}(m-۱)^n + \binom{m}{۲}(m-۲)^n - \binom{m}{۳}(m-۳)^n$$

$$+\cdots+(-۱)^{m-۱}\binom{m}{m-۱}\times ۱^n$$

مثال. تعداد توابع پوشـا از مجموعهٔ پنج‌عضوی A به مجموعهٔ چهارعضوی B چندتاست؟

حل.

$$|A| = n = ۵, |B| = m = ۴$$

با توجه به فرمول تعداد توابع پوشـا از مجموعهٔ n عضوی A به مجموعهٔ m عضوی B با شرط $(n \le m)$ داریم:

$$\overline{(\bigcup_{i=۱}^{۴} A_i)} = ۴^۵ - \binom{۴}{۱}(۴-۱)^۵ + \binom{۴}{۲}(۴-۲)^۵ - \binom{۴}{۳}(۴-۳)^۵$$

$$=۱۰۲۴-۹۷۲+۱۹۲-۴=۲۴۰$$

یک مسئلهٔ کاربردی از تعداد توابع پوشا

مسئله. گروه ریاضی یک انتشاراتی، شش طرح مختلف مربوط به تألیف کتاب‌های کمک‌آموزشی دارد که پنج گروه تألیف، متقاضی اجرای قسمت‌های مختلف هر طرح هستند. برای تقویت بنیهٔ علمی کتاب‌ها، بهتر است هر پنج گروه روی قسمت‌های مختلف هر طرح کار کننـد. به چند راه می‌توان با این پنج گروه قرارداد منعقد کرد به‌طوری که برای انجام هر طرح، هر گروه قرارداد جداگانه‌ای داشته باشد.

حل. تعـداد قراردادهایی کـه می‌توان با این پنـج گروه طبق شـرایط مسـئله منعقد کرد برابر با تعداد توابع پوشـا از مجموعهٔ شـش‌عضوی A به مجموعهٔ پنج‌عضوی B اسـت. بنابراین با فرض این‌کـه $A = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶\}$ و $B = \{b_۱, b_۲, b_۳, b_۴, b_۵\}$، تعداد توابع پوشا از A به B را پیدا می‌کنیم:

$$\overline{(\bigcup_{i=۱}^{۵} A_i)} = ۵^۶ - \binom{۵}{۱}(۵-۱)^۶ + \binom{۵}{۲}(۵-۲)^۶ - \binom{۵}{۳}(۵-۳)^۶$$

$$+\binom{۵}{۴}(۵-۴)^۶ = ۱۵۶۲۵-۲۰۴۸۰+۷۲۹۰-۶۴۰+۵=۱۸۰۰$$

پی‌نوشت‌ها

۱. این تعریف از تابع در کتاب ریاضی گسسته پیش‌دانشگاهی تحت عنوان «نگاشت» آمده است.

۲. **اصل ضرب:** فرض کنیم عملی در k مرحلهٔ متوالی انجام می‌گیرد به‌طوری که در مرحلهٔ اول با $r_۱$ راه مختلف، در مرحلهٔ دوم با $r_۲$ راه مختلف و... و در مرحلهٔ kام با r_k راه مختلف انجام پذیرد. در این صورت این عمل می‌تواند به‌طور کلی با $r_۱ \times r_۲ \times \cdots \times r_k$ راه مختلف انجام گیرد.

معرفی وبگاه‌های ریاضی جهان

احسان یارمحمدی

اسم وبگاه: Calculus Applet

نشانی وبگاه: http://www.calculusapplet.com

صفحـهٔ اصلـی سـایت Calculus Applet شـامل عنوان‌های گوناگون زیر اسـت که هریک از این عناوین حاوی مطالب ارزنده و مفیدی دربارهٔ موضوعات ریاضی است.

- ■ پیوستگی و حدود (Continuity and Limits)
- ■ نمای غیررسمی و نموداری از پیوستگی (An Informal, Graphical View of Continuity)
- ■ قضیهٔ مقدار میانی (Intermediate Value Theorem)
- ■ نمای غیررسمی از حدود (Informal View of Limits)
- ■ حدود یک‌طرفه و دوطرفه و مواردی که حدود وجود ندارد (One-and Two-Sided Limits and When Limits Fail to Exist)
- ■ حد در بی‌نهایت (Limits and Infinity)
- ■ نمای جدولی از حدود (Table View of Limits)
- ■ تعریف رسمی از حدود (Formal Definition of Limits)
- ■ تعریف پیوستگی با استفاده از حدود (Definition of Continuity Using Limits)
- ■ مقدمه‌ای بر مشتق (Introduction to the Derivative)
- ■ میان‌برهای مشتق‌گیری (Differentiation Short Cuts)
- ■ کاربردهای مشتق (Applications of Differentiation)
- ■ ساخت پادمشتق (Constructing Anti-derivatives)

بقیه در صفحهٔ ۶۷