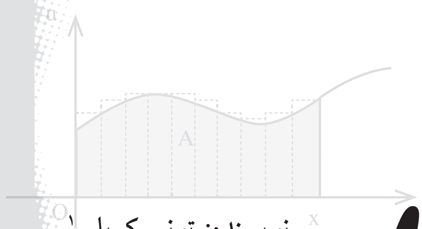


حسابان

نویسنده: تونی کریلی[1]

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

حساب یا حسابان[2] روشی در محاسبه است. ریاضی‌دان‌ها گاهی دربارهٔ «حساب منطق»[3]، «حساب احتمال»[4] و غیره سخن می‌گویند. اما همه توافق دارند که درواقع یک حسابان محض و ساده، وجود دارد، که لاتین آن با حرف بزرگ C[5] املا می‌شود.

حسابان، محور اصلی ریاضیات است. کم پیش می‌آید که امروزه، دانشمندان، مهندسان یا اقتصاددانانی که با کمیت‌ها سروکار دارند، با حسابان، با آن همه کاربردهای وسیعش، روبه‌رو نشده باشند. از لحاظ تاریخی این دانش با ایزاک نیوتن[6] و گاتفرید لایب‌نیتس[7] وابسته است که راه‌گشای آن در قرن هفدهم بودند؛ دانشمندانی که نظریه‌های مشابهشان به نزاعی حق تقدمی در این مورد کشیده شد که کدامشان کاشف حسابان بوده است. درواقع، هر دو آن‌ها مستقلاً به محاسباتشان رسیده بودند، گرچه روش‌های آنان کاملاً متفاوت بود.

از آن زمان به بعد، حسابان به موضوعی گسترده بدل شد. هر نسل به پر و پای روش‌هایی می‌پیچید که به تصور او باید نسل جوان‌تر آن را بیاموزد. این روزها کتاب‌های درسی که بالغ بر هزار صفحه شده، شامل مطالب فوق‌العادهٔ بسیاری دراین‌باره هستند. اما در مورد این اضافه‌شده‌ها، آن‌چه مطلقاً اساسی است دیفرانسیل‌گیری[8] و انتگرال‌گیری[9] دوقلوهای واقع در رأس حسابان، مطابق با تقریر نیوتن و لایب‌نیتس‌اند. این کلمات از differentialis (تفاضل گرفتن یا جدا کردن) و integralis (مجموع اجزا یا به‌هم آوردن) لایب‌نیتس گرفته شده‌اند.

در اصطلاح فنی، دیفرانسیل‌گیری با اندازه‌گیری تغییر[10] و انتگرال‌گیری با اندازه‌گیری سطح[11] سروکار دارد، اما درخشش پرشکوه این دو گوهرِ واقع در تاج حسابان، از این‌روست که دو روی یک سکه‌اند، یعنی دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری عکس یکدیگرند. درواقع، حسابان یک موضوع و آن، نیاز به دانستن هر دو طرف آن است. تعجب‌آور نیست که «نمونهٔ واقعی سرلشکر مدرنِ» گیلبرت[12] و سولیوان[13] در دزدان دریایی پن‌زانس[14] با غرور، هر دو آن‌ها را اعلام می‌کند:

با توجه به حقایق شاد بسیاری در مورد مربع وتر، من در حسابان انتگرال و دیفرانسیل مسلطام.

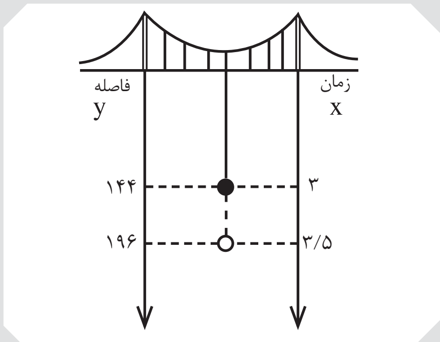
دیفرانسیل‌گیری

دانشمندان، شیفتهٔ مطرح کردن «آزمایش‌های ذهنی»اند، به‌ویژه اینشتین آن‌ها را دوست داشت. فرض کنید روی پلی بالای درهٔ تنگی ایستاده‌ایم و می‌خواهیم سنگی را بیندازیم. در این صورت، چه اتفاقی می‌افتد؟ امتیاز آزمایش ذهنی در این است که لازم نیست عملاً در آن‌جا باشیم. در این مورد، می‌توانیم کارهای غیرممکنی، مانند متوقف کردن سنگ در هوا یا ملاحظهٔ حرکت آهستهٔ آن در فاصلهٔ کوتاهی از زمان را نیز انجام دهیم.

طبق نظریهٔ جاذبه[15]ی نیوتن، سنگ می‌افتد و هیچ واقعهٔ تعجب‌آوری در این کار نیست. سنگ به‌طرف زمین می‌آید و در حالی که دستهٔ کرونومترمان به جلو می‌رود، سریع‌تر و سریع‌تر

می‌افتد. امتیاز دیگر آزمایش ذهنی در این است که در آن می‌توان از عوامل پیچیده‌ای مانند مقاومت هوا صرف‌نظر کرد.

اکنون، سرعت سنگمان در لحظه‌ای مفروض از زمان، مثلاً هنگامی که کرونومتر دقیقاً سه ثانیه بعد از زمان رها شدنش را می‌خواند، چه‌قدر است؟ چگونه می‌توان این مقدار را به دست آورد؟ محققاً می‌توان سرعت متوسط[۱۶] را اندازه بگیریم، اما مسئلهٔ ما اندازه‌گیری سرعت لحظه‌ای[۱۷] است. از آن‌جا که این آزمایش، آزمایشی ذهنی است، چرا سنگمان را در هوا متوقف نکنیم، و سپس اجازه دهیم با در نظر گرفتن کسری از ثانیه، فاصلهٔ کوتاه دیگری به طرف پایین حرکت کند؟ در این صورت، اگر این فاصلهٔ اضافی را بر زمان اضافی‌مان تقسیم کنیم، سرعت متوسط را در فاصلهٔ زمانی کوتاهی خواهیم داشت. بنابراین، با در نظر گرفتن فاصله‌های زمانی کوتاه‌تر و کوتاه‌تر، سرعت متوسط در مکانی که در آن سنگ را متوقف کرده‌ایم، نزدیک‌تر و نزدیک‌تر به سرعت لحظه‌ای می‌شود. فرایند حدی مزبور، ایدهٔ مبنایی نهفته در پس پردهٔ حسابان است.



ممکن است وسوسه شویم زمان اضافی کوتاهی برابر با صفر را در نظر بگیریم. اما در آزمایش ذهنی‌مان، سنگ اصلاً حرکت نکرده است. سنگ فاصله‌ای را نپیموده و زمانی برای انجام آن نگرفته است! این کار سرعت متوسط را به ما می‌دهد که اسقف بِرکلی[۱۸]، فیلسوف ایرلندی، آن را به‌عنوان «ارواح کمیت‌های مرحوم» مشهور کرده است. این عبارت را نمی‌توان معین کرد، زیرا در عمل بی‌معنا[۱۹] به نظر می‌رسد، زیرا با در پیش گرفتن این مسیر به ورطه‌ای عددی رهنمون می‌شویم.

برای پیشرفت بیش‌تر به نمادهای بیش‌تری نیازمندیم. فرمول دقیق پیونددهندهٔ y، فاصلهٔ سقوط و x، زمان رسیدن به آن‌جا را گالیله استخراج کرده است:

$y=۱۶\times x^{۲}$

عامل «۱۶» به این علت ظاهر شده است که واحدهای اندازه‌گیری انتخاب‌شده فوت و ثانیه‌اند. اگر مثلاً بخواهیم بدانیم سنگ در ۳ ثانیه تا چه فاصله‌ای سقوط کرده است، خیلی ساده، x=۳ را در فرمول فوق قرار می‌دهیم و پاسخ را محاسبه می‌کنیم.

$y=۱۶\times ۳^{۲}=۱۴۴$ فوت

اما چگونه می‌توانیم سرعت سنگ را در زمان x=۳ محاسبه کنیم. اجازه دهید ۰/۵ ثانیهٔ دیگر را در نظر بگیریم و ملاحظه کنیم سنگ مورد نظر بین ۳ و ۳/۵ ثانیه چه‌قدر حرکت کرده است. سنگ در ۳/۵ ثانیه به اندازهٔ

$y=۱۶\times ۳/۵^{۲}=۱۹۶$ فوت

حرکت می‌کند، بنابراین بین ۳ و ۳/۵ ثانیه، x «۱۹۶-۱۴۴»، یعنی ۵۲ فوت سقوط کرده است. از آن‌جا که سرعت برابر تقسیم فاصله بر زمان است، سرعت متوسط در این فاصلهٔ زمانی عبارت است از:

$\frac{۵۲}{۰/۵}=۱۰۴$ متر بر ثانیه

این مقدار نزدیک به سرعت ثانیه‌ای در x=۳ است، اما می‌توان گفت ۰/۵ ثانیه اندازه‌ای به‌قدر کافی کوچک نیست. این استدلال را با فاصلهٔ زمانی کوچک‌تری، مثلاً ۰/۰۵ ثانیه، تکرار و ملاحظه می‌کنیم که فاصلهٔ سقوط عبارت است از:

$۱۴۸/۸۴-۱۴۴=۴/۸۴$ متر

که سرعت متوسط زیر را به دست می‌دهد:

$\frac{۴/۸۴}{۰/۰۵}=۹۶/۸$ متر بر ثانیه

درواقع، این مقدار به سرعت لحظه‌ای سنگ در ۳ ثانیه (هنگامی که x=۳) نزدیک‌تر است.

اکنون باید خطر کنیم و مسئلهٔ محاسبهٔ سرعت متوسط سنگ را بین x ثانیه و کمی بعد در x+h ثانیه اندازه بگیریم. در این صورت، پس از اندکی کلنجار رفتن با نماد، درمی‌یابیم که این مقدار عبارت است از:

$۱۶\times(۲x)+۱۶\times h$

هنگامی که h را کوچک‌تر و کوچک‌تر کنیم، مثل زمانی که در رفتن از ۰/۵ به ۰/۰۵ کردیم، ملاحظه می‌کنیم که جملهٔ اول عبارت، بی‌تغییر باقی می‌ماند (زیرا شامل h نیست) و جملهٔ دوم آن کوچک‌تر و کوچک‌تر می‌شود. در این صورت نتیجه می‌گیریم:

$v=۱۶\times(۲x)$

که در آن v سرعت لحظه‌ای[۲۰] سنگ در زمان x است. برای مثال، سرعت لحظه‌ای سنگ پس از ۱ ثانیه (زمانی که x=۱) برابر است با:

$۱۶\times(۲\times۱)=۳۲$ فوت بر ثانیه

و پس از ۳ ثانیه عبارت است از $۱۶\times(۲\times۳)$ که ۹۶ فوت بر ثانیه را به‌دست می‌دهد.

در صورتی که فرمول فاصلهٔ گالیله، یعنی $y=۱۶\times x^{۲}$ را با فرمول سرعت، یعنی $v=۱۶\times(۲x)$ مقایسه کنیم، تفاوت اساسی، تغییر $x^{۲}$ به ۲x است. این تغییر، تأثیر دیفرانسیل‌گیری، یعنی گذشتن از

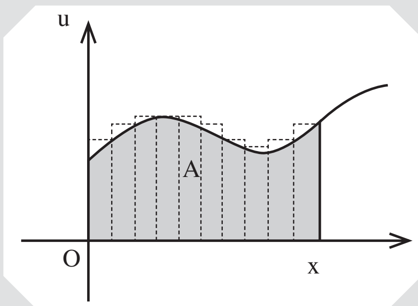
$u=x^{۲}$ به مشــتق[۲۱] $\mathring{u} = ۲x$ اســت. نیوتــن $\mathring{u} = ۲x$ را جریان[۲۲] و متغیر x را جاری[۲۳] می‌نامید، زیرا برحسب کمیت‌های جاری‌شونده می‌اندیشید. امروزه، اغلب $u=x^{۲}$ و مشتق آن را به صورت $\frac{du}{dx} = ۲x$ می‌نویســیم. تداوم کاربرد این نمادنویسی، که ابتدا لایب‌نیتس آن را معرفی کرد، موفقیت «d» گرایی لایب‌نیتس را بر کُهلی‌گرایی[۲۴] نیوتن نشان می‌دهد.

u	du/dx
$x^{۲}$	۲x
$x^{۳}$	$۳x^{۲}$
$x^{٤}$	$٤x^{۳}$
$x^{٥}$	$٥x^{٤}$
...	...
x^{n}	$nx^{n-۱}$

ســنگ ســقوط‌کننده یک مثال بود، اما در صورتی که عبارات دیگری داشــته باشــیم که u به‌جــای آن‌ها قرار گیــرد، می‌توانیم هم‌چنان مشتق آن‌ها را محاسبه کنیم، کاری که می‌تواند در سایر زمینه‌ها ســودمند باشــد. در این مورد الگویی موجود است: مشتق یــک جمله از ضرب توان آن در آن جملــه با توان یک واحد کم‌تر به‌دست می‌آید.

انتگرال‌گیری

اولین کاربرد انتگرال‌گیری در اندازه‌گیری سطح بود. اندازه‌گیری سطح زیر یک خم، با تقسیم آن به نوارهای مستطیل شکل تقریبی، هریک با پهنــای dx، انجام می‌گیرد. در این صورت، با اندازه‌گیری ســطح هر یک از آن‌ها و جمعشــان با هم، «مجموع» و درنتیجه، ســطح کل را به‌دســت می‌آوریم. لایب‌نیتس نماد S، را که به جای مجموع قرار می‌گیرد، به‌صورت بزرگ‌شــدهٔ $\int$ معرفی کرده اســت. سطح هریک از نوارهای مستطیل‌شکل برابر udx است، بنابراین A، سطح زیر خم، از ۰ تا x، برابر است با $A = \int_{۰}^{x} udx$.



در صورتی که خم ما عبارت از $u=x^{۲}$ باشــد، سطح مورد نظر با ترسیم نوارهای مستطیل‌شکل باریک در زیر خم، جمع آن‌ها برای محاسبهٔ ســطح تقریبی و به‌کار بردن فرایند حدی در مورد پهنای آن‌ها برای به‌دست آوردن ســطح دقیق، یافت می‌شود. این پاسخ، سطح زیر را به دست می‌دهد:

$$A = \frac{x^{۳}}{۳}$$

u	$\int_{۰}^{x} udx$
$x^{۲}$	$x^{۳}/۳$
$x^{۳}$	$x^{٤}/٤$
$x^{٤}$	$x^{٥}/٥$
$x^{٥}$	$x^{٦}/٦$
...	...
x^{n}	$x^{n+۱}/(n+۱)$

در مــورد خم‌های متفــاوت (و بنابراین عبــارات دیگر برای u) هم‌چنان می‌توان انتگرال را محاســبه کرد. مشــابه مشــتق، برای انتگــرال توان‌های x نیــز الگویی منظم وجــود دارد. انتگرال مورد بحث از تقســیم بر «توان پیشــین به‌اضافهٔ ۱» و افــزودن ۱ برای به‌دست آوردن توان جدید حاصل می‌شود.

دستاورد درخشان

در صورتی کــه از انتگرال $A = \frac{x^{۳}}{۳}$ دیفرانســیل‌گیری کنیم $u=x^{۲}$ اولیه را به دست می‌آوریم و در صورت انتگرال‌گیری از مشتق $\frac{du}{dx} = ۲x$ نیــز به $u=x^{۲}$ اولیه می‌رســیم. یعنی دیفرانســیل‌گیری عکــس انتگرال‌گیری اســت؛ موضوعی که به‌عنوان قضیهٔ اساســی حســابان شــناخته می‌شــود و یکی از مهم‌ترین قضایای سراســر ریاضیات است.

بدون حســابان، هیچ ماهواره‌ای در مدار قرار نمی‌گرفت و هیچ نظریه‌ای در اقتصاد به ســامان نمی‌رســید. هم‌چنین آمار به‌صورت بسیار متفاوتی مطرح می‌شد، زیرا هرجا که با تغییر سروکار داریم، حسابان را خواهیم یافت.

پی‌نوشت

1. Tony Crilly
2. calculus
3. calculus of logic
4. caluculus of probability
5. Calculus
6. Isaac Newton

7. Gottfried Leibnitz
8. differentiation
9. integration
10. change
11. area
12. Gilbert
13. Sullivan
14. The Pirates of Penzance
15. theory of gravity
16. average speed
17. instantaneous speed
18. Bishop Berkeley
19. meaningless
20. instantaneous velocity
21. derivative
22. fluxion
23. fluent
24. dotage
25. Zeno
26. Cauchy
27. Riemann
28. Lebesque

چند تاریخچه

حدود ۴۵۰ قبل از میلاد: زنون[۲۵]
با پارادوکسی، بی‌نهایت کوچک‌ها
را دست می‌اندازد.

دهۀ ۱۶۶۰- دهۀ ۱۶۷۰ میلادی: نیوتن و لایب‌نیتس،
اولین قدم‌ها را به سوی حسابان برمی‌دارند.

۱۷۳۴ میلادی: بِرکلی به ضعف‌های اساسی
توجه می‌دهد.

دهۀ ۱۸۲۰ میلادی:
کوشی[۲۶] نظریۀ مورد بحث
را به‌گونه‌ای دقیق تنظیم
می‌کند.

۱۸۵۴ میلادی: ریمان[۲۷]
انتگرال ریمان را معرفی
می‌کند.

۱۹۰۲ میلادی: لُبک[۲۸]
نظریۀ انتگرال لُبک را
پایه‌گذاری می‌کند.