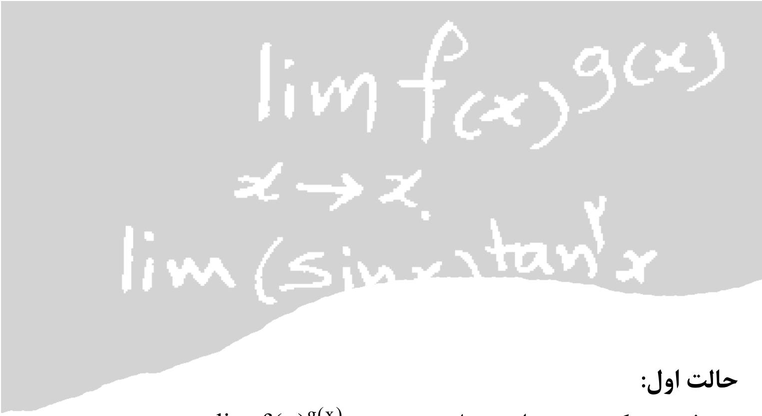
محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$

احسان یارمحمدی

تقریباً ده سال پیش بود که برای ملاقات و گفت‌وگو پیرامون تألیف و چاپ کتابی درباره دنباله‌ها[1] و سری‌ها[2] با آقای امیری به دفتر گروه ریاضی انتشارات مدرسه مراجعه کردم. هنگام ورود به اتاق گروه ریاضی متوجه شدم آقای امیری حضور ندارند. بعد از عرض سلام و ادب به فرد حاضر در اتاق و معرفی خویش، جویای آقای امیری شدم، که وی در پاسخ گفت: آقای امیری به سفر حج رفته‌اند و تا چند هفته دیگر نمی‌آیند. من صدر هستم و در خدمت شما، اگر فرمایشی دارید بفرمایید. من هم موضوع را با ایشان مطرح کردم و به این ترتیب وارد گفت‌وگو شدیم. مشغول گفت‌وگو بودیم که تلفن زنگ زد. آقای صدر تلفن را پاسخ داد. در آن سوی خط یک دبیر ریاضی از استان لرستان برای راهنمایی گرفتن درباره حل یک حد شبیه یکی از موارد $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ یا $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1}{x})^{\tan x}$ از آقای قندهاری سراغ گرفت. آقای صدر به او گفت که آقای قندهاری امروز تشریف ندارند و ایشان فقط سه‌شنبه‌ها در دفتر گروه حضور دارند. شما می‌توانید برای گرفتن پاسخ یا راهنمایی درباره سؤال مورد نظرتان در آن روز تماس بگیرید. در همین هنگام به آقای صدر گفتم به آن دبیر ریاضی بگویند که جواب این حد، فلان عدد است. آقای صدر هنگامی که این حرف را از من شنید، رو به من کرد و گفت شما اطمینان دارید که پاسخ سؤال، فلان عدد است. من هم جواب دادم: بله. سپس آقای صدر به آن دبیر گفتند که شما ده دقیقه دیگر تماس بگیرید و جواب سؤال خود را دریافت کنید. بعد هم آقای صدر رو به من کرد و گفت ده دقیقه دیگر ایشان تماس می‌گیرند و شما جواب را به همراه راه‌حل به ایشان بدهید. من توانستم پاسخ و راه‌حل مناسبی را برای سؤال آن دبیر ارائه کنم. در پایان صحبت‌ها و گفت‌وگوها، آقای صدر یک جلد از مجله برهان دوره متوسطه، شماره ۳۶ را به من هدیه داد و گفت، شما می‌توانید در صورت تمایل برای مجله برهان مقاله بفرستید. این ملاقات، آغاز همکاری من با مجله برهان از آن تاریخ تاکنون است.

چندی پیش در ملاقاتی، آقای صدر از انتشار ویژه‌نامه‌ای به مناسبت بیستمین سال تولد مجله برهان و اعلام فراخوان برای ارائه مطلب با عنوان یاد و خاطره از مجله برهان از سوی دبیران، مدرسان، دانش‌آموزان و علاقه‌مندان به مجله و همکاران و مرتبطان با مجله در طی این سال‌ها خبر دادند. من هم به همین بهانه یاد آموزشی خود را با ارائه مقاله‌ای پیرامون محاسبه حد توابع نمایی



که سرآغاز آن در همان ملاقات نخست من با آقای صدر در پی تماس تلفنی آن دبیر اهل استان لرستان درباره محاسبه $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ رقم خورد، ارائه می‌کنم.

فرض کنید که شما مباحث حد[۳] و پیوستگی[۴] دروس حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال[۵] را به‌خوبی فراگرفته‌اید و دبیر شما به‌عنوان کار در منزل، تمرین زیر را به شما می‌دهد و اعلام می‌کند که هر دانش‌آموز کلاس که بتواند پاسخ و راه‌حل صحیح برای این تمرین مزبور ارائه کند، دو نمره از نمره آخر ترم خود را دریافت خواهد کرد.

● حاصل هریک از حدود زیر را به‌دست آورید.[۶]

۱) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ ۲) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sin x)^{\tan^2 x}$

۳) $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$ ۴) $\lim_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}$

با بررسی حدود بالا و مواردی نظیر آن‌ها درمی‌یابیم که هنگام برخورد با این‌گونه حدود، حالت‌های ابهام‌آمیز 0^0، 1^∞ و ∞^0 به‌وجود می‌آید که شما ریاضی‌آموز گرامی باید برای رفع ابهام هریک از این حدود، آشنایی لازم و کافی را با روش‌های محاسبه و رفع ابهام حدود اعم از رفع ابهام از حالت‌های $\frac{0}{0}$، $\frac{\infty}{\infty}$، $0\times\infty$ و... و استفاده از قاعده هوپیتال، هم‌ارزی‌های مثلثاتی، اتحادهای مثلثاتی[۷]، محاسبه مشتق توابع و... داشته باشید.

برای ورود به این مقاله، قضیه‌ای را بدون ارائه برهان[۸] آن برای درک بهتر مقاله بیان می‌کنیم.

● اگر p، q و x اعدادی حقیقی باشند، داریم: (e=۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵)

الف) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

ب) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{p}{x}\right)^{qx}=e^{pq}$

پ) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

اکنون با توجه به قضیه بالا به بررسی و محاسبه حد $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ می‌پردازیم.

حالت اول:

فرض کنید برای محاسبه حد $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ به حالت ابهام‌آمیز 1^∞ برمی‌خوریم. بنابراین $\lim_{x\to x_0} f(x)=1$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$ و داریم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}(1+(1+f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}\times(f(x)-1)g(x)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left((1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{g(x)\times(f(x)-1)}=e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\times(f(x)-1)}$$

و بنابر پیوستگی تابع نمایی[۹] داریم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\times(f(x)-1)}$$

مثال ۱. حاصل حد $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=(\cos 0)^{\frac{1}{\sin^2 0}}=1^\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}(\cos x-1)}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}(\cos x-1)$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}(\cos x-1)=0\times\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}(\cos x-1)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{1-\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\cos x}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

مثال ۲. حاصل حد $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=1^\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)=0\times\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\tan^2 x)-1}{3x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x(1+\tan^2 x)}{6x}$$

$$=\frac{1}{3}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$$

حالت دوم:

فرض کنید برای محاسبه حد $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ به حالت ابهام‌آمیز 1^∞ یا ∞^0 یا 0^0 برمی‌خوریم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\lim_{x\to x_0} f(x)=1\\ \lim_{x\to x_0} g(x)=\infty\end{cases} \text{ یا } \begin{cases}\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty\\ \lim_{x\to x_0} g(x)=0\end{cases} \text{ یا } \begin{cases}\lim_{x\to x_0} f(x)=0^+\\ \lim_{x\to x_0} g(x)=0\end{cases}$$

پس هر یک از موارد بالا را می‌توانیم با کمک ویژگی‌های لگاریتم به حالت ابهام‌آمیز $0\times\infty$ تبدیل کنیم و سپس این حالت مبهم را به حالت‌های ابهام‌آمیز $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تغییر دهیم.

اگر فرض کنیم $P=f(x)^{g(x)}$ و $f(x)>0$ بنابراین:

$$\ln P=\ln f(x)^{g(x)}\Rightarrow \ln P=g(x)\ln f(x)$$

$$\Rightarrow \ln P=\frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}}=\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

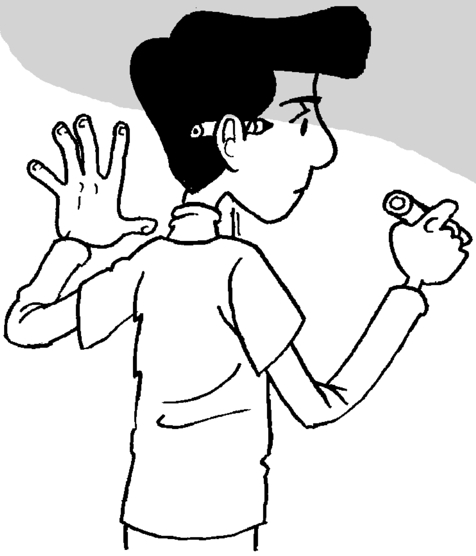
یا

اگر فرض کنیم $P=f(x)^{g(x)}$ و $f(x)>0$ داریم:

$$P=f(x)^{g(x)}\Rightarrow P=e^{\ln f(x)^{g(x)}}\Rightarrow P=e^{g(x)\ln f(x)}$$

بنابراین، بنا بر پیوستگی تابع نمایی خواهیم داشت:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}}$$



مثال ۳. حاصل حد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}=\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)^{\cos\frac{\pi}{2}}=\infty^0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}=e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x\ln(\tan x)}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x\ln(\tan x)$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x\ln(\tan x)=0\times\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x\ln(\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\cos x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}}{-\frac{\sin x}{\cos^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(1+\tan^2 x)\cos^2 x}{-\sin x\tan x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x}{\sin^2 x}=0$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}=e^0=1$$

مثال ۴. حاصل حد $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\sin x}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\sin x}=\infty^0\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\sin x}=e^{\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln(\frac{1}{x^3})=0\times\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\sin x\ln(\frac{1}{x^3})=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\frac{1}{x^3})}{\frac{1}{\sin x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\frac{1}{x^3})}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\frac{3x^2}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2\sin^2 x}{\cos x}=0$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x^3})^{\sin x}=e^0=1$$

مثال ۵. حاصل حد $\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\tan x}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\tan x}=\infty^0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\tan x}=e^{\lim_{x\to 0^+}\tan x\ln(\cot x)}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to 0^+}\tan x\ln(\cot x)$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0^+}\tan x\ln(\cot x)=0\times\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\tan x\ln(\cot x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\frac{1}{\tan x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\frac{1}{\tan x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1+\cot^2 x}{\cot x}}{-\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+\cot^2 x)\tan^2 x}{(1+\tan^2 x)\cot x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sin^2 x}\times\tan^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x}\times\cot x}=\lim_{x\to 0^+}\tan x=0$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\tan x}=e^0=1$$

مثال ۶. حاصل حد $\lim_{x\to x_0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to x_0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=1^\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x})}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x})$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x})=0\times\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x})=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}}{1}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2\sqrt{x}}\tan\sqrt{x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\tan x}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

مثال ۷. حاصل حد $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x+1})^{\csc x}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x+1})^{\csc x}=1^\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x+1})^{\csc x}=\lim_{x\to 0}e^{\csc x\ln(\frac{1}{x+1})}=e^{\lim_{x\to 0}\csc x\,\mathrm{In}(\frac{1}{x+1})}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to 0}\csc x\ln(\frac{1}{x+1})$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0}\csc x\ln(\frac{1}{x+1})=0\times\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\csc x\ln(\frac{1}{x+1})=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{1}{x+1})}{\frac{1}{\csc x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{1}{x+1})}{\sin x}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{1}{x+1})}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}}}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{\cos x}{x+1}} = -\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x+1)\cos x} = -1$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{\csc x} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

● **تمرین:** حاصل هر یک از حدود زیر را تعیین کنید.

۱) $\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{\frac{1}{\ln x}}$

۲) $\lim_{x\to 0^+}(x^2 \tan x)^{x\sin^2 x}$

۳) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^x$

۴) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{\tan x}}$

۵) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

۶) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

۷) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$

۸) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x\sin x}\right)^{\sqrt{x}}$

پی‌نوشت

1. Sequences
2. Series
3. Limit
4. Continuity
5. Calculus

۶. شما مخاطبان گرامی نیز می‌توانید تمرین بالا را انجام دهید.

7. Trigonometric Identities
8. Proof
9. Exponential Function

منابع

۱. حسابان (رشته ریاضی و فیزیک). مؤلفان: بهمن اصلاح‌پذیر، ناصر بروجردیان، ابراهیم ریحانی، محمد تقی طاهری تنجانی و وحید عالمیان. ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.

۲. ریاضیات ۲ (رشته علوم تجربی ـ ریاضی و فیزیک). مؤلفان: علی ایرانمنش، محسن جمالی، حمیدرضا ربیعی، ابراهیم ریحانی، احمد شاهورانی و وحید عالمیان. ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.

ادامهٔ مطلب صفحهٔ ۴۷

- روش‌های انتگرال‌گیری (Integration Techniques)
- جانشینی (Substitution)
- نقطهٔ میانی و مجموع ریمان ذوزنقه‌ای (Midpoint and Trapezoid Riemann Sums)
- انتگرال‌های ناسره (Improper Integrals)
- کاربردهای انتگرال (Applications of Integration)
- مساحت به وسیلهٔ افراز کردن (Areas by Slicing)
- حجم‌های دورانی (Volumes of Revolution)
- حجم سطوح متقاطع مشهور (Volumes of Known Cross Section)
- طول قوس (Arc Lenght)
- مساحت منحنی قطبی (Area of Polar Curve)
- معادلات دیفرانسیل (Differential Equations)
- دنباله‌ها و سری‌ها (Sequences and Series)
- دنباله‌ها (Sequences)
- سری‌ها (Series)
- آزمون انتگرال (Integral Test)
- آزمون مقایسه (Comparison Test)
- آزمون مقایسهٔ حدی (Limit Comparison Test)
- آزمون نسبت (Ratio Test)
- سری‌های متناوب و همگرایی مطلق (Alternating Series and Absolute Convergence)
- سری‌های توانی و فاصلهٔ همگرایی (Power Series & Interval of Convergence)
- سری تیلور و چندجمله‌ای‌ها (Taylor Series & Polynomials)
- باقی‌ماندهٔ لاگرانژ (Lagrange Remainder)
- مقدمه‌ای بر انتگرال معین (Introduction to the Definite Integral)