تاریخ ریاضی

اعداد فیبوناتچی

غلامرضا یاسی‌پور

کلیدواژه‌ها: فیبوناتچی، دنباله، نسبت طلایی، برنولی.

نویسنده‌ی کتاب کد داوینچی[1] دان براون[2]، ژاک سُنیِر[3] موزه‌دار به قتل رسیده‌ی خود را مجبور می‌کند هشت جمله‌ی اولیه‌ی دنباله‌ای از اعداد را به عنوان سر نخی در مورد سرنوشتش به جا بگذارد. این ماجرا مهارت سوفی نِووی[4] رمز شناس را می‌طلبد تا اعداد ۱۳، ۳، ۲، ۲۱، ۱، ۱، ۸، ۵ را مرتّب کند و معنای آن‌ها را دریابد. به مشهورترین دنباله‌ی اعداد در ریاضیات خوش آمدید.

دنباله‌ی اعداد تمام فیبوناتچی عبارت است از:

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ۸۹، ۱۴۴، ۲۳۳، ۳۷۷، ۶۱۰، ۹۸۷، ۱۵۹۷، ۲۵۸۴، .... ،

این دنباله به خاطر ویژگی‌های شگفت‌انگیزش بسیار معروف است. اساسی‌ترین این ویژگی‌ها ـ در واقع ویژگی مشخصه‌ای که آن‌ها را تعریف می‌کند ـ این است که هر جمله‌ی آن، مجموع دو جمله‌ی پیشین است. برای نمونه:

۸=۵+۳، ۱۳=۸+۵، ...، ۲۵۸۴=۱۵۸۷+۹۸۷

و غیره. در این مورد تمام چیزی که باید به خاطر بسپریم آغاز کردن با دو عدد ۱ و ۱ است، در این صورت می‌توان بقیه‌ی دنباله را بدون درنگ تولید کرد. دنباله‌ی فیبوناتچی در طبیعت به صورت تعداد پیچ‌های تشکیل شده از تعداد دانه‌های واقع در مارپیچ گل آفتابگردان یافت می‌شود (برای مثال، ۳۴ در یک جهت، ۵۵ در جهت دیگر)، و نسبت‌های اتاق و نسبت‌های ساختمان‌هایی یافت می‌شود که معمارها طراحی کرده‌اند. آهنگ‌سازان کلاسیک از آن به عنوان الهامی با سوئیت رقص بارتوک[5] که معتقدند به این دنباله مرتبط است، استفاده کرده‌اند. در موسیقی معاصر، برایان ترانسو[6] (معروف به BT) نیز در آلبوم «این جهان دوگانه[7]» قطعه‌ای دارد موسوم به ۱/۶۱۸ که سلامی به نسبت بنیادین اعداد فیبوناتچی است؛ عددی که اندکی بعد به بحث در مورد آن خواهیم پرداخت.

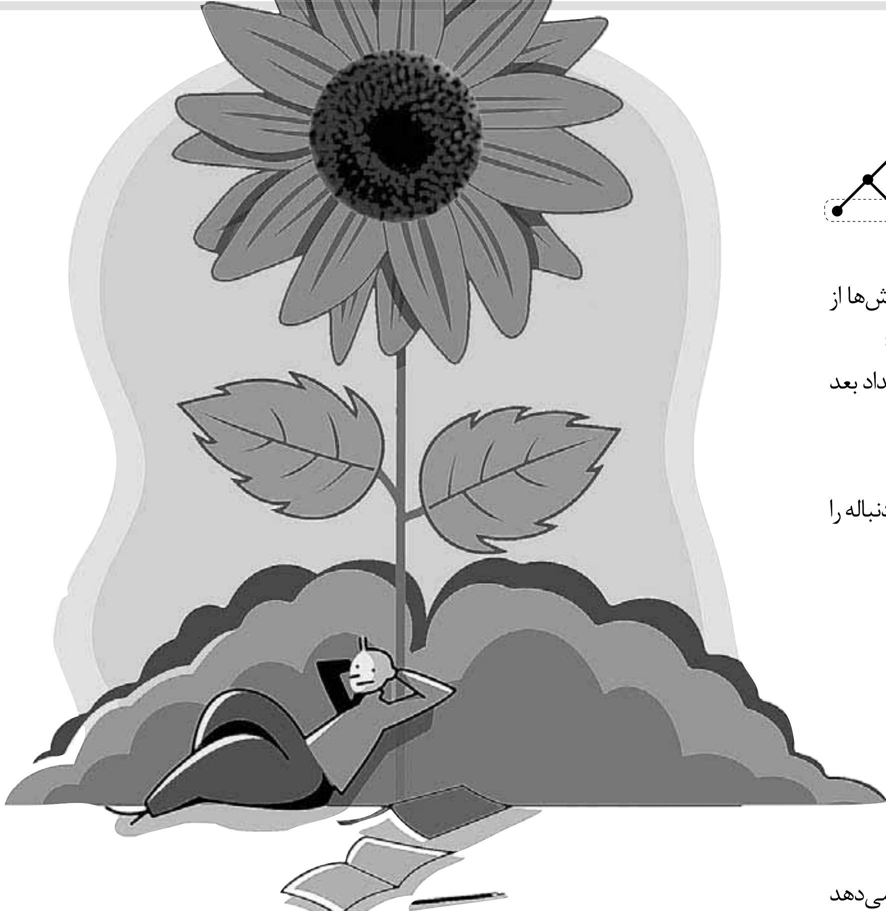
مبدأها. دنباله‌ی فیبوناتچی در کتاب محاسبات[8] که توسط لئوناردوی پیزایی[9] (فیبوناتچی[10]) به سال ۱۲۰۲ انتشار یافت، ظاهر شد، اما این اعداد احتمالاً پیش از آن در هندوستان شناخته شده بودند. فیبوناتچی در این مورد، مسئله‌ی زاد و ولد خرگوش‌ها را مطرح کرد:

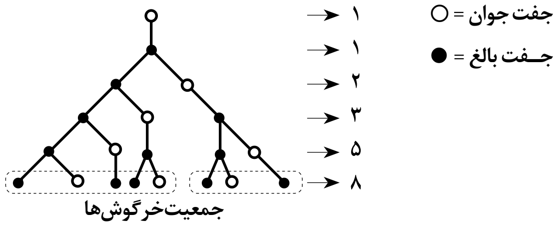
جفت‌های خرگوش‌های بالغ، جفت‌های خرگوش‌های جوان را در هر ماه تولید می‌کنند. در آغاز سال یک جفت خرگوش جوان موجود است که در آخر ماه اول بالغ می‌شوند و در پایان ماه دوم زوج بالغ هنوز وجود دارند و یک جفت خرگوش جوان تولید کرده‌اند. این فرایند بالغ شدن و تولید کردن ادامه می‌یابد. البتّه هیچ یک از جفت‌های خرگوش‌ها،معجزه‌آسا،نمی‌میرند.

فیبوناتچی می‌خواست بداند در پایان سال چند جفت خرگوش وجود خواهند داشت. این تولید را می‌توان با «شجره‌ی خانوادگی» نشان داد. اجازه دهید نگاهی به تعداد جفت‌ها در پایان ماه مه (پنجمین ماه) بیفکنیم. ملاحظه می‌کنیم که تعداد جفت‌ها برابر ۸ است. در این چینش شجره‌ی خانوادگی، گروه سمت چپ، یعنی:

○ ● ● ○ ●

کپی ردیف کامل بالاست و گروه سمت راست، یعنی ● ○ ● کپی ردیف بالای آن است.





این موضوع نشان می‌دهد که تولد جفت‌های خرگوش‌ها از معادله‌ی مبنایی فیبوناتچی، یعنی رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند:

تعداد بعد از (n-۲) ماه + تعداد بعد از (n-۱) ماه = تعداد بعد از n ماه

ویژگی‌ها. اجازه دهید ببینیم در صورتی که جمله‌های دنباله را جمع کنیم چه اتفاقی می‌افتد:

۱+۱=۲

۱+۱+۲=۴

۱+۱+۲+۳=۷

۱+۱+۲+۳+۵=۱۲

۱+۱+۲+۳+۵+۸=۲۰

۱+۱+۲+۳+۵+۸+۱۳=۳۳

...

نتیجه‌ی هریک از مجموع‌های فوق نیز دنباله‌ای تشکیل می‌دهد که می‌توانیم آن را زیر دنباله‌ی اصلی، امّا به اندازه‌ی سه جمله انتقال یافته به جلو، قرار دهیم:

فیبوناتچی	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳۴	۵۵	۸۹	...
مجموع				۲	۴	۷	۱۲	۲۰	۳۳	۵۴	۸۸	...

یعنی آشکار می‌شود که مجموع n جمله‌ی دنباله‌ی فیبوناتچی ۱ واحد کمتر از جمله‌ای است که دو شماره بعد از n قرار دارد. به این ترتیب، اگر پاسخ جمع

۱+۱+۲+ ... +۹۸۷

را بخواهیم، تنها ۱ را از ۲۵۸۴ کم می‌کنیم و ۲۵۸۳ را به‌دست می‌آوریم. هرگاه اعداد دنباله را یک در میان همچون

۱+۲+۵+۱۳+۳۴

جمع کنیم، پاسخ ۵۵ را به دست می‌آوریم که خود یک عدد فیبوناتچی است؛ و اگر یک در میان دیگر همچون

۱+۳+۸+۲۱+۵۵

را در نظر بگیریم، پاسخ ۸۸ می‌شود که از یک عدد فیبوناتچی ۱ واحد کمتر است.

مربع‌های دنباله‌ی اعداد فیبوناتچی نیز جالب‌اند. دنباله‌ی جدیدی با ضرب هر عدد فیبوناتچی در خودش و جمع آن‌ها، به‌دست می‌آوریم:

فیبوناتچی	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳۴	۵۵	...
مربع‌ها	۱	۱	۴	۹	۲۵	۶۴	۱۶۹	۴۴۱	۱۱۵۶	۳۰۲۵	...
جمع مربع‌ها	۱	۲	۶	۱۵	۴۰	۱۰۴	۲۷۳	۷۱۴	۱۸۷۰	۴۸۹۵	...

در این حالت، جمع تمام مربع‌ها تا عضو nام، برابر ضرب عضو n ام دنباله‌ی اصلی فیبوناتچی در عدد بعد آن است،

۱+۱+۴+۹+۲۵+۶۴+۱۶۹=۲۷۳=۱۳×۲۱

اعداد فیبوناتچی هنگامی که منتظرشان نیستیم نیز رخ می‌دهند. فرض می‌کنیم کیفی محتوی مخلوطی از سکه‌های ۱ و ۲ پوندی داریم. در صورتی که بخواهیم تعداد راه‌هایی را محاسبه کنیم که با آن‌ها بتوانیم سکه‌ها را چنان از کیف بیرون بیاوریم که مجموعشان مقدار مشخصی بر حسب پوند باشد، چه؟ در این مسئله ترتیب عملکردها اهمیت دارد. مقدار ۴ پوند سکه‌ها را از کیف بیرون بیاوریم، می‌تواند به یکی از طرق زیر باشد:

۲+۲ ; ۲+۱+۱ ; ۱+۲+۱ ; ۱+۱+۲ ; ۱+۱+۱+۱

به این ترتیب، ۵ راه وجود دارد و این مقدار نظیر عدد پنجم فیبوناتچی است. اگر ۲۰ پوند بیرون بیاوریم، ۶۷۶۵ طریق برای بیرون آوردن سکه‌های ۱ و ۲ پوندی موجوداست که نظیر ۲۱امین عدد فیبوناتچی است! این موضوع، قدرت ایده‌های ساده‌ی ریاضی را نشان می‌دهد.

نسبت طلایی: اگر نگاهی به نسبت جمله‌هایی که از دنباله‌ی فیبوناتچی با تقسیم یک جمله بر جمله‌ی پیشین آن ساخته می‌شوند بیفکنیم، ویژگی جالب دیگری از اعداد فیبوناتچی را درمی‌یابیم. بگذارید این کار را در مورد چند جمله، یعنی ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵ انجام دهیم:

۱/۱	۲/۱	۳/۲	۵/۳	۸/۵	۱۳/۸	۲۱/۱۳	۳۴/۲۱	۵۵/۳۴
۱.۰۰۰	۲.۰۰۰	۱.۵۰۰	۱.۳۳۳	۱.۶۰۰	۱.۶۲۵	۱.۶۱۵	۱.۶۱۹	۱.۶۱۷

چندی نمی‌گذرد که نسبت‌های مورد بحث به مقداری نزدیک می‌شود که به عنوان نسبت طلایی[۱۱] شناخته می‌شود؛ عددی مشهور در ریاضیات که با حرف یونانی φ مشخص شده است. این عدد در میان ثابت‌های مهم ریاضی از قبیل π و e جای دارد، و مقدار دقیق آن: $\varphi = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است که می‌تواند به تقریب با دهدهی ...۱.۶۱۸۰۳۳۹۸۸ نمایش داده شود. با اندکی بررسی بیش‌تر، می‌توان نشان داد که هر عدد فیبوناتچی را می‌توان بر حسب φ نوشت.

با وجود شناخت مفصّل از دنباله‌ی فیبوناتچی، هنوز در مورد آن به پرسش‌های بسیاری پاسخ داده نشده است. چند عدد اوّل اوّلیهٔ دنباله‌ی فیبوناتچی عبارت‌اند از ۲، ۳، ۵، ۱۳، ۸۹، ۲۳۳، ۱۵۹۷ ـ اما هنوز نمی‌دانیم بی‌نهایت اوّل در این دنباله موجود است یا خیر.

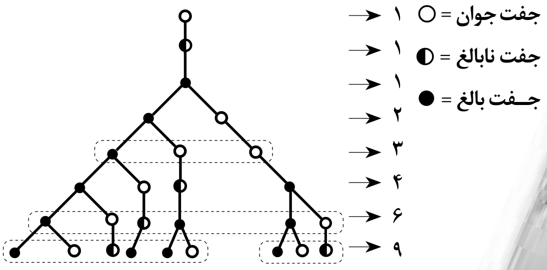
شباهت‌های خانوادگی. دنباله‌ی فیبوناتچی مفتخر است که در میان خانواده‌ای با برد وسیعی از دنباله‌های مشابه جای دارد. یکی از اعضای برجسته‌ی این خانواده، عضوی است که می‌توان آن را به مسئله‌ی جمعیت گلّه مرتبط کرد. به جای جفت‌های خرگوش‌های فیبوناتچی که در یک ماه از جفت جوان به جفت بالغی تبدیل می‌شوند که بار دیگر تولید را شروع می‌کنند، مرحله‌ی میانه‌ای در فرایند بلوغ موجود است که در آن جفت‌های گلّه از جفت‌های جوان به جفت‌های نابالغ سپس به جفت‌های بالغ پیشروی می‌کنند و به این ترتیب، تنها جفت‌های بالغ‌اند که توان تولید مثل دارند. در این صورت دنباله‌ی گلّه عبارت است از:

۱، ۱، ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۹، ۱۳، ۱۹، ۲۸، ۴۱، ۶۰، ۸۸، ۱۲۹، ۱۸۹، ۲۷۷، ۴۰۶، ۵۹۵...

به این ترتیب، برای مثال تولید مورد بحث مقداری مانند ۱۳+۲۸=۴۱ و ۱۹+۴۱=۶۰ را حذف می‌کند. این دنباله ویژگی‌هایی مشابه دنباله‌ی فیبوناتچی دارد. در مورد دنباله‌ی گله، نسبت‌های به دست آمده از تقسیم یک جمله به جمله‌ی پیشین آن، به حدّی تقریب می‌کنند که با حرف یونانی پِسی، ψ نمایش داده می‌شود:

ψ=۱/۴۶۵۵۷۱۲۳۱۸۷۶۷۶۸۰۲۶۶۵...

این نسبت به «نسبت اَبَر طلایی»[۱۲] موسوم است.



جمعیت گلّه

چند تاریخچه

۱۲۰۲ میلادی: لئوناردوی پیزایی و اعداد فیبوناتچی را انتشار داد.

۱۷۲۴ میلادی: دانیل بِرنولی اعداد دنباله‌ی فیبوناتچی را بر حسب نسبت طلایی بیان کرد.

۱۹۲۳ میلادی: بارتوک «سوئیت رقص» خود را با این اعتقاد که ملهم از اعداد فیبوناتچی بوده است، ساخت.

۱۹۶۳ میلادی: فصلنامه‌ی فیوناتچی مجلّه‌ای مختص نظریه‌ی اعداد دنباله‌ی فیبوناتچی، تأسیس شد.

۲۰۰۷ میلادی: پیتر رندال ـ پِیج، مجسمه‌ساز، پیکره‌ی ۷۰ تُنی دانه را بر مبنای دنباله‌ی فیبوناتچی برای پروژه‌ی ایدن در کورن وال بریتانیا خلق کرد.

پی‌نوشت.........................

1.The DaVinci Code
2. Dan Brown
3. Jacques Saunière
4. Sophie Neveu
5. Bartok's Dance Suite
6. Brian Transeau
7. This Binary Universe
8. Liber Abaci
9. Leonardo of Pisa
10. Fibonacci
11. golden ratio
12. supergolden ratio