چکش مجله رشد آموزش ریاضی، حافظه مرا به صدا درآورد

نیم مقاله

علی‌اکبر جاویدمهر
دبیر بازنشسته، قم

اشاره

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

کلیدواژه‌ها: حل مسئله، تابع، حسابان، کمترین مقدار تابع.

سرانجام چکش مجله رشد آموزش ریاضی ۱۰۴ زنگ حافظه مرا به صدا درآورد.

صفحه ۳۱ مجله رشد آموزش ریاضی ۱۰۴، روایت معلمان یک مسئله و چند راه‌حل، علی زمانی، کارشناس ارشد ریاضی، دامغان

مسئله (تمرین ۱۲ صفحه ۲۴ کتاب حسابان)

کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\frac{2}{x}$ را به ازای مقادیر مثبت x پیدا کنید؟

چهارده روش ارائه شده بسیار جالب‌اند، از آقای علی زمانی که در تهیه این مقاله زحمت کشیده‌اند، سپاسگزارم. البته من هنوز کتاب حسابان جدیدالتألیف را ندیده‌ام و نمی‌دانم که آیا دانش‌آموزان با مفاهیمی که در این روش‌ها ارائه شده از قبل آشنایی دارند؟

برای مثال آیا آزمون مشتق اول یا دوم، معکوس‌پذیری، تعیین برد تابع، رسم نمودار تابع $y=x+\frac{2}{x}$ به کمک رسم نمودار توابع $y_1=x$ و $y_2=\frac{2}{x}$، فراگرفته‌اند؟ بنابراین قضاوت در مورد معایب و مزایای این روش‌ها برایم دشوار است. ولی آنچه که در وهله اول در برخورد با این مسئله، زنگ حافظه مرا به صدا درمی‌آورد و برایم مهم است برخورد دانش‌آموزان (شاید همکاران) با مسائل مشابهی نظیر

$$y=x+\frac{3}{x},\ y=2x+\frac{3}{x},\ y=3x+\frac{1}{x},\ y=x^2+\frac{2}{x^2},\ y=x+\frac{2}{x^2},\dots$$

که در همه آن‌ها x مثبت است، می‌باشد.

به عبارتی پیش خود فکر می‌کنم اگر دانش‌آموزی در همان جلسه درس محاسبه مینیموم چنین تابع‌هایی را از من بپرسد، باید آمادگی پاسخگویی به آن را داشته باشم. لذا به خودم پیشنهاد می‌کنم بهتر است قبل از تدریس هر بخش حتماً آن بخش را به دقت مطالعه کن.

در رابطه با مقاله آقای علی زمانی، دو روش دیگر، روش پانزدهم، روش شانزدهم، و حالت کلی مسئله، توسط اینجانب تهیه و تنظیم گردیده که به ضمیمه حضورتان تقدیم می‌گردد. امید است که مورد توجه و عنایت و هیئت تحریریه مجله رشد ریاضی قرار گرفته و قابلیت درج در مجله رشد را داشته باشد.

روش پانزدهم: روش آزمون مشتق دوم، در روش چهاردهم از آزمون مشتق اول استفاده شده و این کافی خواهد بود.

از آزمون مشتق دوم نیز می‌توان کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\frac{2}{x}$ را به‌دست آورد.

$f'(x)=1-\frac{2}{x^2}=0\Rightarrow x=\sqrt{2}$ نقطه بحرانی f،

$$f''(x)=\frac{4}{x^3}>0\Rightarrow f''(\sqrt{2})=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}>0$$

لذا طبق آزمون مشتق دوم، f در نقطه $x=\sqrt{2}$ دارای مینیموم نسبی و مطلق $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$ می‌باشد.

روش شانزدهم: روش تعیین برد f (دامنه f^{-1})

مشتق تابع $f'(x)=1-\frac{2}{x^2}$ در نقطه $x=\sqrt{2}$ از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد لذا تابع f در فاصله $(0,\sqrt{2})$ اکیداً نزولی و در فاصله $[\sqrt{2},+\infty)$ اکیداً صعودی است، بنابراین تابع f در هر یک از این فواصل معکوس‌پذیر است.

$$y=x+\frac{2}{x}\Rightarrow x=f^{-1}(y)=\frac{1}{2}(y\pm\sqrt{y^2-8})$$

$$y^2-8\geq 0\Rightarrow y\geq 2\sqrt{2}\Rightarrow R_f=[2\sqrt{2},+\infty)$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

مجموعه برد f کمترین مقدار تابع را در بازه $(0,+\infty)$ مشخص می‌کند. بدیهی است که

$$f:(0,\sqrt{2}]\to[2\sqrt{2},+\infty),\ f(x)=x+\frac{2}{x}$$

$$f^{-1}:[2\sqrt{2},+\infty)\to(0,\sqrt{2}],\ f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2-8})$$

$$f:[\sqrt{2},+\infty)\to[2\sqrt{2},+\infty),\ f(x)=x+\frac{2}{x}$$

$$f^{-1}:[2\sqrt{2},+\infty)\to[\sqrt{2},+\infty),\ f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2-8})$$

اگر به دقت به روش‌های اول، سوم، چهارم، آقای علی زمانی، توجه کنیم، مشاهده می‌کنیم که روش شانزدهم حاوی هر سه روش فوق می‌باشد که از رابطه $x=f^{-1}(y)=\frac{y}{2}\pm\frac{\sqrt{y^2-8}}{2}$ ناشی می‌شود. و می‌توان هر سه روش را تحت عنوان یک روش بیان کرد.

البته معلوم نیست که روش‌های پانزدهم و شانزدهم اینجانب هم چندان جالب باشد.

مسئله کلی: مسئله آقای علی زمانی حالت خاصی از مسئله زیر است.

مسئله: اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و m و n، دو عدد طبیعی باشد، مینیموم تابع $f(x)=ax^m+\frac{b}{x^n}$ را به ازای مقادیر مثبت x پیدا کنید؟

پاسخ: وقتی x مثبت است، بنابر نامساوی واسطه حسابی و هندسی، می‌توان نوشت

$$f(x)=ax^m+\frac{b}{x^n}=n\frac{ax^m}{n}+m\frac{b}{mx^n}\geq$$

$$(m+n)\sqrt[m+n]{\frac{a^nb^m}{n^nm^m}\times\frac{x^{mn}}{a^{mn}}}=(m+n)\sqrt[m+n]{\frac{a^nb^m}{n^nm^m}}$$

تساوی وقتی برقرار است که $\frac{ax^m}{n}=\frac{b}{mx^n}$، و از آنجا $x=\sqrt[m+n]{\frac{nb}{ma}}$ لذا تابع f به ازای همین مقدار x مینیموم خواهد بود.

با قراردادن $a=1$، $b=2$، $m=n=1$، به مسئله آقای علی زمانی می‌رسیم، از آقای زمانی تقاضا دارم پاسخ مسئله کلی را با همان روش‌ها برای خوانندگان مجله رشد آموزش ریاضی ارسال دارند.

بدیهی است با قراردادن مقادیر مثبت و دلخواه برای a و b و اعداد طبیعی m و n در مسئله فوق، مسائل جالب و متنوعی را می‌توان طرح کرد.