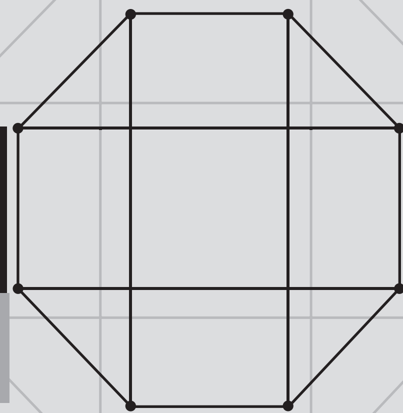
گراف‌های منتظم و کامل

حمیدرضا امیری



کلید واژه‌ها:
گراف منتظم، گراف کامل، تعداد یال‌های گراف کامل، مسائل گراف‌های کامل و منتظم

گراف منتظم

اگر در یک گراف از مرتبه‌ی p[۱]، درجه‌ی[۲] همه‌ی رأس‌ها با هم برابر باشند، چنین گرافی منتظم است و اگر درجه‌ی رأس‌ها برابر با عدد حسابیِ r باشند، آن را گراف r– منتظم می‌نامیم. به بیان دیگر، اگر بزرگ‌ترین درجه‌ی رئوس یک گراف را ماکزیمم درجه‌ی گراف و کوچک‌ترین درجه‌ی رئوس یک گراف را مینی‌مم درجه‌ی گراف بنامیم، و آن‌ها را به ترتیب با Δ و δ نمایش دهیم، داریم:

G گرافی r– منتظم است. $\Leftrightarrow \Delta = \delta = r$

از طرف دیگر، با توجه به قضیه‌ی کتاب درسی که بیان می‌کند: «مجموع درجات رئوس یک گراف از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی[۳] q همواره دو برابر تعداد یال‌های آن گراف است»، می‌توان نتیجه گرفت که «در هرگراف r– منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، همواره داریم: $pr = ۲q$». بنابراین در هرگراف r– منتظم با مفروض بودنِ r، همواره رابطه‌ای بین q و p برقرار است و اگر یک معادله‌ی دیگر برحسب p و q مفروض باشد، با حل دستگاه دو معادله، دو مجهول p و q محاسبه می‌شوند.

مثال: در یک گراف ۴– منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، داریم: $۵p - ۳q = -۹$. مجموع درجات رئوسِ این گراف را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} ۴p = ۲q \\ ۵p - ۳q = -۹ \end{cases} \overset{q=۲p}{\Longrightarrow} ۵p - ۶p = -۹ \Rightarrow p = ۹$$

$$q = ۲p = ۲\times ۹ = ۱۸$$

$\Rightarrow ۲q = ۳۶$ مجموع درجات رئوس

گراف کامل

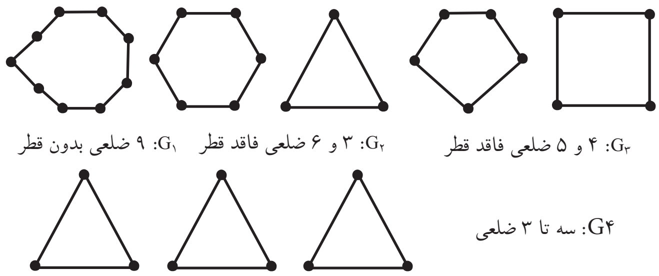
گراف‌های کامل، دسته‌ی خاصی از گراف‌های منتظم محسوب می‌شوند و همان‌طور که از اسم آن‌ها می‌توان دریافت، گراف‌هایی هستند که اندازه‌ی آن‌ها کامل است. گراف کامل از مرتبه‌ی p که با K_p نمایش داده می‌شود، گرافی است که درجه‌ی هر رأسِ آن $(p-۱)$ باشد. به عبارت دیگر، «هرگراف $(p-۱)$ – منتظم از مرتبه‌ی p را کامل می‌گوییم». بنابراین در هر گراف کامل از مرتبه‌ی P داریم:

$$rp = ۲q \overset{r=p-۱}{\Longrightarrow} p(p-۱) = ۲q$$

$$\Rightarrow q = \frac{p(p-۱)}{۲}$$

همان‌طورکه ملاحظه می‌کنید، q حداکثر مقدار خود را دارد. زیرا q تعداد یال‌های یک گراف از مرتبه‌ی p است که چون مجموعه‌ی یال‌های یک گراف شامل زیرمجموعه‌های دو عضویِ مجموعه‌ی رأس‌های آن است و تعداد کل زیرمجموعه‌های دو عضویِ یک مجموعه‌ی p عضوی برابر است با: $\binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$، پس q در گراف کامل، حداکثر است.

یک نکته‌ی مهم: گراف‌های r– منتظم از مرتبه‌ی p که $r<p-۱$، در بسیاری از موارد منحصر به‌فرد نیستند، ولی گراف‌های کامل از هر مرتبه، منحصر به‌فردند. برای مثال، گراف‌های ۲– منتظم از مرتبه‌ی ۹ را رسم کرده‌ایم که تعداد آن‌ها ۴ عدد است، اما تعداد گراف‌های کامل از مرتبه‌ی ۹ فقط یکی است.



(G_2 و G_3 گراف‌های دو بخشی و G_4 گراف سه‌بخشی هستند.)

تمرین: تعداد گراف‌های ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۱۲ را بیابید و آن‌ها را رسم کنید. (**جواب:** ۴ گراف)

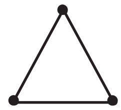
در جدول زیر، به‌دلیل اهمیت و موارد استفاده‌ی بسیار، تعداد یال‌های گراف‌های کامل از K_1 تا K_{11} آمده است:

گراف K_p	$q=\frac{p(p-۱)}{۲}=\binom{p}{۲}$ (تعداد یال‌ها)
K_1	۰
K_2	$\binom{۲}{۲}=۱$
K_3	$\binom{۳}{۲}=۳$
K_4	$\binom{۴}{۲}=۶$
K_5	$\binom{۵}{۲}=۱۰$
K_6	$\binom{۶}{۲}=۱۵$
K_7	$\binom{۷}{۲}=۲۱$
K_8	$\binom{۸}{۲}=۲۸$
K_9	$\binom{۹}{۲}=۳۶$
K_{10}	$\binom{۱۰}{۲}=۴۵$
K_{11}	$\binom{۱۱}{۲}=۵۵$

مثال: در گراف کامل K_p، اگر داشته باشیم: $p = q$، این گراف را رسم کنید.

$$\begin{cases} q=\frac{p(p-۱)}{۲} \\ q=p \end{cases} \Rightarrow p=\frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow$$

$$۲p=p(p-۱) \Rightarrow (p-۱)\overset{p\neq ۰}{=}۲ \Rightarrow p=۳$$



مثال: اگر گراف G دارای ۳۸ یال باشد، این گراف حداقل چند رأس دارد؟

حل: برای پاسخ‌گویی به این نوع سؤال‌ها کافی است مشخص کنیم تعداد یال‌های گراف موردنظر بین تعداد یال‌های کدام دو گرافِ کامل قرار دارد! در این مثال داریم: $\binom{۹}{۲}<۳۸<\binom{۱۰}{۲}$. به عبارت دیگر، با ۹ رأس حداکثر ۳۶ یال می‌توان تعریف کرد. لذا برای تعریف دو یال دیگر، به‌حداقل یک رأسِ دیگر نیاز داریم. پس جواب این سؤال عدد ۱۰ است. درواقع گراف G با نزدیک‌ترین گراف کامل از نظر تعداد یال مقایسه شد.

تذکر مهم: مقایسه کردنِ یک گراف با گراف کاملِ نزدیک به آن، روشی است که مسائل دیگری را نیز می‌توان توسطِ آن حل کرد. چون گراف‌های کامل گراف‌های خاص و منحصر به‌فردی هستند، گاهی حذفِ یک یا چند یال از یک گراف کامل می‌تواند راه‌گشا باشد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۹ دارای ۳۵ یال است، این گراف چند رأس از درجه‌ی ۸ (از درجه‌ی ماکزیمم) و چند رأس از درجه‌ی مینی‌مم دارد؟

حل: می‌دانیم K_9 دارای ۳۶ یال است، لذا اگر یک یال از K_9 حذف کنیم، گراف G حاصل می‌شود. واضح است که اگر از K_9 یک یال حذف شود، دو رأسِ آن آسیب می‌بینند و از درجه‌ی ۸ به درجه‌ی ۷ تنزّل پیدا می‌کنند! بنابراین، گراف G دارای ۷ = ۲ − ۹ رأس از درجه‌ی ماکزیمم و دو رأس از درجه‌ی مینی‌مم دارد.

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۸ دارای ۲۶ یال است. این گراف حداقل و حداکثر چند رأس از درجه‌ی ماکزیمم است؟

حل: در این مثال باید ۲ یال از گراف K_8 حذف کنیم تا گراف G حاصل شود. حذف این دو یال به دو صورت امکان‌پذیر است: یا هر دو یال را از یک رأس حذف کنیم (۳ رأس آسیب می‌بیند)، و یا دو یال را طوری حذف کنیم که رأس مشترک نداشته باشند (۴ رأس آسیب می‌بیند).

در حالت اول از یک رأس دو درجه و از دو رأس دیگر هرکدام ۱ درجه کم می‌شود و گرافی دارای ۵ رأسِ ماکزیمم (از درجه‌ی ۷) و ۱ رأس مینی‌مم (از درجه‌ی ۵) خواهیم داشت.

در حالت دوم نیز تعداد رأس‌های ماکزیمم (از درجه‌ی ۷) برابر است با: ۴ = ۴–۸. ۴ رأس نیز از درجه‌ی مینی‌مم (از درجه‌ی ۶) در گراف موجود است.

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۱۰ دارای ۴۲ یال است. اگر در این گراف داشته باشیم: $1=(\Delta-\delta)$، در این‌صورت گراف G چند رأس ماکزی‌مم و چند رأس مینی‌مم دارد؟

حل: بدیهی است که اگر از K_{10} که ۴۵ یال دارد، ۳ یال حذف کنیم، گرافی با تعداد یال‌های برابر با G به‌دست می‌آید. اما چون طبق فرض $\Delta-\delta=1$، حذف این سه یال باید به‌گونه‌ای باشد که از هیچ رأسی دو یال حذف نشود. زیرا در این‌صورت خواهیم داشت: $\Delta-\delta=2$ که خلاف فرض است. پس سه یال حذف شده نباید رأس مشترک داشته باشند که در این‌صورت، درجه‌ی ۶ یال هرکدام ۱ درجه کاهش می‌یابد و ۴ = ۶–۱۰ رأس از درجه‌ی ماکزیمم (از درجه‌ی ۹) و ۶ رأس از درجه‌ی مینی‌مم (از درجه‌ی ۸) در گراف G موجود است.

تمرین: مثال قبل را با فرض $\Delta-\delta=2$ حل کنید.

تذکر مهم: یکی دیگر از کاربردهای گراف‌های کامل در تعیین ماکزیمم تعداد یال‌های یک گراف چندبخشی است که در مثال‌های زیر به آن می‌پردازیم.

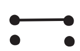
مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۷ گرافی دو بخشی است. این گراف حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

حل: توجه داریم که رأس ایزوله یا تنها، یک بخش محسوب می‌شود. برای مثال، گراف‌های • • و ⁄ هر یک دو بخشی هستند. در این مثال اگر بخواهیم گرافی دوبخشی با ۷ رأس و حداکثر یال داشته باشیم، کافی است یک رأس از ۷ رأس را ایزوله کنیم و با ۶ رأس دیگر یک گراف کامل (K_6) بسازیم. در این حالت $\binom{6}{2}=15$ یال برای گراف حاصل می‌شود که این تعداد یال ماکزیمم خواهد بود.

تمرین: گراف G از مرتبه‌ی ۱۰ از سه بخش تشکیل یافته است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟ (**جواب:** $\binom{8}{2}=28$)

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۱۲ فقط دارای دو رأس ایزوله است و از چهار بخش تشکیل یافته است. این گراف حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

حل: از ۱۲ رأسِ گراف G، دو رأس را به‌صورت ایزوله کنار می‌گذاریم و بین دو رأس دیگر یک یال رسم می‌کنیم و با ۸ رأس باقی‌مانده، یک گراف کامل تشکیل می‌دهیم. در این حالت، گراف G دارای ماکزیمم تعداد یال، یعنی $\binom{8}{2}+1=29$ یال است.

گراف G ← K_8 

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۱۴ دارای چهار بخش است و داریم: $\delta=1$. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

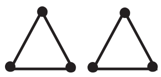
حل: گراف G طبق فرض رأس ایزوله ندارد و به‌صورت زیر است.

گراف G → K_8 

$$\binom{8}{2}+3=31 \text{ : تعداد یال‌های G}$$

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۱۸ دارای سه بخش است. اگر در این گراف داشته باشیم: $\delta=2$، در این‌صورت Gحداکثر چند یال می‌تواند باشد؟

حل: طبق فرض، گراف G رأس ایزوله و رأس از درجه‌ی یک ندارد و باید به شکل زیر باشد:

گراف G ← K_{12} 

$$\binom{12}{2}+6=66+6=72 \text{ : تعداد یال‌های G}$$

مثال: گراف G از مرتبه‌ی P_1 دارای K بخش است. اگر در این گراف داشته باشیم: $\delta=P_2$، در این‌صورت G حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

حل: گراف G باید دارای $(K-1)$ بخش با حداکثر یال و $\delta=P_2$ باشد که $(K-1)$ گراف کامل از مرتبه‌ی(P_2+1) است و یک بخشِ کامل از مرتبه‌ی رأس‌های باقی مانده که تعداد رأس‌های باقی‌مانده برابر است با:

$$P=P_1-\left[(K-1)\times(P_2+1)\right]$$

حداکثر تعداد یال‌های چنین گرافِ K بخشی برابر است با:

$$\binom{P}{2}+(K-1)\times\binom{P_2+1}{2} \text{ : تعداد یال‌های G}$$

تمرین: از گراف‌های کامل برای به‌دست آوردن شرط هم‌بندی و ناهم‌بندی چگونه می‌توان استفاده کرد؟

پی‌نوشت

۱. مرتبه‌ی گراف: تعداد رأس‌های یک گراف را مرتبه‌ی آن گراف می‌گوییم.

۲. درجه‌ی یک رأس: تعداد یال‌هایی که از یک رأس عبور می‌کنند، درجه‌ی آن رأس نامیده می‌شود.

۳. اندازه‌ی گراف: تعداد یال‌های یک گراف را اندازه‌ی آن گراف می‌گوییم.