# گزیده‌ای از مسائل المپیادهای ریاضی لنینگراد

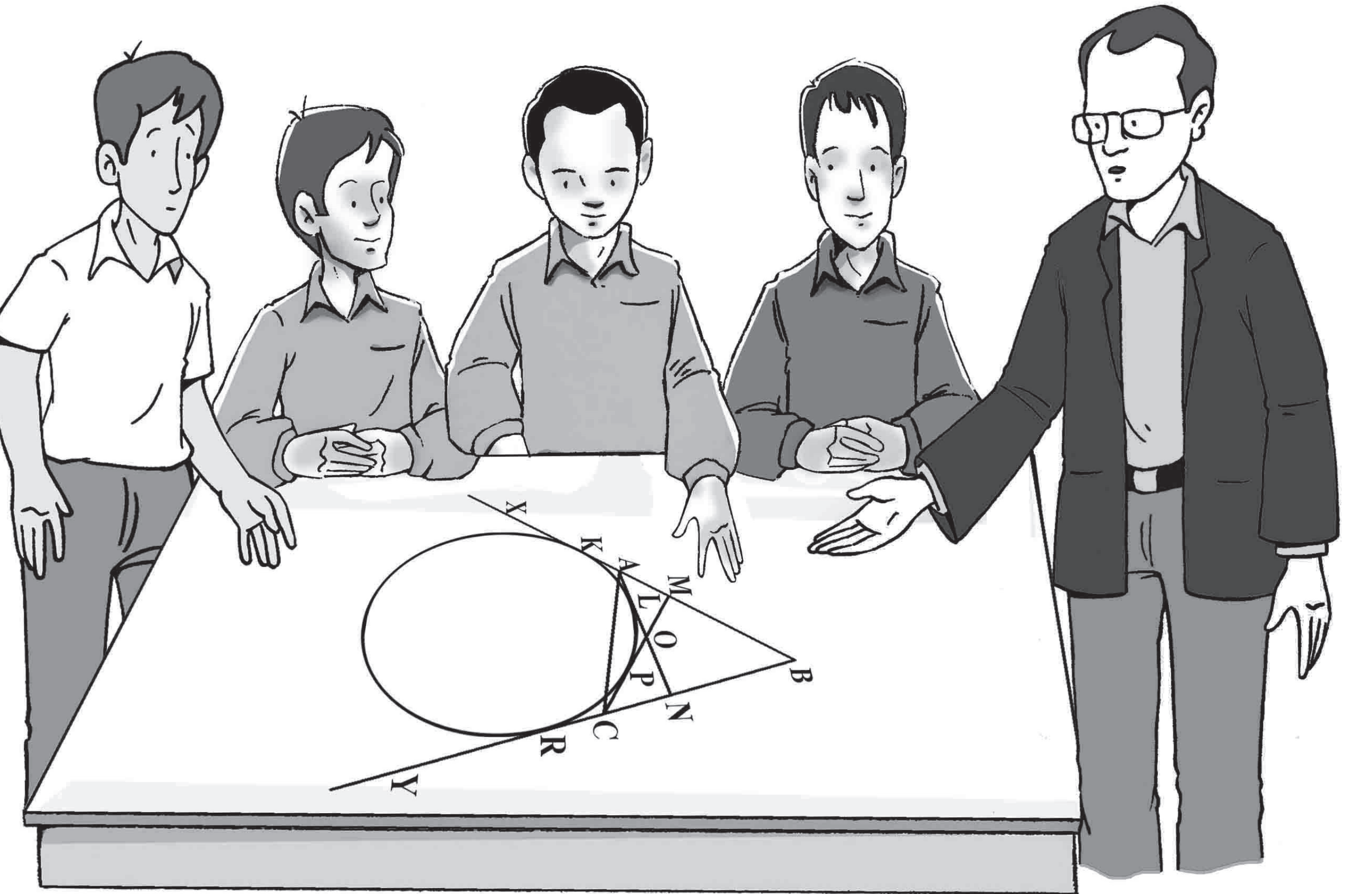
هوشنگ شرقی

**کلید واژه‌ها:** المپیاد لنینگراد، صورت مسائل المپیادهای لنینگراد، حل مسائل المپیادهای لنینگراد.

«سن پترزبورگ» نام پایتخت روسیه‌ی تزاری بود که پس از انقلاب ۱۹۱۷ و تغییر رژیم، به «لنینگراد» تغییر نام یافت. تا قبل از فروپاشی این اتحادیه (شوروی) و تجزیه‌ی آن به کشورهای گوناگون، المپیادهای ریاضی به‌طور مستقل درهریک از جمهوری‌ها برگزار می‌شد و برگزیدگان در قالب تیم‌هایی در المپیاد سراسری اتحاد شوروی شرکت می‌کردند. تیم نهایی المپیاد ریاضی این کشور نیز از دل این رقابت‌ها انتخاب می‌شد. با این توضیحات می‌توان حدس زد که سطح سؤالات این آزمون‌ها بسیار قوی بوده است و همین طور هم بود.

درباره‌ی تاریخچه‌ی المپیاد ریاضی در شوروی سابق و روسیه و جمهوری‌های استقلال‌یافته‌ی بعدی بسیار می‌توان نوشت و امیدوارم در فرصتی دیگر بتوانم به طور مستقل به این موضوع بپردازم. ولی همین‌قدر باید گفت که کشور شوروی از بنیان‌گذاران المپیاد بین‌المللی ریاضی در سال ۱۹۵۹ بود و از نخستین دوره تا زمان فروپاشی، در تمام المپیادها شرکت داشت. همواره هم جزو ۱۰ تیم برتر این رقابت‌ها بود. تنها در فاصله‌ی سال‌های ۱۹۶۳ تا ۱۹۶۷ این کشور در پنج دوره‌ی متوالی مقام نخست این رقابت‌ها را از آن خود کرد و در مجموع چهارده بار (تا سال ۱۹۹۳ که با نام اتحاد شوروی شرکت کرده است) مقام نخست و شش بار مقام دوم را کسب کرد!

پس از فروپاشی شوروی سابق نیز، کشور روسیه و سایر جمهوری‌های شوروی سابق توانسته‌اند موفقیت‌های بسیاری در المپیاد بین‌المللی ریاضی به‌دست آورند. مسائلی که درجریان رقابت‌های این جمهوری‌ها طی سال‌های متمادی مطرح شده‌اند، منبع عظیمی از مسائل ناب ریاضی هستند که متأسفانه دست‌رسی کاملی به آن‌ها وجود ندارد. ای کاش می‌شد مجموعه‌ی همه‌ی آن‌ها را جمع‌آوری و طبقه‌بندی کرد و در اختیار علاقه‌مندان قرار داد. کتاب «المپیادهای ریاضی لنینگراد» که مجموعه‌ی مسائل مسابقات ریاضی این شهر از سال ۱۹۶۱ تا سال ۱۹۹۳ را در برمی‌گیرد، یک مجموعه‌ی عالی از مسائل کم‌نظیر ریاضی است که به‌راستی و بی‌اغراق باید آن را غنیمت شمرد و در واقع جزو معدود منابع منتشرشده‌ی مسائل ریاضی شوروی سابق است. این کتاب که توسط **دیمیتری ولادمیرویچ فومین** و **آلکسی کرچنکو** نگارش یافته، تاکنون



به ده‌ها زبان زنده‌ی دنیا ترجمه شده و مورد استفاده‌ی میلیون‌ها نفر از علاقه‌مندان رشته‌ی ریاضی قرار گرفته است. در کشور ما نیز این کتاب به زبان فارسی ترجمه شده است و مترجم آن کسی نیست جز استاد پرویز شهریاری که زحمت ترجمه‌ی بسیاری از کتاب‌های المپیاد ریاضی را نیز متحمل شده‌اند. نگارنده به‌خوبی به یاد دارد، از هنگامی که نخستین چاپ این کتاب در سال ۱۳۷۴ منتشر شد، تاکنون بارها و بارها آن‌را به دانش‌آموزان داوطلب شرکت در المپیاد ریاضی معرفی کرده است و یقین دارد که یکی از بهترین منابع سؤال است و شاید برترین آن‌ها باشد. از جمله امتیازات این مجموعه مسائل آن است که چون مسابقات المپیاد ریاضی در لنینگراد (و در دیگر شهرهای شوروی سابق) در همه‌ی سطوح دبیرستانی برگزار می‌شده است، بنابراین مسائلی مناسب همه‌ی سنین دارد و می‌تواند هر دانش‌آموز علاقه‌مند را با مسائل خود ساعت‌ها به چالش بکشاند. نکته‌ی جالب توجه آن است که بعضی از مسائل کتاب که برای دانش‌آموزان سال ششم و هفتم این شهر (معادل اول و دوم راهنمایی کشور خودمان) مطرح شده‌اند، مسائل بسیار دشواری هستند که حل آن‌ها برای بسیاری از دانش‌آموزان دبیرستان‌ها می‌تواند کاملاً چالش‌برانگیز باشد! وقتی تصمیم گرفتم بعضی از مسائل این المپیادها را برای این شماره انتخاب کنم، حیفم آمد که آن را به یک شماره و چند مسئله محدود کنم و تصمیم گرفتم طی چند شماره‌ی پیاپی به این مسائل بپردازم. در این شماره پنج مسئله از مسائل ویژه‌ی کلاس‌های دهم در سال ۱۹۹۰ را انتخاب و مطرح می‌کنم و در شماره‌های بعد به مسائل دیگری می‌پردازم. سعی کرده‌ام مسائلی را انتخاب کنم که حل یا راهنمایی آن‌ها در کتاب مزبور وجود نداشته باشد. امیدوارم که خوانندگان مجله از این مسائل لذت کافی ببرند و قبل از ملاحظه‌ی راه حل آن‌ها، خود نیز سعی کنند با آن ها، ولو اندک زمانی به چالش بپردازند. من خود طی سال‌های متمادی از این مسائل به‌راستی لذت برده‌ام و امیدوارم برای شما نیز چنین باشد. در انتها ذکر این نکته هم بد نیست که پس از فروپاشی شوروی سابق، نام شهر لنینگراد دوباره به سن پترزبورگ تغییر یافته است و المپیاد ریاضی آن با این نام هم‌چنان برگزار می‌شود.

## صورت مسائل

۱. آیا می‌توان با استفاده از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ (و از هرکدام یک بار) عددی شش‌رقمی و بخش‌پذیر بر ۱۱ درست کرد؟

۲. چند جمله‌ای f با ضریب‌های درست داده شده است. می‌دانیم $f(۲)$ بر ۵ و $f(۵)$ بر ۲ بخش‌پذیر است. ثابت کنید $f(۷)$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

۳. برای عدد حقیقی و مثبت x می‌دانیم:

$$x^n = x^{n-۱} + x^{n-۲} + \cdots + x + ۱$$

ثابت کنید: $(n > ۱) \quad ۲ - \frac{۱}{n} < x < ۲$

۴. برای عددهای طبیعی a و b می‌دانیم $a^۲ + ab + ۱$ بر $b^۲ + ab + ۱$ بخش‌پذیر است. ثابت کنید: $a = b$.

۵. نقطه‌ی دل‌خواه P را روی ضلع BC از مربع ABCD انتخاب کرده‌ایم. دایره‌ای که از سه نقطه‌ی A، B و P می‌گذرد، قطر BD را در نقطه‌ی دیگر Q قطع می‌کند. دایره‌ای که از سه نقطه‌ی C، P و Q می‌گذرد، BD را در نقطه‌ی دیگر R قطع می‌کند. ثابت کنید A، R و P بر یک امتدادند.

## حل مسائل

۱. این نخستین و آسان‌ترین مسائل است!

مجموع این رقم‌ها را در نظر بگیرید:

$$۱+۲+۳+۴+۵+۶ = \frac{۶ \times ۷}{۲} = ۲۱$$

امّا می‌دانیم که باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۱۱، برابر است با باقی‌مانده‌ی تقسیم عددی که از جمع و تفریق یک درمیان ارقام این عدد بر ۱۱ (از سمت راست) به‌دست می‌آید؛ یعنی:

$$\overline{abcdef} \overset{۱۱}{\equiv} f - e + d - c + b - a$$

و اگر بخواهیم این عدد بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم:

$$f - e + d - c + b - a = ۱۱m \Leftrightarrow \overline{abcdef} \overset{۱۱}{\equiv} ۰$$

اگر $m=۰$ باشد، نتیجه می‌شود: $f+d+b = a+c+e$. یعنی مجموع سه تا از رقم‌ها مساوی مجموع سه‌تای دیگر باشد و با توجه به این که مجموع هر شش رقم مساوی ۲۱ است، چنین چیزی ممکن نیست. (چرا؟)

به‌ازای $m=۱$ نیز، با توجه به مجموع رقم‌ها، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} f+d+b-(e+c+a) = ۱۱ \\ f+d+b+(e+c+a) = ۲۱ \end{cases} \Rightarrow f+d+b = ۱۶$$

$$e+c+a = ۵$$

که این هم ممکن نیست. (چرا؟) برای $m>۱$ نیز به سادگی مشخص می‌شود که امکان‌پذیر نیست. لذا پاسخ منفی است.

۲. ابتدا لم زیر را اثبات می‌کنیم.

اگر چندجمله‌ای $f(x)$ با ضرایب صحیح مفروض باشد، $f(b) - f(a)$ بر $b - a$ بخش‌پذیر است.

اثبات لم آسان است.

$$f(x) = C_n x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \ldots + C_1 x + C_0$$

$$f(b) - f(a) =$$

$$C_n(b^n - a^n) + C_{n-1}(b^{n-1} - a^{n-1}) + \cdots + C_1(b-a)$$

و با توجه به اتحاد

$$b^m - a^m = (b-a)(b^{m-1} + ab^{m-2} + \cdots + a^{m-1})$$

بدیهی است که همه‌ی پرانتزها عامل $b-a$ را دارند و درنتیجه: $b-a \mid f(b)-f(a)$.

اکنون با توجه به لم فوق داریم:

$$7-2 \mid f(7)-f(2) \Rightarrow 5 \mid f(7)-f(2), 5 \mid f(2)$$

$$\Rightarrow 5 \mid f(7) \quad (*)$$

$$7-5 \mid f(7)-f(5) \Rightarrow 2 \mid f(7)-f(5), 2 \mid f(5)$$

$$\Rightarrow 2 \mid f(v) \quad (**)$$

و با توجه به دو رابطه‌ی * و ** بدیهی است که: $10 = 2\times 5 \mid f(7)$؛ یعنی $f(7)$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

۳. معادله را به‌صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$f(x) = x^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = 0$$

حال از قضیه‌ی موسوم به قضیه‌ی بولتزانو استفاده می‌کنیم:

قضیه: اگر $f$ تابعی پیوسته در بازه‌ی $[a,b]$ باشد و داشته باشیم: $f(a)>0$ و $f(b)<0$ یا $f(a)<0$ و $f(b)>0$، آن‌گاه معادله‌ی $f(x)=0$ در بازه‌ی $[a,b]$ لااقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

اکنون می‌نویسیم:

$$f(x) = x^n - \frac{x^n - 1}{x-1}$$

$$= \frac{x^{n+1} - x^n - x^n + 1}{x-1} = \frac{x^{n+1} - 2x^n + 1}{x-1}$$

$$= \frac{x^n(x-2)+1}{x-1}$$

$$f(2) = 1 > 0$$

$$f(2-\frac{1}{n}) = \frac{(2-\frac{1}{n})^n(-\frac{1}{n})+1}{1-\frac{1}{n}}$$

و چون $n > 1$ پس، $1-\frac{1}{n} > 0$ و به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد: $(2-\frac{1}{n})^n > n$ (برای گذر استقرایی از بسط دوجمله‌ای نیوتون استفاده کنید). بنابراین:

$$n - (2-\frac{1}{n})^n < 0$$

و از آن جا:

$$\frac{n-(2-\frac{1}{n})^n}{n} < 0$$

و درنتیجه:

$$(-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})^n + 1 < 0$$

بنابراین:

$$f(2-\frac{1}{n}) < 0$$

و طبق قضیه‌ی بولتزانو:

$$2-\frac{1}{n} < x < 2$$

۴. از ویژگی‌های رابطه‌ی بخش‌پذیری (عادکردن) استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} b^2+ab+1 \mid a^2+ab+1 \\ b^2+ab+1 \mid b^2+ab+1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$b^2+ab+1 \mid b(a^2+ab+1) - a(b^2+ab+1) = b-a$$

$$\Rightarrow b^2+ab+1 \mid b-a$$

ولی روشن است که اگر $a,b \in \mathbb{N}$ باشند، داریم:

$$\Rightarrow b^2+ab+1 > b-a$$

(زیرا $b^2 \geq b$). پس باید $b-a=0$ باشد و از آن‌جا: $a=b$.

۵. بدون آن‌که دایره‌ی محیطی مثلث CPQ را رسم کنیم، ثابت می‌کنیم که نقطه‌ی برخورد BD و AP (نقطه‌ی $R'$) و سه نقطه‌ی C، P، وQ رئوس یک چهارضلعی محاطی اند. بنابراین دایره‌ی محیطی مثلث CPQ از $R'$ می‌گذرد و $R'$ همان R است. درنتیجه A، R و P بر یک استقامت‌اند.

مطابق شکل، دو مثلث CBQ و ABQ به حالت (ض‌زض) همنهشت‌اند ($\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 45^\circ$، AB=BC و BQ=BQ). بنابراین: $\hat{C}_1 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$ و نیز داریم:

$$\hat{A}_2 = \hat{B}_2 = \frac{\overparen{PQ}}{2} \Rightarrow \hat{A}_2 = 45^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{A}_1 + 45^\circ \qquad (1)$$

در مثلث $AR'B$ نیز زاویه‌ی خارجی $R'_1$ برابر است با:

$$\hat{R'}_1 = \hat{B}_1 + \hat{A}_1 = 45^\circ + \hat{A}_1 \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{R'}_1$$

$$\hat{R'}_1 + \hat{R'}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{R'}_2 = 180^\circ$$

بنابراین، چهارضلعی $CQR'P$ محاطی است و طبق آن‌چه که گفتیم، دایره‌ی محیطی مثلث CPQ از $R'$ می‌گذرد. لذا نقطه‌ی برخورد آن با BD همان $R'$ و $R'$ بر R منطبق است. یعنی حکم اثبات شده است.