آموزش

مسئله چیست و چگونه می‌توان مسئله را حل کرد؟

محمد هاشم رستمی

اشاره

انسان همواره با مسئله‌های گوناگون مواجه بوده و تلاش کرده است تا راه‌هایی برای حل این مسئله‌ها پیدا کند. با توسعهٔ دانش بشری و پیدایش متفکران و دانشمندان از عهد باستان تاکنون، این دانشمندان توانسته‌اند روش‌هایی برای حل مسئله‌ها بیابند. برخی از این روش‌ها قانونمندند و برخی روش‌ها چنین نیستند.

در آموزش ریاضی نیز از دیر زمان، روش‌هایی برای حل مسئله‌های ریاضی ارائه شده است که برخی از آن‌ها روش‌های کلی حل مسئله‌های ریاضی است و برخی دیگر، روش‌های حل مسئلهٔ ریاضی در شاخه‌ای خاص از ریاضی مانند روش حل مسئله‌های هندسی است.

یکی از شاخص‌ترین روش‌های کلی حل مسئله‌های ریاضی روش جورج پولیا ریاضی‌دان و آموزشگر برجستهٔ ریاضی قرن بیستم است. او در کتاب چگونه مسئله را حل کنیم، مسئله‌ها را به دو دستهٔ یافتنی و ثابت‌کردنی تقسیم کرده و برای حل هر دو دسته مسئله روش چهار مرحله‌ای زیر را ارائه کرده است.

مرحلهٔ اول. فهمیدن مسئله

مرحلهٔ دوم. طرح نقشه

مرحلهٔ سوم. اجرای نقشه

مرحلهٔ چهارم. نگاه به عقب

شرح بیشتر این چهار مرحله را در مجلهٔ برهان شمارهٔ ۷۰ آورده‌ایم.

اکنون این سؤال مطرح است که:

آیا ریاضی‌دانان دیگری نیز بوده‌اند که روش‌های حل مسئله‌های ریاضی را ارائه داده باشند؟ پاسخ به این سؤال مثبت است. با تحقیق و بررسی آثار ریاضی‌دانان از عهد باستان تاکنون، پی می‌بریم که بسیاری از این ریاضی‌دانان برای انتقال تجربه‌های خود در زمینهٔ روش‌های حل مسئله‌های ریاضی، این روش‌ها را به صورت قانونمند منتشر کرده‌اند. تعدادی از این آثار تاکنون کشف شده و تعداد زیادی هنوز کشف نشده است و احتمالاً در کتابخانه‌های ملی یا شخصی در سراسر دنیا نگه‌داری می‌شوند. یکی از این ریاضی‌دانان عبدالجلیل سجزی ریاضی‌دان ایرانی قرن چهارم هجری (حدود ۱۰۰۰ سال پیش) است که دانش خود در زمینهٔ حل مسئله‌های هندسه را در رسالهٔ سجزی در روش‌های حل مسائل هندسی منتشر کرده است.

این اثر پس از حدود ۱۰۰۰ سال کشف و به همت دکتر هوخنداک به انگلیسی ترجمه شد و آقای محمد باقری آن را به فارسی ترجمه و انتشارات فاطمی چاپ کرد.

به یقین ریاضی‌دانان دیگری نیز در جهان بوده‌اند که آثار ارزشمندی در زمینهٔ آموزش ریاضی نوشته‌اند.

سجزی در کتاب خود هفت مرحله برای حل یک مسئلهٔ هندسه ارائه می‌دهد که عبارت‌اند از:

۱. مهارت و تیزهوشی و توجه به شرایطی که نظم مناسب ایجاب می‌کند؛

۲. تسلط عمیق بر قضایا و مقدمات (مرتبط با شکل)؛

۳. بهره گرفتن از هوش و شگردها؛

۴. آگاهی از وجوه مشترک شکل‌ها؛

۵. نقل؛

۶. تحلیل؛

۷. استفاده از شگردها.

نکتهٔ مهم و در خور توجه آن است که روش حل مسئله‌های هندسهٔ سجزی که هزار سال پیش تألیف شده، با روش حل مسئلهٔ جورج پولیا که در قرن بیستم انتشار یافته است مشابهت‌های بسیار دارد و این امر، تبحر، تیزهوشی و تسلط فراوان او بر ریاضیات، از جمله هندسه را نشان می‌دهد.

برای نشان دادن کار ارزشمند عبدالجلیل سجزی، نمونه‌های دیگری از مثال‌هایی را که سجزی در رسالهٔ خود آورده است، با حفظ امانت در متن، در زیر می‌آوریم.

در شماره‌های آیندهٔ مجلهٔ ریاضی برهان دبیرستان، نمونه‌هایی از مثال‌هایی را که جورج پولیا برای حل مسئله‌ها آورده است، خواهیم آورد.

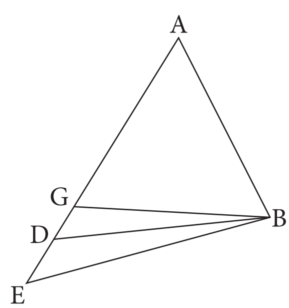
کلیدواژه‌ها:
حل مسئله، آموزش ریاضی، جورج پولیا، عبدالجلیل سجزی، حل مسائل هندسی، قضایا، مقدمات، مثلث، زاویهٔ خارجی، زاویهٔ داخلی، نسبت تقسیم مثلث‌ها، تحلیل، ساختار استنتاجی، اقلیدس، ترسیم پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع، مربع، قائمه، نیمدایره.

مثال ۱: دربارهٔ جست‌وجوی ویژگی‌های خاص

چون هوشمندی در کشف ویژگی‌های خاص بیش از هر چیز در ترسیم‌ها مفید است، مثالی در مورد جست‌وجوی ویژگی‌های خاص شکل‌ها می‌آوریم. مثلث ABG را در نظر می‌گیریم و ویژگی خاصی را در زاویه‌هایش جست‌وجو می‌کنیم، بدین قرار که مجموع هر سه (زاویه) برابر است با مجموع زاویه‌های یک مثلث معلوم، پیش از آنکه بدانیم (مجموعاً) با دو قائمه برابرند.

راه جست‌وجوی ما در مرحلهٔ اول چنین است که یک زاویهٔ آن را در وضع خود (ثابت) می‌گیریم، و اضلاعش را تغییر می‌دهیم تا بر ما آشکار شود که آیا دو زاویهٔ دیگر (مجموعاً) از (مجموع) دو زاویهٔ اصلی بزرگ‌ترند یا کوچک‌ترند یا با آن برابرند.

شکل ۴ زاویهٔ A را برخلاف زاویه‌های دیگر (ثابت) فرض کرده‌ایم با در نظر داشتن اینکه: اگر فرض کنیم دو زاویه از مثلث مفروضی با دو زاویه از مثلث مفروض دیگر برابر باشند، به‌طوری که هر کدام با نظیر خود برابر باشد، ناچار باید زاویهٔ باقی‌مانده (از یک مثلث)، برابر با زاویهٔ باقی‌مانده (از مثلث دیگر) باشد، که به این ترتیب آنچه را می‌خواستیم بدانیم حاصل نمی‌شود.



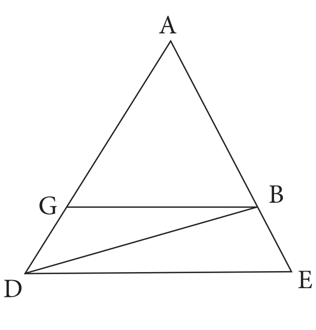
۴

AG را تا D امتداد می‌دهیم و BD را وصل می‌کنیم. زاویهٔ ADB کوچک‌تر از زاویهٔ AGB می‌شود. سپس به زاویه‌های ABG و ABD نگاه می‌کنیم. زاویهٔ ABD از زاویهٔ ABG بزرگ‌تر است. این کار را تکرار می‌کنیم. ضلع AD را تا E امتداد می‌دهیم و BE را وصل می‌کنیم. در این صورت زاویهٔ ADB کوچک‌تر از زاویهٔ ABE و زاویهٔ ABE بزرگ‌تر از زاویهٔ ABD است. این کار را مرتباً تکرار می‌کنیم. به این ترتیب زاویه‌هایی را که [رأس آن‌ها] بر ضلع AG واقع می‌شوند کوچک‌تر و زاویه‌های مجاور به ضلع AB در نقطهٔ B را از آنچه قبلاً بوده بزرگ‌تر می‌کنیم.

اکنون باید بررسی کنیم که آیا این زیاد و کم‌شدن‌ها به‌طور طبیعی با هم متعادل‌اند، یعنی یکدیگر را جبران می‌کنند و آنچه در یک طرف اضافه می‌شود به همان اندازه از طرف دیگر کم می‌شود یا نه. اگر وضع بدین قرار یافته شد، ویژگی خاصی از مثلث‌های کلی را یافته‌ایم، یعنی این‌که (مجموع) سه زاویهٔ آن‌ها با هم برابرند.

حال متساوی بودن (احتمالی) آن‌ها (مجموع‌ها) را از چه طریقی بررسی کنیم؟ ابتدا، طبق معمول فرض می‌کنیم که (مجموع) دو زاویهٔ ABG و AGB با (مجموع) دو زاویهٔ ABD ، ADB برابر است، زیرا در آغاز کتاب قرار گذاشتیم این شیوه را در پیش بگیریم. اگر وضع چنین باشد که فرض کردیم، لازم است دو زاویهٔ GBD و GDB (مجموعاً) با زاویهٔ AGB برابر باشند، زیرا اگر چنین باشد، دو زاویهٔ AGB (و مجموع زوایای) GBD و GDB چنان‌اند که دو زاویهٔ ABG به آن‌ها افزوده می‌شود.

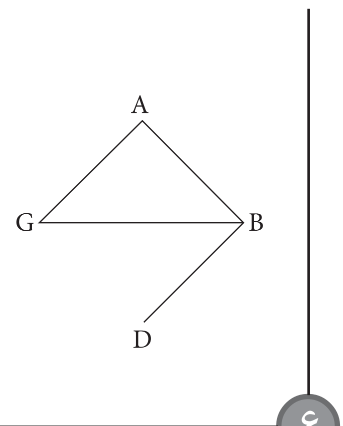
پس در این‌جا مسئلهٔ ما چنین است. اگر راه‌های (یعنی استدلال‌های) خود را درست دنبال کنیم و به نتیجه‌ای درست نه غیرممکن برسیم، در این صورت آنچه فرض کردیم درست است. اگر امر متناقض یا ناممکن نتیجه شود، پس زاویه‌های مثلث ABG با زاویه‌های مثلث ABD و با زاویه‌های (هیچ) مثلث دیگری برابر نیستند مگر (مثلث‌های) متشابه با آن.



۵

به شکلی نیاز داریم که برای آن (مسئله) مناسب‌تر باشد، یعنی شباهت بیشتری با آن داشته باشد یا از جنسی مرتبط‌تر با آن باشد. پس (شکل ۵) DE را موازی با BG می‌کشیم و AE را وصل می‌کنیم تا دو مثلث متشابه شوند و زوایای مساوی پدید آید، چنان که به هم برسند براساس نتیجه‌ای که از اینجا به‌دست می‌آید صحت یا سقم فرض اولیهٔ ما روشن می‌شود.

اما زاویهٔ BDE با زاویهٔ DBG برابر است و (مجموع) زاویه‌های EDB و BDG با زاویهٔ EDG برابر است. پس مجموع زاویه‌های BDG و DBG با زاویهٔ BGA برابر است. پس آنچه در جست‌وجویش بودیم حاصل شد، ولی ما در جست‌وجوی تساوی زاویه‌های مثلث ABG با زاویه‌های مثلث ABD بودیم. پس ویژگی خاصی از مثلث، بلکه دو ویژگی خاص آن را یافتیم، زیرا در پایان مطلب دریافتیم که اگر یکی از ضلع‌های مثلثی را امتداد دهیم زاویه‌ای خارجی ایجاد می‌شود که برابر است با (مجموع) دو زاویهٔ داخلی روبه‌روی آن در مثلث.



اکنون پس از آنکه برایمان روشن شد که مجموع زوایای هر مثلث با مجموع زوایای [هر مثلث] دیگر برابر است، ویژگی خاص دیگری از آن را جست‌وجو می‌کنیم، آن‌هم اینکه مقدار (مجموع) این زوایا را می‌طلبیم. در اینجا لازم است مقیاسی برای اندازه‌گیری زاویه‌ها داشته باشیم.

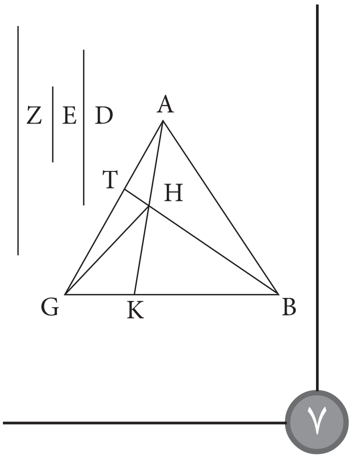
این مقیاس باید از جنس آن‌ها باشد و آن زاویهٔ قائمه است. پس باید مثلثی را فرض کنیم و زاویه‌ای از آن را قائمه قرار دهیم، زیرا اگر دو زاویهٔ آن را قائمه قرار دهیم، از این ترسیم مثلث به وجود نمی‌آید، بلکه دو ضلع آن متوازی می‌شوند و یکدیگر را قطع نمی‌کنند، در حالی‌که مثلث از برخورد سه ضلعش ایجاد می‌شود. پس فرض می‌کنیم که دو ضلع طرفین زاویهٔ قائمه برابرند (شکل ۶). مثلث ABG را قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین فرض می‌کنیم و زاویهٔ قائمه، زاویهٔ A است. سپس خط موازی را به‌کار می‌بریم، زیرا تناسب آن با این وضعیت از خطوط دیگر بیشتر است. از نقطهٔ B خط BD را موازی با AG رسم می‌کنیم. زاویه‌ای ایجاد می‌شود که خواص آن‌را جست‌وجو می‌کنیم، زاویهٔ DBG را مساوی با زاویهٔ BGA یافته‌ایم، ولی زاویهٔ BGA را با ABG مساوی گرفته بودیم. پس زاویه‌های ABG و DBG برابرند، اما مجموع آن‌ها با زاویهٔ BAG برابر است. پس لازم می‌آید که (مجموع) سه زاویهٔ مثلث ABG برابر با دو قائمه باشد.

اما این ویژگی خاصی است که در مثلث مشخصی یافتیم، یعنی مثلثی که یک زاویه‌اش قائمه است و دو ضلع طرفین آن برابرند. اما گفته‌ایم که (مجموع) زاویه‌های مثلث‌های مشخص و کلی (نامشخص) با هم برابرند. پس معلوم می‌شود که (مجموع) سه زاویهٔ هر مثلث با دو زاویهٔ قائمه برابر است. این همان چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

این یکی از راه‌های جست‌وجوی ویژگی‌های خاص است. پس لازم است فهم و ذهن خود را در این فهم اصلاح کنی. در این طریق، یعنی کشف شکل‌ها، اصلاح فهم و باز بودن ذهن مفیدتر از خواندن کتاب‌های هندسه است که پیشینیان تجویز می‌کردند، چرا که قصد آن‌ها از این کار خواندن کتاب‌های هندسه به عنوان مدخلی بر سایر کتاب‌های فلسفهٔ ریاضی و پرورش ذهن بود.

مثال ۲: دربارهٔ تحلیل

اکنون مثال دیگری مربوط به مسئلهٔ دیگری می‌آوریم تا جویندهٔ این فن با آن تمرین کند و مسائلی که برایش مبهم است بر او روشن شود. [مسئله] این است: چگونه مثلث مفروضی را به نسبت مفروضی به سه قسمت تقسیم کنیم؟



شکل ۷ مثلث ABG و نسبت D (به) E (به) Z را در نظر می‌گیریم. تقسیم شکل باید با سه خط دیگر که در وسط مثلث به هم می‌رسند صورت گیرد. پس فرض می‌کنیم مثلث همان‌طور که خواسته‌ایم تقسیم شده است یعنی (به) مثلث‌های ABH ، AGH و BGH، چنان‌که نسبت (مساحت) مثلث ABH به مثلث AGH نسبت D به E است و نسبت مثلث AGH به مثلث BGH مثل نسبت E به Z است.

سپس دربارهٔ جست‌وجوی ترسیمی فکر می‌کنیم که در این مسئله مفید باشد. BH را تا T امتداد می‌دهیم چنان‌که بر ما روشن شود نسبت مثلث ABH به مثلث BGH مثل نسبت AT به GT است.

پس اگر ضلع AG را به نسبت D به Z تقسیم کنیم، تقسیم دو مثلث باید بر خط BT منطبق شود. پس AG را در T به نسبت D به Z تقسیم و BT را وصل می‌کنیم. پس لازم می‌آید که نقطهٔ تقسیم و ایجاد زاویهٔ مثلث مجاور به خط AG، بر خط BT باشد.

پس باید یک مثلث (AHG) از ضلع AG و دو خط خارج شده از نقاط A و

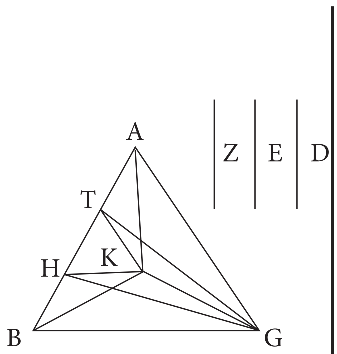
G و (رأس) زاویه‌ای که بر خط BT قرار می‌گیرد رسم کنیم، ولی نسبت آن به یکی از مثلث‌های باقی‌مانده مثل نسبت E به D یا به Z است. ترسیم اول را به عنوان مقدمهٔ آن به‌کار می‌بریم، زیرا روش درستی است. روی ضلع BG همان ترسیمی را که روی AG کردیم انجام می‌دهیم، یعنی ضلع BG را در نقطهٔ K به نسبت D به E تقسیم و AK را وصل می‌کنیم. پس روشن است که نسبت مثلث AHB به مثلث AGH مثل نسبت D به E است.

نشان داده‌ایم که نسبت هر دو مثلثی که دو ضلعشان از نقاط A و G خارج می‌شوند و روی BT به هم می‌رسند مثل نسبت مثلث‌های ABT و BTG است. پس سه مثلث رسم شده در مثلث ABG به نسبت مفروض هستند. این چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

روش دیگر: فرض می‌کنیم که سه مثلث رسم شده‌اند و BH را تا T امتداد می‌دهیم (شکل ۷). اکنون باید مثلث AHB را جست‌وجو کنیم، اما چنان که در یافتن شکل‌ها به روش تحلیل معمول است، فرض می‌کنیم که ترسیم شده است.

پس به شیوهٔ ریاضی در آن می‌اندیشیم و راهی برای آن جست‌وجو می‌کنیم که شیوهٔ آن به شیوهٔ نخست نزدیک باشد، چنان که در پی می‌آید. اگر BT را در نقطهٔ H چنان تقسیم کنیم که نسبت مثلث ABH به مثلث AHT معلوم باشد، نسبت مثلث AHT به مثلث GTH بر ما معلوم است، اما کل مثلث‌های AGB و AHB را نداریم. اگر بتوانیم نسبت‌ها را معلوم کنیم، آنگاه چنانچه بعضی از آن‌ها را ترکیب کنیم، (مثلث ABG) تقسیم شده به نسبت‌های مفروض به‌دست می‌آید. پس از آنکه نسبت هر دو مثلثی را که مثل مثلث‌های ABH و GBH هستند، دانستیم، پس با این روش جست‌وجو می‌کنیم تا ببینیم به جواب می‌رسیم یا نه. اگر (به‌فرض) نسبت BH به HT و نسبت AT به TG به ما معلوم باشد، پس از ترسیم مثلث، نسبت مثلث‌های AGH و AHB معلوم است، زیرا فرض همین بود.

اما نسبت ضمن جست‌وجو تقسیم شده است. پس باید یکی از خط‌های متناسب را به (همان) نسبت‌های تقسیم دو مثلث AHT و HTG تقسیم کنیم. پس E را به دو قسمت می‌کنیم چنان‌که نسبت یکی از آن‌ها به دیگری مثل D به Z باشد. نسبت BH به HT را چون نسبت D به یکی از قسمت‌های E قرار می‌دهیم. AH و GH را وصل می‌کنیم. پس نسبت مثلث ABH به مثلث AHT مثل نسبت D به یکی از اجزای E است، و نسبت مثلث AHT به مثلث HTG مثل نسبت یکی از اجزای E به جزء باقی‌ماندهٔ آن است. پس نسبت مثلث ABH به مثلث AHG مثل نسبت D به E است. اما نشان دادیم که نسبت مثلث ABH به باقی‌ماندهٔ مثلث BGH مثل نسبت D به Z است. این چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.



۸

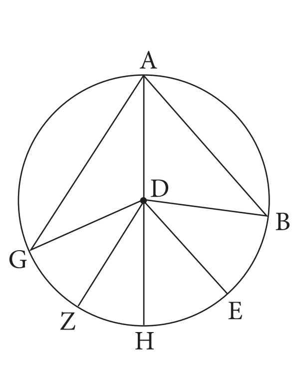
روش دیگری برای ترسیم این شکل وجود دارد که چنین است (شکل ۸): ضلع AB را در (نقاط) H و T به نسبت‌های E، D ، و Z تقسیم می‌کنیم و خط‌های GH و GT را می‌کشیم. روشن است که هر یک از مثلث‌های مطلوب (BGK ، AGK و ABK در شکل ۸) با یکی از این سه مثلث (AGT ، TGH و HGB) برابر است. در مرحلهٔ اول، این شیوه را در ذهن داشته‌ایم. سپس می‌اندیشیم و نقطه‌ای را که خطوط اضلاع سه مثلث (مطلوب) مساوی با این سه مثلث رسم شده به هم می‌رسند (یعنی نقطهٔ K را) جست‌وجو می‌کنیم. پس TK را موازی با AB رسم می‌کنیم، زیرا می‌دانیم که رأس هر مثلث مساوی با مثلث ATG و به قاعدهٔ AG بر خط موازی با AG قرار دارد. به همین ترتیب HK را موازی با BG می‌کشیم، بنا به دلیلی که قبلاً ذکر کردیم، در نقطهٔ K به‌هم می‌رسند، سپس BK، AK و GK را رسم می‌کنیم و می‌گوییم تقسیم به نسبت‌های موردنظر انجام شده است. این (روش) یکی از راه‌های (حل) آن است، ولی آن را به تمامی شرح نداده‌ایم.

روش دیگری برای این حکم وجود دارد، ولی به این دو روشی که ذکر کردیم منتهی می‌شود، بنابراین آن را حذف کرده‌ایم.

مثال ۳: دربارهٔ ساختار استنتاجی

چنان‌که قبلاً گفتیم «اگر مقدمه یا قضیه‌ای از مقدمات و قضایا را داشته باشیم و آن مقدمه یا قضیه هم مقدمه‌ای داشته باشد و بر آن مقدمه با هم مقدمه‌ای باشد، آن مقدمه یا قضیه را می‌توان به کمک مقدمهٔ مقدمه‌اش اثبات کرد» (شکل ۹) دایرهٔ AB را به مرکز نقطهٔ D فرض می‌کنیم. زاویهٔ BAG بر کمان BAG واقع است. پاره‌خط‌های BD و GD را رسم می‌کنیم. می‌گوییم که زاویهٔ BDG دو برابر زاویهٔ BAG است.

اقلیدس این را با استفاده از ویژگی خاص زاویهٔ خارجی مثلثی که یک ضلعش



۹

امتداد یافته باشد، ثابت کرده است. این قضیه (شکل) سی و دوم مقالهٔ اول او دربارهٔ اصول است، ولی قضایای بیست و نهم و سی و یکم، مقدمات این قضیه‌اند. پس لازم است بررسی شود که آیا این (ویژگی خاص دایره) را می‌توان از ان دو یا یکی از آن‌ها به دست آورد یا نه. پس، از نقطهٔ D خط DE را موازی با BA و DZ را موازی با AG رسم می‌کنیم و AD را تا H امتداد می‌دهیم. این کاربرد قضیهٔ سی‌ویکم است که وی آن را مقدمه‌ای بر مقدمه‌اش قرار داده است. اما زاویهٔ خارجی EDH برابر است با زاویهٔ داخلی BAD و زاویهٔ EDB برابر است با زاویهٔ متبادل DBA. زاویهٔ DBA (نیز) با زاویهٔ BAD برابر است. تساوی دو ضلع که در این شکل ظاهر می‌شود مقدمه نیست، بلکه ویژگی خاصی از شکل است که او (اقلیدس) به شکل اضافه کرده است، پس آن را به همین صورت نگاه می‌داریم.

پس هر یک از دو زاویهٔ BDE و EDH با زاویهٔ BAD برابر است. بنابراین زاویهٔ BDH دو برابر زاویهٔ BAD است. همچنین روشن است که به همین ترتیب زاویهٔ HDG دو برابر زاویهٔ DAG است. بنابراین کل زاویهٔ BDG دو برابر کل زاویهٔ BAG است. این کاربرد قضیهٔ بیست و نهم است.

پس ما مقدمات آن را به‌کار برده‌ایم و توانسته‌ایم آن را ثابت کنیم. این چیزی بود که می‌خواستیم نشان دهیم.

مثال ۴: دربارهٔ ویژگی‌های مشترک شکل‌های مختلف

مثالی دربارهٔ وجوه مشترک شکل‌ها می‌آوریم، با استفاده از شکل‌های مرکب از تقسیم خط به نسبت ذات وسط و طرفین. به‌طور کلی حکم‌هایی که مرکب از آن (تقسیم باشند) متضمن (عدد) پنج هستند.

مثلاً ترسیم پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع شامل تقسیم خطی به نسبت ذات‌وسط و طرفین است.

از کنار هم (بر یک خط مستقیم) گذاشتن شعاع (دایره) و ضلع ده ضلعی منتظم (محاطی) که به علت دربرداشتن نصف کمان پنج ضلعی، با ضلع پنج ضلعی مرتبط است، خطی حاصل می‌شود که به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است.

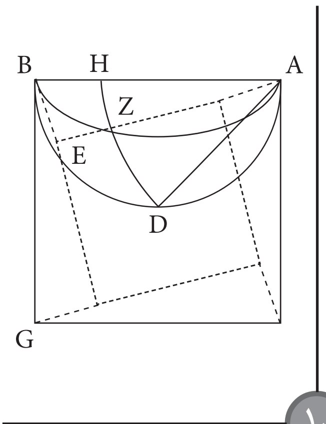
دو وتری که در دایرهٔ پنج ضلعی واقع می‌شوند، یعنی وترهایی که از رأس‌های پنج ضلعی (محاط) در دایره خارج می‌شوند، یکدیگر را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم‌می‌کنند.

< اگر خطی به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شود > و به بخش بزرگ‌تر، نصف کل خط افزوده شود، مربع آن پنج برابر مربع نصف خط خواهد بود.

هرگاه خطی با این نسبت به دو بخش تقسیم شود، مربع کل خط، پنج برابر بخش اول خواهد بود. اگر خطی به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شود و اگر به بخش کوتاه‌تر خطی برابر با نصف بخش بلندتر افزوده شود، مربع آن (مجموع) پنج برابر مربع نصف بخش بلندتر است.

از افزایش و کاهش ضلع‌های یک شکل مربع که به پنج بخش مساوی تقسیم شده باشد می‌توان خط تقسیم شده به نسبت ذات وسط و طرفین به‌دست آورد. منظورم از این افزایش، افزودن قسمت‌هایی از خطوط به خط‌های دیگر و وصل‌کردن آن‌هاست، چنان‌که حاصل خطی راست باشد و منظورم از کاهش این است که خط بلندتر به دو بخش تقسیم شود چنان‌که یکی از این بخش‌ها با خط کوتاه‌تر برابر باشد.

مثال: (شکل ۱۰) مربع AG را در نظر می‌گیریم، ولی زاویهٔ E قائمه است پس (مجموع) مربع‌های AE و EB با مربع AB برابر است. خط دیگر AD را چنان می‌یابیم که دو برابر مربع آن مساوی با مربع AB و خود آن مساوی با AZ باشد. یافتن خط AD آسان است: نیم‌دایرهٔ ADB را می‌کشیم و آن‌را در D نصف می‌کنیم و AD را وصل می‌کنیم. حال دو برابر مربع AD با مربع AB برابر است. اکنون باید خط AE را چنان بیابیم که اگر EB رسم شود، EB با EZ مساوی باشد و ZA با AD، تا به مقصود خود برسیم.



۱۰

برای یافتن آن، وضعیتی را تصور می‌کنیم که این خط به‌دست آمده است، یعنی ZE برابر با EB است. روشن است که اگر AE را رسم کنیم و در نقطهٔ B از خط EB زاویهٔ نیم‌قائمه‌ای بسازیم و BZ را وصل کنیم، خط ZE با خط EB برابر خواهد بود. سپس باید در پی تساوی AZ و AD کنیم، خط ZE با خط EB برابر خواهد بود. سپس باید در پی تساوی باشیم. باید خط AE را در حال حرکت حول نقطهٔ A تجسم کنیم، بنابراین به مرکز A و به شعاع AD دایرهٔ DZ را می‌کشیم. این خط الزاماً باید دایرهٔ DZ را قطع کند. پس باید کمانی درخور زاویهٔ یک و نیم برابر زاویهٔ قائمه مثل کمان AZB رسم کنیم، زیرا اگر دایرهٔ DZ آن را قطع کند و AZ تا E ادامه یابد و BZ وصل شود، زاویهٔ خارجی AZB برابر است با دو زاویهٔ داخلی E و B. اما بر ما روشن است که زاویهٔ E قائمه است، پس نتیجه می‌گیریم که زاویهٔ B [در مثلث BEZ] با نصف زاویهٔ قائمه برابر است. از اینجا نتیجه می‌شود که در مثلث ZEB، زاویهٔ B و زاویهٔ Z با هم برابرند، پس خط EZ با خط EB برابر است و خط AZ با خط AD. پس AE چنان‌که می‌خواستیم تقسیم شده است. اما براساس نقل، اگر ZH را موازی با EB رسم کنیم، AB چنان‌که می‌خواستیم تقسیم شده است. برهان آن آسان است. این چیزی بود که می‌خواستیم نشان دهیم.

منابع........................

۱. مقاله‌های آموزش ریاضی.

۲. رسالهٔ سجزی در روش‌های حل مسائل هندسی.