ترسیمات هندسی ۱

نویسنده: تونی کریلی[1]
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور

اشاره

اثبات منفی اغلب مشکل است، اما پاره‌ای از بزرگ‌ترین موفقیت‌ها در ریاضیات درست از همین روش ناشی شده‌اند. این بدان معناست که اثبات کردن مطلبی امکان‌پذیر نیست. تربیع دایره کاری ناممکن است، اما چگونه می‌توان آن را ثابت کرد؟

کلیدواژه‌ها: تثلیث زاویه، تضعیف مکعب، تربیع دایره، کثیرالاضلاع.

یونانیان باستان، چهار مسئلهٔ ترسیمی مهم داشتند:

- تثلیث زاویه[2] (یعنی تقسیم یک زاویه به سه زاویهٔ کوچک‌تر برابر)؛
- تضعیف مکعب[3] (یعنی ساختن مکعبی با دو برابر حجم مکعب اول)؛
- تربیع دایره[4] (یعنی ایجاد مربعی با مساحت برابر با سطح دایره‌ای معین)؛
- ترسیم کثیرالاضلاع‌ها[5] (یعنی ساختن اشکال منتظم با اضلاع و زوایای مساوی).

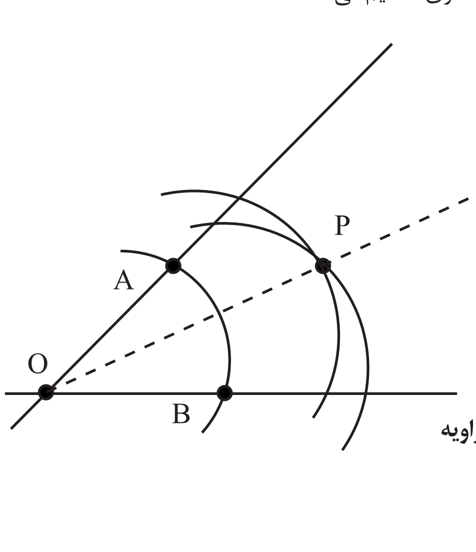
آن‌ها برای انجام این امور، تنها از دو وسیلهٔ اساسی استفاده می‌کردند:

- خط‌کش نامدرّج، برای ترسیم خطوط مستقیم (و به‌طور قطع نه برای اندازه‌گیری طول‌ها)؛
- پرگار، برای ترسیم دوایر.

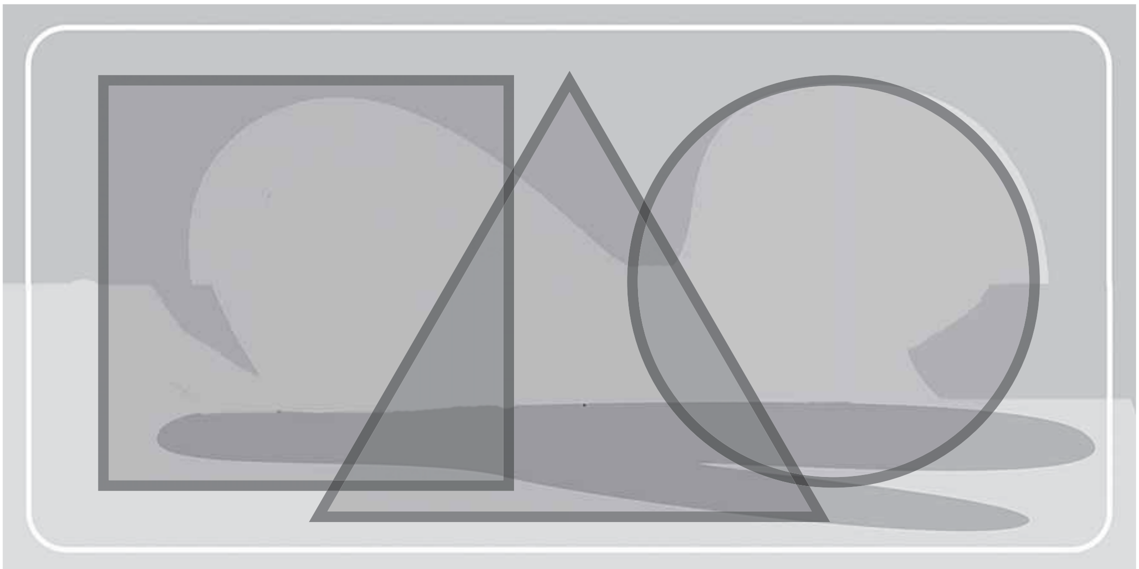
اگر شما مایل به کوهنوردی، بدون طناب، اکسیژن، تلفن همراه و سایر ملزومات باشید، بی‌شک، این مسائل دارای جاذبه خواهند شد، زیرا بدون تجهیزات اندازه‌گیری مدرن، روش‌های لازم برای اثبات این نتایج پیچیده بودند و مسائل ترسیمی کلاسیک باستانی مزبور، تنها در قرن نوزدهم و با استفاده از روش‌های آنالیز مدرن[6] و جبر مجرّد[7] حل شدند.

تثلیث زاویه

برای تقسیم یک زاویه به دو زاویهٔ کوچک‌تر مساوی، یا به عبارت دیگر، تنصیف یا نصف کردن آن به طریق زیر عمل می‌کنیم. ابتدا نوک پرگار را در O می‌گذاریم، و با شعاع دلخواه OA و OB را مشخص می‌کنیم. با قراردادن نوک پرگار در A، قسمتی از یک دایره را رسم می‌کنیم. همین کار را در B انجام می‌دهیم. نقطهٔ تقاطع این دوایر را با P مشخص می‌کنیم و با لبهٔ مستقیم (یعنی خط‌کش نامدرج) O را به P وصل می‌کنیم. مثلث‌های AOP و BOP در شکل حاصل همنهشتند، بنابراین زوایای $A\hat{O}P$ و $B\hat{O}P$ مساوی می‌شوند. در این صورت، خط OP نیمساز مطلوب است و زاویه را به دو زاویهٔ مساوی تقسیم می‌کند.



تنصیف زاویه



اما آیا می‌توانیم عملیات مشـابه آن را انجام دهیم و زاویه‌ای دلخواه را به سـه زاویهٔ مساوی تقسـیم کنیم؟ این همان مسئلهٔ تثلیث زاویه است.

اگـر زاویه‌مان ۹۰ درجه، یعنی زاویهٔ قائمه باشـد، مشـکلی وجود نخواهد داشت، زیرا زاویهٔ ۳۰ درجه را می‌توان ترسیم کرد. امـا اگر برای نمونه زاویهٔ ۶۰ درجه را اختیـار کنیم،این زاویه را نمی‌توان به سه قسمت مساوی تقسیم کرد. در این مورد، گرچه می‌دانیم پاسـخ ۲۰ درجه اسـت، اما هیچ طریقی برای رسم این زاویه، تنها به کمک لبهٔ مستقیم و پرگار، موجود نیست. بنابراین به‌طور خلاصه:

- می‌توان همهٔ زوایا را در همهٔ احوال نصف کرد.
- می‌توان پاره‌ای از زوایا را در همهٔ احوال به سـه قسمت مساوی تقسیم کرد، اما
- هیچ‌گاه نمی‌توان پاره‌ای از زوایا را تثلیث کرد.

تضعیف مکعب، مسئله‌ای مشـابه، معروف به مسئلهٔ دلیان[۸] اسـت. داسـتان به بومیان دلـوس[۹] در یونان برمی‌گـردد که با اوراکل[۱۰] پیشـگوی معبد، دربارهٔ طاعونی که به آن مبتلا بودند، رأی زدند. به آن‌ها گفته شـد محرابی با حجمی دو برابر محراب موجود بسازند.

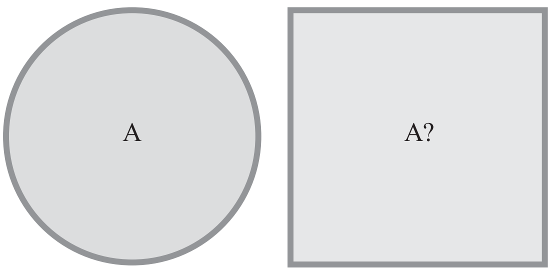
فـرض می‌کنیم محـراب دلیان به صـورت مکعبی با جمیع اضـلاع برابر در طول مثلاً a بنا شـده باشـد. بنابراین، آن‌ها نیاز بـه سـاختن مکعبی دیگر بـه طول b با حجمـی دو برابر حجم آن دارنـد. حجـم هر یک از آن‌ها a^3 و b^3 اسـت، که با $b^3=2a^3$ یا $b=\sqrt[3]{2}\times a$ مرتبط‌اسـت. در این رابطه $\sqrt[3]{2}$ عددی اسـت که چون سـه بار در خودش ضرب شـود ۲ را به دسـت می‌دهد (ریشـهٔ سـوم یا کعـب[۱۱]). در صورتـی که ضلع مکعـب اصلی $a=1$ می‌بـود، بومیان دلیان مجبور بودند طول $\sqrt[3]{2}$ را روی یک خط مشـخص کنند. متأسـفانه از لحاظ ایشـان، این کار با لبهٔ مستقیم و پرگار، بی‌توجه به اینکه چه مقدار خلاقیت و ابتکار در مورد ساختمان جدید به‌کار می‌برند، غیرممکن است.

می‌توان پاره‌ای از زوایا را در همهٔ احوال به سه قسمت مساوی تقسیم کرد

تربیع دایره

این مسئله اندکی متفاوت است و معروف‌ترین مسئلهٔ ترسیماتی به‌شمار می‌رود. این مسئله با موضوع زیر معادل است:

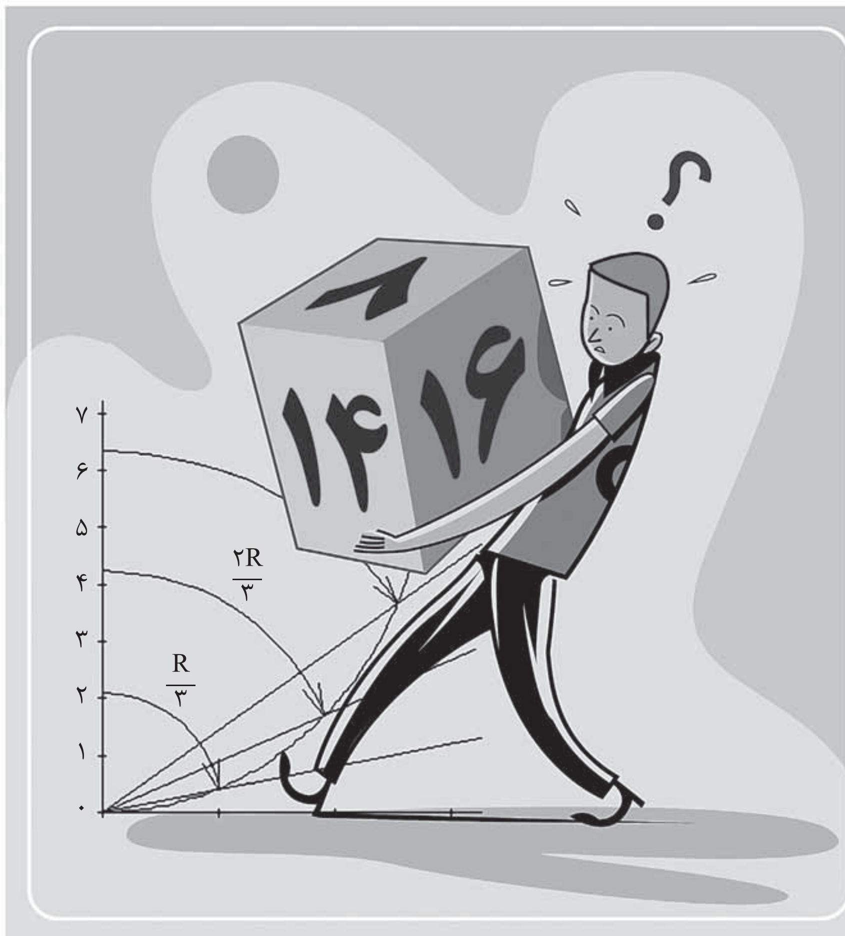
ساختن مربعی که سطح آن برابر سطح دایره‌ای مفروض باشد.



تربیع دایره

عبارت تربیع دایره عموماً برای بیان غیرممکن بودن به‌کار می‌رود. معادلهٔ جبری $x^2-2=0$ دارای جواب‌های مشـخص $x=\sqrt{2}$ و $x=-\sqrt{2}$ اسـت. این اعداد، اعدادی گنگ‌اند (یعنی نمی‌توانند به صورت کسر نوشته شوند)، اما نشان دادن اینکه دایره نمی‌تواند تربیع شود به نشان دادن این مطلب می‌انجامد که π نمی‌تواند جواب هیچ معادلهٔ جبری باشد. اعداد گنگ با این ویژگی، اعداد متعالی[۱۲] نامیده می‌شوند، زیرا گنگیِ «بالاتر»ی از عموزاده‌های گنگشان نظیر $\sqrt{2}$ دارند.

ریاضی‌دان‌ها عموماً عقیده داشتند که π متعالی است، اما اثبات این «معمای روزگاران» تا زمانی که فردیناند فون لیندمان[۱۳] تعدیلی از تکنیک پیشـرفتهٔ شـارل هرمیت[۱۴] را به‌کار نبرد، مشکل به نظر می‌رسید.



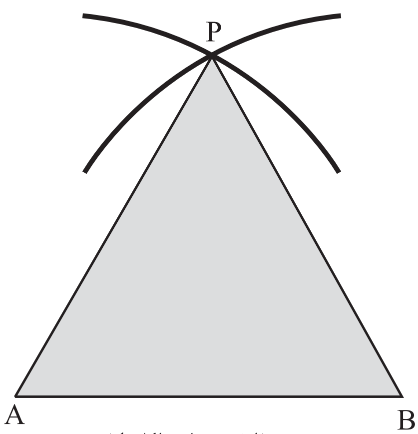
تکنیک مزبور را هرمیت برای اثبات آسان‌تر این موضوع به‌کار بـرده بود که پایه یا مبنای لگاریتم‌های طبیعی، یعنی e، متعالی است.

بعد از دســتاورد لیندمان، ممکن است فکر کنیم که جریان مقالات گــروه تزلزل‌ناپذیر «دایره ـ مربعیــان» بند آمد. اما اصلاً این‌طور نشــد، زیرا هنوز افرادی آویزان در حاشیهٔ ریاضیات بودند که از قبول منطق اثبات مزبور کراهت داشــتند و نیز کســانی که هرگز سخنی دربارهٔ آن به گوششان نخورده بود.

ترسیم کثیرالاضلاع‌ها

مسئلهٔ چگونگی رســم کثیرالاضلاع یا چندضلعی منتظم را اقلیدس مطرح کرد. این چندضلعی، شکلی متقارن مانند مربع یا پنج‌ضلعی منتظم اســت که در آن، طول تمام ضلع‌ها با هم برابر اســت و اضلاع مجاور، زوایای برابر با یکدیگر می‌ســازند. اقلیدس در اثر مشــهورش، مقدمات[15] (کتاب ۴) نشان می‌دهد که چگونه می‌توان ۳، ۴، ۵ و ۶ ضلعی منتظم را تنها با دو ابزار مبنایی مورد بحث ترسیم کرد.

ترسیم سه ضلعی منتظم، که معمولاً مثلث متساوی‌الاضلاع نامیده می‌شــود، به‌خصوص، آســان اســت. اندازه‌ای را که برای مثلثتان می‌خواهید بر نقطهٔ A و ســپس B، با فاصلهٔ مطلوب در بین آن‌ها مشخص کنید. نوک پرگار را در A قرار دهید و قسمتی از دایره به شــعاع AB را رســم کنید. این‌کار را با قرار دادن نوک پرگار در B و به‌کار بردن همان شــعاع، تکرار کنید. نقطهٔ تقاطع این دو کمان در P اســت. از آنجا که AP=AB و BP=AB، هر ســه ضلع مثلث APB برابرند. در این صورت، مثلث با وصل BP، AP، AB، با استفاده از لبهٔ مستقیم، کامل می‌شود.



ترسیم مثلث متساوی‌الاضلاع

اگر در این فکرید که داشتن لبهٔ مستقیم، وسیله‌ای تجملی به نظر می‌رسد، در این اندیشه تنها نیستید؛ دِین گئورگ‌مور[۱۶] نیز چنین می‌اندیشید؛

زیــرا مثلــث متســاوی‌الاضلاع مورد بحــث، با یافتــن نقطهٔ P رســم شــده اســت و برای این نقطه تنها به پرگار نیاز داریم. لبهٔ مســتقیم تنها برای آنکه به‌طور عینی[۱۷] نقــاط را به هم وصل کند، به‌کار رفته اســت. مور نشــان داد که هر ترســیم به‌دست‌آمدنی از لبهٔ مســتقیم و پرگار را می‌توان با پرگار تنها به دســت آورد. لورنزو ماچرونی[۱۸] ایتالیایی نیز، ۱۲۵ ســال بعد، همیــن نتایج را به اثبات رســاند. ویژگی جالب کتاب ۱۷۹۷ وی به نام هندسهٔ پرگاری[۱۹]، که به ناپلئون تقدیم شــده بود، در این اســت که آن را به نظم نوشــته است.

در مسئلهٔ عمومی، به‌خصوص چندضلعی‌های با p ضلع، که در آن p عددی اول است، دارای اهمیت‌اند. قبلاً ۳ ضلعی منتظم را رسم کردیم. اقلیدس نیز ۵ ضلعی منتظم را رسم کرد، اما نتوانست ۷ ضلعی منتظم را رسم کند. کارل فردریش گاوس[۲۰]، ۱۷ ساله، در تحقیق این مسئله، راه‌حل منفی آن را اثبات کرد، یعنی نتیجه گرفت که ترسیم

p ضلعی منتظم به ازای

$p = ۷ , ۱۱$ یا ۱۳

غیرممکن است.

گاوس، اما راه‌حل مثبتی نیز به اثبات رساند و نتیجه گرفت که ترسیم ۱۷ ضلعی منتظم امکان‌پذیر است. وی در این مورد عملاً پیش‌تر رفت و ثابت کرد که p ضلعی منتظم ترسیم‌پذیر است، اگر و تنها اگر عدد اول p به صورت زیر باشد:

$$p = ۲^{۲^{n}} + ۱$$

اعدادی به این صورت، به اعداد فِرما[21] موسوم‌اند. اگر آن‌ها را به ازای

$$n = ۰,۱,۲,۳,۴$$

محاسبه کنیم، درمی‌یابیم که برابر اعداد اول زیرند:

$$p = ۳,۵,۱۷,۲۵۷,۶۵۵۳۷$$

که نظیر چندضلعی منتظم با p ضلع ترسیم‌پذیرند.

در این مورد، چون $n=۵$ را بررسی کنیم، عدد فرما عبارت است از:

$$p = ۲^{۳۲} + ۱ = ۴,۲۹۴,۹۶۷,۲۹۷$$

پی‌یِر دو فرما[22] حدس زده بود که این اعداد همه اول‌اند، اما متأسفانه این یکی اول نیست، زیرا:

$$۴,۲۹۴,۹۶۷,۲۹۷ = ۶۴۱ \times ۶,۷۰۰,۴۱۷$$

اگر در این فرمول، n را برابر ۶ یا ۷ قرار دهیم، نتیجه‌ها اعداد فرمای عظیمی هستند که مانند حالت ۵، هیچ یک اول نیستند.

آیا هیچ‌یک از اعداد دیگر فِرما اول هستند؟ خرد متعارف در این است که چنین نیستند، اما هیچ‌کس به اطمینان نمی‌داند.

چند تاریخچه

۴۵۰ قبل از میلاد: آناکسو گوراس[25]، زمانی که در زندان بود، در تربیع دایره کوشید.

۱۶۷۲ میلادی: مور ثابت کرد که همهٔ ترسیمات اقلیدسی را می‌توان به تنهایی با پرگار انجام داد.

۱۸۰۱ میلادی: گاوس مقالاتی در حساب[26] از جمله بخشی در مورد ترسیم ۱۷ ضلعی منتظم با خط‌کش نامدرج و پرگار منتشر کرد.

۱۸۳۷ میلادی: وانتزل[27] ثابت کرد که مسائل کلاسیک تضعیف مکعب و تثلیث زاویه را نمی‌توان با خط‌کش و پرگار حل کرد.

۱۸۸۲ میلادی: لیندمان ثابت کرد که دایره را نمی‌توان تربیع کرد.

شاهزاده‌ای متولد می‌شود

کارل فردریش گاوس[23] به قدری از دستاوردش، که نشان می‌داد ۱۷ ضلعی منتظم را می‌توان رسم کرد، تحت تأثیر قرار گرفت که تصمیم گرفت مطالعهٔ زبان‌ها را که در برنامه داشت کنار نهد و ریاضی‌دان شود. مابقی تاریخ است، زیرا او به عنوان «شاهزادهٔ ریاضی‌دان‌ها» شناخته شد. ۱۷ ضلعی منتظم، شکل پایهٔ یادبودش در گوتینگن[24]، آلمان، تجلیلی مناسب از نبوغ اوست.

پی‌نوشت.........................

1. Tony Crilly
2. trisecting the angle
3. doubling the cube
4. squaring the circle
5. constructing polygons
6. modern analysis
7. abstract algebra
8. Delian problem
9. Delos
10. oracle
11. cube root
12. transcendental numbers
13. Ferdinand von Lindemann
14. Charles Hermite
15. Elements
16. Dane Georg Mohr
17. physically
18. Lorenzo Mascheroni
19. Geometrica del Compasso
20. Carl Friederich Gau
21. Fermat numbers
22. Pierre de Fermat
23. Carl Friedrich Gaus
24. Göttingen
25. Anaxogoras
26. Discourses on Arithmetic
27. Wantzel