آموزش

تابع ۲

برای دانش‌آموزان سال دوم متوسطه

حمیدرضا امیری

کلیدواژه‌ها:
زوج مرتب، تابع، تابع خطی، وارون رابطه، قرینه، تابع معکوس، تابع یک‌به‌یک، بازه.

چکیده:
در شمارهٔ قبل با مفاهیم زوج مرتب، رابطه و تابع آشنا شدید. همچنین وارون یک رابطه و تابع یک‌به‌یک را بررسی کردیم. اینک در ادامهٔ آن، مطالبی دیگر از تابع را می‌آوریم.

تابع معکوس

تابع یک‌به‌یک $f=\{(۱,۴),(۲,۶),(۳,۷)\}$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم:

$\{۱,۲,۳\}=$ دامنهٔ f

$\{۴,۶,۷\}=$ برد f

حال، تابع g را با تعویض مؤلفه‌های زوج‌های f در نظر می‌گیریم، یعنی:

$g=\{(۴,۱),(۶,۲),(۷,۳)\}$

$\{۴,۶,۷\}=$ دامنهٔ g

$\{۱,۲,۳\}=$ برد g

تابع g را تابع معکوس تابع f می‌نامیم و آن‌را با f^{-1} نشان می‌دهیم. از گفته‌های بالا چند نتیجه گرفته می‌شود:

اول: این‌که تابع f باید یک‌به‌یک باشد تا تابع معکوس وجود داشته باشد. چنان‌چه تابع f یک‌به‌یک نباشد و جای مؤلفه‌های داخل زوج‌ها را عوض کنیم، تابعی به دست نمی‌آید. برای مثال، اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۲)\}$ آن‌گاه $g=\{(۲,۱),(۵,۲),(۲,۳)\}$ تابع نیست، زیرا عدد ۲ هم به ۱ مربوط شده است، هم به ۳.

دوم: این‌که اگر دو تابع f و g معکوس یکدیگر باشند، آن‌گاه دامنهٔ f مساوی برد g و برد f مساوی دامنهٔ g است (توجه داشته باشیم که عکس این مطلب درست نیست)؛ یعنی اگر در دو تابع f و g داشته باشیم و دامنهٔ f مساوی برد g و برد f مساوی دامنهٔ g باشد، ممکن است دو تابع معکوس یکدیگر نباشند، مانند دو تابع $f:R\to R$ و $g:R\to R$ که $f(x)=x$ و $g(x)=x+۱$

سوم: اگر به زوج‌های مرتب تابع $f=\{(۱,۴),(۲,۶),(۳,۷)\}$ و به زوج‌های مرتب تابع $g=\{(۴,۱),(۶,۲),(۷,۳)\}$ دقت کنیم، ملاحظه می‌کنیم:

$A\begin{vmatrix}۱\\۴\end{vmatrix}$ در تابع f است و $A'\begin{vmatrix}۴\\۱\end{vmatrix}$ در تابع g است.

$B\begin{vmatrix}۲\\۶\end{vmatrix}$ در تابع f است و $B'\begin{vmatrix}۶\\۲\end{vmatrix}$ در تابع g است.

$C\begin{vmatrix}۳\\۷\end{vmatrix}$ در تابع f است و $C'\begin{vmatrix}۷\\۳\end{vmatrix}$ در تابع g است.

از این نوشته‌ها نتیجه می‌گیریم که نقاط تابع g قرینهٔ نقاط تابع f نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم است.

به‌طور کلی، اگر $f=\{(x,y)|(x,y)\in f\}$ و $g=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$ آن‌گاه دو تابع f و g را معکوس یکدیگر گوییم. و نمودارهای دو تابع f و g نسبت به خط y=x قرینهٔ یکدیگرند.

چهارم: تعویض جای x و y را در معادلهٔ تابع نیز می‌توان انجام داد تا معادلهٔ تابع معکوس به‌دست آید.

تعریف: اگر f یک تابع باشد و وارون آن یعنی f^{-1} نیز تابع باشد، در این صورت f را وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) می‌نامیم.

مثال: تابع $f=\{(۲,۳),(٤,۳),(٥,۱)\}$ وارون‌پذیر نیست، زیرا وارون آن یعنی $f^{-1}=\{(۳,۲),(۳,٤),(۱,٥)\}$ تابع نیست.

مثال: اگر $\begin{cases} f:R\to R \\ y=f(x)=۲x-٤ \end{cases}$، آن‌گاه معادلهٔ تابع معکوس تابع f چنین به‌دست می‌آید:

$$y=۲x-٤ \overset{\text{جای x و y را عوض می‌کنیم.}}{\Longrightarrow} x=۲y-٤ \Rightarrow ۲y=x+٤$$

$$\Rightarrow y=\frac{x}{۲}+۲ \qquad f^{-1} \text{ ضابطهٔ}$$

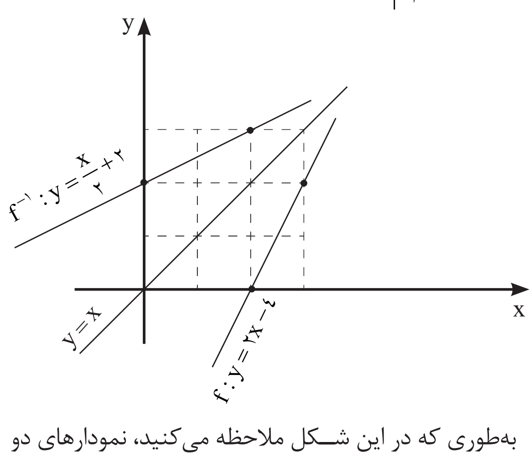
حال این دو تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم:

$f^{-1}: y=\frac{x}{۲}+۲$

x	y
۲	۳
۰	۲

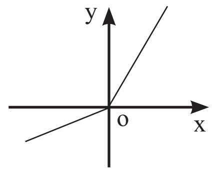
$f: y=۲x-٤$

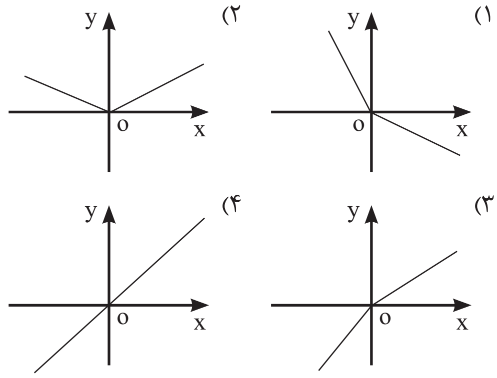
x	y
۳	۲
۲	۰



به‌طوری که در این شکل ملاحظه می‌کنید، نمودارهای دو تابع f و f^{-1} نسبت به خط y=x قرینهٔ یکدیگرند.

مثال: در شکل روبه‌رو تابع f رسم شده است. نمودار تابع f^{-1} کدام است؟





حل: اگر خط y=x را رسم کنیم، به کمک رسم قرینهٔ شکل نسبت به خط y=x، به‌سادگی نمودار (۳) به‌دست می‌آید.

مثال: تابع f با ضابطهٔ $\begin{cases} f:R\to R \\ y=f(x)=۲x+٦ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

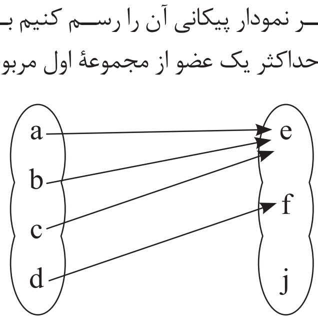
می‌دانیم f تابعی یک‌به‌یک است، زیرا: اگر $x_۱,x_۲\in R$ و اگر $f(x_۱)=f(x_۲)$

$$\Rightarrow ۲x_۱+٦=۲x_۲+٦ \Rightarrow ۲x_۱=۲x_۲ \Rightarrow x_۱=x_۲$$

f یک‌به‌یک است

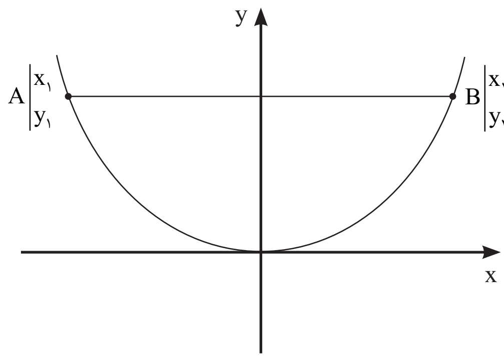
۱. تابع f در صورتی یک‌به‌یک است که:

الف) اگر نمودار پیکانی آن را رسم کنیم به هر عضو از مجموعهٔ دوم حداکثر یک عضو از مجموعهٔ اول مربوط باشد.



[این تابع یک‌به‌یک نیست، زیرا به عضو e از B دو عضو از A مربوط است (دو به یک است!)].

ب) اگر نمودار مختصاتی تابع f، و دسته خطوطی موازی محور xها رسم شود و نمودار تابع در بیش از یک نقطه قطع نشود، نمودار تابع f یک به‌یک نیست.



۲. شرط لازم و کافی برای آن‌که تابع f وارون‌پذیر باشد (f^{-1} تابع باشد) آن است که f یک‌به‌یک باشد، یعنی: اگر f یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه وارون‌پذیر است و اگر f وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه یک‌به‌یک است.

بازه (فاصله) در اعداد حقیقی

مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی بین دو عدد a و b را که شامل خود a و خود b نباشند، با نماد (a,b) نمایش می‌دهیم و آن را فاصله یا بازهٔ باز می‌نامیم.

$(a,b)=\{x\in R \mid a<x<b\}$

و به همین ترتیب بازه‌ها در حالت‌های مختلف (باز، نیم‌باز و بسته) به صورت‌های زیر تعریف می‌شوند:

$[a,b)=\{x\in R \mid a\le x<b\}$

$[۲,۹)=\{x\in R \mid ۲\le x<۹\}$

$(-۳,۵]=\{x\in R \mid -۳<x\le ۵\}$

$[-۲,۱۱]=\{x\in R \mid -۲\le x\le ۱۱\}$

$(-\infty,۵]=\{x\in R \mid x\le ۵\}$

$(۴,+\infty)=\{x\in R \mid x>۴\}$

مقدار تابع در یک نقطه

اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),...\}$ یک تابع باشد، واضح است که $D_f=N$ و $R_f=N-\{۱\}$. اگر بخواهیم برای f ضابطه تعریف کنیم، خواهیم داشت: $y=f(x)=x+۱$. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید $(۱,۲)\in f$ یا $f(۱)=۲$؛ همچنین $f(۲)=۳$، $f(۳)=۴$ و... و $f(x)=x+۱$.

نمایش ضابطه‌ای یا جبریِ تابع f به صورت $f(x)=x+۱$ است و مقدار تابع f در نقطهٔ ۱ یعنی f(۱) برابر با ۲ است و مقدار تابع در نقطهٔ k برابر با f(k) یا (k+۱) خواهد بود.

مثال: اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۲x^۲-۱$ مفروض باشد و $D_f=R$ در نظر گرفته شود، در این صورت مقدار تابع f را در نقاط $x=۲$، $x=-۱$، $x=۱$، $x=\frac{۱}{۲}$، $x=\sqrt{۲}$، $x=k$، $x=a^۲$ و $x=۲a-۱$ به‌دست آورید.

حل:

$f(۲)=۲\times ۲^۲-۱=۷$

$f(-۱)=۲\times(-۱)^۲-۱=۱,\ f(۱)=۲\times ۱^۲-۱=۱$

$f(\frac{۱}{۲})=۲\times(\frac{۱}{۲})^۲-۱=-\frac{۱}{۲}$

$f(\sqrt{۲})=۲\times(\sqrt{۲})^۲-۱=۳$

$f(k)=۲k^۲-۱\ ,\ f(a^۲)=۲(a^۲)^۲-۱=۲a^۴-۱$

$f(۲a-۱)=۲\times(۲a-۱)^۲-۱=۲(۴a^۲-۴a+۱)-۱$

$=۸a^۲-۸a+۱$

مثال: اگر $f(x)=۲x-۱$ و $g(x)=x^۲+۲$ در این صورت مطلوب است $f(۵)+g(۵)$، $f(g(۲))$ و $f(g(x))$.

$f(۵)=۲\times ۵-۱=۹\ ,\ g(۵)=۵^۲+۲=۲۷\ ,$

$f(۵)+g(۵)=۹+۲۷=۳۶$

$(f+g=۲x-۱+x^۲+۲=x^۲+۲x+۱\ ,$

$(f+g)(۵)=۵^۲+۲\times ۵+۱=۳۶)$

$g(۲)=۲^۲+۲=۶\ ,\ \ f(g(۲))=f(۶)=۲\times ۶-۱=۱۱$

$f(g(x))=۲(\underbrace{x^۲+۲}_{g(x)})-۱=۲x^۲+۳$

مثال: اگر f تابعی خطی باشد و $f(۱)=-۱$ و $f(۲)=۱$، در این صورت ضابطهٔ تابع f را بیابید.

حل: چون تابع f خطی است، پس داریم: $f(x)=ax+b$ و در نتیجه:

$f(۱)=-۱\Rightarrow -۱=a\times ۱+b\Rightarrow a+b=-۱$

$f(۲)=۱\Rightarrow ۱=a\times ۲+b\Rightarrow ۲a+b=۱$

$-\begin{cases}a+b=-۱\\ ۲a+b=۱\end{cases}\Rightarrow a=۲,\ b=-۳\Rightarrow f(x)=۲x-۳$