کاربرد هندسه در فیزیک

بررسی یک مسئلهٔ زیبا

هوشنگ شرقی

کلیدواژه‌ها:
هندسه، فیزیک، تابش نور.

اشاره

دربارهٔ کاربردهای مختلف ریاضیات در شاخه‌های گوناگون علوم دیگر بسیار گفته و نوشته‌اند. در این نوشتار قصد داریم نمونه‌ای از کاربرد قضایا و قوانین هندسه در فیزیک نور را نشان دهیم. خوانندگانی که در زمینهٔ فیزیک نور و قوانین آن مطالعه کرده‌اند، حتماً به این نکته واقف‌اند که قواعد هندسه تا چه حد در این بحث مورد استفاده قرار می‌گیرند. قوانین بازتابش نور در آینه‌ها، قوانین شکست نور، منشورها و عدسی‌های محدب و مقعر و آینه‌های محدب و مقعر و مسائل کاربردی و ترکیبی آن‌ها سرشار از مسائل هندسی ناب هستند.

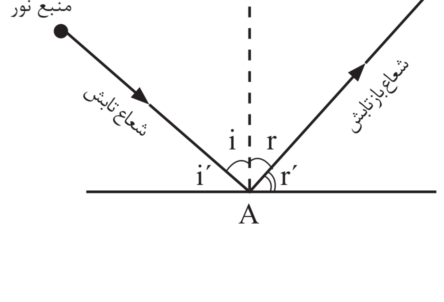
مسئله ما در این‌جا مطالعهٔ رفتار شعاع‌های تابش و بازتابش روی دو آینهٔ عمود بر هم است، وقتی که آینه‌ها حول فصل مشترک‌شان دوران می‌کنند. منبع مسئله یک کتاب قدیمی فیزیک بود که یکی از همکارانم این مسئله را از آن اقتباس کرد و در اختیار این‌جانب قرار داد و متأسفانه نام کتاب و نویسندهٔ آن را به خاطر نداشت. مسئله ماهیتی کاملاً هندسی دارد و در واقع یک مسئلهٔ خالص هندسی است. امید است از مطالعهٔ آن لذت ببرید و از کاربردهای ریاضی بیش از پیش آگاهی پیدا کنید.

مسئله: دو آینهٔ مسطح OM و OM′ در نقطهٔ O بر یکدیگر عمودند. صفحه‌ای مانند E که سوراخ کوچکی مانند S در آن تعبیه شده است، در مقابل دو آینه قرار دارد. از درون S یک شعاع نورانی عمود بر صفحهٔ E خارج می‌شود و بعد از دو انعکاس روی دو آینه به طرف صفحهٔ E بازمی‌گردد و روی آن لکهٔ روشنی مانند S′ می‌سازد. اکنون فرض کنید مجموعهٔ دو آینه را حول نقطهٔ O به اندازهٔ زاویهٔ متغیر θ دوران دهیم (بدون آن‌که وضع دو آینه را تغییر دهیم).

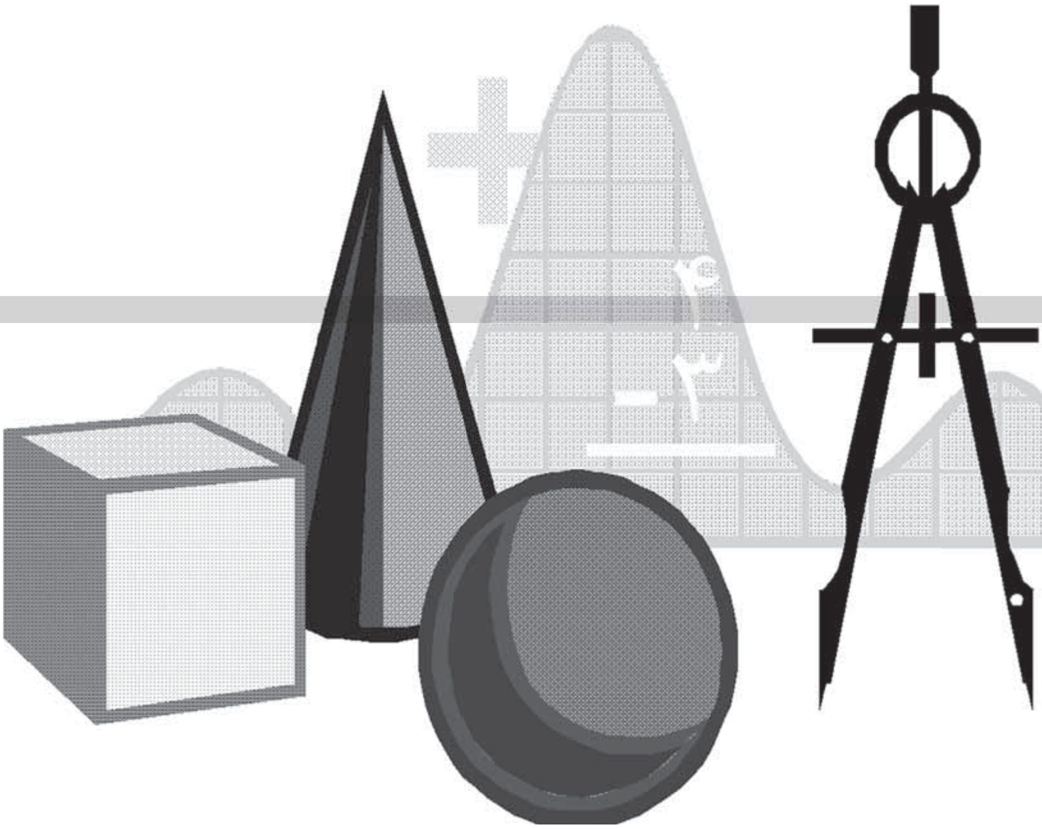
الف) نشان دهید با این دوران جای S′ تغییر نمی‌کند و در نتیجه SS′ ثابت می‌ماند.

ب) مکان هندسی نقطهٔ برخورد دو عمودی را که در هر حالت بر سطح دو آینه در نقطهٔ تابش رسم می‌شوند، به‌دست آورید.

پیش از آنکه حل مسئله و پاسخ آن را آغاز کنیم، یادآور می‌شویم که شعاع‌های تابش و بازتابش زاویه‌هایی را با خط عمود بر آینه (در نقطهٔ تابش نور) می‌سازند که به زوایای تابش و بازتابش معروف‌اند و اندازه‌های این دو زاویه با یکدیگر برابرند:

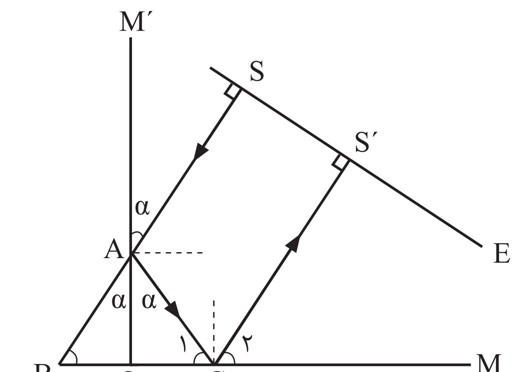


$$\hat{i} = \hat{r}$$



بدیهی است که در این صورت متمم‌های دو زاویهٔ $\hat{i}$ و $\hat{r}$ یعنی $\hat{i}'$ و $\hat{r}'$ نیز با هم برابرند. این قانونی است که به قانون اصلی بازتابش نور از آینه‌های تخت معروف است و خود اثباتی هندسی دارد که در انتهای این بحث آن را می‌آوریم.

با توجه به موضوع فوق، نخستین چیزی که در این مسئله به سادگی می‌توان آن را اثبات کرد، آن است که شعاع بازتابش آخر (که به E برمی‌گردد) با شعاع تابش نخست موازی است و هر دو بر صفحهٔ E عمودند. این موضوع در شکل زیر به سادگی دیده می‌شود:



شعاع تابش SA در نقطهٔ A بـه آینهٔ OM' برخورد می‌کند و شعاع بازتابش AC از آن خارج می‌شود و در نقطهٔ C به آینهٔ OM و شعاع بازتابش آن در نقطهٔ S' به صفحهٔ E برخورد می‌کند. امتدادهای SA و OM یکدیگر را در نقطهٔ B قطع می‌کنند. بدیهی است که با توجه به ویژگی بازتابش داریم:

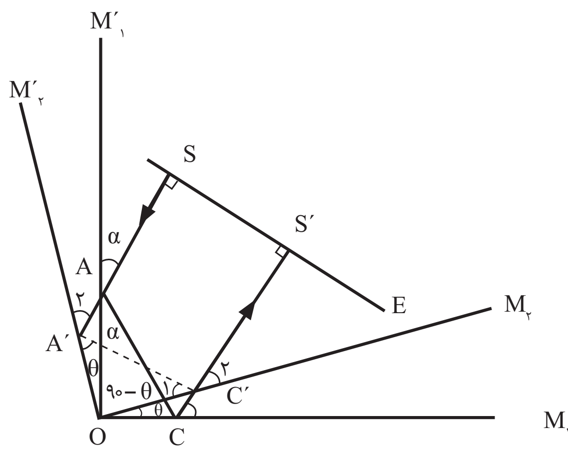
$$S\hat{A}M' = C\hat{A}O = O\hat{A}B = \alpha \Rightarrow \hat{B} = ۹۰^\circ - \alpha$$

$$\hat{C}_۲ = \hat{C}_۱ = ۹۰^\circ - \alpha \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}_۲ \Rightarrow CS' \| BS$$

$$\Rightarrow CS' \| SA \Rightarrow CS' \perp E$$

و این نتیجه برای هر وضعی که دو آینه داشته باشند (به شرطی که بر هم عمود باشند) صادق است.

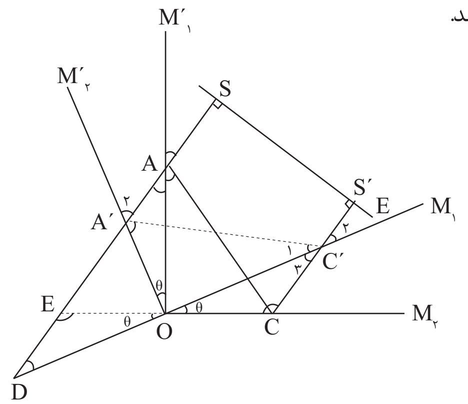
حال مجموعهٔ دو آینه را به اندازهٔ زاویهٔ θ حول O دوران می‌دهیم. شکل زیر حاصل می‌شود:



اکنون با توجه به تغییر وضع آینه‌ها، شعاع نوری SA، در همان راستا و در نقطهٔ A' به آینهٔ اول برخورد می‌کند و بقیهٔ مسیر آن را فعلاً نمی‌دانیم. امّا با توجه به آن‌چه صورت مسئله می‌گوید، می‌توانیم حدس بزنیم که باید مسیر آن $A'C'S$ باشد (C' نقطه برخورد CS'، شعاع بازتابش قبلی، با آینهٔ دوّم در وضع جدید است)، امّا اگر بخواهیم این حدس اثبات شود، باید نشان دهیم که:

$\hat{A}'_1 = \hat{A}'_2$ و $\hat{C}'_1 = \hat{C}'_2$؛ و نکتهٔ جالب آن است که این دو تساوی معادل یکدیگرند، زیرا: $\hat{A}'_1 + \hat{C}'_1 = 90^\circ$ و $\hat{A}'_2 + \hat{C}'_2 = 90^\circ$ بنابراین: $\hat{A}'_1 = \hat{A}'_2 \Leftrightarrow \hat{C}'_1 = \hat{C}'_2$ (چرا؟)

پس کافی است درستی یکی از این دو تساوی را نشان دهیم. برای مثال، نشان دهیم که $\hat{C}'_1 = \hat{C}'_2$. برای اثبات این برابری از یک ابتکار جالب هندسی کمک می‌گیریم: امتدادهای SA' و OC' همدیگر را در نقطهٔ D و امتداد OC نیز $A'D$ را در نقطهٔ E قطع می‌کنند.



حال با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} O\hat{A}E = O\hat{A}C = \alpha \\ AOC = AOE = 90^\circ \\ AO = AO \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AOE \cong \Delta AOC \Rightarrow OC = OE \quad \text{(زضز)}$$

$$CS' \perp E, DS \perp E \Rightarrow CS' \| DS \Rightarrow CC' \| DE$$

$$\Rightarrow C'\hat{C}O = D\hat{E}O, E\hat{O}D = C'\hat{O}C = \theta, OC = OE$$

$$\Rightarrow \Delta OCC' \cong \Delta ODE \ \text{(زضز)} \ \Rightarrow \hat{C}'_3 = \hat{D}, \hat{C}'_3 = \hat{C}'_2$$

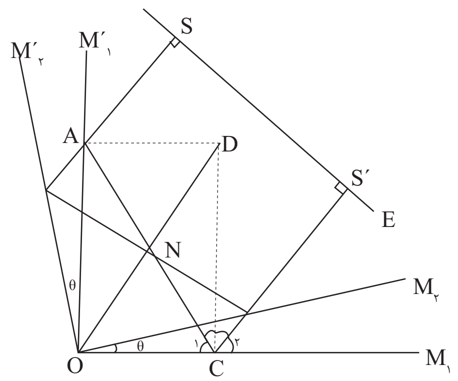
$$\Rightarrow \hat{C}'_2 = \hat{D}, OC' = OD$$

$$OC' = OD, A'\hat{O}C' = A'\hat{O}D = 90^\circ, A'O = A'O \Rightarrow$$

$$\Delta A'OD \cong \Delta A'OC' \text{(ضزض)} \Rightarrow \hat{C}'_1 = \hat{D}, \hat{C}'_2 = \hat{D} \Rightarrow \hat{C}'_1 = \hat{C}'_2$$

و با توجه به برابری فوق، برابری $\hat{A}'_1 = \hat{A}'_2$ نیز نتیجه می‌شود و در نتیجه مسیر شعاع نوری پس از دوران آینه به اندازهٔ دلخواه θ در بازتابش نهایی بر مسیر CS' منطبق است و لذا SS' تغییر نمی‌کند.

اکنون به قسمت **ب** می‌پردازیم:



مطابق شکل نقطهٔ برخورد دو خط عمود بر دو آینه در دو نقطهٔ تابش A و C را نقطهٔ D می‌نامیم. در مستطیل OCDA، قطرها با یکدیگر برابرند و همدیگر را نصف می‌کنند، پس ON=NC و در نتیجه: $N\hat{O}C = \hat{C}_1$ ؛ و چون $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ ، بنابراین: $N\hat{O}C = \hat{C}_2$ و از آنجا نتیجه می‌شود: $OD \| CS'$.

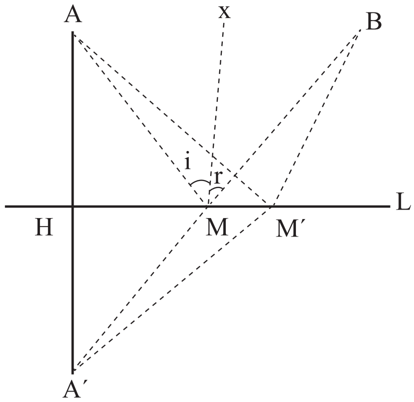
دقیقاً با همین استدلال می‌توان نشان داد که همهٔ این مستطیل‌ها در رأس O مشترک‌اند و از برخورد خطوط عمود بر نقاط تابش دو آینه تشکیل می‌شوند، پس قطر مستطیل موازی CS' و در نتیجه موازی AS و عمود بر راستای صفحهٔ E است. لذا با تغییر مکان این آینه‌ها و در نتیجه تغییر مکان D، D روی خط راستی در راستای عمود بر E و گذرنده از O تغییر مکان می‌دهد و مکان هندسی آن همین خط راست است.

پی‌نوشت

اثبات قانون بازتابش نور از آینه‌های تخت؛ اثبات برابری زوایای تابش و بازتابش در بازتابش نور از آینه‌های تخت براساس این اصل فیزیکی انجام می‌گیرد که:

«نور در طی مسیر خود همواره از مسیری می‌گذرد که شامل کمترین زمان ممکن باشد.» در این‌جا چون سرعت نور ثابت است (شعاع‌های تابش و بازتابش در یک محیط قرار دارند)، پس کم‌ترین زمان ممکن وقتی به‌دست می‌آید که نور کوتاه‌ترین مسیر را طی کند. حال مسئلهٔ ما این است:

یک شعاع نوری از نقطهٔ A خارج شده و پس از برخورد با آینه در نقطهٔ M، از نقطهٔ B خارج شده است. شرط این که MB+AM مینیمم شود، چیست؟ برای پاسخ به این پرسش، بازتاب A نسبت به آینه، یعنی نقطهٔ A' را می‌یابیم. حال اگر $A'B$ را رسم کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با آینه M بنامیم، این همان نقطهٔ مطلوب است، زیرا با توجه به اینکه L عمودمنصف AA' است، داریم:



$$MA = MA' \Rightarrow MA + MB = MA' + MB = A'B$$

و برای هر نقطهٔ دلخواه دیگر M' روی L داریم:

$$A'M' = AM' \Rightarrow AM' + M'B = A'M' + M'B > A'B$$

پس نقطهٔ M همان جایی است که شعاع تابش به آینه برخورد می‌کند و در نتیجه داریم:

$$Mx \| AA' \Rightarrow \hat{i} = \hat{A}, \hat{r} = A', \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \hat{i} = \hat{r}$$