آهنگ آنی و کمیت‌های وابسته

برای دانش‌آموزان سال سوم و چهارم متوسطه

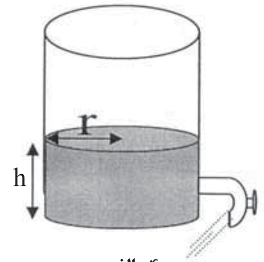
سیمین اکبری‌زاده
دبیر ریاضی ناحیهٔ یک اراک

کلیدواژه‌ها: آهنگ آنی، آهنگ تغییرات، مشتق و کمیت‌های وابسته.

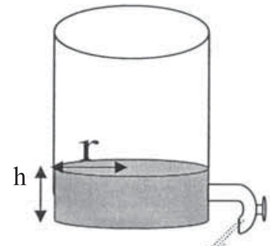
اشاره

در شمارهٔ قبل آهنگ لحظه‌ای کمیت A به کمیت r در $r=r_0$ با ذکر مثال‌هایی مورد بررسی قرار گرفت، همچنین کمیت‌های وابسته با مثال‌هایی بررسی شد، اینک در پی ادامهٔ مثال‌های کمیت‌های وابسته را می‌آوریم.

مثال۵: بشکه‌ای به شکل استوانه و به شعاع قاعدهٔ ۵۰ سانتی‌متر پر از آب است. اگر شیر بشکه باز باشد و آب با سرعت $۲/۵\pi$ سانتی‌متر مکعب در ثانیه در حال خارج شدن باشد، ارتفاع آب با چه سرعتی تغییر می‌کند؟



۴ـ الف



۴ـ ب

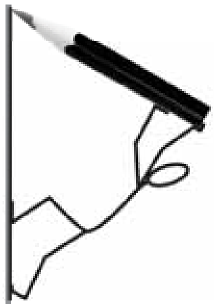
حل: با خارج شدن آب از بشکه، وضعیت بشکه از شکل ۴ـ الف به شکل ۴ـ ب تبدیل می‌شود و همان‌طور که از مقایسهٔ شکل‌ها مشخص است، شعاع سطح قاعدهٔ بشکه (r) در هر دو ثابت است؛ لذا داریم:

متغیرها: $\begin{cases} v: & \text{حجم آب موجود در استوانه} \\ h: & \text{ارتفاع آب موجود در استوانه} \\ t: & \text{زمان} \end{cases}$ ؛ مفروضات: $\begin{cases} r: & \text{شعاع سطح قاعدهٔ استوانه} = ۵۰ = \text{ثابت} \\ v'(t) = -۲/۵\pi \ \ Cm^۳/s \end{cases}$ ؛ مجهول: $h'(t)=?$

سؤال: فکر می‌کنید حاصل $h'(t)$ مثبت است یا منفی؟ بله درست حدس زدید، چون با گذشت زمان، h کم شده، یعنی h برحسب t تابع نزولی است، پس $h'(t)$ منفی به‌دست می‌آید. می‌دانیم $V=\pi r^۲ h$ و چون r ثابت و ۵۰cm است، می‌توانیم قبل از مشتق‌گیری آن را جاگذاری کنیم، پس خواهیم داشت:

$$(\text{ارتباط بین v و h})\ v = ۲۵۰۰\pi h \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به t}} v'(t) = ۲۵۰۰\pi h'(t) \xRightarrow{\text{جاگذاری}} -۲/۵\pi = ۲۵۰۰\pi h'(t) \Rightarrow h'(t) = \frac{-۱}{۱۰۰۰}$$

یعنی پس از گذشت ۱ ثانیه، ارتفاع آب موجود در بشکه $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ سانتی‌متر کم می‌شود.



(البته می‌توانستیم $r=50$ را قبل از مشتق‌گیری وارد نکنیم، ولی در هنگام مشتق‌گیری نسبت به t، با توجه به آن‌که πr^2 عدد ثابت بود، داشته باشیم: $v'(t)=\pi r^2 h'(t)$ و سپس جاگذاری کنیم).

مثال ۶: شن با سرعت ۱۰ مترمکعب در دقیقه روی یک کپهٔ مخروطی‌شکل می‌ریزد. شعاع قاعدهٔ این کپه همواره نصف ارتفاع آن است. سرعت ازدیاد ارتفاع این کپه را هنگامی که این ارتفاع ۵ متر باشد، پیدا کنید.

حل:

متغیرها: $\begin{cases} t: & \text{زمان} \\ r: & \text{شعاع قاعدهٔ کپهٔ مخروطی} \\ h: & \text{ارتفاع کپهٔ مخروطی} \\ v: & \text{حجم کپهٔ مخروطی} \end{cases}$

مفروضات: $\begin{cases} v'(t) = +10\dfrac{m^3}{\min t} \\ r = \dfrac{h}{2} & \text{همواره} \\ h = 5m & \text{در لحظهٔ خاص} \end{cases}$

مجهول: $h'(t)=?$

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h \Rightarrow (\text{ارتباط بین } v \text{ و } h): v = \frac{\pi}{12}h^3 \overset{\text{مشتق نسبت به } t}{\Rightarrow} v'(t) = \frac{\pi}{12}(3h^2h'(t))$$

$$\Rightarrow v'(t) = \frac{\pi}{4}h^2h'(t) \overset{\text{جاگذاری}}{\Rightarrow} 10 = \frac{\pi}{4}(5)^2h'(t) \Rightarrow h'(t) = \frac{8}{5\pi}\frac{m}{\min t}$$

مثال ۷: فرض کنید v حجم و s مساحت رویهٔ کل استوانهٔ مستدیر قائمی باشد که ارتفاع آن ۵ و شعاعش r متر است. مطلوب است $\dfrac{dv}{ds}$ به‌ازای $r=3$.

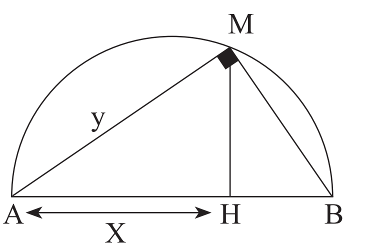
حل: $V'(S)$ مجهول است و چون نوشتن v برحسب s مشکل است، از قضیهٔ مشتق تابع مرکب و فرمول $v'(s) = \dfrac{v'(t)}{s'(t)}$ استفاده می‌کنیم.

$$v = \pi r^2 h \overset{h=5=\text{ثابت}}{\Rightarrow} v = 5\pi r^2 \overset{\text{مشتق نسبت به } t}{\Rightarrow} v'(t) = 10\pi r r'(t) \overset{r=3}{\Rightarrow} v'(t) = 30\pi r'(t)$$

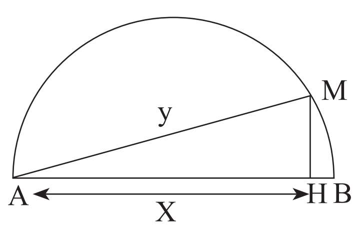
$$s = 2\pi r^2 + 2\pi r h \overset{h=5=\text{ثابت}}{\Rightarrow} s = 2\pi r^2 + 10\pi r \overset{\text{مشتق نسبت به } t}{\Rightarrow} s'(t) = 4\pi r r'(t) + 10\pi r'(t) \overset{r=3}{\Rightarrow} s'(t) = 22\pi r'(t)$$

$$v'(s) = \frac{v'(t)}{s'(t)} = \frac{30\pi r'(t)}{22\pi r'(t)} = \frac{15}{11}$$

مثال ۸: نقطهٔ M بر روی نیم‌دایره‌ای به قطر AB=۹ در حرکت است. تصویر نقطهٔ M بر قطر AB با سرعت ثابت ۰/۰۵ واحد در ثانیه از نقطهٔ A دور می‌شود. در لحظه‌ای که این فاصله ۶/۲۵ واحد است، سرعت افزایش طول وتر AM را بیابید.



۵ ــ الف



۵ ــ ب

حل: وقتی نقطهٔ M حرکت می‌کند، وضعیت آن از شکل ۵- الف به شکل ۵- ب تبدیل می‌شود.

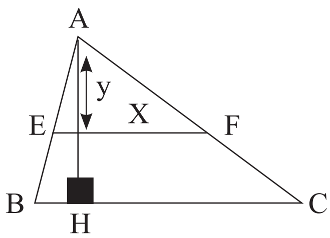
$$\text{متغیرها}:\begin{cases} t: & \text{زمان} \\ y: & \text{فاصلهٔ نقطهٔ M تا نقطهٔ A} \\ x: & \text{فاصلهٔ تصویر نقطهٔ M بر AB(H) تا نقطهٔ A} \end{cases} \quad ; \quad \text{مفروضات}:\begin{cases} |AB| = ۹ = \text{عدد ثابت} \\ x'(t) = +\frac{۵}{۱۰۰} \\ x = ۶/۲۵ \quad \text{در لحظهٔ خاص} \end{cases} \quad ; \quad \text{مجهول}: y'(t) = ?$$

می‌دانیم مثلث AMB قائم‌الزاویه است و در مثلث قائم‌الزاویه، مربع هر ضلع زاویهٔ قائمه برابر است با حاصل‌ضرب وتر در تصویر آن ضلع بر وتر، یعنی $|AM|^۲ = |AB||AH|$؛ پس داریم:

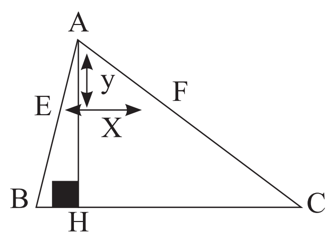
$$(\text{ارتباط بین x و y}): y^۲ = ۱۰x \overset{\text{مشتق نسبت به t}}{\Rightarrow} ۲yy'(t) = ۱۰x'(t) \overset{\text{جاگذاری و *}}{\Rightarrow} ۲(۷/۵)y'(t) = ۱۰(۶/۲۵) \Rightarrow y'(t) = ۰/۰۳$$

$$y^۲ = ۱۰x \Rightarrow y^۲ = ۱۰(۶/۲۵) \Rightarrow y = ۷/۵ \quad \text{(*) در لحظهٔ خاص}$$

مثال ۹: در مثلثی به طول قاعده ۳۲ و ارتفاع ۲۸ واحد، خطی موازی قاعده با سرعت ۰/۰۲ واحد در ثانیه به رأس مقابل آن نزدیک می‌شود و با دو ضلع دیگر این مثلث، مثلث‌های متشابه می‌سازد. در لحظه‌ای که فاصلهٔ ایـن خط تا رأس مقابل ۷ واحد اسـت، سرعت کاهش مساحت مثلث را بیابید.



۶ـ الف



۶ـ ب

حل: وقتی پاره‌خط EF به رأس A نزدیک می‌شود، وضعیتِ مثلث از شکل ۶- الف به ۶- ب تبدیل می‌شود و همان‌طور که از مقایسهٔ دو شکل معلوم است، داریم:

$$\text{متغیرها}:\begin{cases} t: & \text{زمان} \\ x: & \text{طول خط موازی قاعده (طول EF)} \\ y: & \text{فاصلهٔ خط موازی قاعده تا رأس مقابل} \\ s: & \text{مساحت مثلث بالا (مثلث AEF)} \end{cases} \quad ; \quad \text{مفروضات}:\begin{cases} y'(t) = -\frac{۲}{۱۰۰} \\ y = ۷ \end{cases} \quad ; \quad \text{مجهول}: S'(t) = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{xy}{۲} \quad \text{مساحت مثلث بالا} \\ \Delta AEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{x}{۳۲} = \frac{y}{۲۸} \Rightarrow x = \frac{۸}{۷}y \end{array}\right\} \Rightarrow (\text{ارتباط بین S و y}) S = \frac{۸}{۱۴}y^۲ \overset{\text{مشتق نسبت به t}}{\Rightarrow} s'(t) = \frac{۱۶}{۱۴}yy'(t) \Rightarrow s(t) = ۸ \times \times ۲ =$$

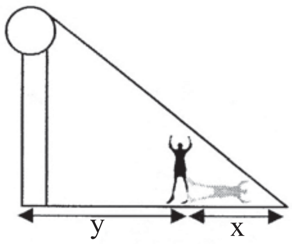
$$\overset{\text{جاگذاری}}{\Rightarrow} s'(t) = \frac{۸}{۷} \times ۷ \times \frac{-۲}{۱۰۰} = \frac{-۱۶}{۱۰۰}$$

یعنی پس از گذشت ۱ ثانیه، مساحت مثلث بالا $\frac{۱۶}{۱۰۰}$ واحد مربع کاهش می‌یابد.

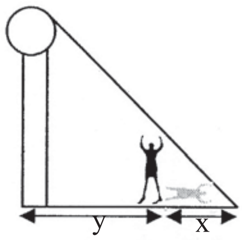
سخنی برای گوش شنوا: اگر از طرفین فرمول $S = \frac{xy}{۲}$ نسبت به t مشتق بگیریم، در هنگام جاگذاری با مشکل مواجه می‌شویم، چون با $x'(t)$ مواجه خواهیم شد که در فرض مسئله داده نشده است؛ لذا به کمک فرمول دیگری، x را از این فرمول حذف کردیم.

مثال ۱۰: پسری به قد ۱/۵ متر با سرعت ۱/۲۵ متر بر ثانیه به طرف چراغی که در ارتفاع ۴ متری بالای زمین نصب شده است، حرکت می‌کند. وقتی که او در ۲/۵ متری پایهٔ چراغ واقع می‌شود، الف) سرعت تغییرات طول سایهٔ پسر را بیابید.

ب) انتهای سایهٔ پسر با چه سرعتی به پایهٔ چراغ نزدیک می‌شود؟



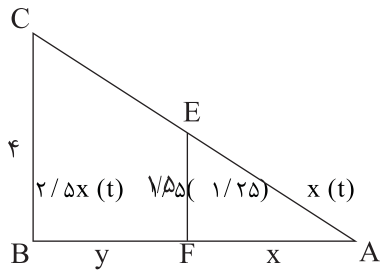
۷ ـ الف



۷ ـ ب

حـــل: الف) وقتی فرد به طرف تیر چراغ برق حرکت می‌کند وضعیت از شکل ۷- الف به ۷- ب تبدیل می‌شود و همان‌طـور که از مقایسـهٔ دو شـکل معلوم می‌شـود، داریم:

مجهول: $\begin{cases} \text{الف}: x'(t) = ? \\ \text{ب}: x'(t) + y'(t) = ? \end{cases}$; مفروضات: $\left\{ y'(t) = -۱/۲۵ \frac{m}{s} \right.$; متغیرها: $\begin{cases} t: \text{زمان} \\ x: \text{طول سایهٔ پسر} \\ y: \text{فاصلهٔ پسر تا تیر چراغ برق} \end{cases}$



الف) $ABC \sim AEF \Rightarrow \frac{۴}{۱/۵} = \frac{x+y}{x} \Rightarrow ۴x = ۱/۵x + ۱/۵y$

$\Rightarrow$ (ارتباط بین x و y): $۲/۵x = ۱/۵y \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به t}} ۲/۵x'(t) = ۱/۵y'(t)$

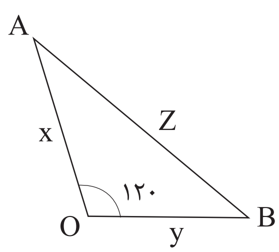
$\xRightarrow{\text{جاگذاری}} ۲/۵x'(t) = ۱/۵(-۱/۲۵) \Rightarrow x'(t) = -۰/۷۵ \frac{m}{s}$

یعنی پس از گذشت ۱ ثانیه، سایهٔ فرد ۰/۷۵ متر کمتر می‌شود.

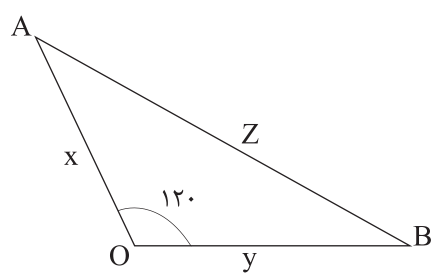
ب) $x'(t) + y'(t) = -۱/۲۵ - ۰/۷۵ = -۲ \frac{m}{s}$

مثال ۱۱: دو کشتی A و B روی دو خط که با هم زاویهٔ °۱۲۰ می‌سازند در حال دور شدن از نقطهٔ O هستند هرگاه در لحظهٔ معین OA=۸km و OB=۶km و سرعت کشتی A برابر ۲۰ کیلومتر در ساعت و سرعت کشتی B برابر ۳۰ کیلومتر در ساعت باشد، فاصلهٔ بین دو کشتی با چه سرعتی زیاد می‌شود؟

حل:



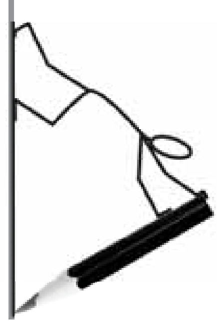
۸ ـ الف

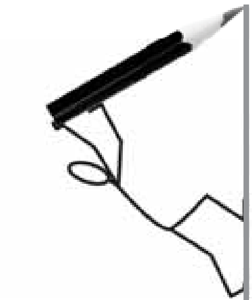


۸ ـ ب

وقتی دو کشتی از نقطهٔ O دور می‌شوند، وضعیت آن‌ها از شکل ۸- الف به ۸- ب تبدیل می‌شود. با مقایسهٔ شکل‌ها داریم:

مجهول: $z'(t)=?$; مفروضات: $\begin{cases} x'(t) = +۲۰ \frac{km}{h} \\ y'(t) = +۳۰ \frac{km}{h} \\ x = ۸km \ \text{در لحظهٔ خاص} \\ y = ۶km \ \text{در لحظهٔ خاص} \end{cases}$; متغیرها: $\begin{cases} t: \text{زمان} \\ x: \text{فاصلهٔ کشتی A از نقطهٔ O} \\ y: \text{فاصلهٔ کشتی B از نقطهٔ O} \\ z: \text{فاصلهٔ دو کشتی} \end{cases}$





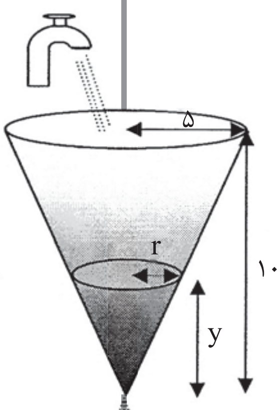
قضیهٔ کسینوس‌ها در $\overset{\Delta}{OAB}$: $z^۲ = x^۲ + y^۲ - ۲xy\cos ۱۲۰ \Rightarrow$ (ارتباط بین z و x و y): $z^۲=x^۲+y^۲+xy$

$$\xRightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} ۲zz'(t) = ۲xx'(t) + ۲yy'(t) + x'(t)y + y'(t)x$$

$$\xRightarrow{\text{جاگذاری و*}} ۲(۲\sqrt{۳۷})z'(t) = ۲(۶)(۳۰) + ۲(۸)(۲۰) + ۳۰(۸) + ۲۰(۶) \Rightarrow z'(t) = \frac{۲۶}{\sqrt{۳۷}}$$

$$z^۲ = x^۲ + y^۲ + xy \xRightarrow[x=۸]{y=۶} z^۲ = ۳۶ + ۶۴ + ۴۸ \Rightarrow z^۲ = ۱۴۸ \Rightarrow z = ۲\sqrt{۳۷}(*)$$

مثال ۱۲. ظرف مخروطی‌شـکلی به ارتفاع ۱۰ متر و شـعاع قاعدهٔ ۵ متر مفروض است. سوراخی در رأس ظرف تعبیه شده است و آب در لحظه‌ای که عمقش y است با سرعت $۰/۰۸\sqrt{y}$ مترمکعب در دقیقه از ظرف خارج می‌شود. از طرف دیگر آب با سرعت ثابت c مترمکعب در دقیقه وارد مخزن می‌شود. در لحظه‌ای که عمق آب $۶\frac{۱}{۴}$ متر است، مشاهده می‌شود که عمق آن با سرعت ۰/۰۲ متر در دقیقه افزایش می‌یابد. آیا با این شرایط مخزن پر خواهد شد؟ چرا؟



شکل ۹

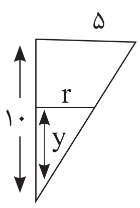
حل: وقتی آب موجود در ظرف تغییر می‌کند، خواهیم داشت:

متغیرها: $\begin{cases} t: \text{زمان} \\ y: \text{عمق آب موجود در ظرف} \\ r: \text{شعاع سطح قاعدهٔ آب موجود در ظرف} \\ v: \text{حجم آب موجود در ظرف} \end{cases}$; مفروضات: $\begin{cases} y = \frac{۲۵}{۴} \quad \text{در لحظهٔ خاص} \\ y'(t) = +\frac{۲}{۱۰۰} \end{cases}$

برای یافتن جواب سؤال، اولاً با توجه به فرض، تغییر خالص حجم برای عمق y عبارت است از:

$v'(t) = c - ۰/۰۸\sqrt{y}$؛ پس برای $y = \frac{۲۵}{۴}$ داریم: $v'(t) = c - \frac{۸}{۱۰۰} \times \sqrt{\frac{۲۵}{۴}} = c - \frac{۱}{۵}$

ثانیـاً: $v = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ y$ و بـا توجـه بـه تشـابه مثلث‌هـا:



داریــم: $\frac{r}{۵} = \frac{y}{۱۰}$؛ پـس $r = \frac{۱}{۲}y$

و از این دو ارتباط بین V و y (آن‌چه آهنگ تغییرش نسبت به t مجهول است یا داده شده است) به‌دست‌می‌آید.

(ارتباط بین V و y): $v = \frac{\pi}{۱۲}y^۳ \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} v'(t) = \frac{\pi}{۱۲}y^۲y'(t) \xRightarrow{\text{جاگذاری}} v'(t) = \frac{\pi}{۱۲}(\frac{۲۵}{۴})^۲(\frac{۲}{۱۰۰}) = \frac{۲۵\pi}{۱۲۸}$

یعنی در لحظه‌ای که $y = \frac{۲۵}{۴}$، طبق فرض ۴ مسئله داریم: $v'(t) = \frac{۲۵\pi}{۱۲۸}$. طبق فرض ۲ و ۳ مسئله نیز برای $y = \frac{۲۵}{۴}$ به‌دست آوردیم $v'(t) = C - \frac{۱}{۵}$، پس باید $C - \frac{۱}{۵} = \frac{۲۵\pi}{۱۲۸}$ در نتیجه $C = \frac{۲۵\pi}{۱۲۸} + \frac{۱}{۵} \simeq ۰/۸$ باشـد. لذا برای عمق y داریم: $v'(t) = ۰/۸ - ۰/۰۸\sqrt{y}$ و چون برای $۰ \le y \le ۱۰$ همواره $v'(t) > ۰$ برقرار است، بنابراین مخزن پر خواهد شد.

منابع

۱. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، جلد اول
۲. جورج توماس، راس فینی، ترجمه: مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی
۳. جورج ب. توماس، ترجمه: علی‌اکبر جعفریان، ابوالقاسم میامئی
۴. لیت هولد، ترجمه: دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده