آموزش

۲۹ روش برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم و کاربردهای آن‌ها

۲

$$ax^2+bx+c=0$$

سید محمدرضا هاشمی موسوی

کلیدواژه‌ها:
حل معادله،
معادلهٔ درجه دوم،
معادلهٔ تقلیل‌یافته.

اشاره

در شمارهٔ ۷۰ مجله، ده روش برای حل معادلهٔ درجه دوم ارائه شد، اینک در ادامه، بقیهٔ روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم را می‌آوریم.

۱۱) روش تبدیل

در این روش کافی است که در معادلهٔ (۱) x را به X+β تبدیل کنیم:

$$ax^2+bx+c=0 \quad (1)$$

$$x=X+\beta: a(X+\beta)^2+b(X+\beta)+c=0 \quad (2)$$

پس از اختصار لازم:

$$aX^2+(2a\beta+b)X+a\beta^2+b\beta+c=0 \quad (3)$$

برای حل معادلهٔ (۳) کافی است مقدار β را چنان تعیین کنیم که ضریب X صفر شود (به معادلهٔ درجهٔ دوم ناقص تبدیل شود):
(۴)

$$2a\beta+b=0;\ \beta=\frac{-b}{2a}: aX^2+a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b}{2a}\right)+c=0$$

پس از اختصار لازم به معادلهٔ درجهٔ دوم ناقص زیر می‌رسیم:

$$aX^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0;\ X^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{\Delta}{4a^2};\ X=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

بنابراین، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) به صورت زیر هستند:

$$x=X+\beta=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a};\ x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

کاربرد: از این روش برای تبدیل هر معادلهٔ درجهٔ nام به صورت عمومی زیر:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$$

به معادلهٔ ناقص زیر استفاده می‌شود:

$$x=X-\frac{b}{na}:\ X^n+pX^{n-2}+\ldots+k+s=0$$

برای مثال، با تبدیل $x=X-\frac{b}{3a}$، معادلهٔ درجهٔ سوم عمومی $ax^3+bx^2+cx+d=0$ به معادلهٔ درجهٔ سوم کانونی $X^3+pX+q=0$ تبدیل می‌شود و به‌جای بحث روی مبین معادلهٔ عمومی، بحث روی مبین معادلهٔ کانونی $(\Delta=4p^3+27q^2)$ انجام می‌شود.

۱۲) روش پارامترهای نامعین معادلهٔ تقلیل یافته (HM)

فرض می‌کنیم معادلهٔ تقلیل یافتهٔ معادلهٔ $x^2+px+q=0$ به صورت $x+A=B$ باشد (هر معادله به صورت عمومی (۱) با تقسیم معادله بر $a\neq 0$ به صورت فوق تبدیل می‌شود). حال دو طرف معادلهٔ تقلیل یافته را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^2+2Ax+A^2=B^2;\ x^2+2Ax+A^2-B^2=0$$

از مقایسهٔ دو معادله، دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases}2A=p\\ A^2-B^2=q\end{cases};\ A=\frac{p}{2};\ B^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{p^2-4q}{4}=\frac{\Delta}{4};\ B=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2};$$

$$x=B-A=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2}-\frac{p}{2}=\frac{-p\pm\sqrt{\Delta}}{2};\ x=\frac{-p\pm\sqrt{\Delta}}{2}$$

کاربـرد: هـر معادلـهٔ درجـهٔ زوج بـه صـورت عمومی $x^{2n}+px^{2n-1}+...+q=0$ را می‌توان با این روش حل کرد.

۱۳) روش دستگاه مزدوج (HM)

برای تشکیل دستگاه مزدوج، ابتدا معادلهٔ (۱) را بر x تقسیم می‌کنیم: $\frac{1}{x}(ax^2+bx+c)=0$

(چون c≠۰، پس: x≠۰)

$$ax+b+cx^{-1}=0\ ;\ ax+cx^{-1}=-b$$

اکنون مزدوج معادلهٔ اخیر را به y نمایش می‌دهیم و دستگاه مزدوج زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases}ax+cx^{-1}=-b\\ ax-cx^{-1}=y\end{cases};\quad \begin{matrix}\text{(جمع دو معادله)}\\ \text{(تفاضل دو معادله)}\end{matrix}\begin{cases}2ax=-b+y\\ 2cx^{-1}=-b-y\end{cases};$$

$$\text{(ضرب دو معادله)}\ 4acxx^{-1}=b^2-y^2$$

$$y^2=b^2-4ac=\Delta;\ y=\pm\sqrt{\Delta};x=\frac{y-b}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

کاربـرد: ایـن روش برای خطی‌سـازی مسـئله‌های درجهٔ دوم (یـا از درجـات بالاتر) به کار مـی‌رود. این روش هم‌چنین بـرای حـل معادله‌های کلاسـیک $a\sin x+b\cos x=c$ و یا $a\tan x+b\cot x=c$ و غیره به سـهولت و سـادگی خاصی انجام می‌شـود. برای حل معادله‌های کلاسـیک فوق کافی است مزدوج معادله را به y نشان دهیم و معادله‌های مزدوج را در یک دستگاه حل کنیم:

$$\begin{cases}a\tan x+b\cot x=c\\ a\tan x-b\cot x=y\end{cases};\begin{cases}2a\tan x=c+y\\ 2b\cot x=c-y\end{cases};4ab\underbrace{\tan x\cot x}_{1}=c^2-y^2$$

$$y^2=c^2-4ab;y=\pm\sqrt{c^2-4ab};\tan x=\frac{c\pm\sqrt{c^2-4ab}}{2a},$$

$$\cot x=\frac{c\mp\sqrt{c^2-4ab}}{2b}$$

روش‌های آنالیزی

۱۴) روش سلسلهٔ کسرهای مسلسل نامتناهی (HM)

ابتـدا معادلـهٔ عمومـی درجـهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ یا $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ را بـا تبدیل $x=\frac{-b}{c}X$ (یا $x=\frac{X}{M}$) به معادلهٔ $X^2-kX-k=0$ تحویل می‌دهیم.

(در این‌جا برای القـای روش موردنظر معادله را برای k=۱ حل می‌کنیم).

این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(X>0)\ \ X^2=kX+k;\ X=k+\frac{k}{X}\ \ (k=\frac{-b^2}{ac})$$

در این‌جـا معادلـه ی فـوق را می‌توان به صورت سلسـلهٔ کسرهای مسلسل نامتناهی نشان داد:

پس:

$$X=k+\frac{k}{X},\ k=1:\ X=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}$$

پس:

$$1,1+\frac{1}{1},1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}},1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}},...,X\to X_1>0$$

بنابراین، دنبالهٔ زیر به ریشهٔ مثبت معادلهٔ اصلی می‌گراید:

$$1,2,1\frac{1}{2},1\frac{2}{3},1\frac{3}{5},1\frac{5}{8},...\to X_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1/618$$

(برای اطلاع بیش‌تر رجوع کنید به مجلهٔ شـمارهٔ ۳۰ آشنایی با ریاضیات)

کاربـرد: هـر معادلهٔ درجـهٔ nام $x^n+px+q=0$ با این روش قابل حل است.

۱۵) روش سلسلهٔ رادیکال‌های نامتناهی (HM)

ابتدا با توجه به روش ۱۴ معادلهٔ عمومی (۱) یا $x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=۰$ را با تبدیل $x=\frac{-b}{a}X$ (یا $x=\frac{X}{m}$) به معادلهٔ $X^{۲}-X-k=۰$ تحویل می‌دهیم. (در این‌جا برای القای روش موردنظر، معادله را برای k=۱ حل می‌کنیم).

این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(X>۰)\quad X^{۲}=X+k;\ X=\sqrt{k+X}\quad \left(k=\frac{-ac}{b^{۲}}\right)$$

در این‌جا، معادلهٔ فوق را می‌توان به صورت سلسلهٔ رادیکال‌های نامتناهی نشان داد:

$$X=\sqrt{k+\underbrace{\sqrt{k+\sqrt{k+\sqrt{\dots}}}}_{X}}\ ;k=۱:X=\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{\dots}}}}$$

پس:

$$\sqrt{۱},\sqrt{۱+\sqrt{۱}},\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱}}},\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱}}}},\dots\to X_{۱}>۰$$

بنابراین، دنبالهٔ زیر به ریشهٔ مثبت معادلهٔ اصلی می‌گراید:

$$۱,\sqrt{۲},\sqrt{۱+\sqrt{۲}},\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۲}}},\dots\to X_{۱}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\approx ۱/۶۱۸$$

کاربرد: با این روش و روش قبل (روش ۱۴) می‌توان هر معادلهٔ درجهٔ nام به صورت عمومی

$x^{n}+px+q=۰$

را حل کرد. البته این نوع روش حل، یک روش تقریبی است که می‌توان با ادامه و تکرار عمل با هر تقریب دلخواه به ریشه‌های معادله دست یافت (برای اطلاع بیش‌تر رجوع کنید به شمارهٔ ۳۰ آشنایی با ریاضیات).

۱۶) روش نیوتن (تکرار)

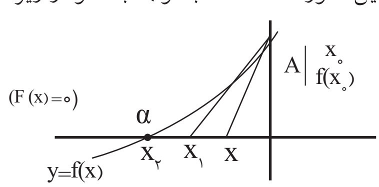
فرمول روش نیوتن را می‌توان به دو طریق به دست آورد:

الف) روش هندسی (ترسیم مماس)

ب) روش تقریبی (با استفاده از بسط تیلور)

در این‌جا تعبیر مختصری از روش هندسی (ترسیم مماس) به این صورت است که با توجه به نمودار زیر:

$(f(\alpha)=۰)$



اگر $x_{۰}$ تقریبی از α (ریشهٔ معادله) باشد، از نقطهٔ A واقع بر منحنی y=f(x) به‌طول $x_{۰}$ مماس بر این منحنی رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با محور طول‌ها $x_{۱}$ می‌نامیم (مانند شکل).

اگر این عمل را تکرار کنیم (رسم مماس‌ها) بدیهی است که به تقریب دلخواه (به ریشهٔ معادله) نزدیک می‌شویم. اگر $x_{۰}$ معلوم باشد، برای به دست آوردن $x_{۱}$ باید معادلهٔ خط مماس بر منحنی y=f(x) را در نقطهٔ $A(x_{۰},f(x_{۰}))$ بنویسیم و محل تلاقی آن را با محور xها تعیین کنیم. ضریب زاویهٔ این خط $f'(x_{۰})$ است:

$y-f(x_{۰})=f'(x_{۰})(x-x_{۰})$ (معادلهٔ خط مماس در $x_{۰}$)

محل تلاقی این خط با محور طول‌ها را $(x_{۱},۰)$ در نظر می‌گیریم: پس:

$$۰-f(x_{۰})=f'(x_{۰})(x_{۱}-x_{۰})$$

با فرض $f'(x_{۰})\neq ۰$ داریم $x_{۱}=x_{۰}-\frac{f(x_{۰})}{f'(x_{۰})}$ و با تکرار روش نیوتن به فرمول بازگشتی تکرار زیر می‌رسیم:

$$x_{۱}=x_{۰}-\frac{f(x_{۰})}{f'(x_{۰})}\quad (❊)$$

برای معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) داریم $f'(x_{n})=۲ax_{n}+b$ و با تکرار عمل (❊) به ریشهٔ معادله با تقریب دلخواه خواهیم رسید.

کاربرد: روش نیوتن برای حل هر معادلهٔ کلاسیک یا غیرکلاسیک قابل استفاده است. (البته با داشتن شرایط مشتق‌پذیری).

۱۷) روش استفاده از اکسترمم تابع (ماکزیمم یا می‌نیمم تابع) (HM)

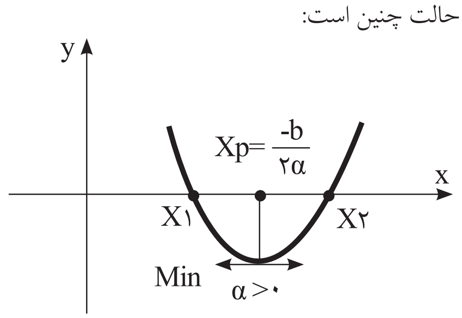
می‌دانیم معادلهٔ درجهٔ دوم عمومی $ax^{۲}+bx+c=۰$ در واقع طول‌های نقاط برخورد منحنی تابع با ضابطهٔ $y=ax^{۲}+bx+c$ با محور xها را به ما می‌دهد (y=۰).

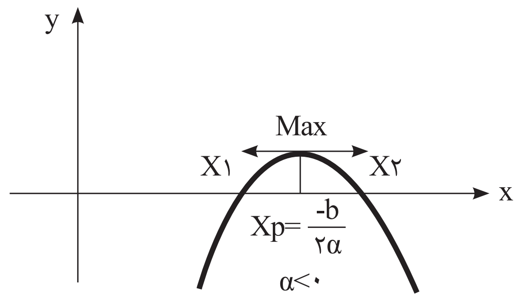
بنابراین خاصیت‌های اساسی این تابع می‌توانند ما را به ریشه‌های معادله نزدیک کنند. طول نقاط اکسترمم (ماکزیمم یا می‌نیمم) تابع، ریشه‌های مشتق تابع هستند:

(طول اکسترمم تابع)

$$y'=۲ax_{P}+b=۰;\quad x_{P}=-\frac{b}{۲a}$$

می‌دانیم در حالت a>۰ تابع درجهٔ دوم دارای می‌نیمم و در حالت a<۰ دارای ماکزیمم است. در واقع نمودارهای منحنی در این دو حالت چنین است:





در صورتی که معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی باشد با توجه به این‌که خط $x_P=\frac{-b}{۲a}$ محور تقارن منحنی است؛ بنابراین ریشه‌های معادله که نسبت به این خط قرینهٔ یکدیگرند از رابطهٔ $x_{۱,۲}=\frac{-b}{۲a}\pm k$ به‌دست می‌آیند. از طرفی مجموع ریشه‌ها از خاصیت تقارنی به دست می‌آید.

$$x_P=\frac{-b}{۲a}=\frac{x_۱+x_۲}{۲};\ x_۱+x_۲=\frac{-b}{a}$$

برای تعیین مقدار k کافی است که مقدار $x_{۱,۲}$ را داخل معادلهٔ درجهٔ دوم مورد نظر قرار دهیم:

$$x_{۱,۲}=\frac{-b}{۲a}\pm k : a\left(\frac{-b}{۲a}\pm k\right)^۲+b\left(\frac{-b}{۲a}\pm k\right)+c=۰$$

پس از اختصار لازم:

$$k^۲=\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}=\frac{\Delta}{۴a^۲}\xrightarrow{(\Delta\geq ۰)}k=\frac{\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

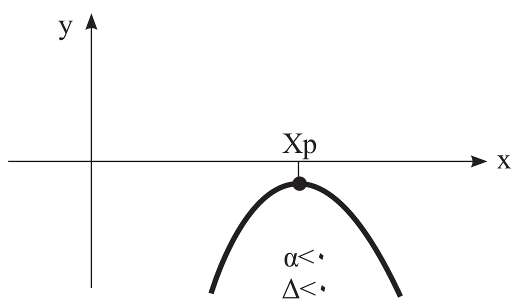
بنابراین با شرط $\Delta\geq ۰$، ریشه‌های حقیقی معادله از رابطهٔ زیرقابل محاسبه هستند:

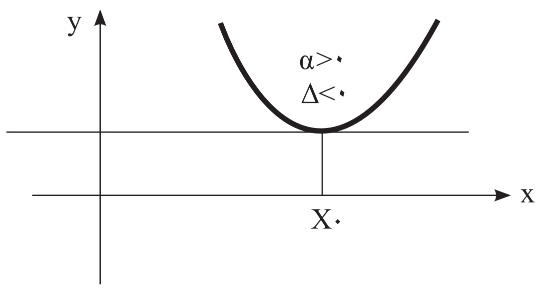
$$x_{۱,۲}=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$ (مبین معادله: $\Delta=b^۲-۴ac$)

و یا به‌طور اختصار، با توجه به مبین معادله از فرمول زیر قابل محاسبه‌اند:

$$x_{۱,۲}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

می‌دانیم در حالت $\Delta<۰$ منحنی تابع، محور xها را قطع نخواهد کرد و به یکی از دو صورت زیر است:





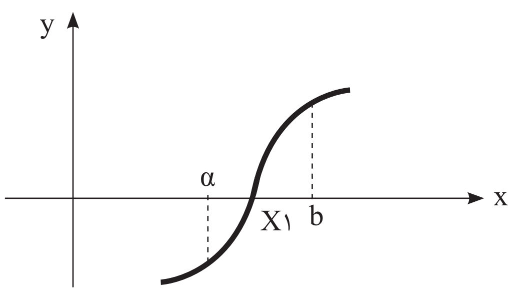
بنابراین در حالت $\Delta<۰$ معادلهٔ درجهٔ دوم عمومی دارای ریشه‌های حقیقی نیست.

روش عددی (تکرار) ساده‌تر

۱۸) روش تنصیف (نصف‌کردن بازه)

این روش را برای تعیین ریشه‌های حقیقی یا ریشه‌های تکراری معادله می‌توان به‌کار برد. در صورتی که تابع درجهٔ دوم موردنظر بر بازهٔ [a,b] پیوسته و علامت آن در دو سر بازه مختلف باشد ($f(a).f(b)<۰$) بدیهی است که تابع درجهٔ دوم موردنظر بر [a,b] اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است. با این مفروضات تابع درجهٔ دوم فوق بر بازهٔ (a,b) تنها دارای یک ریشهٔ حقیقی مانند $x_۱$ است. هدف در این روش ساخت دنباله‌ای مثل $\{x_n\}$ است که به ریشهٔ $x_۱$ همگرا باشد؛ یعنی $\lim_{n\to\infty}x_n=x_۱$ (شکل (۱) ملاحظه شود).

$y=ax^۲+bx+c$



به همین دلیل، بازهٔ [a,b] را به دو بخش برابر تقسیم می‌کنیم و قرار می‌دهیم:

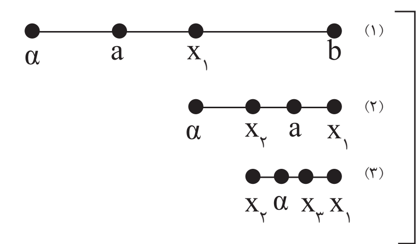
$$x_۱=\frac{a+b}{۲}=\alpha$$

پس، $x_۱$ وسط بازهٔ [a,b] قرار دارد و این بازه را به دو زیر بازهٔ $[a,x_۱]$ و $[x_۱,b]$ افراز می‌کنیم (یعنی بازهٔ مورد نظر به دو بخش یا دو بازه افراز می‌شود). اگر $f(\alpha)=۰$، آن‌گاه $x_۱=\alpha$ و در غیر این صورت ریشهٔ α در یکی از دو زیر بازهٔ مذکور قرار دارد. با توجه به قضیهٔ مقدار میانی، اگر $f(\alpha)f(x_۱)<۰$، α در $[a,x_۱]$ و اگر $f(x_۱)f(b)<۰$، α در $[x_۱,b]$ قرار دارد. برای ادامهٔ کار بدیهی است که α در هر کدام از این دو بازه قرار داشته

باشد، دوباره آن بازه را به دو بخش برابر تقسیم می‌کنیم تا نقطهٔ $x_2 = \frac{a+x_1}{2}$ یا $x_2 = \frac{x_1+b}{2}$ به دست آید. با ادامهٔ این روند (مطابق شکل (۲)) دنباله‌ای به صورت x_1، x_2، x_3 و ... حاصل خواهد شد که هرگاه تعداد جملات دنباله بیش‌تر شود (به قدر کافی) به ریشهٔ $x_1=\alpha$ نزدیک‌تر خواهد شد (با دقت دلخواه)

* **توجه:** در رابطه با این روش (الگوریتم، نمودار گردشی محاسن و معایب روش و...) به تفضیل در مقالهٔ بعدی با عنوان «۳۱ روش برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم» بحث خواهد شد.

در این‌جا با این روش به تعیین ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ می‌پردازیم.



برای حل معادلهٔ مورد نظر تابع درجهٔ دوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=x^2-3x+1$$

این تابع در بازهٔ $[0,1]$ تغییر علامت می‌دهد؛ زیرا:

$$0 \le x \le 1,\ f(0)f(1)=(1)(-1)<0$$

از طرفی برای هر $0<x<1$:

$$f'(x)=2x-3<0$$

بنابراین، در $[0,1]$ تنها یک ریشهٔ حقیقی دارد. جدول روبه‌رو نتایج روش نصف‌کردن بازه (تنصیف) را تا رسیدن به دقت سه رقم اعشار نشان می‌دهد:

$[a,b]=[0,1]$ (بازهٔ موردنظر)

با توجه به جدول بدیهی است که ریشهٔ معادله با سه رقم اعشار درست چنین است:

$$0/381 < x_1 < 0/383 : x_1 \approx 0/382 \rightarrow f(x_1 = 0/382) = 0/000076$$

ریشهٔ دیگر معادله با توجه به روابط بین ریشه‌ها و ضرایب چنین است:

$$x_1x_2 = 1;\ x_2 = \frac{1}{x_1} \approx \frac{1}{0/382} \approx 2/618$$

(این‌جا، به دو ریشهٔ معادله، با سه رقم اعشار درست دست یافتیم.)

n	a	b	$x=\frac{a+b}{2}$	f(a)	f(x)	علامت f(a).f(x)
۱	۰	۱	۰/۵	۱	−۰/۲۵	−
۲	۰	۰/۵	۰/۲۵	۱	۰/۳۱۲۵	+
۳	۰/۲۵	۰/۵	۰/۳۷۵	۰/۳۱۲۵	۰/۲۰۳۱	+
۴	۰/۳۷۵	۰/۵	۰/۴۳۷۵	۰/۲۰۳۱	−۰/۱۲۱۱	−
۵	۰/۳۷۵	۰/۴۳۷۵	۰/۴۰۶۲۵	۰/۲۰۳۱	−۰/۰۵۳۸	−
۶	۰/۳۷۵	۰/۴۰۶۳	۰/۳۹۰۶۵	۰/۲۰۳۱	−۰/۰۱۹۴	−
۷	۰/۳۷۵	۰/۳۹۰۷	۰/۳۸۲۸۵	۰/۲۰۳۱	−۰/۰۰۱۹۸	−
۸	۰/۳۷۵	۰/۳۸۲۹	۰/۳۷۸۹۵	۰/۲۰۳۱	۰/۰۰۶۷۵	+
۹	۰/۳۷۹	۰/۳۸۳	۰/۳۸۱	۰/۰۰۳۶۳	۰/۰۰۲۱۶	+
۱۰	۰/۳۸۱	۰/۳۸۳	۰/۳۸۲	۰/۰۰۲۱۶۱	−۰/۰۰۰۰۷۶	−
...	...	...	...	...	...	...

۱۹) روش استفاده از اعداد مختلط $(\alpha \pm i\beta)$

می‌دانیم در صورتی که معادلهٔ درجهٔ دوم عمومی:

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

دارای ریشه‌های حقیقی نباشد دارای دو ریشهٔ مختلط است.

و در صورتی که a، b و c اعدادی حقیقی باشند دو ریشهٔ مختلط به صورت مزدوج ظاهر می‌شوند:

$$x_{1,2} = \alpha \pm i\beta \qquad (2)$$

در این رابطه $i=\sqrt{-1}$ و α و β اعداد حقیقی هستند.

در این‌جا با قراردادن ریشه‌های (۲) در معادلهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$a(\alpha \pm i\beta)^2 + b(\alpha \pm i\beta) + c = 0;$$
$$a(\alpha^2 - \beta^2 \underline{\pm 2\alpha\beta i}) + b\alpha \underline{\pm b\beta i} + c = 0;$$
$$(a\alpha^2 - a\beta^2 + b\alpha + c) \pm (2a\alpha + b)i\beta = 0$$

هر یک از جملات متحد با صفر است؛ بنابراین دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} a\alpha^2 - a\beta^2 + b\alpha + c = 0 \\ 2a\alpha + b = 0 \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{-b}{2a}$$

با قراردادن مقدار α در رابطهٔ اول دستگاه:

$$\beta^2 = \frac{4ac-b^2}{4a^2}; \beta = \pm\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}$$
$$\beta = \frac{\pm\sqrt{-1}\sqrt{\Delta}}{2a} = \pm\frac{i\sqrt{\Delta}}{2a}; x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad (3)$$

بنابراین ریشه‌های حقیقی معادلهٔ (۱) از فرمول (۳) محاسبه می‌شوند.

ادامه دارد ...