مجید منشوری

نمایش عدد در مبنای اعداد توان‌دار هم‌پایه

کلیدواژه‌ها: عددنویسی، مبنای اعداد، اعداد توان‌دار، تبدیل مبنا

در زندگی روزمره شمارش، عدد و عددنویسی نقش بسیار مهمی دارد. وقتی به یک مرکز خرید می‌رویم نیاز به شمارش را به خوبی می‌بینیم. به بسته‌بندی بعضی از کالاها توجه کنید:

بسته‌های ۴ تایی نان، بسته‌های ۹ تایی تخم‌مرغ، بسته‌های ۶ تایی آب،...

در تمام موارد بالا صحبت از یک بسته می‌کنیم، اما تفاوت بین این یک‌ها در چیست؟ و آیا این یک‌ها با هم برابرند؟

این شاید ساده‌ترین مثال برای نشان دادن تفاوت در شمارش اشیا باشد و اهمیت اینکه دسته‌ها (بسته‌ها) چندتایی است. برای یادآوری به درس شمارش و مبنا که در کتاب ریاضی دوم راهنمایی آمده است مراجعه کنید، هرچند که زیربنای این بحث در کتاب ریاضی اول دبستان دیده می‌شود.

درباره‌ی شمارش و تبدیل اعداد به مبناهای مختلف همیشه به این موضوع توجه کنید که یک عدد از دو قسمت تشکیل می‌شود: ارقام و مرتبه‌ی ارقام. برای مثال وقتی می‌گوییم $(۱۲)_۳$صحبت از یک عدد دو رقمی در مبنای سه می‌کنیم که ارقام آن ۲ و ۱ و به ترتیب دارای مرتبه‌ی یک و سه هستند.

البته خواندن آن به شکل "دوازده در مبنای سه" کاملاً نادرست است و شکل درست خواندن آن "یک، دو در مبنای سه" است.

به عبارت دیگر برای تبدیل آن در مبنای سه به مبنای ده به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$(۱۲)_۳=۱\times۳^۱+۲\times۳^۰=۳+۲=۵ \qquad (۳^۰=۱)$$

حال اگر بخواهیم همین عدد $(۱۲)_۳$ را به مبنای چهار ببریم، چاره‌ای نداریم جز اینکه ابتدا عدد را از مبنای سه به مبنای ده و سپس از مبنای ده به مبنای چهار ببریم.

$$(۱۲)_۳=۱\times۳^۱+۲\times۳^۰=۵=۱\times۴^۱+۱\times۴^۰=(۱۱)_۴$$

به مثال زیر در تبدیل اعداد از مبنای چهار به مبنای دو توجه کنید:

$$(۳۱)_۴=۳\times۴^۱+۱\times۴^۰=۱۳=۱\times۲^۳+۱\times۲^۲+۰\times۲^۱+۱\times۲^۰=(۱۱۰۱)_۲$$

$$(۲۱۳)_۴=۲\times۴^۲+۱\times۴^۱+۳\times۴^۰=۳۹$$

$$=۱\times۲^۵+۰\times۲^۴+۰\times۲^۳+۱\times۲^۲+۱\times۲^۱+۱\times۲^۰$$

$$=(۱۰۰۱۱۱)_۲$$

به طور خلاصه

$(۳۱)_۴=(۱۱۰۱)_۲$ و $(۲۱۳)_۴=(۱۰۰۱۱۱)_۲$

در هر مورد به اعداد توجه کنید. آیا رابطه‌ای بین تعداد ارقام وجود دارد؟

آیا می‌توان بدون تبدیل عدد از مبنای چهار به مبنای ده، به یکباره آن را در مبنای دو نوشت؟ همان‌طور که می‌دانید، در مبنای چهار، بزرگ‌ترین رقمی که می‌توان نوشت ۳ است و ۳ در مبنای دو به صورت $(۱۱)_۲$ نوشته می‌شود.

به دیگر سخن، هر عدد یک رقمی در مبنای چهار معادل یک عدد دو رقمی در مبنای دو است و هر عدد دو رقمی در مبنای چهار معادل یک عدد چهار رقمی در مبنای دو است و به طور کلی هر عدد n رقمی در مبنای چهار معادل یک عدد ۲n رقمی در مبنای دو است (n عددی است طبیعی و بزرگ‌تر از ۲).

پس کافی است برای تبدیل عدد از مبنای چهار به مبنای دو، تک‌تک ارقام عدد در مبنای چهار را در مبنای دو محاسبه و در کل، آنها را کنار هم بنویسیم.

$$\left.\begin{array}{l}(۳۱)_۴\\(۳)_۴=(۱۱)_۲\\(۱)_۴=(۰۱)_۲\end{array}\right\}\longrightarrow (۳۱)_۴=(۱۱۰۱)_۲$$

$$\left.\begin{array}{l}(۲۱۳)_۴\\(۲)_۴=(۱۰)_۲\\(۱)_۴=(۰۱)_۲\\(۳)_۴=(۱۱)_۲\end{array}\right\}\longrightarrow (۲۱۳)_۴=(۱۰۰۱۱۱)_۲$$

با توضیحاتی که داده شد، آیا می‌توانید بگویید برای تبدیل عدد از مبنای هشت به مبنای دو چگونه عمل می‌کنیم؟

فکر شما کاملاً درست است. ابتدا باید ببینیم بزرگ‌ترین رقمی که می‌توان در مبنای هشت نوشت، یعنی عدد ۷، در مبنای دو به صورت یک عدد چند رقمی می‌شود:

$(۷)_۸=(۱۱۱)_۲$

با توجه به این موضوع و روش تبدیل نمایش عدد از مبنای چهار به مبنای دو، روش تبدیل نمایش عدد از مبنای هشت به مبنای دو نیز به دست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l}(۱۲)_۸\\(۱)_۸=(۰۰۱)_۲\\(۲)_۸=(۰۱۰)_۲\end{array}\right\}\longrightarrow (۱۲)_۸=(۰۰۱۰۱۰)_۲$$

می‌دانیم که در عدد $(۰۰۱۰۱۰)_۲$ می‌توان صفرهای رقم پنجم و ششم را ننوشت، همان‌طور که در عددنویسی ده‌دهی این کار معمول است. اما آیا در قسمت اول محاسبات می‌توان $(۰۰۱)_۲=(۱)_۸$ را به صورت $(۱)_۲$ یا $(۰۱۰)_۲=(۲)_۸$ را به شکل $(۱۰)_۲$ نوشت؟

پاسخ به این سؤال را به عهده‌ی شما می‌گذارم. بهتر است یک‌بار محاسبه کنید تا به جواب درست برسید.

می‌دانیم $۲^۲=۴$ و $۲^۳=۸$ و $۲^۴=۱۶$ و...

پس می‌توانیم نمایش عدد از مبنای شانزده یا هشت یا چهار را در مبنای دو بنویسیم بدون اینکه لازم باشد نمایش عدد را در مبنای ده بنویسیم.

آیا با این روش می‌توان نمایش یک عدد از مبنای شانزده را در مبنای هشت نوشت؟

جواب شما کاملاً درست است. ۱۶ توانی از ۸ نیست.

۱۶ برابر است با $۴^۲$ یا $۲^۴$ بنابراین با این روش می‌توان نمایش عدد در مبنای ۱۶ را در مبنای ۴ یا مبنای ۲ نوشت.

اکنون ممکن است این سؤال برای شما مطرح شده باشد که چگونه عددی در مبنای دو را در مبنای چهار نمایش دهیم؟

به یکی از مثال‌های بالا توجه می‌کنیم:

$(۱۱۰۱)_۲=(۳۱)_۴$

به وضوح دیده می‌شود $(۳)_۴=(۱۱)_۲$ و $(۱)_۴=(۰۱)_۲$؛ یعنی ابتدا ارقام عدد در مبنای دو را از سمت راست و دو رقم دو رقم جدا می‌کنیم و معادل هریک را در مبنای چهار به دست می‌آوریم و در آخر آنها را پشت سر هم می‌نویسیم.

$$\left.\begin{array}{l}(۱۰۰۱۱۱)_۲\\(۱۰)_۲=(۲)_۴\\(۰۱)_۲=(۱)_۴\\(۱۱)_۲=(۳)_۴\end{array}\right\}\longrightarrow (۱۰۰۱۱۱)_۲=(۲۱۳)_۴$$

ما در ارتباط بین نمایش اعداد در مبنای توان‌های دو با شما صحبت کردیم. اینک نوبت شماست تا در مورد ارتباط بین نمایش اعداد در مبنای توان‌های سه و روش تبدیل نمایش آن توضیح دهید.

حتی می‌توانید این بحث را در مورد توان‌های دیگر نیز تمرین کنید.