نوشته: Tran Quang Hung
ترجمه: محمدرضا نوری

چند نامساوی هندسی

کلیدواژه‌ها: نامساوی هندسی، نامساوی کُشی ـ شوارتز، دایرهٔ محیطی، دایره محاطی

پیشگفتار

در مقاله‌ای که به تازگی توسط **فام هودوک**[1] و با عنوان «یک نابرابری مفید غیرمنتظره»[2] منتشر شد، اثبات نامساوی زیر به همراه برخی از کاربردهای جبری آن ارائه شده است:

$$\forall a,b,c,x,y,z\geq 0: (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z \geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)} \quad (*)$$

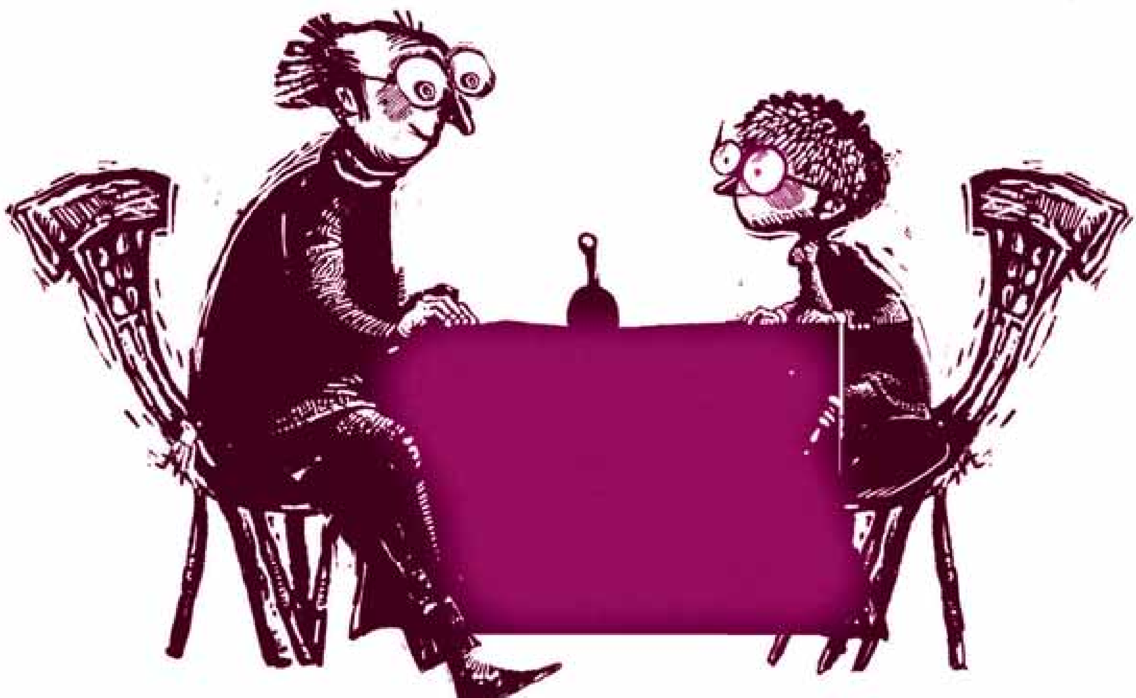
آن‌چه بر اهمیت نامساوی (*) می‌افزاید، آن است که نامساوی مذکور نه تنها دارای کاربردهایی در جبر است، بلکه کاربردهای هندسی گوناگونی نیز دارد. اکنون گفتار خود را در این زمینه با ارائهٔ اثبات زیبایی برای نامساوی فوق براساس آن‌چه که در سایت «math links» (منبع شمارهٔ ۲) ارائه شده است، آغاز می‌کنیم:

گزارهٔ ۱: نامساوی زیر برای تمام اعداد حقیقی a، b، c، x، y و z که برای آنها داریم: $ab+bc+ca\geq 0$ و $xy+yz+zx\geq 0$، برقرار است:

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z \geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}$$

برهان:

$$\begin{aligned}&(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z\\&=(a+b+c)(x+y+z)-(ax+by+cz)\\&=\sqrt{[a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)][x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)]}\\&-(ax+by+cz)\end{aligned}$$



می‌توان دید که هرگاه، A_1، B_1، A_2 و B_2 عددهای حقیقی مثبتی باشند، آن‌گاه:

$$\sqrt{(A_1+B_1)(A_2+B_2)} \ge \sqrt{A_1A_2}+\sqrt{B_1B_2} \quad (1)$$

با به‌کار بستن نامساوی (۱) در مورد $A_1=a^2+b^2+c^2$، $B_1=2(ab+bc+ca)$، $A_2=x^2+y^2+z^2$ و $B_2=2(xy+yz+zx)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z\\&\ge 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}\\&+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}-(ax+by+cz)\end{aligned}$$

از آن‌جا که بنابر نامساوی «کُشی ـ شوارتز» داریم: $ax+by+cz\le\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}$، اثبات حکم گزارهٔ ۱ در همین‌جا پایان می‌پذیرد.

نامساوی زیر را می‌توان به عنوان نتیجه‌ای از گزارهٔ ۱ ارائه کرد:

نتیجهٔ ۱: برای تمام اعداد حقیقی مثبت a، b، c، x، y و z داریم:

$$\frac{a+b}{y+z}x+\frac{b+c}{z+x}y+\frac{c+a}{x+y}z\ge\sqrt{3(ab+bc+ca)}$$

برهان: حکم از جایگزین نمودن (x, y, z) با $\left(\frac{x}{y+z},\frac{y}{z+x},\frac{z}{x+y}\right)$ در گزارهٔ ۱ و با توجه به نامساوی

$$\frac{xy}{(z+x)(z+y)}+\frac{yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{zx}{(y+z)(y+x)}\ge\frac{3}{4}$$

به‌دست می‌آید.

گزارهٔ ۲: فرض کنید P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC باشد، آن‌گاه داریم:

$$\frac{PB.PC}{bc}+\frac{PC.PA}{ca}+\frac{PA.PB}{ab}\ge 1$$

که در آن a و b و c طول ضلع‌های مثلث می‌باشند.

$(AB=c,\ BC=a,\ AC=b)$

برهان: در میان راه‌های گوناگونی که برای اثبات نامساوی موردنظر وجود دارد، روش اثبات با استفاده از اعداد مختلط را برمی‌گزینیم. فرض کنید عددهای مختلط متناظر با نقاط A, B, C, P در صفحهٔ مختلط به ترتیب برابر z_1 و z_2 و z_3 و w باشند. با استفاده از اتحاد

$$\begin{aligned}&(z_2-z_3)(w-z_2)(w-z_3)+(z_3-z_1)(w-z_3)(w-z_1)\\&+(z_1-z_2)(w-z_1)(w-z_2)=(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_1-z_3)\end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned}&BC.PB.PC+CA.PC.PA+AB.PA.PB\\&=|(z_2-z_3)(w-z_2)(w-z_3)|\\&+|(z_3-z_1)(w-z_3)(w-z_1)|\\&+|(z_1-z_2)(w-z_1)(w-z_2)|\ge \text{(بنابر نامساوی مثلثی)}\\&\left|\begin{matrix}(z_2-z_3)(w-z_2)(w-z_3)+(z_3-z_1)(w-z_3)(w-z_1)\\+(z_1-z_2)(w-z_1)(w-z_2)\end{matrix}\right|\\&=|(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_1-z_3)|=AB.BC.CA\end{aligned}$$

با تقسیم نمودن دو طرف نابرابری بر AB.BC.CA به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{PB.PC}{bc}+\frac{PC.PA}{ca}+\frac{PA.PB}{ab}\ge 1$$

یادداشت: می‌توان دید که نابرابری گزاره ۲ تبدیل به برابری می‌شود اگر و تنها اگر P=H، که در آن H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است.

اکنون می‌توانیم با ترکیب دو گزارهٔ پیشین، گزارهٔ زیر را به‌دست آوریم:

گزارهٔ ۳: فرض کنید P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC و x و y و z عددهایی حقیقی باشند به‌قسمی که $xy+yz+zx\ge 0$. آن‌گاه:

$$(y+z)\frac{PA}{a}+(z+x)\frac{PB}{b}+(x+y)\frac{PC}{c}\ge 2\sqrt{xy+yz+zx}$$

برهان: با به‌کار بستن گزارهٔ ۱ برای $\left(\frac{PA}{a},\frac{PB}{b},\frac{PC}{c}\right)$ و (x, y, z) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}&(y+z)\frac{PA}{a}+(z+x)\frac{PB}{b}+(x+y)\frac{PC}{c}\\&\ge 2\sqrt{(xy+yz+zx)\left(\frac{PB.PC}{bc}+\frac{PC.PA}{ca}+\frac{PA.PB}{ab}\right)}\\&\ge 2\sqrt{xy+yz+zx}\ \text{(بنابر گزاره ۲)}\end{aligned}$$

که نتیجهٔ موردنظر می‌باشد.

بحث را با اثبات چند مسئله کلاسیک در نابرابری‌های هندسی، با استفاده از نتایج اثبات شده در بالا، پی می‌گیریم:

کاربردها

مسئلهٔ ۱. فرض کنید P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC باشد. ثابت کنید:

$$\frac{PA}{a}+\frac{PB}{b}+\frac{PC}{c}\ge\sqrt{۳}$$

پاسخ: با قراردادن $x=y=z=۱$ در گزارهٔ ۳، به‌دست می‌آوریم:

$$۲\left(\frac{PA}{a}+\frac{PB}{b}+\frac{PC}{c}\right)\ge ۲\sqrt{۳}$$

که همان نتیجه مطلوب است.

مسئلهٔ ۲. فرض کنید P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC باشد، ثابت کنید:

$$a.PA+b.PB+c.PC\ge ۴S_{ABC}$$

که در آن S_{ABC} مساحت مثلث ABC می‌باشد.

پاسخ:

قرار دهید:

$$x=\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲},\ y=\frac{a^۲+c^۲-b^۲}{۲},\ z=\frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲}$$

در این‌صورت داریم:

$$xy+yz+zx=\frac{۲(a^۲b^۲+b^۲c^۲+c^۲a^۲)-(a^۴+b^۴+c^۴)}{۴}$$
$$=۴S_{ABC}^۲$$

از این‌رو و با به‌کار بستن گزارهٔ ۳ در مورد (x,y,z) به‌دست می‌آوریم:

$$a^۲.\frac{PA}{a}+b^۲.\frac{PB}{b}+c^۲.\frac{PC}{c}=a.PA+b.PB+c.PC\ge ۴S_{ABC}$$

مسئلهٔ ۳. فرض کنید P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC باشد. ثابت کنید:

$$PA+PB+PC\ge ۶r$$

که در آن r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC می‌باشد.

پاسخ: قراردهید: $x=s-a$ و $y=s-b$ و $z=s-c$؛ که در آن a و b و c ضلع‌های مثلث ABC بوده و s برابر نصف محیط می‌باشد. در این‌صورت با به‌کار بستن گزارهٔ ۳ به‌دست می‌آوریم:

$$PA+PB+PC$$
$$\ge ۲\sqrt{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)}$$

از طرفی می‌توان دید:

$$(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)=r^۲+۴Rr \quad (۲)$$

که در آن r و R به ترتیب شعاع دایره محاطی و شعاع دایره محیطی مثلث ABC می‌باشند.

بنابراین: $PA+PB+PC\ge ۲\sqrt{r^۲+۴Rr}$.

از آنجایی که در هر مثلث $R\ge ۲r$، نتیجه می‌شود[۳]: $PA+PB+PC\ge ۶r$.

پی‌نوشت

1. Pham Huu Duc
2. An Unexpected Useful inequality

۲. این تساوی از روابط $\frac{abc}{s}=۴Rr$ و $r=\frac{\text{مساحت } ABC}{s}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$ (ن. ک به صفحات ۲۴ و ۲۶ کتاب «بازآموزی و بازشناخت هندسه» ترجمه عبدالحسین مصحفی) به‌دست می‌آید.

۳. برای اثبات نامساوی $R\ge ۲r$ روش‌های گوناگونی وجود دارد که در اینجا یکی از آنها را می‌آوریم: بنابر قضیه‌ای از هندسه می‌دانیم که «هرگاه O مرکز دایره محیطی (به شعاع R)، I مرکز دایره محاطی (به شعاع r) و d فاصله بین این دو مرکز باشد آنگاه $d^۲=R(R-۲r)$.» (ن. ک به کتاب «بازآموزی و بازشناخت هندسه»، صفحهٔ ۴۳). نامساوی $R\ge ۲r$، با توجه به مثبت بودن $d^۲$ به‌دست می‌آید.

منابع

1. Pham Huu Duc, An unexpectedly useful inequality, Mathematical Reflections 2008, Issue 1.
2. Manlio, Blackmouse, Canhang, Mathlinks Forum 2007, http://www.mathlinks.ro/ viewtopic.php?t=187355.
3. Dragoslav S. Mitrinovic, J. Pecaric, V. Volenec, Recent Advances is Geometric Inequalities.
4. Bottema, Oene; Djordjevic, R. Z.; Janic, R.; Mitrinovic, D. S.; and Vasic, P.M., Geometric Inequalities.

۵. مقاله‌ای که مطالعه کردید، ترجمهٔ مقالهٔ زیر است:

Tran Quang Hung; On Some geometric inequalities, Mathematical Reflections, 3, 2008.