حمیدرضا امیری

پیشامدهای تصادفی و احتمال در فضاهای نمونهٔ گسسته و پیوسته

کلیدواژه‌ها: احتمال، پیشامدهای تصادفی، فضای نمونه، آندره کولموگروف، پیشامدهای مستقل، احتمال شرطی، احتمال دوجمله‌ای

مقدمات و تعریف‌های اولیه

آزمایش تصادفی یا پدیدهٔ تصادفی: هر آزمایش یا پدیده‌ای که قبل از وقوع، نتیجهٔ آن معلوم نباشد، ولی همهٔ حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن آن برای ما مشخص باشد، «آزمایش تصادفی» یا «پدیدهٔ تصادفی» نامیده می‌شود.

مثال: وقتی یک تاس را می‌ریزیم، تا وقتی ثابت نشده و در حال چرخش است، نمی‌توانیم به‌طور قطعی اعلام کنیم چه عددی رو خواهد شد، ولی از همهٔ حالت‌های ممکن باخبریم. یعنی می‌دانیم عدد ۱ یا ۲ یا ... یا ۶ ظاهر خواهد شد. پس این آزمایش، **تصادفی** است.

مثال: اگر روی هر شش وجه یک تاس عدد ۲ را حک کنیم و تاس را بریزیم، این پدیده تصادفی نیست. زیرا قبل از ثابت‌شدن تاس (قبل از وقوع) می‌دانیم و یقین داریم که عدد ۲ رو می‌شود. مثلاً اگر روی پنج وجه یک تاس، عددهای ۱ تا ۵ و روی یک وجه آن عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۳ حک کنیم و تاس را بریزیم، این پدیده تصادفی نیست. زیرا از همهٔ حالت‌های رخداد این پدیده اطلاع نداریم. (کدام عدد طبیعی روی وجه ششم حک شده است؟)

فضای نمونه‌ای: مجموعه‌ای شامل همهٔ حالت‌های ممکن، در به وقوع پیوستن یک آزمایش تصادفی را «فضای نمونه‌ای» می‌نامیم و معمولاً با «S» نشان می‌دهیم. به فضاهای نمونه‌ای که تعداد اعضای آنها متناهی یا قابل شمارش (هم‌ارز با N) باشند «فضاهای گسسته» می‌گوییم. در مثال‌های زیر سعی کرده‌ایم در حالت‌های متفاوت، فضای نمونه‌ای را برای آزمایش‌های تصادفی معرفی کنیم که در آینده و در حل مسائل و تست‌ها، این حالت‌ها مورد نیاز خواهند بود.

مثال: در هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را مشخص کنید.

I) کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز به صورت تصادفی.

● **جواب:** $n(S)=n!$

II) کنار هم قرار گرفتن اشیای a و b و c و d و a و c.

● **جواب:** $n(S)=\frac{6!}{2!\times 2!}$

III) انتخاب تصادفی k نفر از بین n نفر برای ساختن یک تیم k نفرهٔ ورزشی.

● **جواب:** $n(S)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

IV) انتخاب تصادفی k نفر از بین n نفر برای کنار هم قرار گرفتن آنها.

● **جواب:** $n(S)=(n)_k=\frac{n!}{(n-k)!}$

V) انتخاب تصادفی k مهرهٔ رنگی از بین n مهره.

جواب: $n(S)=\binom{n}{k}$

تذکر ۱: توجه داریم که در تمام مسائل احتمال مربوط به مهره‌های رنگی، هر r مهره از یک رنگ با شماره‌های ۱ تا r شماره‌گذاری شده‌اند و در واقع، مهرهٔ آبی شمارهٔ ۱ با مهرهٔ آبی شمارهٔ ۲ فرق دارد.

تذکر ۲: اگر S_1 و S_2 فضاهای نمونه‌ای مربوط به دو پدیدهٔ تصادفی باشند و این دو پدیده با هم رخ دهند و یک پدیدهٔ تصادفی ایجاد کنند، و S فضای نمونه‌ای این پدیده باشد، داریم:

$$n(S)=n(S_1)\times n(S_2)$$

VI) ریختن یک تاس:

$$S=\{1,2,\dots,6\}\to n(S)=6$$

VII) پرتاب یک سکه: $S=\{H,T\}\to n(S)=2$

IIX) ریختن دو تاس با هم، یا ریختن یک تاس دوبار:

$$n(S)=6\times 6=36$$

IX) پرتاب n سکه و k تاس با هم:

$$n(S)=(\underbrace{2\times 2\times\dots\times 2}_{n})\times(\underbrace{6\times 6\times\dots\times 6}_{k})=2^n\times 6^k$$

تعریف پیشامدهای تصادفی: اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی باشد، در این صورت هر زیرمجموعهٔ S مانند A را یک «پیشامد تصادفی از فضای S» می‌نامیم.

تذکر ۱: اگر S مجموعه‌ای n عضوی باشد، دارای 2^n زیرمجموعه است. طبق تعریف فوق، هر $A\subseteq S$ یک پیشامد تصادفی است. پس روی S به تعداد 2^n پیشامد تصادفی می‌توان تعریف کرد. $A_1=\varnothing$ و $A_2=S$ نیز پیشامدهای تصادفی از فضای S هستند و به ترتیب آنها را **پیشامد غیرممکن** و **پیشامد مطمئن** یا **حتمی** می‌نامیم.

تذکر ۲: اگر فضای نمونه‌ای، مجموعه‌ای n عضوی باشد، تعداد پیشامدهای تصادفی k عضوی که می‌توان روی S تعریف کرد، برابر است با $\binom{n}{k}$.

مثال: تاسی را می‌ریزیم، اولاً چند پیشامد تصادفی روی فضای نمونه‌ای حاصل می‌توان تعریف کرد؟ ثانیاً این آزمایش تصادفی چند پیشامد تصادفی ۴ عضوی دارد؟

اولاً: $S=\{1,2,\dots,6\}\to$

$64=2^6=$ تعداد پیشامدهای تصادفی

ثانیاً: تعداد پیشامدهای ۴ عضوی $=\binom{6}{4}=15$

تعریف: اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی و $A\subseteq S$ پیشامدی در فضای S باشد، متمم پیشامد A را با A' یا A^C یا $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم؛ به شرط آن‌که: $A\cap A'=\varnothing$ و $A\cup A'=S$.

تذکر ۳: اگر A' متمم پیشامد A از فضای S باشد، رخداد A به منزلهٔ عدم رخداد A' و رخداد A' به منزلهٔ عدم رخداد A است (A و A' نمی‌توانند با هم رخ بدهند).

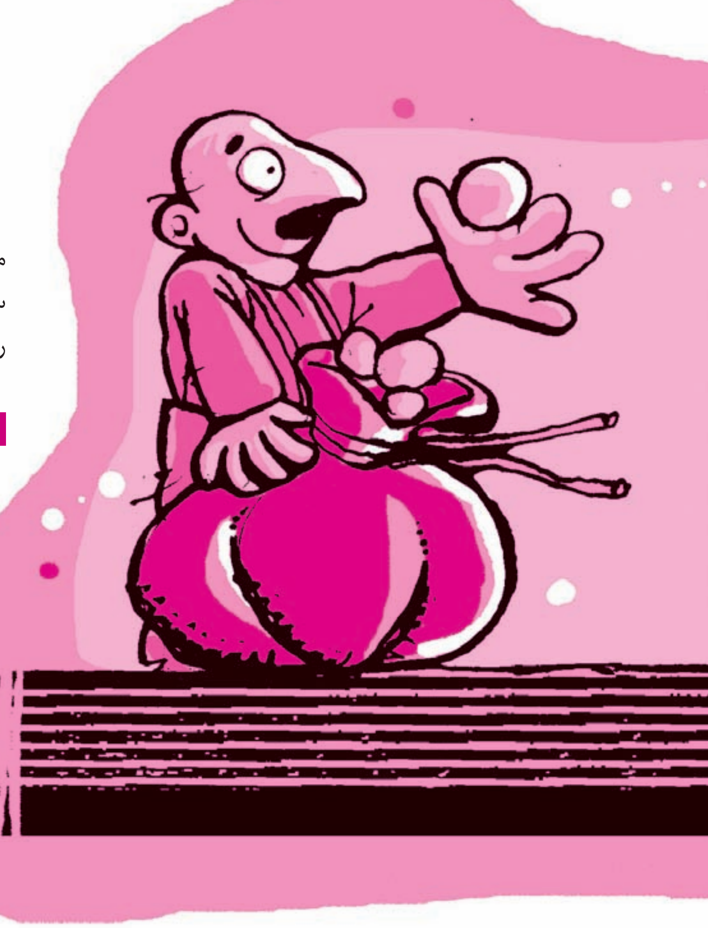
تذکر ۴: در بعضی از مسئله‌ها و تست‌ها، تعداد عضوهای A در S زیاد و شمارش آنها سخت و یا وقت‌گیر است و ما از طریق محاسبهٔ تعداد عضوهای A' و کم‌کردن آنها از کل عضوها، به تعداد عضوهای A پی می‌بریم.

تعریف: اگر $S=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ فضای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی باشد، در این صورت هر زیرمجموعهٔ تک‌عضوی مانند $A_i=\{a_i\}$ را یک **پیشامد ساده** در فضای S می‌نامیم.

تذکر مهم:
اگر $S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ فضای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی باشد و پیشامد سادهٔ $\{a_i\}$ رخ دهد، در این صورت هر پیشامد تصادفی مانند $A\subseteq S$ که شامل a_i باشد نیز رخ داده است.

مثال: اگر تاسی را بریزیم و مشاهده کنیم که عدد ۲ رو شده است، در این صورت هر زیرمجموعهٔ $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ که شامل ۲ باشد، قطعاً رخ داده است. مثلاً $A_1=\{2\}$، $A_2=\{1,2\}$، $A_3=\{1,2,3\}$ و... و $A_{32}=\{1,2,3,4,5,6\}$ قطعاً رخ داده‌اند. (مجموعهٔ S دارای $32=2^{6-1}$ زیرمجموعه است که شامل عدد ۲ هستند.)

تذکر مهم:
تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ n عضوی A که همگی در k عضو مشخص مشترک باشند، برابر است با 2^{n-k}.



مثال: ۱. از بین ۸ نفر ۴ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر پیشامد A انتخاب حداقل یکی از دو نفر a و b بین این ۴ نفر باشد، در این صورت A چند عضو دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۴۵ ۳) ۵۰ ۴) ۵۵

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا پیشامد A' آن است که هیچ‌کدام از این دو نفر a و b بین ۴ نفر نباشد؛ یعنی ۴ نفر از بین ۶ نفر غیر از a و b انتخاب شوند. پس: $n(A')=\binom{6}{4}$ و چون: $n(S)=\binom{8}{4}=70$، پس:

$$n(A)=n(S)-n(A')=70-15=55$$

۲. تاسی را می‌ریزیم. اگر زوج بیاید، تاس دیگری می‌ریزیم و اگر فرد بیاید دو سکه پرتاب می‌کنیم. اگر پیشامد A را رو شدن عدد اول برای تاس اول تعریف کنیم، A چند عضو دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا اعداد اول ۱ تا ۶ عبارت‌اند از $\{2,3,5\}$. بنابراین:

$$A=\{\underbrace{(2,1),(2,2),...,(2,6)}_{6},\underbrace{(3,T,T),...,(3,H,H)}_{4},$$
$$\underbrace{(5,T,T),...(5,H,H)}_{4}\}\rightarrow|A|=14$$

تعریف: دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را **ناسازگار** می‌نامیم هرگاه: $A\cap B=\varnothing$ و اگر: $A\cap B\neq\varnothing$، آن‌ها را سازگار می‌نامیم. (اگر A و B ناسازگار باشند، نمی‌توانند با هم رخ بدهند.)

اعمال روی پیشامدها

اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی باشد، در این صورت:

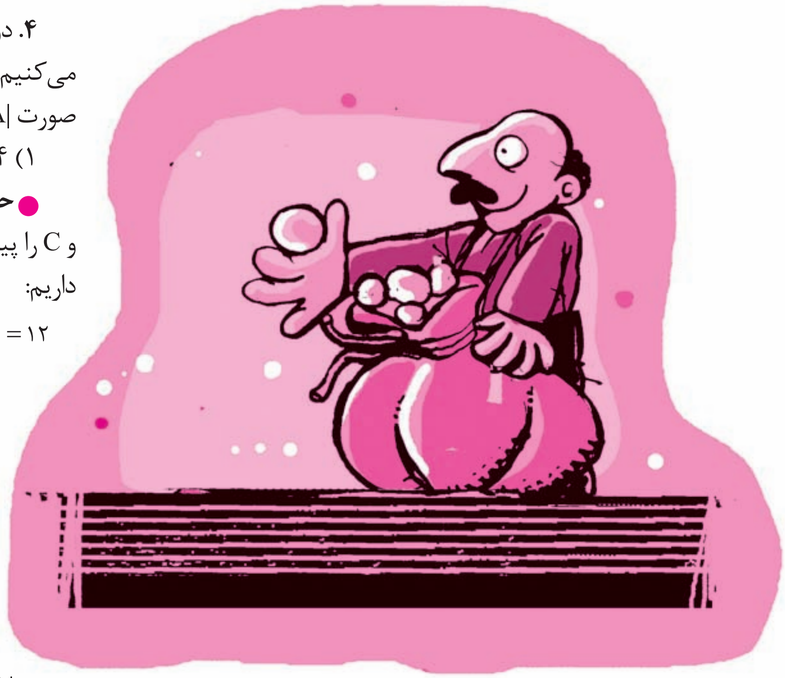
I) $(A\cap B)$ عبارت است از پیشامد آنکه هر دو پیشامد A و B با هم رخ بدهند.

II) $(A\cup B)$ عبارت است از پیشامد آنکه حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ بدهد.

III) $(A-B)$ عبارت است از پیشامد آنکه پیشامد A رخ بدهد و B رخ ندهد.

IV) $(A\Delta B)$ عبارت است از پیشامد آنکه دقیقاً A رخ بدهد یا دقیقاً B رخ بدهد؛ زیرا:

$$(A\Delta B)=(A-B)\cup(B-A)$$



تذکر مهم:

با توجه به قوانین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها) و تعاریف قبل، روابط زیر بین پیشامدها برقرار است:

$1)\ n(A)=n(S)-n(A')$ و $n(A')=n(S)-n(A)$

تذکر: از این به بعد به جای $n(A)$ از نماد $|A|$ استفاده می‌کنیم.

$2)\ n(A\cup B)=|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

$3)\ |A-B|=|A|-|A\cap B|$

$4)\ |A'\cap B'|=|(A\cup B)'|=|S|-|A\cup B|$

$5)\ |A\Delta B|=|(A-B)\cup(B-A)|=|A-B|+|B-A|$

$\xrightarrow{(3)} |A\Delta B|=|A|+|B|-2|A\cap B|$

۳. دو تاس را با هم می‌ریزیم. اگر پیشامد A را مجموع دو تاس بزرگ‌تر از ۳ تعریف کنیم، در این صورت A چند عضوی است؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۵ ۳) ۳۳ ۴) ۲۸

● **حل:** گزینهٔ (۳) صحیح است. مجموع دو تاس از ۲ تا ۱۲ می‌تواند باشد که در این صورت بهتر است A' را به‌دست آوریم:

$A'=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ پیشامد آنکه مجموع دو تاس کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد

$|A'|=3 \to |A|=|S|-|A'|=36-3=33$

۴. دو تاس را با هم می‌ریزیم و پیشامد A را چنین تعریف می‌کنیم که مجموع دو تاس ۸ یا هر دو فرد باشند. در این صورت $|A|$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

● **حل:** گزینهٔ (۲) صحیح است. B را پیشامد مجموع ۸ و C را پیشامد هر دو فرد تعریف می‌کنیم که در این صورت داریم:

$|A|=|B\cup C|=|B|+|C|-|B\cap C|=5+9-2=12$

$B=\{(3,5),(5,3),(2,6),(6,2),(4,4)\}\to|B|=5$

$C=\{1,3,5\}\times\{1,3,5\}\to|C|=9$

$(B\cap C)=\{(3,5),(5,3)\}\to|B\cap C|=2$

۵. در جعبه‌ای ۴ مهرهٔ قرمز، ۵ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ سبز وجود دارد. از این جعبه سه مهره را با هم و به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم. اگر پیشامد A را حداقل ۱ مهرهٔ آبی تعریف کنیم، در این صورت $|A|$ کدام است؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۱۰ ۳) ۳۵ ۴) ۱۸۵

● **حل:** گزینهٔ (۴) صحیح است. محاسبهٔ $|A'|$ ساده‌تر است و A' پیشامد آن است که هیچ مهره‌ای آبی نباشد یا هر سه مهره غیرآبی باشند که در این صورت داریم:

$|S|=\binom{12}{3}=220$ و $|A'|=\binom{7}{3}=35$

$\to|A|=220-35=185$

تذکر مهم:

در تمام مسئله‌ها و تست‌هایی که با مهره‌های رنگی سروکار داریم، همواره مهره‌هایی که از یک رنگ هستند، متمایزند.

برای مثال، ۴ مهرهٔ قرمز به صورت قرمز ۱، قرمز ۲، قرمز ۳ و قرمز ۴ مشخص شده‌اند. همچنین، در انداختن دو تاس با هم، تاس‌ها را آبی و قرمز و متمایز فرض می‌کنیم، و فضای نمونه‌ای آزمایش انداختن دو تاس با هم، با فضای نمونه‌ای آزمایش انداختن یک تاس در دو مرحله، برابر است.

فضاهای نمونه‌ای پیوسته

اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد، به گونه‌ای که S متناهی نباشد و اعضای آن شمارش‌پذیر نیز نباشند (S گسسته نباشد)، در این صورت فضای S را پیوسته

می‌نامیم. (هر مجموعهٔ نامتناهی که با N هم‌ارز نباشد، یعنی در تناظر یک‌به‌یک نباشد، پیوسته نامیده می‌شود.)

به‌طور کلی، هر یک از کمیت‌های طولی، سطحی، حجمی، وزنی و زمانی، کمیت‌های پیوسته‌اند و فضاهای نمونه‌ای که از این کمیت‌ها تشکیل یافته باشند، فضاهای نمونه‌ای پیوسته نامیده می‌شوند.

مثال: در هر یک از حالت‌های زیر اندازهٔ فضای نمونه‌ای و اندازهٔ پیشامدهای تعریف شده را مشخص کنید.

I) از بین اعداد حقیقی بازهٔ $[-6,14)$ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم و پیشامد A را منفی‌بودن این عدد و B را صحیح بودن عدد انتخابی تعریف می‌کنیم:

$S=\{x\in R \mid -6\le x<14\}\rightarrow$ طول $S = l_s=20$

$A=\{x\in[-6,14) \mid x<0\}\rightarrow l_A=6$

$B=\{-6,-5,\ldots,12,13\}\rightarrow l_B=0$

تذکر مهم:

اگر A مجموعه‌ای متناهی و یا شمارش‌پذیر باشد، همواره طول مجموعهٔ A صفر است. برای مثال، طول مجموعهٔ اعداد طبیعی، اعداد صحیح و حتی اعداد گویا صفر است، و نیز پاره‌خط یا خط دارای مساحت صفر است. همین‌طور هر صفحه حجمی برابر با صفر دارد.

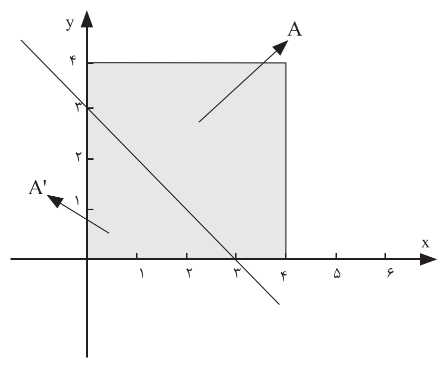
II) دو عدد حقیقی مانند x و y از بازهٔ $[0,4]$ به تصادف انتخاب می‌کنیم و پیشامد A را مجموع دو عدد بزرگ‌تر از ۳ و پیشامد B را مجموع دو عدد مساوی با ۲ و پیشامد C را حداقل یکی از دو عدد بزرگ‌تر از ۱ تعریف می‌کنیم:

$S=\{(x,y)\in R^2 \mid 0\le x\le 4, 0\le y\le 4\}=[0,4]\times[0,4]$

$\rightarrow a_S=4^2=16$

$A=\{(x,y)\in S \mid x+y>3\}$

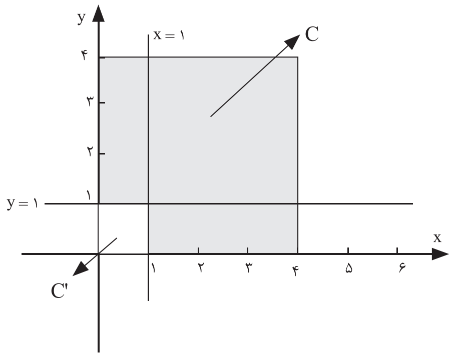
فضای S، سطح مربعی است در ناحیهٔ اول به طول ضلع ۴ و مساحت ۱۶ و بنابراین: $|S|=a_S=16$.



$a_A=a_S-a_{A'}=16-\frac{9}{2}=\frac{23}{2}=11/5$

$B=\{(x,y)\in S \mid x+y=2\}\rightarrow a_B=$ مساحت $B=0$

($x+y=2$ در S یک پاره‌خط است و مساحت پاره‌خط صفر است.)



$C=\{(x,y)\in S \mid x>1$ یا $y>1\}$

$a_C=a_S-a_{C'}=16-1=15$

تذکر: همان‌طور که در مثال قبل مشـــاهده کردید، در فضاهای پیوسته ممکن است پیشامد A ناتهی باشد، ولی اندازهٔ A صفر باشد (در حالت (I) $B\neq\emptyset$، ولی $L_B=0$ و در حالت (II) نیز $B\neq\emptyset$، ولی $a_B=0$).

تذکر: برای مشخص کردن مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $ax+by>c$ کافی اســـت خط $ax+by=c$ را رسم کنیم. ســـپس یک نقطه از یکی از دو نیم صفحهٔ ایجاد شده توسط این خط، را به دل‌خواه برگزینیم و مختصات آن را در نامعادله قرار دهیم (نقطهٔ $O\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ مناسب‌ترین انتخاب است). اگر صدق کرد، نیم‌صفحهٔ شامل همان نقطه، و اگر صدق نکرد، نیم‌صفحهٔ دیگر، مجموعهٔ جواب‌های نامعادله را تشکیل می‌دهند. برای مثـــال، مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $x+y>3$ در مثال قبل قسمت (II) با جهت پیکان روی خط در شکل مربوطه مشخص شده است.

احتمال یا اندازه‌گیری شانس

۱. احتمال در فضای گسسته: اگر S یک فضای نمونه‌ای گسسته، و $A\subseteq S$ یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S باشد، در این صورت احتمال رخداد پیشامد A را با نماد P(A) نمایش می‌دهیم و داریم:

$$P(A)=\frac{\text{تعداد اعضای } A}{\text{تعداد اعضای } S}\rightarrow P(A)=\frac{|A|}{|S|}$$

می‌توان تابعی چون P از مجموعهٔ زیرمجموعه‌های S (مجموعهٔ توانی S یا P(S)) به بازهٔ [۰,۱] تعریف کرد که به آن تابع احتمال می‌گوییم.

$$P : P(S) \to [0,1]$$

$$A \to P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{|A|}{|S|}$$

این تابع دارای ویژگی‌های زیر است:

۱) $0 \le P(A) \le 1$

زیرا:

$$A \subseteq S \to 0 \le |A| \le |S| \to \frac{0}{|S|} \le \frac{|A|}{|S|} \le \frac{|S|}{|S|} \to 0 \le P(A) \le 1$$

۲) $P(S) = 1,\ P(\varnothing) = 0$

زیرا: $P(S) = \frac{|S|}{|S|} = 1,\ P(\varnothing) = \frac{|\varnothing|}{|S|} = \frac{0}{|S|} = 0$

۳) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

زیرا: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cup B|$

$$\xrightarrow{\text{طرفین بر } |S| \text{ تقسیم شود}} \frac{|A \cup B|}{|S|} = \frac{|A|}{|S|} + \frac{|B|}{|S|} - \frac{|A \cap B|}{|S|}$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف احتمال}} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۲. احتمال در فضای پیوسته: اگر S یک فضای نمونه‌ای پیوسته و $A \subseteq S$ پیشامدی تصادفی در فضای S باشد، برحسب اینکه فضای S از چه کمیت پیوسته‌ای تشکیل یافته باشد، احتمال رخداد پیشامد A به یکی از صورت‌های زیر تعریف می‌شود:

I) اگر فضای S کمیتی طولی باشد: $P(A) = \frac{l_A}{l_S}$

II) اگر فضای S کمیتی مساحتی باشد: $P(A) = \frac{a_A}{a_S}$

III) اگر فضای S کمیتی حجمی باشد: $P(A) = \frac{V_A}{V_S}$

IV) اگر فضای S کمیتی زمانی باشد: $P(A) = \frac{t_A}{t_S}$

اصول احتمال ـ قوانین و قضایای احتمال

آندره کولموگروف روسی در سال ۱۹۳۳ سه اصل زیر را به عنوان اصل موضوعهٔ علم احتمال مطرح ساخت و توسط این سه اصل قوانین و قضایای احتمال را ثابت کرد:

اصل اول: اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S باشد (S پیوسته یا گسسته)، در این‌صورت $0 \le P(A) \le 1$.

اصل دوم: اگر S فضای نمونه‌ای باشد، $P(S) = 1$.

اصل سوم: اگر A و B دو پیشامد جدا از هم باشند (ناسازگار باشند)، یعنی $A \cap B = \varnothing$، در این صورت:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

قضیهٔ ۱: اگر A و B و C پیشامدهایی دوبه‌دو ناسازگار از فضای S باشند، آن‌گاه:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

قضیهٔ ۲: اگر A و B دو پیشامد از فضای S باشند و $A \subseteq B$، آن‌گاه:

$$\text{I)}\ P(A) \le P(B)$$

$$\text{II)}\ P(B - A) = P(B) - P(A)$$

قضیهٔ ۳: اگر A و B دو پیشامد دل‌خواه از فضای S باشند، آن‌گاه: (S می‌تواند پیوسته یا گسسته باشد)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

قوانین احتمال

قوانین زیر همگی با استفاده از اصول و قضایای بیان شده قابل اثبات هستند:

۱) $P(\varnothing) = 0$

۲) $P(A \cup A') = \underbrace{P(S)}_{1} = P(A) + P(A')$

$$\to \begin{cases} P(A) = 1 - P(A') \\ P(A') = 1 - p(A) \end{cases}$$

۳) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

۴) $P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$

۵) $P(A \cap B) \le P(A),\quad P(A \cap B) \le P(B)$

۶) $P(A - B) \le P(A)$

۷) $P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$
$= P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

۸) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$
$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

۹) $P(A) + P(B) > 1 \Rightarrow \underbrace{(A \cap B) \neq \varnothing}_{\text{A و B سازگارند}}$

یا $P(A \cap B) \neq 0$

۱۰) $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$

و $P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$