دنباله‌ها

دنباله‌های حسابی و هندسی

آموزشی

هوشنگ شرقی

کلیدواژه‌ها: دنباله حسابی، دنبالهٔ هندسی، قانون دنباله، جملهٔ عمومی، دنبالهٔ بازگشتی، قدرنسبت، واسطهٔ حسابی، واسطهٔ هندسی

دنبالهٔ هندسی

دنباله‌ای که هر جملهٔ آن از ضرب مقداری ثابت در جملهٔ ماقبل به‌دست آید، «دنبالهٔ هندسی» نامیده می‌شود؛ یعنی: $a_n = a_{n-۱}.q$.

مقدار ثابت (q) را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. بدیهی است که اگر $q > ۱$ باشد، دنباله صعودی و اگر $۰ < q < ۱$ دنباله نزولی است. اگر $q = ۱$ باشد، دنباله ثابت است. اگر هم $q < ۰$ باشد، جمله‌ها یک در میان مثبت و منفی‌اند. دنباله‌های زیر مثال‌هایی از دنباله‌های هندسی هستند:

$$۲,۶,۱۸,۵۴,.... \quad (q = ۳)$$
$$۳,-۶,۱۲,-۲۴,... \quad (q = -۲)$$
$$۴,۲,۱,\frac{۱}{۲},... \quad (q = \frac{۱}{۲})$$
$$۳,۳,۳,... \quad (q = ۱)$$
$$۳,-۱,\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۹},... \quad (q = -\frac{۱}{۳})$$

شبیه روش استقرایی که در مورد دنبالهٔ حسابی دیدیم، در مورد دنبالهٔ هندسی نیز می‌توان نوشت:

$$a_n = a_۱.q^{n-۱} \quad \text{(جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی)}$$

مثال ۱. یک دنبالهٔ هندسی تشکیل دهید که جملهٔ پنجم آن ۸۰ و جملهٔ نهم آن ۱۲۸۰ باشد. جملهٔ بیست و یکم این دنباله چیست؟

حل:

$$\begin{cases} a_۵ = a_۱q^۴ = ۸۰ \\ a_۹ = a_۱q^۸ = ۱۲۸۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{a_۱q^۸}{a_۱q^۴} = \frac{۱۲۸۰}{۸۰} \Rightarrow q^۴ = ۱۶$$

$$\Rightarrow q = \pm ۲ \Rightarrow a_۱ = ۵$$

پس دو دنباله با این ویژگی وجود دارد:

$$\begin{cases} ۵,۱۰,۲۰,... \\ ۵,-۱۰,۲۰,... \end{cases}$$

و جملهٔ بیست و یکم این دنباله برابر است با:

$$a_{۲۱} = a_۱q^{۲۰} = ۵ \times ۲^{۲۰}$$

مثال ۲. ثابت کنید هیچ دنبالهٔ هندسی وجود ندارد که ۱۱، ۱۲ و ۱۳ جملاتی از آن باشند.

حل: اگر چنین باشد که ۱۱، ۱۲ و ۱۳ جملات mام، nام و pام یک دنبالهٔ هندسی باشند، داریم:

$$a_m = a_۱q^{m-۱} = ۱۱,\ a_n = a_۱q^{n-۱} = ۱۲,\ a_p = a_۱q^{p-۱} = ۱۳$$

و از تقسیم دوبه‌دوی این تساوی‌ها نتیجه می‌شود:

$$\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n} = \frac{۱۱}{۱۲},\ \frac{a_n}{a_p} = q^{n-p} = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\Rightarrow q = (\frac{۱۱}{۱۲})^{\frac{۱}{m-n}} = (\frac{۱۲}{۱۳})^{\frac{۱}{n-p}} \Rightarrow (\frac{۱۱}{۱۲})^{n-p} = (\frac{۱۲}{۱۳})^{m-n}$$

$$\Rightarrow ۱۱^{n-p} \times ۱۳^{m-n} = ۱۲^{m-p}$$

و این تساوی غیرممکن است. (چرا؟)

شرط تشکیل دنبالهٔ هندسی

مشابه آن‌چه که در مورد دنبالهٔ حسابی دیدیم، اگر a، b و c جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، می‌توان نوشت:

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=q \Rightarrow b^{۲}=ac$$

و این شرط آن است که سه عدد متوالی a، b و c تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند. همچنین، $b=\sqrt{ac}$ را واسطهٔ (میانگین) هندسی a و c می‌نامند. مثلاً عدد ۶ واسطهٔ هندسی ۴ و ۹ است.

مثال ۳. m را طوری بیابید که سه عدد m، $m+۴$ و $۹m$ دنبالهٔ هندسی تشکیل دهند.

● **حل:**

$$m(۹m)=(m+۴)^{۲} \Rightarrow ۸m^{۲}-۸m-۱۶=۰$$

$$\Rightarrow m^{۲}-m-۲=۰ \Rightarrow m=-۱ \quad \text{یا} \quad m=۲$$

واسطه‌های هندسی بین دو عدد

مشابه آن‌چه که در مورد دنبالهٔ حسابی دیدیم، اگر بخواهیم بین دو عدد a و b، m عدد (واسطهٔ هندسی) قرار دهیم که با این دو عدد تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند، از دستور $q=\sqrt[m+۱]{\frac{b}{a}}$ قدرنسبت را به‌دست می‌آوریم.

مثال ۴. بین دو عدد ۹ و ۷۲، دو واسطهٔ هندسی درج کنید

● **حل:**

$$q=\sqrt[۳]{\frac{۷۲}{۹}}=۲ \Rightarrow ۹,\underbrace{۱۸,۳۶}_{\text{واسطه‌های هندسی}},۷۲$$

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

روشی که برای تعیین مجموع n جملهٔ نخست یک دنبالهٔ هندسی وجود دارد آن است که پس از نوشتن S_n، qS_n را تشکیل دهیم و طرفین دو رابطه را از هم کم کنیم.

مثال ۵. مجموع n جملهٔ نخست دنبالهٔ زیر را به‌دست آورید:

۲, ۴, ۸, ۱۶, ...

● **حل:**

$$-\begin{cases} S_n=۲+۴+۸+۱۶+...+۲^{n} \\ ۲S_n=۴+۸+۱۶+...+۲^{n}+۲^{n+۱} \end{cases}$$

$$S_n=۲^{n+۱}-۲$$

در حالت کلی با همین روش برای هر دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت q و جملهٔ نخست $a_۱$ داریم: $S_n=a_۱\frac{۱-q^{n}}{۱-q}$

مثال ۶. مجموع ۱۰۰ جملهٔ نخست دنبالهٔ زیر را به‌دست آورید:

$۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},...$

حداقل چند جمله از دنبالهٔ فوق را با هم جمع کنیم تا مجموع از ۱/۹۹۹ تجاوز کند؟

● **حل:**

$$S_{۱۰۰}=۱\times\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۰۰}}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱-\frac{۱}{۲^{۱۰۰}}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۲^{۱۰۰}-۱}{۲^{۱۰۰}}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲^{۱۰۰}-۱}{۲^{۹۹}}$$

$$=۲-\frac{۱}{۲^{۹۹}}$$

$$S_n=۱\times\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^{n}}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۲^{n}-۱}{۲^{n}}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲^{n}-۱}{۲^{n-۱}}=۲-\frac{۱}{۲^{n-۱}}>۱/۹۹۹$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲^{n-۱}}<\frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow ۲^{n-۱}>۱۰۰۰ \Rightarrow \min(n-۱)=۱۰$$

$$\Rightarrow \min(n)=۱۱ \quad \text{(باید حداقل ۱۱ جمله را با هم جمع کنیم.)}$$

مثال ۷. یک دنبالهٔ هندسی تشکیل دهید که مجموع هشت جملهٔ اول آن ۶۵۶۰ و مجموع چهار جملهٔ اول آن ۸۰ باشد.

حل:

$$\begin{cases} S_8 = a_1 \dfrac{1-q^8}{1-q} = 6560 \\ S_4 = a_1 \dfrac{1-q^4}{1-q} = 80 \end{cases} \Rightarrow \frac{S_8}{S_4} = \frac{1-q^8}{1-q^4} = \frac{6560}{80} = 82$$

$$\Rightarrow \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{(1-q^4)} = 82 \Rightarrow q^4 + 1 = 82$$

$$\Rightarrow q^4 = 81,\ q = \pm 3 \Rightarrow (q = 3, a_1 = 2) \text{ یا } (q = -3, a_1 = -4)$$

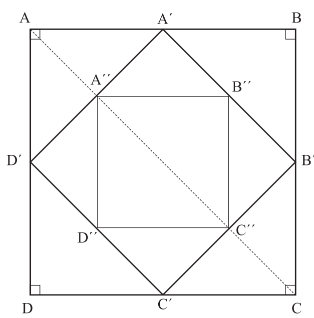
یعنی دو دنبالهٔ عـــددی با ویژگی‌های فوق به صورت زیر وجود دارد:

$2, 6, 18, \ldots$ و $-4, 12, -36, \ldots$

مثال ۸. وســـط‌های اضلاع مربعی به ضلع واحد را به هم وصل می‌کنیم تا مربعی دیگر به‌دســـت آید. وســـط‌های اضلاع این مربع را نیز به یکدیگر وصل می‌کنیم و...

الف) اگر این عمل را ۱۰ بار تکرار کنیم، مجموع مساحت‌ها و مجموع محیط‌های این مربع‌ها را به‌دست آورید.

ب) این عمل را چند بار تکرار کنیم تا مجموع مساحت‌های مربع‌های داخلی از ۹۹ درصد مساحت مربع اصلی بیشتر شود؟



حل: الف) مطابق شـــکل، مربع ABCD به ضلع واحد مفروض اســـت. اگر وسط‌های اضلاع این مربع را به هم وصل کنیم، مربع $A'B'C'D'$ به‌دست می‌آید که مطابق شکل، اضلاع آن موازی قطرهای مربع اصلی و طول آنها نصف طول قطر AC است. (چرا؟) بنابراین داریم:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A'B' = C'D' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

یعنـــی طول ضلع مربـــع $A'B'C'D'$ مســـاوی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و لذا مساحت آن $\frac{1}{2}$ اســـت. به همین ترتیب اگر وسط‌های اضلاع مربع $A'B'C'D'$ را به یکدیگر وصل کنیم، مربع $A''B''C''D''$ به‌دست می‌آید که طول ضلع آن مساوی $\frac{1}{2}$ و مساحت آن $\frac{1}{4}$ است. بنابراین مساحت‌ها به صورت زیر یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ تشکیل می‌دهند:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$$

مجموع مساحت‌های ۱۰ مربع از این مربع‌ها برابر است با:

$$S_{10} = 1 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{512}$$

و محیط‌های مربع‌ها نیز یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{\sqrt{2}}{2}$ تشکیل می‌دهند:

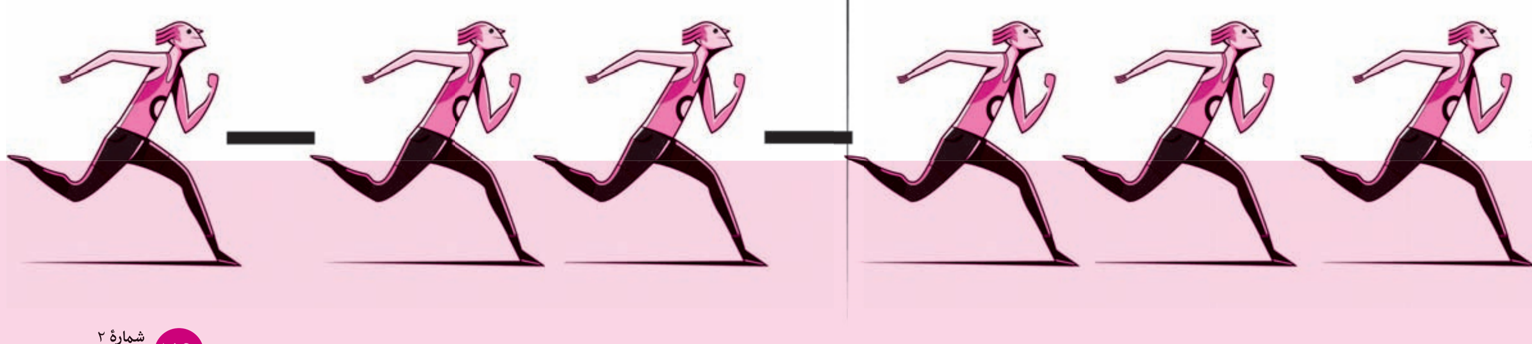
$$4, 2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, \ldots$$

مجموع ۱۰ جملهٔ این دنباله برابر است با:

$$S_{10} = 4 \times \frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^{10}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{31(2+\sqrt{2})}{8}$$

ب) مســـاحت‌های مربع‌های داخلی، جملات یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ و جملهٔ نخست $\frac{1}{2}$ هستند:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$



برای آنکه مجموع آنها از ۹۹ درصد مساحت مربع اصلی بیشتر شود، باید داشته باشیم:

$$S_n=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱-\frac{۱}{۲^n}>۰/۹۹$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲^n}<\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow ۲^n>۱۰۰\Rightarrow \min(n)=۷$$

مسائل ترکیبی از دنباله‌ها

۱. اگر $\frac{۱}{a+b}$، $\frac{۱}{a+c}$ و $\frac{۱}{b+c}$ جملات متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند، ثابت کنید $a^۲,b^۲,c^۲$ نیز جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی هستند.

● **حل:** طبق فرض داریم: $\frac{۱}{a+b}+\frac{۱}{b+c}=\frac{۲}{a+c}$. از این فرض و با عملیات جبری خواهیم داشت:

$$\frac{a+۲b+c}{(a+b)(b+c)}=\frac{۲}{a+c}$$

$$\Rightarrow ۲(ab+ac+b^۲+bc)=(a^۲+۲ab+ac+ac+۲bc+c^۲)$$

$$\Rightarrow ۲ab+۲ac+۲b^۲+۲bc=a^۲+۲ab+۲ac+۲bc+c^۲$$

$$\Rightarrow a^۲+c^۲=۲b^۲$$

و این نشان می‌دهد که $a^۲,b^۲,c^۲$ دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند.

۲. هرگاه به چهار جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی به ترتیب اعداد ۵، ۶، ۹ و ۱۵ را اضافه کنیم، یک دنبالهٔ هندسی به‌دست می‌آید، دنبالهٔ حسابی را بنویسید.

● **حل:** اگر a، $a+d$، $a+۲d$ و $a+۳d$ جملات یک دنبالهٔ حسابی باشند، $a+۵$، $a+d+۶$، $a+۲d+۹$ و $a+۳d+۱۵$ جملات دنبالهٔ هندسی هستند. بنابراین داریم:

$$(a+۲d+۹)^۲=(a+۳d+۱۵)(a+d+۶)$$

و $(a+d+۶)^۲=(a+۵)(a+۲d+۹)$

پس از ساده کردن روابط اخیر به دستگاه دومجهولی $\begin{cases}d^۲+۲d-۲a=۹\\ d^۲-۳a+۳d=۹\end{cases}$ می‌رسیم. با کم‌کردن رابطهٔ بالا از پایین نتیجه می‌شود: $-d+a=۰\Rightarrow a=d$

با جای‌گذاری در رابطهٔ اول خواهیم داشت:

$$a^۲+۲a-۲a=۹\Rightarrow a=\pm۳$$

از آنجا داریم: $d=\pm۳$ و دو دسته جواب برای دنبالهٔ حسابی به‌دست می‌آید:

$$۳,۶,۹,۱۲,\ldots \quad \text{و} \quad -۳,-۶,-۹,-۱۲,\ldots$$

۳. در یک دنبالهٔ هندسی مجموع $۲n$ جملهٔ اول، سه برابر مجموع جملات ردیف فرد است. قدرنسبت دنباله را به‌دست آورید.

● **حل:** با توجه به فرض مسئله داریم (جملهٔ اول a و قدرنسبت q است):

$$۳(a+aq^۲+aq^۴+\ldots+aq^{۲n-۲})=a+aq+aq^۲+\ldots+aq^{۲n-۱}$$

$$\Rightarrow ۳a\frac{q^{۲n}-۱}{q^۲-۱}=a\frac{q^{۲n}-۱}{q-۱}\Rightarrow\frac{۳}{q^۲-۱}=\frac{۱}{q-۱}$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{q+۱}=۱\Rightarrow q=۲$$

۴. مجموع همهٔ اعداد سه رقمی را که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر ۵ مساوی ۲ می‌شود، به‌دست آورید.

حل: همهٔ این عددها به صورت ۵k+۲ هستند که اولین آنها ۲+۲۰×۵، یعنی ۱۰۲، و آخرین آنها ۲+۱۹۹×۵، یعنی ۹۹۷ است. عدهٔ این عددها هم مساوی ۱+۲۰-۱۹۹، یعنی ۱۸۰ عدد است. لذا مجموع آنها برابر است با:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)=\frac{۱۸۰}{۲}(۱۰۲+۹۹۷)=۹۸۹۱۰$$

۵. مجموع n جملهٔ نخست از دنبالهٔ زیر را به‌دست آورید:

$$۱,۱۱,۱۱۱,۱۱۱۱,\ldots,\underbrace{۱۱۱۱\ldots۱}_{n\ \text{رقم}}$$

● **حل:** می‌توان نوشت:

$$\underbrace{۱۱۱\ldots۱}_{n\ \text{رقم}}=۱+۱۰+۱۰۰+\ldots+۱۰^{n-۱}$$

مجموع فوق، مجموع جملات یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۱۰ است. بنابراین:

$$\underbrace{۱۱۱\ldots۱}_{n\ \text{رقم}}=۱\times\frac{۱۰^n-۱}{۱۰-۱}=\frac{۱۰^n-۱}{۹}$$

و از آنجا مجموع n جملهٔ نخست دنبالهٔ اصلی به‌دست می‌آید:

$$۱+۱۱+۱۱۱+\ldots+\underbrace{۱۱۱\ldots۱}_{n\ \text{رقم}}=\frac{۱۰-۱}{۹}+\frac{۱۰^۲-۱}{۹}+\frac{۱۰^۳-۱}{۹}$$
$$+\ldots+\frac{۱۰^n-۱}{۹}$$

$$=\frac{۱۰+۱۰^۲+۱۰^۳+\ldots+۱۰^n-n}{۹}=\frac{۱۰\times\frac{۱۰^n-۱}{۱۰-۱}-n}{۹}$$

$$=\frac{۱۰^{n+۱}-۹n-۱۰}{۸۱}$$

۶. در دنباله‌های حسابی زیر چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد:

الف) $1, 5, 9, \ldots$ ب) $4, 7, 10, \ldots$

(امتحان نهایی حسابان ـ خرداد ۸۹)

● **حل:** دنباله‌های فوق دارای قدرنسبت ۳ و ۴ هستند و جمله‌های عمومی آنها به ترتیب $a_n = 1 + (n-1)4 = 4n - 3$ و $a'_n = 4 + (n-1)3 = 3n + 1$ است.

بنابراین از حل نامعادله‌های $a_n \geq 100$ و $a'_n \geq 100$ می‌توان اولین عدد سه رقمی دو دنباله را به‌دست آورد:

$$4n - 3 \geq 100 \Rightarrow n \geq \frac{103}{4} \Rightarrow n \geq 26$$

$$3n + 1 \geq 100 \Rightarrow n \geq \frac{99}{3} \Rightarrow n \geq 33$$

$$\begin{cases} a_n : 101, 105, 109, 113, \ldots \\ a'_n : 100, 103, 106, 109, \ldots \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که اولین جملهٔ مشترک سه رقمی دو دنباله، ۱۰۹ است. چون ک.م.م قدرنسبت‌ها ۱۲ می‌شود، پس کافی است دنباله‌ای با شروع از ۱۰۹ و قدرنسبت ۱۲ بنویسیم که جملات آن همگی عددهای سه رقمی باشند:

$$109, 121, \ldots \quad a''_n = 109 + (n-1)12 = 12n + 97 \leq 999$$
$$\Rightarrow n \leq 75$$

یعنی ۷۵ جملهٔ مشترک سه رقمی در دو دنباله وجود دارد.

۷. برای محافظت در برابر تابش مضر مواد پرتوزا، لایه‌های محافظتی ساخته شده‌اند که تابش پس از عبور از آنها نصف می‌شود. از چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش حداقل ۹۹ درصد کاهش یابد؟

(امتحان نهایی حسابان ـ خرداد ۸۹)

● **حل:** اگر میزان پرتوهای مضر را پس از عبور از اولین، دومین، سومین و... لایهٔ محافظ (به نسبت کل اشعه) بنویسیم، دنبالهٔ هندسی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

که جملهٔ عمومی آن به صورت $a_n = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{2^n}$ است. برای آنکه شدت تابش پرتوها، پس از عبور از n لایه، ۹۹ درصد کاهش یابد، باید میزان اشعه حداکثر ۱ درصد میزان اولیه باشد؛ یعنی داریم:

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100 \Rightarrow \min(n) = 7$$

پس حداقل باید از هفت لایه استفاده کرد که در آن صورت میزان اشعهٔ عبور کرده مساوی $\frac{1}{128}$ مقدار اولیه می‌شود و بیشتر از ۹۹ درصد آن کاهش می‌یابد.

تمرین

۱. یک دنبالهٔ هندسی بنویسید که تفاضل جملهٔ سوم و اول آن ۹ و تفاضل جملهٔ پنجم و سوم آن ۲۶ باشد (جواب: $a_1 = -3$ و $q = \pm 2$).

۲. جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی را بنویسید که مجموع ۶ جملهٔ اول آن ۲۵۲ و مجموع سه جملهٔ اول آن ۱۲۸ باشد (جواب: $a_n = 2^{n+1}$).

۳. ثابت کنید $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$ و $\sqrt{7}$ نمی‌توانند جملاتی از یک دنبالهٔ حسابی یا هندسی باشند.

۴. بین دو عدد ۳ و ۱۹۶۸۳، هفت واسطهٔ هندسی درج کنید.

۵. وسط‌های اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری حاصل شود. این کار را ادامه می‌دهیم. چند بار این عمل باید تکرار شود تا مجموع مساحت‌های مثلث‌های به‌دست آمده از ۱/۳۳۳ برابر مساحت مثلث اولیه بیشتر شود؟ (جواب: ۶ بار)

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه سوم: یک مسئله و دو جواب

در شمارهٔ قبل یک مسئله دربارهٔ چند معامله و سود و زیان حاصل از آن‌ها و سه جواب متفاوت دربارهٔ سود نهایی داشتیم که پاسخ و تحلیل آن را در این شماره و در انتهای این بخش آورده‌ایم. در این شماره می‌خواهیم یک مسئلهٔ دیگر از این دست مطرح کنیم:

مسئله: میمونی روی یک ستون ایستاده است. پسر بچهٔ بازیگوشی هم روبه‌روی او ایستاده است و چشم در چشم او دارد. ناگهان پسربچه تصمیم می‌گیرد که با میمون کمی شوخی کند! سپس شروع می‌کند به دور او چرخیدن. اما میمون بازیگوش نیز هم‌زمان با او شروع به چرخیدن به دور خودش (در همان بالای ستون) می‌کند. در همان حال به چشمان پسر بچه نگاه می‌کند! تا این‌که پسر بچه یک دور کامل دور ستون می‌زند. آیا پسر بچه دور میمون هم چرخیده است؟! روشن است که پاسخ آری یا نه (شاید هم بله یا خیر!) است، اما کدام یک پاسخ صحیح است؟ منتظر پاسخ شما و دلایل درستی آن‌ها هستیم.

در شمارهٔ ۷۸ پاسخ‌ها را بررسی و تحلیل می‌کنیم.

ریاضیات نوعی سوءاستفادهٔ قاعده‌مند از نام‌گذاری‌های پیشرفته برای رسیدن به اهداف معین است!

«پل ـ هنینگ کَمپ»