عنایت‌اله راستی‌زاده
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شیراز

بزرگ‌نمایی

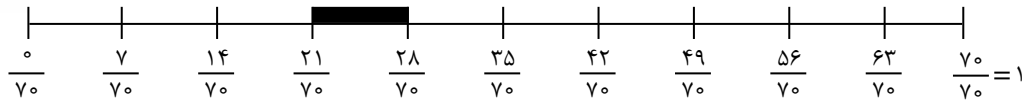
یافتن دنبالهٔ تقریبات اعشاری اعداد گویا و گنگ به روش

اشاره

برای هر عدد گویای $\frac{a}{b}$ می‌توان با انجام عمل تقسیم a بر b و نوشتن اعدادی که در خارج قسمت به‌دست می‌آیند، دنباله‌ای از اعداد اعشاری ساخت که جملات آن به عدد $\frac{a}{b}$ نزدیک می‌شوند. در ادامه با روشی آشنا خواهیم شد که در آن بدون عمل تقسیم دنبالهٔ تقریبات اعشاری عدد را بیابیم.

مثال ۱. به روش بزرگ‌نمایی، دنبالهٔ تقریبات اعشاری عدد $\frac{۳}{۷}$ را (تا ۳ مرحله) بیابید.

۱. ابتدا توجه می‌کنیم که $۰ < \frac{۳}{۷} < ۱$، اما $۱ = \frac{۷}{۷}$ و $۰ = \frac{۰}{۷}$. چون می‌خواهیم از روش بزرگ‌نمایی ۱۰ قسمتی استفاده کنیم، فاصلهٔ صفر تا ۱ را به‌صورت زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم:

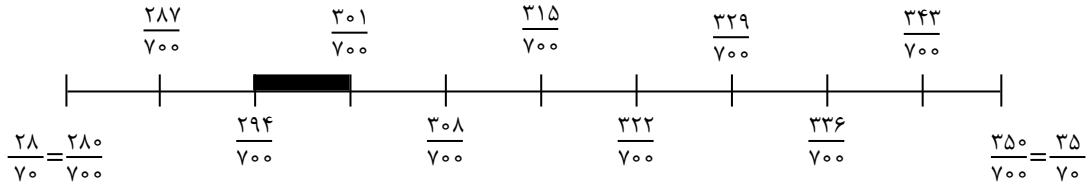


حال باید دید که $\frac{۳}{۷}$ در کدام یک از زیربازه‌های بالا قرار دارد. توجه می‌کنیم که:

$\frac{۳۰}{۷۰} = \frac{۳}{۷}$ و $۲۸ < ۳۰ < ۳۵$ (۳۵ و ۲۸ مضرب‌های مخرج کسر، یعنی ۷ هستند)، در نتیجه: $\frac{۲۸}{۷۰} < \frac{۳۰}{۷۰} < \frac{۳۵}{۷۰}$، پس:

$۰/۴ < \frac{۳}{۷} < ۰/۵$

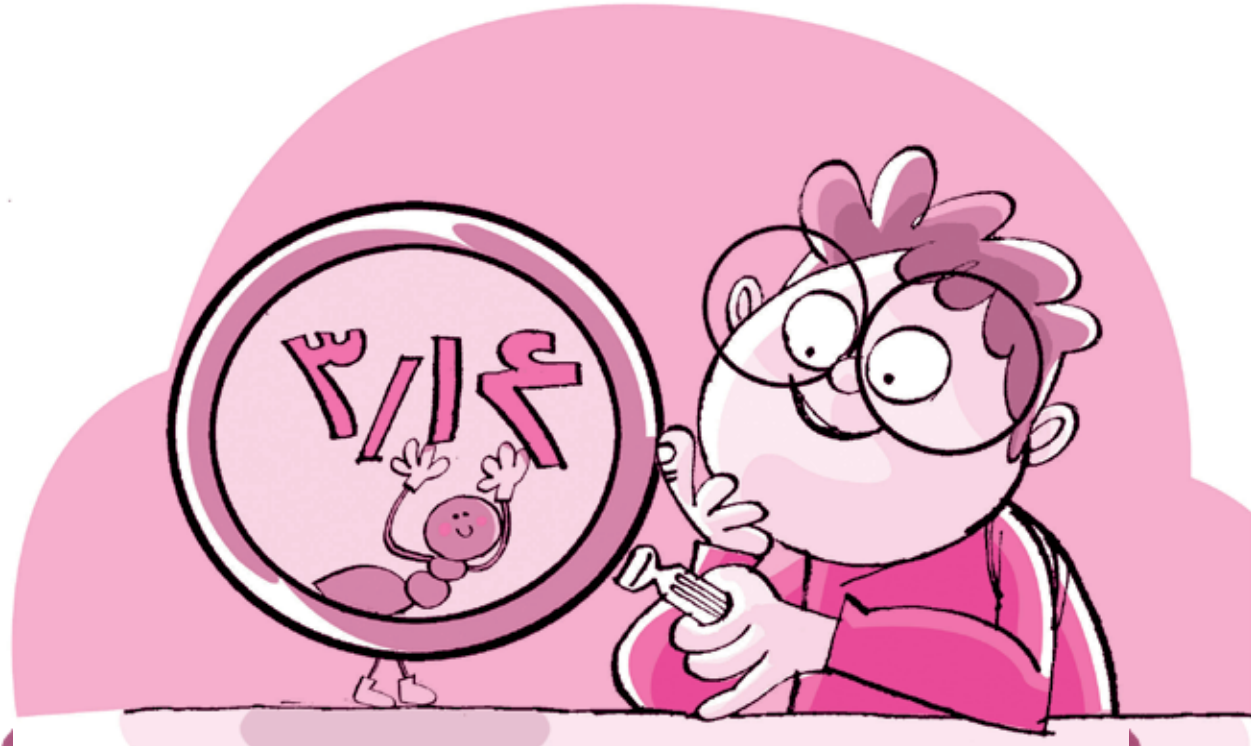
۲. حال بازهٔ $[\frac{۲۸}{۷۰}, \frac{۳۵}{۷۰}]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{۱}{۱۰۰}$ تقسیم می‌کنیم:

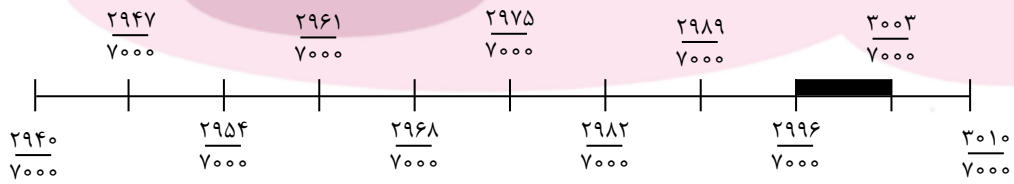


باید دید که $\frac{۳}{۷}$ در کدام‌یک از زیربازه‌های اخیر قرار دارد. توجه می‌کنیم که:

$\frac{۳۰۰}{۷۰۰} = \frac{۳}{۷}$ و $\frac{۲۹۴}{۷۰۰} < \frac{۳۰۰}{۷۰۰} < \frac{۳۰۱}{۷۰۰}$، (۳۰۱ و ۲۹۴ نیز مضرب‌های متوالی ۷ می‌باشند) در نتیجه: $۰/۴۲ < \frac{۳}{۷} < ۰/۴۳$

۳. در این مرحله می‌خواهیم به سومین جملهٔ دنباله تقریبات اعشاری $\frac{۳}{۷}$ دسترسی یابیم. بازهٔ $[\frac{۲۹۴}{۷۰۰}, \frac{۳۰۱}{۷۰۰}]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ تقسیم می‌کنیم:





داریم: $\frac{۳۰۰۰}{۷۰۰۰}=\frac{۳}{۷}$ و $۲۹۹۶<۳۰۰۰<۳۰۰۳$، لذا: $۰/۴۲۸<\frac{۳}{۷}<۰/۴۲۹$

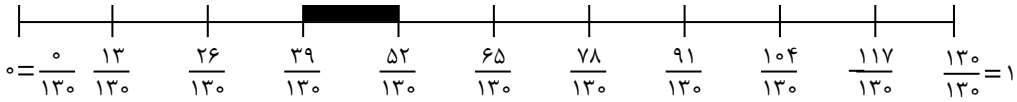
با توجه به مراحل فوق می‌توان دید که سه جملهٔ نخست دنبالهٔ تقریب‌های اعشاری $\frac{۳}{۷}$ (به روش بزرگ‌نمایی ۱۰ قسمتی) به صورت زیرند:

$۰/۴, ۰/۴۲, ۰/۴۲۸, \ldots$

با ادامهٔ این روش می‌توان به اندازهٔ دلخواه به $\frac{۳}{۷}$ نزدیک شد. توجه کنید که در هیچ‌کدام از مراحل فوق از عمل تقسیم استفاده نشده است.

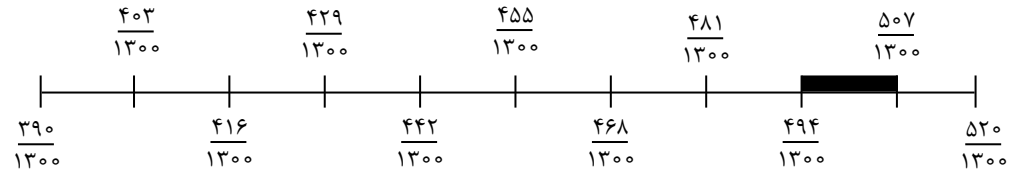
مثال ۲. دنبالهٔ تقریبات اعشاری $\frac{۵}{۱۳}$ را به روش بزرگ‌نمایی بیابید. پاسخ را به صورت خلاصه می‌آوریم:

مرحلهٔ اول: ابتدا توجه می‌کنیم که: $۰<\frac{۵}{۱۳}<۱$



$$\frac{۵}{۱۳}=\frac{۵۰}{۱۳۰}, ۳۹<۵۰<۵۲ \Rightarrow \frac{۳۹}{۱۳۰}<\frac{۵۰}{۱۳۰}<\frac{۵۲}{۱۳۰} \Rightarrow \frac{۳}{۱۰}<\frac{۵}{۱۳}<\frac{۴}{۱۰} \Rightarrow \frac{۵}{۱۳}\in[\frac{۳}{۱۰},\frac{۴}{۱۰}]$$

مرحلهٔ دوم: بازهٔ $[\frac{۳}{۱۰},\frac{۴}{۱۰}]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{۱}{۱۰۰}$ تقسیم می‌کنیم:



$$\frac{۵}{۱۳}=\frac{۵۰}{۱۳۰}=\frac{۵۰۰}{۱۳۰۰}, ۴۹۴<۵۰۰<۵۰۷ \Rightarrow \frac{۴۹۴}{۱۳۰۰}<\frac{۵}{۱۳}=\frac{۵۰۰}{۱۳۰۰}<\frac{۵۰۷}{۱۳۰۰} \Rightarrow \frac{۳۸}{۱۰۰}<\frac{۵}{۱۳}<\frac{۳۹}{۱۰۰}$$

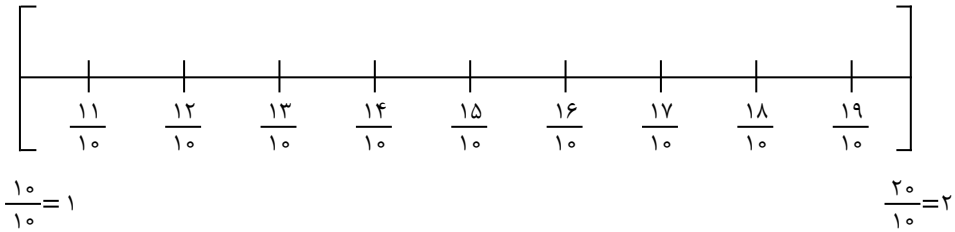
مرحلهٔ سوم: دیدیم که: $\frac{۵}{۱۳}\in[\frac{۳۸}{۱۰۰},\frac{۳۹}{۱۰۰}]$. این بازه را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ تقسیم می‌کنیم و به سادگی خواهیم دید که: $\frac{۵}{۱۳}\in[\frac{۳۸۴}{۱۰۰۰},\frac{۳۸۵}{۱۰۰۰}]$

پس سه جملهٔ اول دنبالهٔ تقریبات اعشاری کسر $\frac{۵}{۱۳}$ به صورت مقابلند: ۰/۳,۰/۳۸,۰/۳۸۴,...

اکنون به چند مثال از کاربرد روش بزرگ‌نمایی برای یافتن دنبالهٔ تقریبات اعشاری اعداد گنگ توجه فرمایید:

الف) یافتن دنباله‌ای از تقریبات اعشاری که به $\sqrt{۳}$ نزدیک می‌شوند

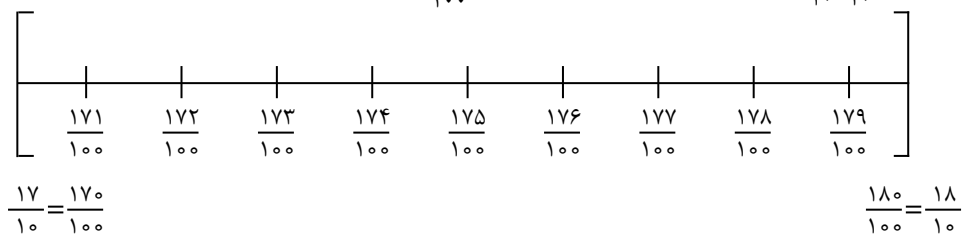
۱. می‌دانیم: $۱^۲<۳<۲^۲$، بنابراین: $۱<\sqrt{۳}<۲$. حال بازهٔ $[۱,۲]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی تقسیم می‌کنیم:



حال باید دید که $\sqrt{۳}$ در کدام‌یک از زیربازه‌های فوق قرار دارد.

توجه می‌کنیم که $۳=\frac{۳۰۰}{۱۰۰}$ و $\frac{۲۸۹}{۱۰۰}<\frac{۳۰۰}{۱۰۰}<\frac{۳۲۴}{۱۰۰}$. در نتیجه: $\frac{۱۷}{۱۰}<\sqrt{۳}<\frac{۱۸}{۱۰}$، پس: $۱/۷<\sqrt{۳}<۱/۸$.

۲. حال بازهٔ $[\frac{۱۷}{۱۰},\frac{۱۸}{۱۰}]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{۱}{۱۰۰}$ تقسیم می‌کنیم:



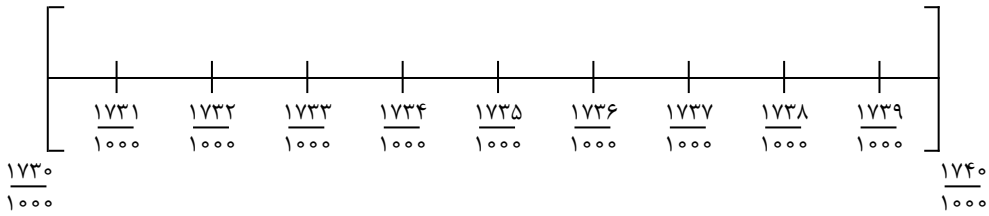
باید دید که $\sqrt{۳}$ در کدام‌یک از زیربازه‌های اخیر واقع است. ناچاریم از مربع کسرهای اخیر استفاده کنیم. توجه می‌کنیم که:

$$\frac{۳۰۲۷۶}{۱۰۰۰۰}=(\frac{۱۷۴}{۱۰۰})^۲<\frac{۳۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰}=۳=\frac{۲۹۹۲۹}{۱۰۰۰۰}=\frac{(۱۷۳)^۲}{(۱۰۰)^۲}$$ ، در نتیجه: $\frac{۱۷۳}{۱۰۰}<\sqrt{۳}<\frac{۱۷۴}{۱۰۰}$.

پس: $۱/۷۳<\sqrt{۳}<۱/۷۴$

۳. به سومین مرحله خوش آمدید! در این مرحله می‌خواهیم به سومین جملهٔ دنبالهٔ تقریبات اعشاری $\sqrt{۳}$ برسیم. برای پرهیز از تکراری‌شدن محاسبات، به همین مرحله اکتفا خواهیم کرد.

بازهٔ $[\frac{۱۷۳}{۱۰۰},\frac{۱۷۴}{۱۰۰}]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ تقسیم می‌کنیم:



حال ببینیم که $\sqrt{۳}$ در کدام‌یک از زیربازه‌های فوق قرار می‌گیرد. باز هم مانند مرحلهٔ قبل از مربع کسرها استفاده می‌کنیم. داریم:

$$(\frac{۱۷۳۲}{۱۰۰۰})^۲ = \frac{۲۹۹۹۸۲۴}{۱۰۰۰۰۰۰} < ۳ = \frac{۳۰۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰۰۰} < \frac{۳۰۰۳۲۸۹}{۱۰۰۰۰۰۰} = (\frac{۱۷۳۳}{۱۰۰۰})^۲$$

در نتیجه: $\frac{۱۷۳۲}{۱۰۰۰} < \sqrt{۳} < \frac{۱۷۳۳}{۱۰۰۰}$ یا: $۱/۷۳۲ < \sqrt{۳} < ۱/۷۳۳$.

با توجه به مراحل فوق می‌توان دید که سه جملهٔ نخست دنبالهٔ تقریب‌های اعشاری $\sqrt{۳}$ به صورت زیرند:

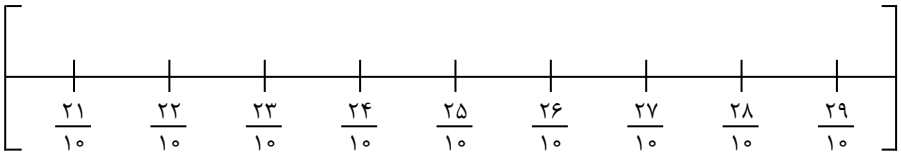
$۱/۷, ۱/۷۳, ۱/۷۳۲, ...$

با ادامه این روش می‌توان به اندازهٔ دلخواه به $\sqrt{۳}$ نزدیک شد.

ب) یافتن دنباله‌ای از تقریبات اعشاری که به $\sqrt{۷}$ نزدیک می‌شوند

به عنوان مثالی دیگر به سراغ $\sqrt{۷}$ می‌رویم و سه جملهٔ نخست دنبالهٔ تقریب‌های اعشاری آن را پیدا می‌کنیم.

۱. می‌دانیم: $۲^۲ < ۷ < ۳^۲$، بنابراین: $۲ < \sqrt{۷} < ۳$. حال بازهٔ $[۲,۳]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{۱}{۱۰}$ تقسیم می‌کنیم.

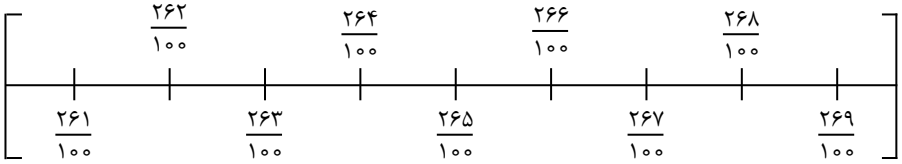


$۲ = \frac{۲۰}{۱۰}$ $\qquad$ $۳ = \frac{۳۰}{۱۰}$

باید دید که $\sqrt{۷}$ در کدام‌یک از زیربازه‌های فوق واقع است. به این منظور از مربع کسرهای بالا کمک می‌گیریم.

$$(\frac{۲۷}{۱۰})^۲ = \frac{۷۲۹}{۱۰۰} < \frac{۷۰۰}{۱۰۰} = ۷ < \frac{۶۷۶}{۱۰۰} = (\frac{۲۶}{۱۰})^۲$$ پس $\frac{۲۶}{۱۰} < \sqrt{۷} < \frac{۲۷}{۱۰}$ یا $۲/۶ < \sqrt{۷} < ۲/۷$

۲. در این مرحله بازهٔ $[\frac{۲۶}{۱۰}, \frac{۲۷}{۱۰}]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{۱}{۱۰۰}$ تقسیم می‌کنیم:

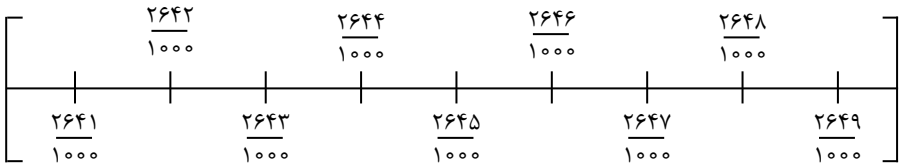


$\frac{۲۶}{۱۰} = \frac{۲۶۰}{۱۰۰}$ $\qquad$ $\frac{۲۷}{۱۰} = \frac{۲۷۰}{۱۰۰}$

مجدداً از مربع کسرهای فوق استفاده می‌کنیم. داریم:

$$(\frac{۲۶۵}{۱۰۰})^۲ = \frac{۷۰۲۲۵}{۱۰۰۰۰} < \frac{۷۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰} = ۷ < \frac{۶۹۶۹۶}{۱۰۰۰۰} = (\frac{۲۶۴}{۱۰۰})^۲$$ پس $\frac{۲۶۴}{۱۰۰} < \sqrt{۷} < \frac{۲۶۵}{۱۰۰}$ یا $۲/۶۴ < \sqrt{۷} < ۲/۶۵$

۳. در سومین مرحله قصد داریم سومین جملهٔ دنبالهٔ تقریب‌های اعشاری $\sqrt{۷}$ را پیدا کنیم. با استفاده از مرحلهٔ قبل به سراغ بازهٔ $[\frac{۲۶۴}{۱۰۰}, \frac{۲۶۵}{۱۰۰}]$ می‌رویم و آن را به ۱۰ زیربازهٔ هر کدام به طول $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ تقسیم می‌کنیم:



$\frac{۲۶۴}{۱۰۰}=\frac{۲۶۴۰}{۱۰۰۰}$ $\qquad$ $\frac{۲۶۵}{۱۰۰}=\frac{۲۶۵۰}{۱۰۰۰}$

به همین ترتیب لازم است از مربع کسرهای فوق کمک بگیریم. داریم:

$$(\frac{۲۶۴۵}{۱۰۰۰})^۲=\frac{۶۹۹۶۰۲۵}{۱۰۰۰۰۰۰}<۷=\frac{۷۰۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰۰۰}<\frac{۷۰۰۱۳۱۶}{۱۰۰۰۰۰}=(\frac{۲۶۴۶}{۱۰۰۰})^۲$$

پس: $\frac{۲۶۴۵}{۱۰۰۰}<\sqrt{۷}<\frac{۲۶۴۶}{۱۰۰۰}$ یا: $۲/۶۴۵<\sqrt{۷}<۲/۶۴۶$.

لذا دنبالهٔ تقریب‌های اعشاری $\sqrt{۷}$ چنین است:

$۲/۶, ۲/۶۴, ۲/۶۴۵, \ldots$

می‌توان دید که جملهٔ چهارم این دنباله ۲/۶۴۵۷ است که تقریب دقیق‌تر از $\sqrt{۷}$ محسوب می‌شود.

دو مثال فوق به وضوح دقت عمل و در عین حال سادگی یک روش مناسب برای محاسبهٔ تقریب اعداد گنگی نظیر $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۷}$ را توسط اعداد گویا نمایان می‌کنند. در هر حال این عددهای گویا، شکل ویژه‌ای دارند که مخرج آن‌ها توان‌هایی از ۱۰ هستند.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه دوم: یک حکایت خواندنی از زندگی جان نپر

احتمالاً با نام **جان نپر** آشنا هستید. او مخترع لگاریتم طبیعی و ریاضی‌دان بنام اسکاتلندی است که در فاصلهٔ سال‌های ۱۶۱۷-۱۵۵۰ می‌زیست. وی علاوه بر ریاضیات در مهندسی، فیزیک و تردستی نیز مهارت داشت. هم عصران وی به دلیل نبوغ خارق‌العاده‌ای که داشت، معتقد بودند که او در جادو و سحر نیز دستی دارد. خود او با کارهایش به این تصور دامن می‌زد. حکایت زیر معرف این وجه از شخصیت اوست.

زمانی نپر احساس کرد که یکی از خدمتکارانش از او دزدی می‌کند. همهٔ خدمتکارانش را گرد آورد و به آن‌ها اعلام کرد که خروس سیاه پرکلاغی‌اش می‌تواند دزد را شناسایی کند. پیش از آن و دور از چشم خدمتکاران، او پرهای خروسش را به دودهٔ ذغال آغشته کرده بود و او را روی میزی در اتاق تاریکی قرار داده بود. سپس یکی‌یکی خدمتکاران را به نوبت به داخل اتاق تاریک می فرستاد و از آن‌ها می‌خواست که پشت خروس را نوازش کنند تا به زعم او، خروس، دزد را شناسایی کند! وقتی خدمتکاران بیرون می‌آمدند، نپر دست‌های آن‌ها را نگاه می‌کرد. خدمتکار مجرم کسی بود که از ترس پشت خروس را لمس نکرده بود و در نتیجه دست‌هایش تمیز بودند!