آموزشی

ر.ای. اسمیرنووا
ترجمه: ابراهیم دارابی

توابع متناوب و توابع نامتناوب

در طبیعت و صنعت جریان‌هایی وجود دارند که در زمان‌های معینی متناوباً تکرار می‌شوند. این نوع جریان‌ها را «متناوب» می‌نامند و به کمک توابع متناوب تعریف می‌کنند.

تعریف: فرض کنیم تابع $y=f(x)$ در دامنهٔ تعریف $D(f)$ مفروض باشد. تابع $f(x)$ را در این دامنه متناوب می‌نامند اگر عدد مثبتی مانند T وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x \in D$ داشته باشیم:

$۱) x+T \in D(f)$

$۲) x-T \in D(f)$

$۳) f(x+T)=f(x)$

هر وقت از توابع متناوب سخن به میان می‌آید، دانش‌آموزان به‌درستی از توابع مثلثاتی نام می‌برند. اما آن‌ها باید بدانند که علاوه بر توابع مثلثاتی، توابع غیرمثلثاتی هم وجود دارند که متناوب هستند. در این مقاله با این نوع توابع آشنا می‌شویم. مثلاً توابع $y=\{x\}$* ،$y=3, x\in R$ متناوب‌اند. توابع متناوب را غالباً به صورت زیر هم تعریف می‌کنند:

$$y=f(g(x))$$

که در آن g تابع متناوب و f تابع دلخواهی است. به‌عنوان مثال توابع زیر متناوب هستند:

$$y=\cos^2 3x\,,\ y=\log\cos x\,,\ y=|\sin 2x|$$

دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی معمولاً با مسائلی مواجه می‌شوند که در آن‌ها از دانش‌آموز خواسته می‌شود ثابت کنند تابعی متناوب است. در اینجا دانش‌آموزان ابتدا متناوب‌بودن تابع را حدس می‌زنند و سپس با استفاده از تعریف تابع متناوب، به اثبات آن می‌پردازند.

برای اثبات نامتناوب‌بودن تابع، به دو طریق عمل می‌شود:

۱. با استفاده از تعریف تابع متناوب؛

۲. با استفاده از تعریف تابع نامتناوب.

تعریف: تابع نامتناوب تابعی است که تعریف تابع متناوب در آن صدق نمی‌کند.

یعنی تابع $f(x)$ نامتناوب نامیده می‌شود، اگر به ازای هر $T>0$ عددی مانند $x\in D(f)$ یافت شود؛ طوری که حداقل یکی از شرایط سه‌گانه که در تعریف تابع متناوب آورده شده است، برقرار نباشد.

مثال ۱. ثابت کنید تابع $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ متناوب نیست.

اثبات: دامنهٔ تابع مجموعه اعداد حقیقی منهای $x=0$ است.

فرض کنیم T عدد مثبت دلخواه باشد. چون $T\neq 0$، پس $x_0=-T$ به دامنهٔ تابع تعلق دارد. اما داریم:

$$x_0+T=(-T)+T=0\,,\ x_0+T\notin D(f)$$

یعنی شرط (۱) در تعریف تابع متناوب نقض شده است. پس تابع $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ متناوب نیست.

مثال ۲. ثابت کنید تابع $f(x)=x^2$ متناوب نیست.

اثبات:

روش اول: دامنهٔ تابع مجموعه اعداد حقیقی است. بنابراین برای هر T دلخواه نقاط $x+T$ و $x-T$ در دامنهٔ تعریف تابع قرار دارند. پس لازم است ثابت کنیم به ازای هر $T>0$ حداقل یک مقدار برای x وجود دارد که در ازای آن داشته باشیم:

$$f(x+T)\neq f(x)$$

در حالت خاص می‌توان $x=0$ را در نظر گرفت. در این صورت داریم:

$$f(x)=f(0)=0,\ f(x+T)=f(T)=T^2>0$$
$$\Rightarrow f(x+T)\neq f(x)$$

روش دوم: برای اثبات نامتناوب بودن تابع می‌توان از قضیهٔ زیر استفاده کرد:

قضیه: اگر همهٔ توابع متناوب چند ویژگی داشته باشند، هر تابعی که یکی از این ویژگی‌ها را نداشته باشد، متناوب نیست.

ویژگی‌های توابع متناوب

۱. اگر نقطهٔ $x_۰$ به دامنهٔ تابع متناوب با دورهٔ تناوب T تعلق داشته باشد، آن‌گاه همهٔ نقاط $x_۰+nT$ به دامنهٔ تابع تعلق دارد. که در آن n عدد صحیح دلخواه است. این نشان می‌دهد که دامنهٔ توابع متناوب شامل همهٔ اعداد مثبت و منفی از بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ هستند.

از آنجا نتیجه می‌شود که مثلاً تابع $y=\log_a^x$ متناوب نیست، زیرا هر $x\le ۰$ به دامنهٔ تابع تعلق ندارد.

۲. برای تابع متناوب f(x) در ازای xهایی که از نظر تعداد نامتناهی باشند، مقادیر نظیری پیدا می‌شوند که بین آن‌ها اعداد مثبت و منفی از نظر قدرمطلق هر چه‌قدر که بزرگ باشند، وجود دارند. این ویژگی از تساوی زیر نتیجه می‌شود که دربارهٔ توابع متناوب با دورهٔ $T>۰$ همواره صادق است:

$$f(x+nT)=f(x)$$

و در آن داریم: $T>۰, x\in Z$

در حالت خاص تابع متناوب در دامنهٔ تعریف خود نمی‌تواند صعودی یا نزولی یکنوا باشد.

مثلاً تابع $y=a^x\ (a\ne ۰)$ متناوب نیست، زیرا تابع صعودی یکنوا است.

۳. توابـع متنـاوب در دامنهٔ تعریف خـود نمی‌توانند از نقطه‌نظر تعداد، نقاط انفصال متناهی داشته باشند. مثلاً تابع $y=\frac{۱}{x(x-۲)}$ متناوب نیست؛ زیرا تنها دارای دو نقطهٔ انفصال اسـت: $x=۲$ و $x=۰$. منظور از نقطـهٔ انفصال همان نقطهٔ ناپیوستگی است.

۴. اگـر تابـع f(x) متناوب و در مجموعـهٔ اعداد حقیقی تعریف شده باشد، آن‌گاه معادلهٔ:

$$f(x+T)=f(x)$$

کـه در آن T به عنوان مجهول و x پارامتر در نظر گرفته می‌شود، دسـت‌کم یک ریشـهٔ مثبت مانند $T=T_۰$ خواهد داشت که به ازای همهٔ مقادیر پارامتر $x\in R$ در معادله صدق می‌کند.

مثـال ۳. ثابت کنیـد تابع $f(x)=\{x\}+\sin x$ متناوب نیست.

اثبات: فرض کنیم تابع با دورهٔ تناوب $T>۰$ متناوب باشد (تناقض)، در این صورت به ازای هر x دلخواه تساوی زیر برقرار است:

$$\{x+T\}+\sin(x+T)=\{x\}+\sin x$$

این تساوی به ازای $x=۰$ هم برقرار است:

$$\{T\}+\sin T=۰ \quad (۱)$$

به ازای $x=-T$ داریم:

$$\{-T\}-\sin T=۰ \quad (۲)$$

از جمع تساوی‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\{T\}+\{-T\}=۰$$

جزء اعشاری هر عدد، همواره نامنفی است، پس:

$$\{T\}=\{-T\}=۰$$

یعنی T عدد صحیح است. اگر: $\{T\}=۰$، آن‌گاه از معادلهٔ (۲) نتیجه می‌شـود: $\sin T=۰$ و یا $T=k\pi, k\in Z$. اما اگر $k\ne ۰$، آن‌گاه $T=k\pi$ عدد صحیح نیست.

بنابراین معادله‌های (۱) و (۲) تنها یک ریشـهٔ مشـترک $T=۰$ دارند. پس تابع f(x) متناوب نیست.

۵. اگـر در تابع متناوب f(x) بـا دورهٔ تناوب T، در بازه‌ای مانند $[a,a+T]$ نامساوی زیر برقرار باشد:

$$|f(x)|\le M$$

آن‌گاه این نامسـاوی بـه ازای همهٔ مقادیر متغیر x برقرار است.

از آن‌جا نتیجه می‌شـود که اگر تابع متناوب f(x) به ازای همهٔ مقادیر حقیقی تعریف شده و پیوسته باشد، آن‌گاه عددی مانند $M>۰$ وجود دارد که به ازای همهٔ مقادیر $x\in R$ تساوی زیر برقرار است:

$$|f(x)|\le M$$

تمرین همراه با حل

مسـئلهٔ ۱. ثابت کنید تابع $f(x)=|\sin x|$ بـا دورهٔ تناوب π متناوب است.

حل: دامنهٔ تابع مجموعه اعداد حقیقی اسـت. بنابراین به ازای هر x نقاط $x+T$ و $x-T$ به دامنهٔ تابع تعلق دارند. پس تساوی زیر را بررسی می‌کنیم:

$$f(x+\pi)=f(x)$$

داریم:

$$f(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=|\sin x|=f(x)$$

مسـئلهٔ ۲. دورهٔ تناوب اصلی تابع $f(x)=\cos^۴ x+\sin x$ را پیدا کنید.

حل: دامنهٔ تابع مجموعه اعداد حقیقی است. پس به ازای هر x از دامنه، اعداد $x+T$ و $x-T$ به دامنهٔ تابع تعلق دارند. عدد ۲π دورهٔ تناوب تابع است، زیرا:

$$\cos^۴(x+۲\pi)+\sin(x+۲\pi)=\cos^۴ x+\sin x$$

ثابت می‌کنیم هیچ عدد مثبتی مانند T کوچک‌تر از 2π دورهٔ تناوب تابع f(x) نیست.

فرض کنیم چنین نباشد (تناقض). عددی مانند T وجود دارد که دورهٔ تناوب تابع است و در ضمن: $0 < T < 2\pi$.

عدد $x=-\frac{T}{2}$ را در نظر می‌گیریم. مقدار $f(-\frac{T}{2})$ باید برابر باشد با:

$$f(-\frac{T}{2}+T)=f(\frac{T}{2})$$

اما داریم:

$$\cos^4(-\frac{T}{2})+\sin(-\frac{T}{2}) \neq \cos^4(-\frac{T}{2})+\sin\frac{T}{2}$$

زیرا: $\sin(-\frac{T}{2})$ و $\sin(\frac{T}{2})$ متمایز از صفر و از نظر علامت متمایز، اما $\cos(-\frac{T}{2})$ و $\cos(\frac{T}{2})$ همانند هستند و این تناقض است.

مسئلهٔ ۳. دورهٔ تناوب اصلی تابع $f(x)=3\cos x+\cos 2x$ را پیدا کنید.

حل: دامنهٔ تابع همهٔ اعداد حقیقی هستند. فرض کنیم T دوره تناوب تابع باشد. در این صورت به ازای هر x داریم:

$$3\cos(x+T)+\cos(2(x+T))=3\cos x+\cos 2x$$

به ازای $x=0$ تساوی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$3\cos T+\cos 2T=4 \qquad (1)$$

چون $\cos T\le 1$ و $\cos 2T\le 1$ پس داریم:

$$3\cos T+\cos 2T\le 4 \qquad (2)$$

بنابراین T در دستگاه زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases}\cos T=1\\ \cos 2T=1\end{cases}$$

کوچک‌ترین ریشهٔ مثبت دستگاه $T=2\pi$ است.

با امتحان کردن معلوم می‌شود $T=2\pi$ دورهٔ تناوب تابع است. زیرا برای هر x اعداد $x+T$ و $x-T$ به دامنهٔ تابع تعلق دارند و داریم:

$$3\cos(x+2\pi)+\cos(2(x+2\pi))=3\cos x+\cos 2x$$

مسئلهٔ ۴: ثابت کنید تابع $f(x)=\frac{10x^2-x+1}{x^2+x+1}$ متناوب نیست.

حل: قرار می‌دهیم $a=\frac{10x^2-x+1}{x^2+x+1}$ که در آن a عددی ثابت متعلق به مجموعه مقادیر برد تابع است. از تساوی بالا نتیجه می‌شود:

$$(10-a)x^2-(a+1)x+1-a=0$$

از آنجا معلوم می‌شود که این معادله بیش از دو ریشه ندارد. بنابراین تابع f(x) در بیش از دو نقطه نمی‌تواند مقادیر نظیر خود را اختیار کند. پس بنا بر ویژگی ۲ تابع نمی‌تواند متناوب باشد.

مسئلهٔ ۵. نامتناوب بودن تابع $f(x)=\mathrm{Arc}\sin x$ را ثابت کنید.

حل: تابع در بازه $[-1,+1]$ تعریف‌پذیر است. بنابراین، بنابر ویژگی ۱ نمی‌تواند متناوب باشد.

مسئلهٔ ۶. نامتناوب بودن تابع $f(x)=2x\cos(x^2)$ را ثابت کنید

حل: دامنهٔ تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی است. از راه تناقض حکم مسئله را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم تابع متناوب و دورهٔ تناوب آن $T>0$ باشد. چون تابع f(x) در مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف‌پذیر است و در ازای $x\in[0,T]$ داریم: $|f(x)|\le 2T$، بنابر ویژگی ۵ به ازای هر $x\in R$ نامساوی زیر برقرار است:

$$|2x\cos(x^2)|\le T$$

اما اگر n طوری باشد که داشته باشیم: $\sqrt{2\pi n}>T$، آن‌گاه نامساوی بالا به ازای $x=\sqrt{2\pi n}$ برقرار نیست و این تناقض است.

مسئلهٔ ۷. ثابت کنید تابع $f(x)=\cos\log|x|$ متناوب نیست.

حل: دامنهٔ تعریف تابع مجموعه اعداد حقیقی به جز $x=0$ است؛ یعنی: $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. اگر تابع f(x) متناوب با دورهٔ $T>0$ باشد، آن‌گاه چون $T\in D(f)$ است، بنابر تعریف توابع متناوب باید نتیجه بگیریم: $0=T-T\in D(f)$ و این درست نیست.

مسئلهٔ ۸. ثابت کنید تابع $f(x)=\sin\sqrt{|x|}$ متناوب نیست.

حل: فرض می‌کنیم تابع، متناوب و دورهٔ تناوب آن T باشد.

عدد مثبت x را طوری انتخاب می‌کنیم که در شرط $\sin\sqrt{x}=1$ صدق کند. در آن صورت داریم: $\sin\sqrt{x+T}=\sin\sqrt{x}=1$؛ یعنی:

$$\sqrt{x+T}-\sqrt{x}=2\pi x,\ x\in N$$

واضح است که: $\sqrt{x+T}\ge\sqrt{x}$ و بنابراین: $\sqrt{x+T}\ge 2\pi+\sqrt{x}$.

در هر دو طرف نامساوی اعداد مثبت قرار دارند. بنابراین می‌توانیم طرفین آن‌را مجذور کنیم. خواهیم داشت:

$$x+T\ge 4\pi^2+4\pi\sqrt{x}+x$$

$$\Rightarrow T\ge 4\pi^2+4\pi\sqrt{x}$$

که این تناقض است. زیرا $\sqrt{x}$ را می‌توان طوری انتخاب کرد که هرچه بیشتر بزرگ باشد؛ یعنی به ازای مقدار ثابت T نامساوی اخیر نمی‌تواند برقرار باشد.

پی‌نوشت

* منظور از {x} جزء اعشاری x، یعنی $x-[x]$ است که [x] جزءصحیح x است. مثلاً: $\{1/2\}=0/2$ و $\{-2/7\}=0/3$. توجه دارید که: $[x]\in Z$ و $\{x\}\ge 0$.

منبع

مجلهٔ ریاضیات در مدرسه، شمارهٔ ۱۱، سال ۲۰۰۲، چاپ مسکو.