هوشنگ شرقی

المپیاد ریاضی در رومانی

کلیدواژه‌ها: رومانی، المپیاد ریاضی، تابع یک‌به‌یک، پنج‌ضلعی محدب، نقطهٔ شبکه‌ای

اگر چنان که قبلاً گفته‌ایم، مجارستان را می‌توان بنیان‌گذار المپیاد ریاضی دانست، بدون تردید رومانی را می‌توان مهد المپیادهای ریاضی و پایه‌گذار المپیاد بین‌المللی ریاضی دانست. چرا که این کشور از نخستین کشورهای پیشنهاددهندهٔ این رقابت‌ها و میزبان دو دورهٔ نخست آن بوده است. در طول سال‌های برگزاری این مسابقات، رومانی پنج دوره در سال‌های ۱۹۵۹ (نخستین دوره)، ۱۹۶۰، ۱۹۶۹، ۱۹۷۸، ۱۹۹۹ میزبان بوده و در پنج دوره نیز در سال‌های ۱۹۵۹، ۱۹۷۸، ۱۹۸۵، ۱۹۸۷ و ۱۹۹۶ مقام نخست این رقابت‌ها را به‌دست آورد. در سال‌های دیگر نیز بارها به مقام‌های بالای این مسابقات جهانی دست یافته است.

در رومانی نیز، مانند مجارستان، از سال‌های پایانی قرن نوزدهم مسابقات ریاضی دبیرستانی آغاز شد. از سال ۱۹۰۲ این مسابقات توسط مجلهٔ معتبر ریاضی «Gazeta Matematica» برگزار می‌شد.

تا سال ۱۹۴۸ مسابقات در دو مرحله انجام می‌شدند. از سال ۱۹۶۱، کار برگزاری المپیادها به‌عهدهٔ وزارت آموزش‌وپروش قرار گرفت که تا امروز هم ادامه دارد. در حال حاضر المپیاد ریاضی رومانی در سه مرحله انجام می‌گیرد و مسائل المپیاد در مجلهٔ مزبور چاپ می‌شوند.

در کشور رومانی گروه‌های متعددی دست‌اندرکار برگزاری مسابقه‌های ریاضی هستند و دانشجویان و استادان بسیاری در این زمینه به شدت فعال‌اند که از میان آن‌ها استادان نام‌آوری نیز ظهور کرده‌اند که از جملهٔ معروف‌ترین آن‌ها می‌توان از تیتو آندرسکو نام برد که سال‌ها مدیریت تیم‌های المپیاد ریاضی رومانی را به‌عهده داشت. وی پس از اخذ تابعیت جدید، مدیریت و هدایت تیم المپیاد ریاضی کشور آمریکا را به‌عهده گرفت و هنوز هم در این زمینه فعال است.

در میان مسائلی که در المپیادهای داخلی کشور رومانی طی سال‌های متمادی طرح شده‌اند، مسائل بسیار خوب و بسیار دشواری را می‌توان یافت. در این‌جا منتخبی از مسائل چند سال متفاوت را آورده‌ایم و سعی کرده‌ایم نمونه‌هایی را انتخاب کنیم که سطح متوسطی داشته و برای عموم دانش‌آموزان قابل فهم و استفاده باشند. راه‌حل‌ها در پی آمده‌اند.

صورت مسائل

۱. ثابت کنید، عددهای مثبت و گنگ a و b به‌گونه‌ای وجود دارند که به ازای آن‌ها، a^b عددی طبیعی باشد (۱۹۷۵).

۲. ثابت کنید برای هر تقسیمی که مجموعهٔ $x = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ را به دو زیرمجموعهٔ جدا از هم افراز کند، دست کم یکی از زیرمجموعه‌های حاصل شامل سه عدد است که مجموع دو تا از آن‌ها، با دو برابر سومی برابر است (۱۹۷۸).

۳. جواب‌های درست این معادله را پیدا کنید (۱۹۸۱):

$$x^6 + 3x^2 + 1 = y^4$$

۴. آیا تابع یک‌به‌یک $f : R \to R$ وجود دارد که در مورد آن برای هر مقدار $x \in R$ داشته باشیم: $f(x^2) - [f(x)]^2 \geq \frac{1}{4}$

۵. رأس‌های یک پنج ضلعی محدّب، مختصاتی صحیح دارند. ثابت کنید مساحت این پنج ضلعی حداقل مساوی $\frac{5}{2}$ است (۱۹۹۸).

۶. فرض کنید AD نیم‌ساز مثلث ABC باشد. M و N به ترتیب دو نقطه روی AB و AC هستند، به‌طوری که داریم: $M\hat{D}A = A\hat{B}C$ و $N\hat{D}A = B\hat{C}A$. خطوط AD و MN نیز در P متقاطع‌اند. ثابت کنید: $AD^3 = AB.AC.AP$ (۱۹۹۹).

حل مسائل

۱. می‌توانیم دو عدد مثبت $\sqrt{2}$ و $\log_{\sqrt{2}}^{3}$ را در نظر بگیریم. با توجه به رابطهٔ $a^{\log_a^x}=x$ داریم:

$$(\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}}^{3}}=3\in N$$

می‌دانیم که $\sqrt{2}$ گنگ است و $\log_{\sqrt{2}}^{3}$ نیز گنگ است، زیرا در غیر این صورت عددهای صحیح و مثبت m و n یافت می‌شوند که:

$$\log_{\sqrt{2}}^{3}=\frac{m}{n}, n\neq 0$$

و در این صورت داریم:

$$(\sqrt{2})^{\frac{m}{n}}=3\Rightarrow(\sqrt{2})^{\frac{2m}{n}}=9\Rightarrow((\sqrt{2})^{2})^{\frac{m}{n}}=9$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{m}{n}}=9\Rightarrow 2^{m}=9^{n}$$

که این تساوی غیرممکن است. (چرا؟)

می‌توانستیم عددهای گنگ $2^{\sqrt{2}}$ و $\sqrt{2}$ را نیز در نظر بگیریم: $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=4$ ولی اثبات گنگ بودن $2^{\sqrt{2}}$ کار ساده‌ای نیست!

۲. فرض می‌کنیم: $X=A\cup B$ و $5\in A$. با برهان خلف درستی حکم را نشان می‌دهیم:

فرض می‌کنیم هیچ یک از دو مجموعهٔ A و B شامل هیچ سه عددی نباشند که مجموع دو تا از عددها مساوی دو برابر سومی باشد. اگر $3\in A$ باشد، آن‌گاه با توجه به شرط فوق داریم: $1\notin A\,(2\times 3=1+5)$، $4\notin A\,(2\times 4=5+3)$ و $7\notin A\,(2\times 5=7+3)$. پس: $1\in B$، $4\in B$ و $7\in B$. ولی در این صورت داریم: $2\times4=7+1$ و شرط فوق نقض می‌شود. پس لازم است که: $3\notin A$ و در نتیجه: $3\in B$. اما اگر: $7\in A$، آن‌گاه: $6\notin A\,(2\times 6=7+5)$، $3\notin A\,(2\times 5=7+3)$ و $9\notin A\,(2\times 7=9+5)$، پس: $3,6,9\in B$. ولی در این صورت $2\times6=9+3$ و تناقض ایجاد می‌شود. پس لازم است که: $7\in B$.

همچنین یکی از دو عدد ۴ و ۶ نیز باید در B باشند، زیرا ۴، ۵ و ۶ نمی‌توانند با هم عضو A باشند ($2\times5=6+4$). فرض کنید: $4\in B$، در این صورت نتیجه می‌شود: $2\notin B$ (زیرا در غیر این صورت $2,3,4\in B$، $2\times 3=2+4$). لذا: $2\in A$ و از آنجا: $8\notin A$ (زیرا در غیر این صورت: $2,5,8\in A$، $2\times 5=2+8$). و نیز: $8\in B$ و از آنجا: $6\notin B$ (زیرا در غیر این صورت $4,6,8\in B$، $2\times 6=4+8$). در نتیجه: $6\in A$ و در ضمن: $9\notin B$ (زیرا در غیر این صورت $7,8,9\in B$، $2\times 8=7+9$). پس داریم: $9\in A$.

حال اگر $1\in A$ باشد، آن‌گاه: $1,5,9\in A$، $2\times 5=1+9$ و اگر $1\in B$ باشد، آن‌گاه: $1,4,7\in B$، $2\times 4=1+7$. یعنی در هر حال یکی از دو زیرمجموعهٔ A یا B دارای یک سه‌تایی به صورت فوق هستند. در حالت دیگر هم، با شرط $6\in B$ به همین نتیجه می‌رسیم.

۳. فرض کنیم عددهای صحیح x و y در برابری فوق صدق کنند. در این صورت اگر $x>0$، با توجه به اتحادهای $(x^3+2)^2=x^6+4x^3+4$ و $(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1$ داریم:

$$(x^3+1)^2<y^4=x^6+3x^3+1<(x^3+2)^2$$

$$\Rightarrow x^3+1<y^2<x^3+2\Rightarrow y^2\notin Z\Rightarrow y\notin Z$$

همچنین، اگر $x\leq -2$ باشد، آن‌گاه: $x^3+3<0$ و در نتیجه:

$$x^6+4x^3+4<x^6+3x^3+1$$

$$\Rightarrow (x^3+2)^2<y^4<(x^3+1)^2$$

$$\Rightarrow |x^3+2|<y^2<|x^3+1|$$

$$\Rightarrow -(x^3+2)<y^2<-(x^3+1)$$

و باز هم $y^2\notin Z$ و در نتیجه: $y\notin Z$.

پس فقط به ازای $-2<x\leq 0$ ممکن است معادله جواب داشته باشد. به ازای $x=-1$ نتیجه می‌شود: $y^4=-1$ که جوابی ندارد و به ازای $x=0$ نتیجه می‌شود: $y=\pm1$. بنابراین معادله فقط دو دسته جواب دارد: $(0,1)$ و $(0,-1)$.

۴. اگر چنین تابعی وجود داشته باشد، با قرار دادن $x=0$ و $x=1$ در نابرابری فوق نتیجه می‌شود:

$$x=0\Rightarrow f(0)-[f(0)]^2\geq\frac{1}{4}\Rightarrow[f(0)]^2-f(0)+\frac{1}{4}\leq 0$$

$$\Rightarrow (f(0)-\frac{1}{2})^2\leq 0\Rightarrow f(0)-\frac{1}{2}=0\Rightarrow f(0)=\frac{1}{2}$$

$$x=1\Rightarrow f(1)-[f(1)]^2\geq\frac{1}{4}\Rightarrow(f(1))^2-f(1)+\frac{1}{4}\leq 0$$

$$\Rightarrow (f(1)-\frac{1}{2})^2\leq 0\Rightarrow f(1)-\frac{1}{2}=0\Rightarrow f(1)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(0)=f(1)=\frac{1}{2}$$

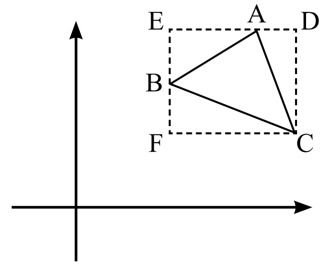
پس f یک‌به‌یک نخواهد بود و لذا چنین تابعی وجود ندارد.

۵. یک قضیهٔ شناخته شده در ترکیبیات می‌گوید که اگر پنج نقطهٔ شبکه‌ای (نقطهٔ با مختصات صحیح) داشته باشیم، وسط پاره‌خط و اصل بین دو تا از این نقاط، یک نقطهٔ شبکه‌ای خواهد بود. اثبات به کمک اصل لانهٔ کبوتری صورت می‌گیرد. مختصات هر نقطهٔ شبکه‌ای از نظر زوج و فرد بودن چهار حالت دارد: (فرد و فرد)، (زوج و فرد)، (فرد و زوج) و (زوج و زوج).

پس وقتی پنج نقطه داشته باشیم، لااقل دوتای آن‌ها از نظر زوج و فرد بودن مختصاتی شبیه هم دارند. یعنی مجموع طول‌های آن‌ها و مجموع عرض‌های آن‌ها عددی زوج است و در نتیجه وسط این دو نقطه، مختصاتی صحیح دارد، زیرا: $x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$ و $y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$ لذا در پنج ضلعی فوق وسط یکی از اضلاع یا اقطار نقطه‌ای با مختصات صحیح چون M است.

همچنین قضیه‌ای دیگر می‌گوید که مساحت هر مثلثی که سه رأس آن سه نقطهٔ شبکه‌ای باشند، مساوی $\frac{m}{۲}$ است که: $m \in N$.

زیرا مطابق شکل زیر داریم:



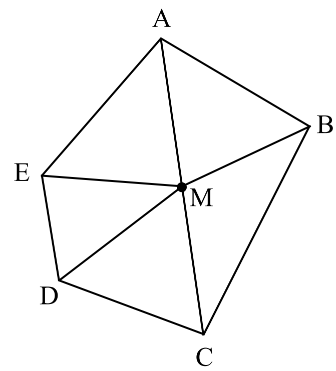
(DE، CD، CF و EF را موازی محورها رسم کرده‌ایم.)

$$S_{ABC}=S_{DCFE}-S_{ACD}-S_{BFC}-S_{ABE}$$
$$=DE.DC-\frac{AD.CD}{۲}-\frac{BF.FC}{۲}-\frac{AE.BE}{۲}$$
$$=\frac{۲DE.DC-AD.CD-BF.FC-AE.BE}{۲}=\frac{m}{۲}$$

ولی بدیهی است که $m\in Z$ (چرا؟) و در نتیجه درستی این قضیه هم ثابت می‌شود.

حال به مسئلهٔ اصلی برمی‌گردیم: اگر M وسط یکی از قطرهای پنج ضلعی ABCDE باشد، پس M درون پنج ضلعی است و در نتیجه:

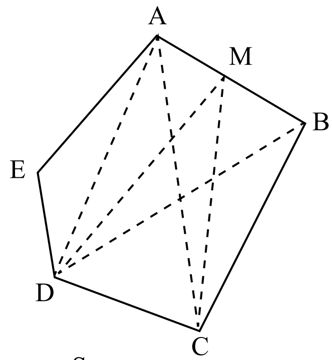
$$S_{ABCDE}=S_{AMB}+S_{BMC}+S_{MCD}+S_{MDE}+S_{AME}$$



ولی رئوس همهٔ این پنج مثلث نقاطی با مختصات صحیح‌اند، پس مساحت‌های آن‌ها به صورت $\frac{m}{۲}$ و لااقل مساوی $\frac{۱}{۲}$ است و در نتیجه: $S_{ABCDE}\ge ۵\times\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$

اما اگر M وسط یکی از اضلاع (مثلاً AB) باشد، از M به دو سر یکی از اضلاع پنج ضلعی که موازی AB نباشد (مثلاً CD) وصل می‌کنیم. A و B را نیز به C و D وصل می‌کنیم.

مثلث‌های ADC، MDC و BDC در قاعدهٔ CD مشترک‌اند و چون: $AB\nparallel CD$، پس مساحت‌های هیچ دوتای آن‌ها با هم برابر نیست و به صورت صعودی مثلاً به ترتیب زیر قابل مرتب کردن هستند:



$$S_{ACD}>S_{MCD}>S_{BCD}$$

و چون هر سه مساحت به صورت $\frac{m}{۲}$ هستند، پس:

$$S_{BCD}\ge\frac{۱}{۲}\Rightarrow S_{MCD}\ge\frac{۲}{۲},S_{ACD}\ge\frac{۳}{۲}$$

و بنابراین داریم:

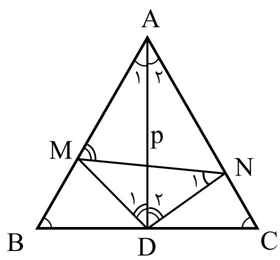
$$S_{ABCDE}=S_{ACD}+S_{AED}+S_{ABC}\ge\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

---

۶. مطابق شکل داریم: $\hat{D}_۱=\hat{B}$ و $\hat{D}_۲=\hat{C}$ و در نتیجه:

$$\hat{D}_۱+\hat{D}_۲=\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰-\hat{A}\Rightarrow\hat{A}+M\hat{D}N=۱۸۰^\circ$$

لذا چهارضلعی AMDN محاطی است و از آنجا:



$$\hat{M}=\hat{D}_۲,\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\Rightarrow\Delta AMP\sim\Delta ADN$$
$$\Rightarrow\frac{DN}{MP}=\frac{AD}{AM}=\frac{AN}{AP}\Rightarrow AM.AN=AP.AD(۱)$$

همچنین داریم:

$$\hat{D}_۲=\hat{C},\hat{A}_۲=\hat{A}_۲\Rightarrow\Delta ADN\sim\Delta ADC$$
$$\Rightarrow\frac{AN}{AD}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow AD^۲=AN.AC$$
$$\hat{D}_۱=\hat{B},\hat{A}_۱=\hat{A}_۱\Rightarrow\Delta ADM\sim\Delta ADB$$
$$\Rightarrow\frac{AM}{AD}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow AD^۲=AM.AB$$
$$\Rightarrow AD^۴=AM.AN.AB.AC(۲)$$

و با جای‌گذاری از رابطهٔ (۱) در رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود:

$$AD^۴=AP.AD.AB.AC\Rightarrow AD^۳=AP.AB.AC$$