آموزشی

احمد قندهاری

نامساوی‌ها

خواص نامساوی‌ها

کلیدواژه‌ها: نامساوی‌ها، خواص نامساوی‌ها

۱. به طرفین یک نامساوی می‌توان عددی اضافه کرد یا از آن عددی کم کرد:

$$a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$$

۲. طرفین نامساوی را می‌توان در عدد مثبتی ضرب یا بر عدد مثبتی تقسیم کرد:

$$\begin{cases} a > b \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} am > bm \\ \dfrac{a}{m} > \dfrac{b}{m} \end{cases}$$

۳. اگر طرفین یک نامساوی را در عدد منفی ضرب یا بر عدد منفی تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$\begin{cases} a > b \\ k < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ak < bk \\ \dfrac{a}{k} < \dfrac{b}{k} \end{cases}$$

۴. طرفین یک نامساوی را می‌توان به توان عدد فرد رساند:

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} a^3 > b^3 \\ a^5 > b^5 \quad \text{یا} \quad a^{2n-1} > b^{2n-1} \qquad n \in N \\ a^7 > b^7 \end{cases}$$

۵. از طرفین یک نامساوی می‌توان ریشهٔ فرد گرفت:

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b} \\ \sqrt[5]{a} > \sqrt[5]{b} \quad \text{یا} \quad \sqrt[2n-1]{a} > \sqrt[2n-1]{b} \qquad n \in N \\ \sqrt[7]{a} > \sqrt[7]{b} \end{cases}$$

۶. اگر طرفین نامساوی مثبت باشند، می‌توان آن را به توان عدد زوج رساند:

$$a > b > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 > b^2 \\ a^4 > b^4 \quad \text{یا} \quad a^{2n} > b^{2n} \qquad n \in N \\ a^6 > b^6 \end{cases}$$

۷. اگر از طرفین یک نامساوی ریشهٔ زوج بگیریم، باید آن‌ها را در قدرمطلق قرار دهیم:

$$\begin{cases} a^2 > b^2 \\ a^4 > b^4 \quad \text{یا} \quad a^{2n} > b^{2n} \Rightarrow |a| > |b| \qquad n \in N \\ a^6 > b^6 \end{cases}$$

۸. اگر طرفین نامساوی مثبت باشند، می‌توان از دو طرف ریشهٔ زوج گرفت:

$$a > b > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} > \sqrt{b} \\ \sqrt[4]{a} > \sqrt[4]{b} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \sqrt[2n]{a} > \sqrt[2n]{b} \qquad n \in N$$

۹. اگر طرفین نامساوی هم علامت باشند، چنانچه آن‌ها را معکوس کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود. چنانچه طرفین نامساوی مختلف‌العلامه باشند، اگر آن‌ها را معکوس کنیم جهت تغییر نمی‌کند:

$$\begin{cases} a > b > 0 \\ 0 > a > b \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$a > 0,\ b < 0,\ a > b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

۱۰. دو نامساوی هم جهت را فقط و فقط می‌توان نظیر به‌نظیر با هم جمع کرد:

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$$

۱۱. اگر طرفین دو نامساوی هم جهت مثبت باشد، می‌توان آن‌ها را نظیر به نظیر درهم ضرب کرد.

$$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$$

نکات نامساوی‌ها

۱. اگر $0 < a < 1$، آن‌گاه اگر a را به توان اعداد بزرگ‌تر از یک برسانیم، کوچک‌تر می‌شود. چنانچه از آن ریشه بگیریم بزرگ‌تر می‌شود.

$$\boxed{0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a > a^2 > a^3 \ldots \\ a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} \ldots \end{cases}}$$

مثال:

اگر $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin x < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x > \sin^2 x > \sin^3 x \ldots \\ \sin x < \sqrt{\sin x} < \sqrt[3]{\sin x} \ldots \end{cases}$$

۲. هر عـدد مثبت به اضافهٔ عکس آن بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

$$\boxed{a>0 \Rightarrow a+\frac{1}{a}\ge 2}$$

اثبات:

فـرض می‌کنیم نامسـاوی $a>0\Rightarrow a+\frac{1}{a}\ge 2$ همواره درست باشد. دو طرف نامساوی را در $a>0$ ضرب می‌کنیم:

$$a^2+1\ge 2a \Rightarrow a^2-2a+1\ge 0\Rightarrow (a-1)^2\ge 0$$

چون نامسـاوی $(a-1)^2\ge 0$ همواره درسـت است، پس فرض ما هم درست بوده است.

۳. هر عدد منفی به اضافهٔ عکس آن کوچک‌تر یا مسـاوی ۲- است.

$$\boxed{a<0 \Rightarrow a+\frac{1}{a}\le -2}$$

اثبات:

فرض می‌کنیم نامسـاوی $a<0\Rightarrow a+\frac{1}{a}\le -2$ همواره درست باشد. دو طرف نامساوی را در $a<0$ ضرب می‌کنیم:

$$a^2+1\ge -2a \Rightarrow a^2+2a+1\ge 1\Rightarrow (a+1)^2\ge 0$$

چون نامسـاوی $(a+1)^2\ge 0$ همواره درسـت است، پس فرض ما هم درست بوده است.

۴. اگر a و b دو عدد هم علامت باشند داریم:

$$\boxed{(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\ge 4}$$

اثبات:

$$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1=2+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})$$

چـون a و b هم علامت‌انـد، پس $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ عکس یکدیگر و نامنفی‌اند. بنا به نکتهٔ (۲): $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$. پس: $2+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})\ge 4$.

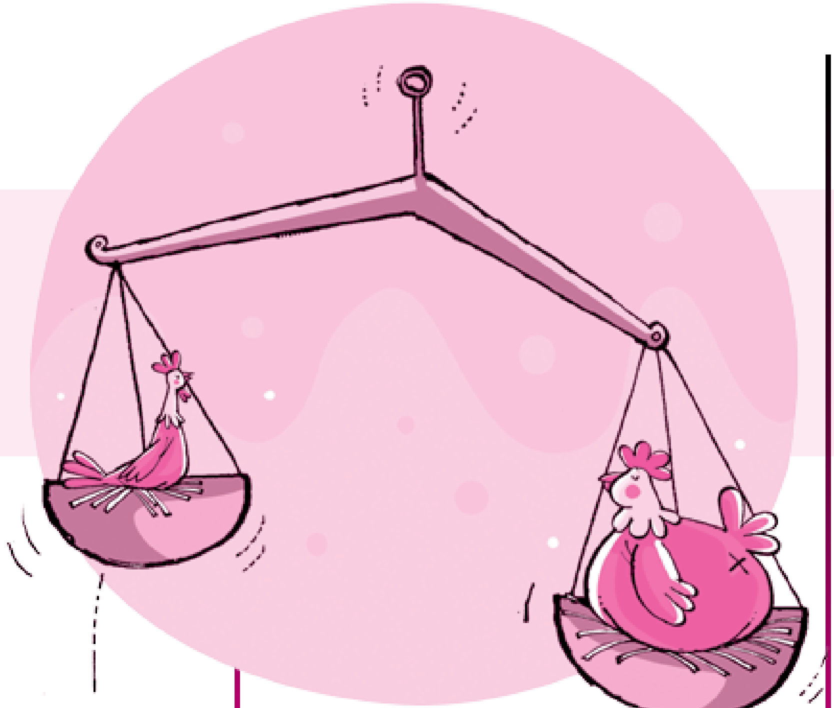
در نتیجه: $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\ge 4$.

۵. اگر a و b مختلف‌العلامه باشند، داریم:

$$\boxed{(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\le 0}$$

اثبات:

$$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1=2+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})$$



چـون a و b مختلف‌العلامه‌انـد، پـس: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\le -2$. بنابراین:

$$2+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})\le 0\Rightarrow (a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\le 0$$

۶. اگر $a,b\ne 0$، آن‌گاه داریم:

$$\boxed{(a^2+b^2)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\ge 4}$$

اثبات:

$$(a^2+b^2)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})=1+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+1=2+(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2})$$

$\frac{a^2}{b^2}$ و $\frac{b^2}{a^2}$ مثبـت و عکس یکدیگرنـد، پس: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\ge 2$. بنابراین:

$$2+(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2})\ge 4\Rightarrow (a^2+b^2)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\ge 4$$

۷. اگر: $a,b,c\ne 0$، داریم:

$$\boxed{(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\ge 9}$$

اثبات:

$$(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$$

$$=1+\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{a^2}+1+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+1$$

$$=3+(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2})+(\frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2})+(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2})$$

هر یک از سه پرانتز بالا بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است. پس جمع آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی ۶ می‌شود. در نتیجه:

$$3+(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2})+(\frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2})+(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2})\ge 9$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\ge 9$$

۸. همواره داریم:

$$\boxed{a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac}$$

اثبات:

می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}(a-b)^2\ge 0\\(b-c)^2\ge 0\\(c-a)^2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2-2ab\ge 0\\b^2+c^2-2bc\ge 0\\c^2+a^2-2ac\ge 0\end{cases}$$

سه نامساوی را نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم:

$$\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac\ge 0$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac>0$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc$$

۹. اگر: $a,b,c>0$، آنگاه همواره داریم:

$$\boxed{(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc}$$

اثبات:

$$\begin{cases}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0\\(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2\ge 0\\(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b-2\sqrt{ab}\ge 0\\b+c-2\sqrt{bc}\ge 0\\c+a-2\sqrt{ac}\ge 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b\ge 2\sqrt{ab}\\b+c\ge 2\sqrt{bc}\\c+a\ge 2\sqrt{ac}\end{cases}$$

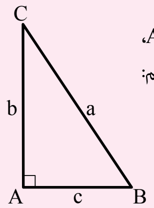
این سه نامساوی هم‌جهت مثبت را نظیر به نظیر درهم ضرب می‌کنیم:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8\sqrt{a^2b^2c^2}$$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$$

۱۰. همواره داریم: $\boxed{a^2\pm ab+b^2\ge 0}$ زیرا: $2a^2\pm 2ab+2b^2\ge 0$ در نتیجه: $(a^2+b^2)+(a\pm b)^2\ge 0$ که همواره برقرار است.

مسئلهٔ ۱. ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $A=90^\circ$ به وتر a و اضلاع b و c همواره داریم: $a^3>b^3+c^3$.



حل:

$$\begin{cases}a>b\\a>c\end{cases}$$

دو طرف را در $b^2>0$ ضرب می‌کنیم.
دو طرف را در $c^2>0$ ضرب می‌کنیم.

$$\Rightarrow\begin{cases}ab^2>b^3\\ac^2>c^3\end{cases}$$

اکنون دو نامساوی را نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم:

$$ab^2+ac^2>b^3+c^3\Rightarrow a(\underbrace{b^2+c^2}_{a^2})\ge b^3+c^3$$

$$\Rightarrow a(a^2)>b^3+c^3\Rightarrow a^3>b^3+c^3$$

مسئلهٔ ۲. ثابت کنید: $(\frac{a+b}{2})^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$.

اثبات: فرض می‌کنیم نامساوی بالا همواره درست باشد، پس:

$$\frac{a^2+b^2+2ab}{4}\le\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+2ab\le 2a^2+2b^2$$

$$\Rightarrow 0<a^2+b^2-2ab\Rightarrow 0\le(a-b)^2$$

نامساوی $(a-b)^2\ge 0$ همواره درست است، پس نامساوی بالا هم همواره درست است.

مسئلهٔ ۳. ثابت کنید: $\frac{a^3+b^3}{2}\ge(\frac{a+b}{2})^3$، $a,b>0$.

اثبات: فرض می‌کنیم نامساوی بالا همواره درست باشد. آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\frac{a^3+b^3}{2}\ge\frac{(a+b)^3}{8}\Rightarrow 4(a^3+b^3)\ge(a+b)^3$$

$$\Rightarrow 4a^3+4b^3\ge a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$\Rightarrow 3a^3+3b^3\ge 3ab(a+b)$$

$$\Rightarrow a^3+b^3\ge ab(a+b)$$

$$\Rightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)\ge ab(a+b)$$

(a+b مثبت است.)

$$\Rightarrow a^2-ab+b^2\ge ab$$

$$\Rightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0\Rightarrow(a-b)^2\ge 0$$

این نامساوی همواره درست است، پس نامساوی مسئله همواره درست است.

مسئلهٔ ۴. اولاً نشان دهید: اگر $a,b>0$، آن‌گاه $a+b\ge 2\sqrt{ab}$.
ثانیاً اگر $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ مثبت و $x_1.x_2.x_3...x_n=1$، ثابت کنید: $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)...(1+x_n)\ge 2^n$.

اثبات: اولاً داریم:

$$a,b>0:(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$$

$$\Rightarrow a+b-2\sqrt{ab}\ge 0\Rightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab}$$

ثانیاً، با توجه به نابرابری اولاً، می‌توان نوشت:

$$1+x_1\ge 2\sqrt{x_1},1+x_2\ge 2\sqrt{x_2},...,1+x_n\ge 2\sqrt{x_n}$$

$$\Rightarrow(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)\ge 2^n\sqrt{\underbrace{x_1x_2...x_n}_{1}}$$

$$\Rightarrow(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)\ge 2^n$$